INFORME TECNICO INTERNO

N°. 82

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 82

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2003 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 82

Número de epimorfismos entre álgebras de Lukasiewicz finitas

Luiz F. Monteiro

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2003

Número de epimorfimos entre álgebras de Łukasiewicz finitas

Luiz F. Monteiro

INMABB - CONICET -UNS

2.003

Índice General

Resumen

Vamos a indicar como se construyen todos los epimorfismos entre álgebras de Łukasiewicz finitas y a determinar su número.

1 Introducción

1.1 Algebras de Łukasiewicz

La noción de álgebra de Łukasiewicz trivalente, [5] fue introducida y su teoría desarrollada por Gr. Moisil [6], [8], [9]. De acuerdo con los resultados de A. Monteiro [10], [11] y L. Monteiro [12] estas álgebras se pueden definir del siguiente modo:

Definición 1.1 *Un álgebra de Lukasiewicz trivalente es un sistema* $(L, 1, \sim, \nabla, \vee, \wedge)$ *formado por 1) un conjunto no vacío* L*; 2) un elemento* $1 \in L$*; 3) dos operaciones unarias* $\sim$ *y* ∇ *definidas sobre* L*; 4) dos operaciones binarias* $\vee$ *y* $\wedge$*, definidas sobre* L *de modo que se verifiquen las siguientes condiciones:*

L1) $x \wedge (x \vee y) = x$, *cualesquiera que sean* $x, y \in L$.

L2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$, *cualesquiera que sean* $x, y, z \in L$.

L3) $\sim\sim x = x$, *cualquiera que sea* $x \in L$,

L4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$, *cualesquiera que sean* $x, y \in L$,

L5) $\sim x \vee \nabla x = 1$, *cualquiera que sea* $x \in L$.

L6) $\sim x \wedge x = \sim x \wedge \nabla x$, *cualquiera que sea* $x \in L$,

L7) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$, *cualesquiera que sean* $x, y \in L$.

Tambien diremos que L *es un álgebra de Lukasiewicz.*

Pongamos por definición $\Delta x = \sim \nabla \sim x$. Es bien conocido que $B(L) = \{x \in L : \nabla x = x\} = \{x \in L : \Delta x = x\}$ es un álgebra de Boole. Gr. Moisil [6, 7] probó que en las álgebras de Lukasiewicz verifican el denominado *principio de determinación*: Si $\nabla x = \nabla y$ y $\Delta x = \Delta y$ entonces $x = y$, (ver también [14]).

1.2 Algebras de Łukasiewicz con eje

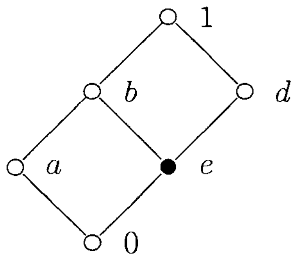
Un elemento e de un álgebra de Łukasiewicz L se dice un eje de L ([7], pág.88) si:

E1) $\Delta e = 0$,

E2) $\nabla x \leq \Delta x \vee \nabla e$, para todo $x \in L$.

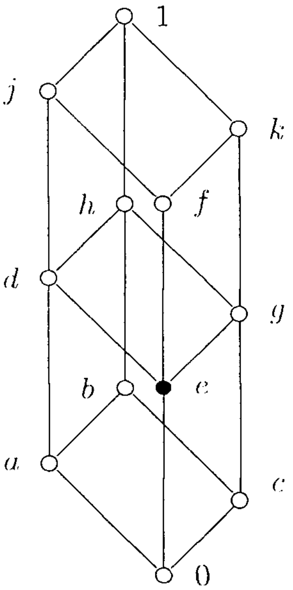
Observemos que la condición E2 es equivalente, [15], a cualquiera de las dos condiciones siguientes E3) $\nabla x = \nabla x \wedge (\Delta x \vee \nabla e)$, E4) $\nabla x \vee \nabla e = \Delta x \vee \nabla e$. Es bien conocido que $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$, cualquiera que sea $x \in L$ y que si L tiene eje él es único.

Ejemplo 1.1 *Consideremos el reticulado distributivo A cuyo diagrama de Hasse se indica y en el cual se definen los operadores $\sim, \nabla, \Delta$ por medio de la tabla siguiente:*



x	$\sim x$	∇x	Δx	$\Delta x \vee \nabla e$
0	1	0	0	d
a	d	a	a	1
b	e	1	a	1
d	a	d	d	d
e	b	d	0	d
1	0	1	1	1

Ejemplo 1.2 *Consideremos el reticulado distributivo A cuyo diagrama de Hasse se indica y en el cual se definen los operadores $\sim, \nabla, \Delta$ por medio de la tabla siguiente*



x	$\sim x$	∇x	Δx	$\Delta x \vee \nabla e$
0	1	0	0	h
a	j	a	a	i
b	i	b	b	j
c	h	c	c	1
d	g	i	a	i
e	f	h	0	h
f	e	1	c	1
g	d	j	b	j
h	c	h	h	h
i	b	i	i	i
j	a	j	j	j
1	0	1	1	1

Si B y B' son álgebras de Boole, notaremos con $Hom(B, B')$ ($Epi(B, B')$) el conjunto de todos los homomorfismos (epimorfismos) de B en B'.
Notaremos con B_n un álgebra de Boole con n átomos, donde $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.
Si $b \in B_m$ y $b' \in B_n$ sea $Epi^{(b,b')}(B_m, B_n) = \{h \in Epi(B_m, B_n) : h(b) = b'\}$.
Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz, notaremos con $Epi(L, L')$ el conjunto de todos los epimorfismos de L en L'.

Lema 1.1 *Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz con ejes e y e' respectivamente y $H \in Epi(L, L')$ entonces $H(e) = e'$. Si $h = H_{|B(L)}$ entonces $h \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$.*

Dem. (1) $\Delta H(e) = H(\Delta e) = H(0) = 0'$.
Sea $y \in L'$, luego como H es suryectiva existe $x \in L$ tal que $H(x) = y$, luego (2) $\nabla y = \nabla H(x) = H(\nabla x) \leq H(\Delta x \vee \nabla e) = H(\Delta x) \vee H(\nabla e) = \Delta H(x) \vee \nabla H(e) = \Delta y \vee \nabla H(e)$.
De (1) y (2) resulta que $H(e)$ es eje de L' y como el eje es único $H(e) = e'$.
Además $h(\nabla e) = H(\nabla e) = \nabla H(e) = \nabla e'$. ■

1.3 Algebras de Łukasiewicz con centro

Un elemento c de un álgebra de Łukasiewicz L se dice un centro de L, si $\sim c = c$ (Moisil, [6]). Este concepto coincide con el de álgebras de Post, de orden 3.

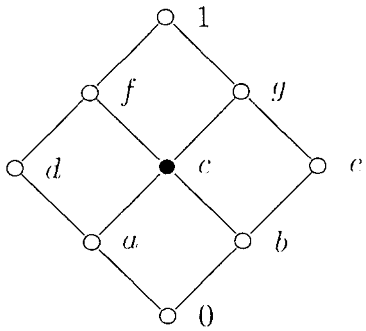
Lema 1.2 *Para que un elemento c de un álgebra de Łukasiewicz L sea un centro de L es necesario y suficiente que $\Delta c = 0$ y $\nabla c = 1$.*

Claramente todo centro es un eje, luego si un álgebra de Łukasiewicz L tiene centro él es único.

Ejemplo 1.3 *Sea $\mathbf{T} = \{0, c, 1\}$ un conjunto ordenado donde $0 < c < 1$, luego como $\mathbf{T}$ es una cadena finita, $\mathbf{T}$ es un reticulado distributivo acotado. Definamos las operaciones $\sim, \nabla, \Delta$ por las tablas adjuntas*

x	$\sim x$	∇x	Δx
0	1	0	0
c	c	1	0
1	0	1	1

Ejemplo 1.4 *Consideremos el reticulado distributivo L cuyo diagrama de Hasse se indica y en el cual se definen los operadores $\sim, \nabla, \Delta$ por medio de la tabla siguiente:*



x	$\sim x$	∇x	Δx
0	1	0	0
a	g	d	0
b	f	e	0
c	c	1	0
d	e	d	d
e	d	e	e
f	b	1	d
g	a	1	e
1	0	1	1

2 Imágenes homomórficas

2.1 Imágenes homomórficas de un álgebra de Boole finita

Notaremos con $\mathcal{A}(B_n)$ el conjunto de los átomos de B_n y si $b \in B_n \setminus \{0\}$ notaremos $\mathcal{A}(b) = \{a \in \mathcal{A}(B_n) : a \leq b\}$.
Dadas B_m y B_n, si $m < n$ entonces $Epi(B_m, B_n) = \emptyset$.

Es bien conocido que si $f : \mathcal{A}(B_n) \to \mathcal{A}(B_m)$ entonces la función $h_f : B_m \to B_n$ definida por

$$h_f(x) = \bigvee \{a \in \mathcal{A}(B_n) : f(a) \leq x\},$$

verifica:

(A1) $h_f \in Hom(B_m, B_n)$,

(A2) Si $a \in \mathcal{A}(B_m)$ entonces $h_f(a) = 0$ si y solo si $a \notin f(\mathcal{A}(B_n))$,

(A3) h_f es suryectivo si y solo si f es inyectiva, [19, 20],

(A4) h_f es inyectivo si y solo si f es suryectiva [19, 20].

Si $h \in Epi(B_m, B_n)$ entonces dado $b \in \mathcal{A}(B_n)$ sabemos que $[b)$ es un ultrafiltro de B_n y que $h^{-1}([b))$ es un ultrafiltro de B_m luego $h^{-1}([b)) = [a)$ con $a \in \mathcal{A}(B_m)$. Además $Nuc(h) \subseteq [a)$. Sea $f : \mathcal{A}(B_n) \to \mathcal{A}(B_m)$ definida por $f(a) = b$, entonces f es inyectiva y $h_f = h$.
Además existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $FI(\mathcal{A}(B_n), \mathcal{A}(B_m))$ de todas las funciones inyectivas de $\mathcal{A}(B_n)$ en $\mathcal{A}(B_m)$ y el conjunto $Epi(B_m, B_n)$. Para ello basta considerar la función $\Phi(f) = h_f$.
Si X es un conjunto finito notaremos con $N[X]$ su número de elementos.
Pongamos por definición

$$V_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}, & \text{si } m \geq n \\ 0, & \text{si } m < n. \end{cases}$$

Entonces:

$$N[Epi(B_m, B_n)] = V_{m,n}.$$

Lema 2.1 *Sea $h \in Epi(B_m, B_n)$ donde $m \geq n \geq 1$ entonces*

(A5) *Si $a \in \mathcal{A}(B_m)$, entonces $h(a) = 0$ ó $h(a) \in \mathcal{A}(B_n)$,*

(A6) *Si $b \in \mathcal{A}(B_n)$, entonces existe un único $a \in \mathcal{A}(B_m)$, tal que $h(a) = b$,*

(A7) *Si h es inyectivo entonces $h(a) \in \mathcal{A}(B_n)$, cualquiera que sea $a \in \mathcal{A}(B_m)$.*

El item (A6) del lema precedente fué demostrado por M. Abad y L. Monteiro en [2], y los items (A5) y (A7) por los mismos autores en [3]. Una demostración diferente fué indicada por L. Monteiro y A. Kremer en [18].

Otra forma de demostrar lo anterior es la siguiente. Sean $m \geq n \geq 1$. Si $h \in Epi(B_m, B_n)$ sabemos que el álgebra cociente $B_m/Nuc(h)$ es isomorfa a B_n, y como B_m es finita $Nuc(h) = [x)$, con $x \in B_m$. Además $B_m/[x) \cong (x]$ luego $N[(x]] = N[B_n] = 2^n$. A. Monteiro demostró, [17] que si B es un álgebra de Boole y F un filtro de B entonces toda clase de equivalencia módulo F es coordinable con F. Por lo tanto $N[(x]].t = N[B_m]$ esto es $2^n.t = 2^m$ y por lo tanto $t = 2^{m-n}$. Luego dado $b' \in B_n$ el conjunto $\{b \in B_m : h(b) = b'\}$ tiene 2^{m-n} elementos.
Si B_n es una imagen homomórfica de B_m entonces existe $x \in B_m$ tal que $(x] \cong B_n$ y en consecuencia x es supremo de n átomos de B_m. Existen $\binom{m}{n}$ elementos de B_m que son supremo de n átomos de B_m. Sea $\mathcal{F}_n$ el conjunto de todas las secciones superiores $[x)$ donde x es supremo de n átomos de B_m. Notaremos con $Aut(B_n)$ el conjunto de todos los automorfismos del álgebra de Boole B_n. Si $\alpha \in Aut(B_n)$ entonces α es en particular una biyección de $\mathcal{A}(B_n)$ y por el item (A7) del Lema 2.1, α transforma átomos en átomos

de B_n y claramente existen $n!$ biyecciones de $\mathcal{A}(B_n)$, luego $N[Aut(B_n)] = n!$.
Si $h \in Epi(B_m, B_n)$ entonces $Nuc(h) \in \mathcal{F}_n$. Sea $\beta : Epi(B_m, B_n) \to \mathcal{F}_n$ definida por $\beta(h) = Nuc(h)$. Es claro que si $\alpha \in Aut(B_n)$ entonces $\alpha \circ h \in Epi(B_m, B_n)$. Dado $[x) \in \mathcal{F}_n$ consideremos $\beta^{-1}([x])$, luego $N[\beta^{-1}([x])] = n!$ y por lo tanto $n!.\binom{m}{n} = V_{m,n} = N[Epi(B_m, B_n)]$.

Si $b \in B_m \setminus \{0\}$ y $h \in Epi(B_m, B_n)$ entonces $h(b) = 0$ ó $h(b) \neq 0$. Si $b' = h(b) = 0$ entonces el número de elementos de $Epi^{(b,0)}(B_m, B_n)$ es igual al número de funciones inyectivas de $\mathcal{A}(B_n)$ en $\mathcal{A}(B_m) \setminus \mathcal{A}(b)$ esto es:

$$N[Epi^{(b,0)}(B_m, B_n)] = V_{m-N[\mathcal{A}(b)],n},$$

y si $b' = h(b) \neq 0$, [15] entonces

$$N[Epi^{(b,b')}(B_m, B_n)] = V_{m,n} - V_{m-N[\mathcal{A}(b)],n}.$$

Dados $b \in B_m$ y $b' \in B_n \setminus \{0'\}$ entonces $h_f(b) = b'$ si y solo si $f(\mathcal{A}(b')) \subseteq \mathcal{A}(b)$, luego

$$N[Epi^{(b,b')}(B_m, B_n)] = V_{N[\mathcal{A}(b)],N[\mathcal{A}(b')]}.V_{m-N[\mathcal{A}(b)],n-N[\mathcal{A}(b')]}.$$

Si $b \neq 0$ entonces $h(b) = 0$ si y solo si $f(\mathcal{A}(B_n)) \subseteq \mathcal{A}(B_m) \setminus \mathcal{A}(b)$.

Lema 2.2 *Si $m \geq n$, $h \in Epi^{(b,b')}(B_m, B_n)$, donde $b \in B_m \setminus \{0\}$, $b' \in B_n \setminus \{0'\}$ entonces:*

(A8) *Si $a \in \mathcal{A}(b)$ y $h(a) \neq 0'$ entonces $h(a) \in \mathcal{A}(b')$.*

(A9) *Si $a \notin \mathcal{A}(b)$ y $h(a) \neq 0'$ entonces $h(a) \notin \mathcal{A}(b')$.*

Dem. Si $a \in \mathcal{A}(b)$ esto es $a \leq b$ entonces $h(a) \leq h(b) = b'$ luego si $h(a) \neq 0'$, $h(a) \in \mathcal{A}(B_n)$ y por lo tanto $h(a) \in \mathcal{A}(b')$.
Supongamos que $h(a) \leq b' = h(b)$ luego $h(a) = h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b)$, por lo tanto $a \equiv a \wedge b$ (mód. $Nuc(h)$). Como B_m es finita $Nuc(h) = [f)$ con $f \in B_m$, y por lo tanto (1) $a \wedge f = a \wedge b \wedge f$. De $0 \leq a \wedge f \leq a$ y $a \in \mathcal{A}(B_m)$ resulta que (2) $a \wedge f = a$ ó (3) $a \wedge f = 0$. Si ocurre (2) entonces por (1) tenemos que $a = a \wedge b \wedge f \leq b$, absurdo. Si ocurre (3), como $h(f) = 1$ tenemos que $0 = h(0) = h(a \wedge f) = h(a) \wedge h(f) = a \wedge 1 = a$, absurdo. Luego $h(a) \leq b'$. ■

(b, y)

De (A3) y el Lema 2.2 resulta que si $h \in Epi(B_m, B_n)$ entonces $f = \Phi^{-1}(h)$ verifica:

(C1) $f \in IM(\mathcal{A}(B_n), \mathcal{A}(B_m))$,

(C2) $f(\mathcal{A}(b')) \subseteq \mathcal{A}(b)$,

(C3) $f(\mathcal{A}(-b')) \subseteq \mathcal{A}(-b)$.

Si $h \in Hom(B_m, B_n)$ entonces (1) $S = h(B_m)$ es una subálgebra de B_n y por lo tanto (2) $h(B_m) \cong B_t$ con $1 \leq t \leq n$ y $m \geq t$. Sea $\mathcal{A}(S) = \{s_1, s_2, \ldots, s_t\}$.
De (1) y (2) resulta que $h \in Epi(B_m, S)$ entonces a $g = \Phi^{-1}(h) \in IM(\mathcal{A}(S), \mathcal{A}(B_m))$ y (3) $h_g = h$.
Como $\{\mathcal{A}(s_1), \mathcal{A}(s_2), \ldots, \mathcal{A}(s_t)\}$ es una partición de $\mathcal{A}(B_n)$ entonces si $b \in \mathcal{A}(B_n)$ existe i, $1 \leq i \leq t$ tal que $b \in \mathcal{A}(s_i)$, esto es $b \leq s_i$.

Definamos una función $f : \mathcal{A}(B_n) \to \mathcal{A}(B_m)$ del siguiente modo: $f(b) = g(s_i)$ si y solo si $b \in \mathcal{A}(s_i)$. Claramente si alguno de los conjuntos $\mathcal{A}(s_i)$ tiene más de un elemento, f no es inyectiva. Observemos que de acuerdo con la definición de f se tiene que $f(\mathcal{A}(B_n)) = g(\mathcal{A}(S))$. Por (A1) $h_f = \Phi(f) \in Hom(B_m, B_n)$. Veamos que $h_f = h$. Por (3) es suficiente probar que $h_g = h$, y para ello que $h_f(a) = h_g(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}(B_m)$. Si $a \in f(\mathcal{A}(S))$ esto es $a = f(b)$ con $b \in \mathcal{A}(S)$, pero por definición $f(b) = g(s_i)$ con $b \in \mathcal{A}(s_i)$. Luego $h_f(a) = s_i$ y $h_g(a) = s_i$. Si $a \notin f(\mathcal{A}(S))$ entonces $h_f(a) = 0$ y $h_g(a) = 0$.

Si $m < n$ tenemos que $N[Epi(B_m, B_n)] = 0$, y si $h \in Hom(B_m, B_n)$ entonces $h(B_m)$ es una subálgebra booleana de B_n tal que $1 \leq N[\mathcal{A}(H(B_m))] \leq m < n$.
Es bien conocido que las subálgebras booleanas de B_n se corresponden biyectivamente con las particiones del conjunto $\mathcal{A}(B_n)$, y que el número de subálgebras de B_n con t átomos $1 \leq t \leq n$ es

$$P(n,t) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{t-1}(-1)^i\binom{t}{i}(t-i)^n}{t!}.$$

Por lo tanto si S es una subálgebra de B_n con t átomos donde $1 \leq t \leq m < n$ entonces existen $V_{m,t}$ epimorfismos de B_m en S, luego si $m < n$

$$N[Hom(B_m, B_n)] = \sum_{t=1}^{m} P(n,t).V_{m,t}.$$

Observemos que si $m \geq n$ entonces

$$N[Hom(B_m, B_n)] = N[Epi(B_m, B_n)] + \sum_{t=1}^{n-1} P(n,t).N[Epi(B_m, B_t)] =$$

$$V_{m,n} + \sum_{t=1}^{n-1} P(n,t).V_{m,t}.$$

2.2 Imágenes homomórficas de un álgebra de Łukasiewicz

Vamos a notar con $\mathbf{B}$ el álgebra de Boole B_1. Sea L un álgebra de Łukasiewicz finita, entonces

$$L \cong \mathbf{B}^j \times \mathbf{T}^k, \ \text{ donde } \ j,k \in \mathbb{Z}, \ j \geq 0, \ k \geq 0.$$

(T) Si $j = k = 0$ entonces L es trivial, esto es tiene un solo elemento,

(B) Si $j \geq 1, \ k = 0$ entonces L es un álgebra de Boole con j átomos,

(P) Si $j = 0, \ k \geq 1$ entonces L es un álgebra de Post (trivalente) y $B(L)$ es un álgebra de Boole con k átomos,

(E) Si $j \geq 1, \ k \geq 1$ entonces L es un álgebra de Lukasiewicz con eje, que no es un álgebra de Boole ni un álgebra de Post. El eje es la $(j+k)$-upla

$$e = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{j}, \underbrace{c, \ldots, c}_{k})$$

Por lo tanto

$$\nabla e = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{j}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k}).$$

$B(L)$ es un álgebra de Boole con $j + k$ átomos, cuyos elementos son

$$(b_1, b_2, \ldots, b_j, b_{j+1}, \ldots, b_{j+k}),$$

donde $b_i = 0 \in \mathbf{B} = \{0, 1\}$ para $1 \leq i \leq j$ y $b_i \in \{0, 1\} \subset \mathbf{T}$ para $j + 1 \leq i \leq j + k$. Dado $b \in B(L)$ sean

$$J(b) = \{i : b_i = 1, 1 \leq i \leq j\}, \text{ y } K(b) = \{i : b_i = 1, j + 1 \leq i \leq j + k\},$$

luego $0 \leq N[J(b)] \leq j$ y $0 \leq N[K(b)] \leq k$.

Si j y k no son simúltaneamente nulos entonces L es un álgebra de Łukasiewicz finita no trivial. Sabemos que las imágenes homomórficas de L están determinadas por los filtros $[b)$ donde $b \in B(L)$, y que el álgebra cociente $L/[b)$ es isomorfa al álgebra de Łukasiewicz $(b] = \{x \in L : x \leq b\}$. Luego como $B(L)$ tiene 2^{j+k} elementos: (C) existen 2^{j+k} imágenes homomórficas de L.

(B) Si $j \geq 1,\ k = 0$, entonces L tiene 2^j imágenes homomórficas, que son álgebras de Boole.

(P) Si $j = 0,\ k \geq 1$, entonces L tiene 2^k imágenes homomórficas, que son álgebras de Post.

(E) Si $j \geq 1,\ k \geq 1$, entonces L tiene 2^{j+k} imágenes homomórficas, que son álgebras con eje.

(E1) Si $N[K(b)] = 0$, entonces $(b] \cong B^{N[J(b)]}$ por lo tanto hay $\binom{j}{j_1}$, $0 \leq j_1 \leq j$ imágenes homomórficas de L que son álgebras de Boole con j_1 átomos, y en total tenemos 2^j imágenes homomórficas que son álgebras de Boole. Observemos que si $N[J(b)] = 0$, entonces $L/[b)$ es un álgebra trivial.

(E2) Si $N[J(b)] = 0$, entonces $(b] \cong \mathbf{T}^{N[K(b)]}$ por lo tanto hay $\binom{k}{k_1}$, $0 \leq k_1 \leq k$ imágenes homomórficas L' de L que son álgebras de Post tales que $B(L')$ es un álgebra de Boole con k_1 átomos, y en total tenemos 2^k imágenes homomórficas que son álgebras de Post. Observemos que si $N[K(b)] = 0$, entonces $L/[b)$ es un álgebra trivial, que coincide con el álgebra trivial indicada en (E1).

(E3) Si $1 \leq j_1 = N[J(b)] \leq j$ y $1 \leq k_1 = N[K(b)] \leq k$, entonces $L/[b) \cong (b] \cong \mathbf{B}^{N[J(b)]} \times \mathbf{T}^{N[H(b)]}$ es una imagen homomórfica con eje, que no es un álgebra de Boole ni un álgebra con centro.
Por lo tanto el número de estas imágenes homomórficas es:

$$\sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \right) = \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} . (2^k - 1) =$$

$$(2^k - 1). \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} = (2^k - 1).(2^j - 1).$$

Como en uno de los casos (E1) y (E2) obtenemos una misma imagen homomórfica, el álgebra trivial, si $j \geq 1$ y $k \geq 1$, en total tenemos:

$$2^j + (2^k - 1) + (2^k - 1).(2^j - 1) = 2^j + (2^k - 1).(1 + (2^j - 1)) = 2^j + (2^k - 1).2^j =$$

$$2^j.(1 + 2^k - 1) = 2^j.2^k = 2^{j+k},$$

imágenes homomórficas lo que habíamos determinado en (C).

3 Epimorfismos

El siguiente lema generaliza nuestros resultados [13, 15] y nuestro lema 4.1 [16].

Lema 3.1 *Si L y L' son álgebras de Lukasiewicz con ejes e y e' respectivamente y $h \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ entonces la transformación $H : L \longrightarrow L'$ definida por $H(x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x)$ verifica* (I) *H es una extensión de h,* (II) *$H \in Epi(L, L')$, y* (III) *H es la única extensión de h.*

Dem. (I) En efecto si $b \in B(L)$ entonces $\Delta b = \nabla b = b$, luego: $H(b) = (h(\Delta b) \vee e') \wedge h(\nabla b) = (h(b) \vee e') \wedge h(b) = h(b)$.

(IIa) $H(x \wedge y) = (h(\Delta(x \wedge y)) \vee e') \wedge h(\nabla(x \wedge y)) = (h(\Delta x \wedge \Delta y) \vee e') \wedge h(\nabla x \wedge \nabla y) = (h(\Delta x) \wedge h(\Delta y)) \vee e') \wedge h(\nabla x) \wedge h(\nabla y) = ((h(\Delta x) \vee e') \wedge (h(\Delta y) \vee e') \wedge h(\nabla x) \wedge h(\nabla y) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) \wedge (h(\Delta y) \vee e') \wedge h(\nabla y) = H(x) \wedge H(y)$.

(IIb) Como H extiende a h y $\nabla x \in B(L)$ entonces (1) $H(\nabla x) = h(\nabla x)$.
(2) $\nabla H(x) = \nabla((h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x)) = (\nabla h(\Delta x) \vee \nabla e') \wedge \nabla h(\nabla x) = (h(\Delta x) \vee \nabla e') \wedge h(\nabla x)$. Como $\nabla x \leq \Delta x \vee \nabla e$, $\nabla x, \Delta x, \nabla e, \Delta x \vee \nabla e \in B(L)$, $\nabla x \leq \Delta x \vee \nabla e$ y h es un homomorfismo booleano que verifica $h(\nabla e) = \nabla e'$ tenemos que (3) $h(\nabla x) \leq h(\Delta x \vee \nabla e) = h(\Delta x) \vee h(\nabla e) = h(\Delta x) \vee \nabla e'$. De (2) y (3) resulta que (4) $\nabla H(x) = h(\nabla x)$. De (1) y (4) resulta $\nabla H(x) = H(\nabla x)$.

(IIc) Por definición $H(\sim x) = (h(\Delta \sim x) \vee e') \wedge h(\nabla \sim x)$, luego
(5) $\Delta H(\sim x) = (h(\Delta \sim x) \vee \Delta e') \wedge h(\nabla \sim x) = (h(\Delta \sim x) \vee 0') \wedge h(\nabla \sim x) = h(\Delta \sim x) \wedge h(\nabla \sim x) = h(\Delta \sim x)$, y
$\nabla H(\sim x) = (h(\Delta \sim x) \vee \nabla e') \wedge h(\nabla \sim x) = (h(\Delta \sim x) \vee h(\nabla e)) \wedge h(\nabla \sim x) = (h(\Delta \sim x \vee \nabla e) \wedge \nabla \sim x))$ y como $\nabla \sim x \leq \Delta \sim x \vee \nabla e$ tenemos que:
(6) $\nabla H(\sim x) = h(\nabla \sim x)$. Como h es un epimorfismo booleano, entonces si $b \in B(L)$ tenemos que (7) $h(\sim b) = \sim h(b)$, luego $\sim H(x) = (\sim h(\Delta x) \wedge \sim e') \vee \sim h(\nabla x) = (h(\sim \Delta x) \wedge \sim e') \vee h(\sim \nabla x)$, y por lo tanto:
(8) $\Delta \sim H(x) = (\Delta h(\sim \Delta x) \wedge \Delta \sim e') \vee \Delta h(\sim \nabla x) =$
$(h(\sim \Delta x) \wedge \sim \nabla e') \vee h(\sim \nabla x) = (\sim h(\Delta x) \wedge \sim h(\nabla e)) \vee \sim h(\nabla x) =$
$\sim [h(\Delta x) \vee h(\nabla e)) \wedge h(\nabla x)] = \sim h((\Delta x \vee \nabla e) \wedge \nabla x) = \sim h(\nabla x) = h(\sim \nabla x) = h(\Delta \sim x)$,
y (9) $\nabla \sim H(x) = (\nabla h(\sim \Delta x) \wedge \nabla \sim e') \vee \nabla h(\sim \nabla x) =$
$(h(\sim \Delta x) \wedge \sim \Delta e') \vee h(\sim \nabla x) = (h(\sim \Delta x) \wedge \sim 0) \vee h(\sim \nabla x) = h(\sim \Delta x) \vee h(\sim \nabla x) = h(\sim \Delta x) = h(\nabla \sim x)$.
De (5) y (8) resulta (10) $\Delta H(\sim x) = \Delta \sim H(x)$ y de (6) y (9) resulta (11) $\nabla H(\sim x) = \nabla \sim H(x)$. De (10) y (11) resulta por el principio de determinación de Moisil [6, 7],[14] que se verifica $H(\sim x) = \sim H(x)$.

(IId) Dado $y \in L'$ entonces $y = (\Delta y \vee e') \wedge \nabla y$, como $\nabla y, \Delta y \in B(L')$ y h es un epimorfismo booleano existen $b_1, b_2 \in B(L)$ tales que $h(b_1) = \Delta y$ y $h(b_2) = \nabla y$. Sea $b_3 = b_1 \vee b_2 \in B(L)$ y $x = (b_1 \vee e) \wedge b_3 \in L$. Luego $\Delta x = (\Delta b_1 \vee \Delta e) \wedge \Delta b_3 = (b_1 \vee 0) \wedge b_3 = b_1 \wedge b_3 = b_1$, y $\nabla x = (\nabla b_1 \vee \nabla e) \wedge \nabla b_3$. Luego $h(\Delta x) = h(b_1) = \Delta y$, y como $h(b_3) = h(b_1) \vee h(b_2) = \Delta y \vee \nabla y = \nabla y$ entonces $h(\nabla x) = h((\nabla b_1 \vee \nabla e) \wedge \nabla b_3) = (h(\nabla b_1) \vee h(\nabla e)) \wedge h(\nabla b_3) = (h(b_1) \vee h(\nabla e)) \wedge h(b_3) = (\Delta y \vee \nabla e') \wedge \nabla y$ y como $\nabla y \leq \Delta y \vee \nabla e'$ tenemos que $h(\nabla x) = \nabla y$, luego $H(x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) = (\Delta y \vee e') \wedge \nabla y = y$, lo que prueba que H es suryectiva.

(III) Si $H' \in Epi(L, L')$ verifica $H'(b) = h(b)$ para todo $b \in B(L)$ entonces

$$H'(x) = (\Delta H'(x) \vee e') \wedge \nabla H'(x) = (H'(\Delta x) \vee e') \wedge H'(\nabla x) =$$

$$(h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) = H(x).$$

■

Corolario 3.1 *Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz centradas cuyos centros son c y c' respectivamente y $h \in Epi(B(L), B(L'))$ entonces la función $H : L \to L'$ definida por $H(x) = (h(\Delta x) \vee c') \wedge h(\nabla x)$ es el único epimorfismo de L en L' que extiende a h.*

Dem. Basta observar que todo centro es un eje del álgebra y que $h(\nabla c) = h(1) = 1' = \nabla c'$. ■

Lema 3.2 *Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz con ejes e y e' respectivamente, entonces: $N[Epi(L, L')] = N[Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))]$.*

Dem. Si $h \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$, entonces por el Lema 3.1, la función:

$$H(x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x)$$

verifica $H \in Epi(L, L')$. Si ponemos $\delta(h) = H$, entonces por el Lema 3.1, (III) δ es una función.
Si $H \in Epi(L, L')$ por el Lema 1.1, tenemos que $h = H_{|B(L)} \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ y por el Lema 3.1 la extensión de h a L es el epimorfismo H, luego $\delta(h) = H$, lo que prueba que δ es suryectiva.
Si $h, h' \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ son tales que $h \neq h'$ entonces existe $b \in B(L)$ tal que $h(b) \neq h'(b)$. Si H y H' son los homomorfismos extensión de h y h' respectivamente entonces $H(b) = h(b) \neq h'(b) = H'(b)$, luego δ es inyectiva. ■

Sean L y L' álgebras de Łukasiewicz finitas, no triviales, luego $L \cong \mathbf{B}^j \times \mathbf{T}^k$ y $L' \cong \mathbf{B}^{j'} \times \mathbf{T}^{k'}$, donde $j, k, j', k' \geq 1$. Probamos que $H \in Epi(L, L')$ si y solo si $h = H_{|B(L)} \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L))$ luego $f = \Phi^1(h) \in FI(\mathcal{A}(B(L')), \mathcal{A}(B(L)))$ debe verificar las condiciones (C2) y (C3) indicadas anteriormente, esto es

$$f(\mathcal{A}(\nabla e')) \subseteq \mathcal{A}(\nabla e) \text{ y } f(\mathcal{A}(\sim \nabla e')) \subseteq \mathcal{A}(\sim \nabla e). \tag{i}$$

Luego como

$$N[\mathcal{A}(\nabla e)] = k, \quad N[\mathcal{A}(\nabla e')] = k',$$

$$N[\mathcal{A}(B(L)) \setminus \mathcal{A}(\nabla e)] = j \text{ y } N[\mathcal{A}(B(L')) \setminus \mathcal{A}(\nabla e')] = j'$$

para que el conjunto de las funciones inyectivas de $\mathcal{A}(B(L'))$ en $\mathcal{A}(B(L))$ que verifican (i) sea no vacío es necesario y suficiente que $k \geq k'$ y $j \geq j'$. Entonces por lo visto precedentemente:

$$N[Epi(L, L')] = N[Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))] = V_{k,k'} \cdot V_{j,j'} \qquad \text{(ii)}$$

Si $L \cong B^j \times T^k$ y notamos con $Aut(L)$ el conjunto de todos los automorfimos de L entonces $N[Aut(L)] = k! \cdot j!$.

Observemos que:

- Si L y L' son álgebras con centro c y c' respectivamente, esto es $L \cong \mathbf{T}^k$ y $L' \cong \mathbf{T}^{k'}$ entonces

$$N[Epi(L, L')] = N[Epi^{(1,1')}(B(L), B(L'))] = N[Epi(B(L), B(L'))] =$$

$$V_{N[\mathcal{A}(B(L))], N[\mathcal{A}(B(L'))]} = V_{k,k'}.$$

- Si L y L' son álgebras de Boole, esto es $L \cong \mathbf{B}^j$ y $L' \cong \mathbf{B}^{j'}$ entonces

$$N[Epi(L, L')] = N[Epi^{(0,0')}(B(L), B(L'))] = N[Epi(B(L), B(L'))] =$$

$$V_{N[\mathcal{A}(B(L))], N[\mathcal{A}(B(L'))]} = V_{j,j'}.$$

Si L es un álgebra de Łukasiewicz finita, no trivial, sea $P(L)$ el conjunto de sus elementos primos y $\varphi : P(L) \to P(L)$ la transformación de Birula-Rasiowa [4] . Si L' es un álgebra de Łukasiewicz finita, no trivial, una función $f : P(L') \to P(L)$ se dice una H-función, [1] si f es biunívoca y verifica $f(\nabla p') = \nabla f(p')$, $f(\varphi(p')) = \varphi(f(p'))$. M. Abad y A. Figallo [1] probaron que existe una biyección entre las H-funciones y el conjunto $Epi(L, L')$, donde aparentemente L y L' son álgebras de Łukasiewicz con eje que no son álgebras de Boole ni álgebras con centro. El número de elementos de $Epi(L, L')$ determinado por estos autores coincide con el que indicamos en (ii).
Claramente es mas difícil construir H-funciones, que funciones inyectivas de $\mathcal{A}(B_n)$ en $\mathcal{A}(B_m)$ que verifican las condiciones indicadas en (i).

Lema 3.3 *Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz con ejes e y e' respectivamente, $h \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ y $H \in Epi(L, L')$ es el epimorfismo extensión de h entonces:*

(a) $x \in Nuc\,(H) = \{x \in L : H(x) = 1\} \iff$
$\Delta x, \nabla x \in Nuc\,(h) = \{b \in B(L) : h(x) = 1\}$,

(b) *Si $h_1, h_2 \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ y $H_1, H_2 \in Epi(L, L')$ son los epimorfimos extensión de h_1 y h_2 respectivamente entonces:*

$$Nuc\,(h_1) = Nuc\,(h_2) \iff Nuc\,(H_1) = Nuc\,(H_2).$$

Dem.

(a) $-$ $x \in Nuc\,(H) \iff H(x) = 1$, luego $h(\Delta x) = H(\Delta x) = \Delta H(x) = 1$ y $h(\nabla x) = H(\nabla x) = \nabla H(x) = 1$ esto es $\Delta x, \nabla x \in Nuc\,(h)$.

– Si $\Delta x, \nabla x \in Nuc(h)$, esto es $h(\Delta x) = h(\nabla x) = 1$ entonces $H(x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) = (1 \vee e') \wedge 1 = 1$.

(b) – Si $x \in Nuc(H_1)$ entonces por (a) tenemos que: $\Delta x, \nabla x \in Nuc(h_1) =$ (por hipótesis) $= Nuc(h_2)$ luego por (a) $x \in Nuc(H_2)$.

– Si $b \in Nuc(h_1)$ entonces $\Delta b = \nabla b = b \in Nuc(h_1)$, luego por (a): $b \in Nuc(H_1) =$ (por hipótesis) $= Nuc(H_2)$ luego por (a) $b = \Delta b = \nabla b \in Nuc(h_2)$.

■

Lema 3.4 *Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz con ejes e y e' respectivamente, y $h \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ entonces el epimorfismo extensión H verifica:*
(a) *Si $\Delta x = 0$ entonces $H(x) \leq e'$ y* (b) $H(x) = 0 \iff h(\nabla x) = 0$.

Dem.

(a) $H(x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) = (h(0) \vee e') \wedge h(\nabla x) = (0 \vee e') \wedge h(\nabla x) = e' \wedge h(\nabla x) \leq e'$.

(b) Si $H(x) = 0$ entonces $h(\nabla x) = H(\nabla x) = \nabla H(x) = \nabla 0 = 0$. Si $h(\nabla x) = 0$, luego $H(x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge 0 = 0$.

■

Referencias

[1] Abad M. and Figallo A., *On Łukasiewicz homomorphisms*, Univ. Nac. de San Juan, San Juan, Argentina (1992).

[2] Abad M. and Monteiro L., *Number of epimorphisms between symmetric Boolean algebras*, Rep. Math. Logic 10 (1978), 3-7.

[3] Abad M. and Monteiro L., *Monadic symmetric Boolean algebras*, Notas de Lógica Matemática 37 INMABB-CONICET-UNS (1989), 1-30.

[4] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., On the representation of quasi-boolean algebras, Bull Acad. Pol. Sc., classe III, 5 (1957), 259-261.

[5] Boicescu V., Filipoiu A., Georgescu G.. and Rudeanu S., *Łukasiewicz-Moisil algebras*, Annals of discrete mathematics 49, North-Holland, 1991.

[6] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 26 (1940), 431- 466.

[7] Moisil Gr. C., *Sur les anneaux de caractéristiques 2 ou 3 et leurs applications*, Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarets 12 (1941), 66-90.

[8] Moisil Gr. C., *Notes sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 27 (1941), 86-98.

[9] Moisil Gr. C., *Sur les idéaux des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Analele Universitatii C.I. Parohn. Seria Acta Logica 3 (1960), 83-95.

[10] Monteiro A., Notas del curso *Algebras de Łukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.

[11] Monteiro A., *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Notas de Lógica Matemática 21 (1964). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca. Bull, Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 3-12.

[12] Monteiro L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Notas de Lógica Matemática 22 (1964). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 199-202.

[13] Monteiro L., *Sur les algèbres de Łukasiewicz injectives*, Notas de Lógica Matemática 25 (1964). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca. Proc. Japan Acad., 41, 7 (1965), 578-581.

[14] Monteiro L., *Sur le principe de détermination de Moisil dans les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull, Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 13 (61), (1969), 447-448.

[15] Monteiro L., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas*, Notas de Lógica Matemática 32 (1974). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.

[16] Monteiro L., Abad M., Savini S. and Sewald J., *Finite generating sets*, Discrete Math. 189 (1998), 177-189.

[17] Monteiro L., *Algebras de Boole,* Informes Técnicos Internos 66, INMABB-CONICET-UNS (1998), versión corregida (2000-2001-2002), 201 páginas.

[18] Monteiro L. and Kremer A., *Boolean Matrices*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. de Roumanie, 44 (92), 2 (2001), 105-118.

[19] Sikorski R., *On the inducing of homomorphisms by mappings*, Fund. Math. 36 (1949), 7-22.

[20] Sikorski R., *Boolean Algebras*, Springer-Verlag (1964).