INFORME TECNICO INTERNO

N°. 84

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 84

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2003 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 84

Construcción de álgebras de Moisil n - valentes axled

Luiz F. Monteiro

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2003

Construcción de álgebras de Moisil n-valentes axled

Luiz F. Monteiro
INMABB-CONICET y Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina
e-mail: luizmont@criba.edu.ar

Resumen

En estas notas indicamos una construcción que permite a partir de un álgebra de Boole B y un ideal I de B determinar un álgebra de Moisil n-valente $\mathbf{M}_n(B, I)$, axled y dada un álgebra de Moisil n-valente axled L existe un álgebra de Boole B y un ideal I de B tal que el álgebra $\mathbf{M}_n(B, I)$ es isomorfa a L. Aplicando estos resultados construímos las siguientes álgebras con un conjunto de m generadores libres: Boole, Łukasiewicz trivalentes, Moisil n-valentes axled, Post n-valentes y Łukasiewicz trivalentes monádicas.

1 Introducción

Si X es un conjunto finito, notaremos con $N[X]$ su número de elementos. Si A es un reticulado distributivo acotado y 0 (1) son el primer y último elemento respectivamente, diremos que un subconjunto S de A es un $(0,1)$-subreticulado de A si S es un subreticulado de A y $0, 1 \in S$.
Un álgebra de De Morgan es un par $(A, \sim)$ donde A es un reticulado distributivo acotado y $\sim$ una operación unaria definida sobre A tal que: $\sim\sim x = x$, $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$.
Un álgebra de De Morgan A en la cual se verifica $x \wedge \sim y \leq y \vee \sim y$, cualesquiera que sean $x, y \in A$ se dice un álgebra de Kleene.
Un álgebra de Boole monádica es un par $(A, \exists)$ donde A es un álgebra de Boole y $\exists : A \to A$ es una función, denominada operador existencial, que verifica $\exists 0 = 0$, $x \wedge \exists x = x$ y $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$, [5]. El operador $\forall x = -\exists - x$, donde $-x$ indica el complemento booleano de $x \in A$, se denomina cuantificador universal.
Un álgebra de clausura es un par (A, C) donde A es un álgebra de Boole y $C : A \to A$ es una función que verifica $C\,0 = 0$; $x \leq C\,x$; $C(x \vee y) = C\,x \vee C\,y$; $C\,C\,x = C\,x$. [5].
Es bien conocido que si A es un álgebra de clausura entonces $\{x \in A : C\,x = x\}$ es un (0-1)-subreticulado A.
Si $n \geq 2$ un álgebra de Moisil n-valente L, [4], [2], es un álgebra de De Morgan donde están definidos $n-1$ operadores σ_i, $1 \leq i \leq n-1$ que verifican:

L1) $\sigma_i(x \vee y) = \sigma_i x \vee \sigma_i y$, $1 \leq i \leq n-1$.

L2) $\sigma_i x \vee \sim \sigma_i x = 1$, $1 \leq i \leq n-1$.

L3) $\sigma_i(\sigma_j x) = \sigma_j x, \ \ 1 \leq i \leq n-1, \ 1 \leq j \leq n-1.$

L4) $\sigma_i(\sim x) = \sim \sigma_{n-i} x, \ 1 \leq i \leq n-1.$

L5) $\sigma_1 x \leq \sigma_2 x \leq \ldots \leq \sigma_{n-1} x.$

L6) Si $\sigma_i x = \sigma_i y$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ entonces $x = y$.

Tambien diremos que L es un M-álgebra n-valente. Toda álgebra de Boole es un M-álgebra 2-valente y toda M-álgebra 2-valente es un álgebra de Boole [2]. Un subconjunto S de L se dice una M-subálgebra n-valente de L, ó simplemente una M-subálgebra, si S es una subálgebra de De Morgan de L que es cerrada con respecto a todos los operadores σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Es bien conocido que si L es un M-álgebra n-valente y ponemos

$$B_i(L) = \{x \in L : \sigma_i x = x\}$$

entonces $B_1(M) = B_2(M) = \ldots = B_{n-1}(M)$ y este conjunto es un álgebra de Boole que notaremos $\mathcal{B}(L)$.

Un M-álgebra n-valente monádica L, [4], es un M-álgebra n-valente L donde está definido un operador unario $\exists$ que verifica: $\exists 0 = 0$, $x \wedge \exists x = x$ y $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$, $\exists \sigma_i x = \sigma_i \exists x$, $1 \leq i \leq n-1$.

Si B es un álgebra de Boole finita con más de un elemento, notaremos con $\mathcal{A}(B)$ al conjunto de sus átomos. Notaremos B_m, donde $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ el álgebra de Boole con m átomos.

Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sea $C_n = \{\frac{j}{n-1} : 0 \leq j \leq n-1\}$. Considerado como subreticulado de los números reales, es claro que C_n es un reticulado distributivo acotado. Definiendo $\sim \frac{j}{n-1} = 1 - \frac{j}{n-1}$ y $\sigma_k(\frac{j}{n-1}) = 0$ si $k + j < n$ y $\sigma_k(\frac{j}{n-1}) = 1$ si $k + j \geq n$ donde $1 \leq k \leq n-1$ y $0 \leq j \leq n-1$, entonces C_n es un M-álgebra n-valente.

Observación 1.1 *Si L es un M-álgebra n-valente, y $b \in \mathcal{B}(L)$ consideremos la sección superior $S_1 = [b)$. Sabemos que S_1 es un reticulado distributivo, con primer elemento b y último elemento 1. Si $x \in S_1$ pongamos por definición $\sim_1 x = \sim x \vee b$, entonces S_1 es un álgebra de De Morgan.*
Si $x \in S_1$ entonces $b \leq x$ luego $b = \sigma_i b \leq \sigma_i x$ y por lo tanto S_1 es un M-álgebra n-valente. En forma análoga si consideramos la sección inferior $S_2 = (b]$ y dado $x \in S_2$ definimos $\sim_2 x = \sim x \wedge b$, entonces S_2 tambien es un M-álgebra n-valente.

Lema 1.1 *Si L es un M-álgebra n-valente y $b \in \mathcal{B}(L)$, la función : $h(x) = x \wedge \sim b$, es un isomorfismo de $[b)$ en $(\sim b]$.*

2 Construcción

Dada un álgebra de Boole B y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ consideremos el álgebra de Boole

$$B^{n-1} = \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n-1 \text{ veces}}.$$

Sobre esta álgebra de Boole definamos el siguiente operador:

$$\mathbf{C}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \bigvee_{i=1}^{2} x_i, \bigvee_{i=1}^{3} x_i, \ldots, \bigvee_{i=1}^{n-1} x_i).$$

Entonces se prueba sin dificultad que $(B^{n-1}, \mathbf{C})$ es un álgebra de clausura, que $M_n(B) = \{x \in B^{n-1} : \mathbf{C}x = x\}$ es un $(0,1)$-subreticulado de B^{n-1} y

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in M_n(B) \iff x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1}.$$

Definamos ahora un nuevo operador en B^{n-1}

$$\sim (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (-x_{n-1}, -x_{n-2}, \ldots, -x_2, -x_1).$$

Entonces $M_n(B)$ es un álgebra de Morgan, mas precisamente es un álgebra de Kleene. En efecto, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in M_n(B)$ entonces la j-ésima coordenada, $1 \leq j \leq n-1$, de $\sim x$ es $-x_{n-j}$, luego si $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \in M_n(B)$, las coordenadas de $x \wedge \sim x$ y $z \vee \sim z$ son $x_j \wedge -x_{n-j}$ y $z_j \vee -z_{n-j}$, $1 \leq j \leq n-1$, respectivamente.
Si $n-1$ es impar, esto es $n-1 = 2t+1$, entonces $x_j \leq x_{n-j}$ y $z_j \leq z_{n-j}$ donde $1 \leq j \leq t+1$ luego (1) $x_j \wedge -x_{n-j} = 0$ y (2) $-z_j \vee z_{n-j} = 1$, $1 \leq j \leq t+1$. Pongamos $n - j = p$, entonces $t+1 \leq p \leq n-1$ y por (2) tenemos $z_p \vee -z_{n-p} = 1$, para todo p tal que $t+1 \leq p \leq n-1$, luego $x_j \wedge -x_{n-j} = 0 \leq z_j \vee -z_{n-j}$, para todo j tal que, $1 \leq j \leq t+1$ y $x_j \wedge -x_{n-j} \leq 1 = z_j \vee -z_{n-j}$, para todo j tal que, $t+1 \leq j \leq n-1$. Luego $x \wedge \sim x \leq z \vee \sim z$.
Si $n-1$ es par, esto es $n-1 = 2t$, entonces $x_j \leq x_{n-j}$ y $z_j \leq z_{n-j}$ donde $1 \leq j \leq t$ luego (3) $x_j \wedge -x_{n-j} = 0$ y (4) $-z_j \vee z_{n-j} = 1$, $1 \leq j \leq t$. Pongamos $n-j = p$, entonces $t \leq p \leq n-1$ y por (4) $z_p \vee -z_{n-p} = 1$, para todo p tal que $t \leq p \leq n-1$, luego $x_j \wedge -x_{n-j} = 0 \leq z_j \vee z_{n-j}$ para todo j tal que $1 \leq j \leq t$ y $x_j \wedge -x_{n-j} \leq 1 = z_j \vee z_{n-j}$ para todo j tal que $t \leq j \leq n-1$. Luego $x \wedge \sim x \leq z \vee \sim z$.

Vamos a definir una estructura de M-álgebra n-valente en $M_n(B)$. Por los resultados de Cignoli [2] toda M-álgebra n-valente es un álgebra de Kleene. Acabamos de probar que $M_n(B)$ es un álgebra de Kleene sin utilizar los resultados de Cignoli.

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in M_n(B)$ pongamos por definición:

$$\sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (x_i, x_i, \ldots, x_i), \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

claramente $(x_i, x_i, \ldots, x_i) \in M_n(B)$. Entonces se verifica sin dificultad que $M_n(B)$ es un M-álgebra n-valente. Esta construcción es similar a la indicada por Moisil [6].
Observemos que

$$\mathcal{B}(M_n(B)) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in B^{n-1} : x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}\},$$

luego el álgebra de Boole $\mathcal{B}(M_n(B))$ es isomorfa a B.

Dado un ideal I de un álgebra de Boole B consideremos el conjunto

$$M_n(B, I) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in M_n(B) : -x_1 \wedge x_{n-1} \in I\}.$$

Probemos que $M_n(B, I)$ es una M-subálgebra de $M_n(B)$. En efecto:

1) $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0), \mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in M_n(B, I)$.

2) Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in M_n(B, I)$ entonces $\sim x \in M_n(B, I)$.
Por hipótesis $-x_1 \wedge x_{n-1} \in I$. La primera coordenada de $\sim x$ es $-x_{n-1}$ y la última es $-x_1$, luego $-(-x_{n-1}) \wedge -x_1 = -x_1 \wedge x_{n-1} \in I$.

3) Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in M_n(B, I)$ entonces $x \wedge y \in M_n(B, I)$.
Por hipótesis $-x_1 \wedge x_{n-1} \in I$ y $-y_1 \wedge y_{n-1} \in I$. Luego:
$-(x_1 \wedge y_1) \wedge (x_{n-1} \wedge y_{n-1}) = (-x_1 \vee -y_1) \wedge (x_{n-1} \wedge y_{n-1}) =$
$(-x_1 \wedge x_{n-1} \wedge y_{n-1}) \vee (-y_1 \wedge x_{n-1} \wedge y_{n-1})$.
Como $-x_1 \wedge x_{n-1} \wedge y_{n-1} \leq -x_1 \wedge x_{n-1}$ y como por hipótesis $-x_1 \wedge x_{n-1} \in I$ e I es un ideal entonces: $-x_1 \wedge x_{n-1} \wedge y_{n-1} \in I$. En forma análoga se prueba que: $-y_1 \wedge x_{n-1} \wedge y_{n-1} \in I$, luego $x \wedge y \in M_n(B, I)$.

4) Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in M_n(B, I)$ entonces $\sigma_i x \in M_n(B, I)$, para $1 \leq i \leq n-1$.
$\sigma_i x = (x_i, x_i, \ldots, x_i)$ y como $-x_i \wedge x_i = 0 \in I$, entonces $\sigma_i x \in M_n(B, I)$.

Observación 2.1 *Se pruebs sin dificultad que:*

1) $M_n(B, B) = M_n(B)$.

2) $\mathcal{B}(M_n(B)) = \mathcal{B}(M_n(B), I)$, *para todo ideal* I *de* B.

3) Si I_1 *e* I_2 *son ideales de* B *tales que* $I_1 \subseteq I_2$ *entonces* $M_n(B, I_1)$ *es una M-subálgebra de* $M_n(B, I_2)$,

4) $M_n(B, \{0\}) \subseteq M_n(B, I) \subseteq M_n(B, B)$, cualquiera que sea el ideal I de B,

5) $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in M_n(B, \{0\}) \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$ *y por lo tanto* $M_n(B, \{0\})$ *es un álgebra de Boole isomorfa a* B,

6) Si I *y* J *son ideales de* B, *entonces* $\mathcal{B}(M_n(B), I) = \mathcal{B}(M_n(B), J)$.

3 Algebras de Post y axled

Un M-álgebra n-valente L se dice un álgebra de Post n-valente si existen $c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1} = 1 \in L$, denominados los centros de L, tales que $\sigma_i c_j = 0$ para $i + j < n$ y $\sigma_i c_j = 1$ para $i + j \geq n$.

Observemos que los siguientes elementos de $M_n(B)$

$$\begin{array}{lcl} c_1 & = & (0, 0, \ldots, 0, 1), \\ c_2 & = & (0, 0, \ldots, 1, 1), \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-2} & = & (0, 1, \ldots, 1, 1), \\ c_{n-1} & = & (1, 1, \ldots, 1, 1). \end{array}$$

verifican las condiciones anteriores, por lo tanto $M_n(B)$ es un álgebra de Post n-valente.

Definición 3.1 *Un M-álgebra n-valente L, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ se dice axled si existen elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \in L$, denominados los ejes de L, tales que para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y para todo $j = 1, 2, \ldots, n-2$:*

(A1) *Si $i + j \leq n - 1$ entonces $\sigma_i a_j = 0$,*

(A2) *Si $i + j = n$ entonces $\sigma_{n-1} x \leq \sigma_1 x \ \vee \sigma_i a_j$, cualquiera que sea $x \in L$.*

([4], pág. 177)

Es bien conocido que toda álgebra de Post n-valente es un M-álgebra n-valente axled.
Si L es un M-álgebra n-valente entonces [4]:

(A3) $\sigma_t a_s = \sigma_u a_v$ cualesquiera que sean t, s, u, v tales que $t + s \geq n$ y $u + v \geq n$, $1 \leq t, u \leq n-1$, $1 \leq s, v \leq n-2$,

(A4) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n-2}$.

(A5) $x = \bigvee\limits_{j=2}^{n-1} (\sigma_{n-j} x \wedge a_j) \vee \sigma_1 x$ cualquiera que sea $x \in L$.

Por [4], pág. 192 sabemos que si L es un M-álgebra n-valente y $b \in \mathcal{B}(L)$ entonces $L \cong [b) \times (b]$. Por el Lema 1.1, $[b) \cong (\sim b]$ luego también tenemos que $L \cong (\sim b] \times (b]$. Observemos que si $b = 0$ entonces $L \cong L \times \{0\}$ y si $b = 1$ entonces $L \cong \{1\} \times L$. Si $b \in \mathcal{B}(L) \setminus \{0, 1\}$ entonces $N[[b)] > 1$ y $N[(\sim b]] > 1$.
Por [4], pág. 193, sabemos que si L es un M-álgebra n-valente axled entonces $L \cong [\sigma_{n-1} a_1) \times (\sigma_{n-1} a_1]$ donde $[\sigma_{n-1} a_1)$ es un álgebra de Boole y $(\sigma_{n-1} a_1]$ es un álgebra de Post n-valente. Supongamos que L no es un álgebra de Boole ni un álgebra de Post n-valente, entonces $\sigma_{n-1} a_1 \in \mathcal{B}(L) \setminus \{0, 1\}$. En efecto si $\sigma_{n-1} a_1 = 0$ entonces por (A3) $\sigma_i a_{n-i} = \sigma_{n-1} a_1 = 0$, para $1 \leq i \leq n-1$. Luego por (A2) $\sigma_{n-1} x \leq \sigma_1 x \vee \sigma_i a_{n-i} = \sigma_1 x \vee 0 = \sigma_1 x$ y como $\sigma_1 x \leq x \leq \sigma_{n-1} x$ tenemos que $\sigma_1 x = x$ y en consecuencia $x \in \mathcal{B}(L)$ para todo $x \in L$, entonces L sería un álgebra de Boole, absurdo.
Si $\sigma_{n-1} a_1 = 1$ entonces los elementos $c_i = a_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n-2$ y $c_{n-1} = 1$ verifican $\sigma_i c_j = 0$ para $i + j < n$ y $\sigma_i c_j = 1$ para $i + j \geq n$. Luego L sería un álgebra de Post n-valente, absurdo.

Si L es un M-álgebra n-valente axled finita, $N[L] > 1$ y b un átomo de $\mathcal{B}(L)$. Como $b \leq 1 = \sim \sigma_{n-1} a_1 \vee \sigma_{n-1} a_1$ y $\sim \sigma_{n-1} a_1, \sigma_{n-1} a_1 \in \mathcal{B}(L)$ entonces $b \leq \sim \sigma_{n-1} a_1$ ó $b \leq \sigma_{n-1} a_1$.

(C1) Si b verifica (1) $b \leq \sim \sigma_{n-1} a_1$ entonces $(b] = \{0, b\} \cong C_2$. En efecto, si $x \in (b]$ esto es (2) $0 \leq x \leq b$ entonces $0 \leq \sigma_1 x \leq \sigma_1 b = b$, luego como $b \in \mathcal{A}(\mathcal{B}(L))$ y $\sigma_1 x \in \mathcal{B}(L)$ tenemos que (3) $\sigma_1 x = b$ ó (4) $\sigma_1 x = 0$. Si ocurre (3) entonces, (5) $b = \sigma_1 x \leq x$. De (2) y (5) resulta $x = b$. Si ocurre (4) entonces, por (A2) $x \leq \sigma_{n-1} x \leq \sigma_1 x \vee \sigma_i a_{n-i} = 0 \vee \sigma_i a_{n-i} = \sigma_i a_{n-i}$ para todo i, $2 \leq i \leq n-1$, en particular si $i = n-1$ tenemos (6) $x \leq \sigma_{n-1} a_1$. De (1), (2) y (6) resulta $x \leq \sigma_{n-1} a_1 \wedge \sim \sigma_{n-1} a_1 = 0$, luego $x = 0$.

(C2) Si b verifica (1) $b \leq \sigma_{n-1} a_1$, sean $a_0 = 0$, $a_{n-1} = 1$ y

$$Z = \{z_j = a_j \wedge b : 0 \leq j \leq n-1\},$$

luego $Z \subseteq (b]$. Como $a_j \leq a_{j+1}$, $0 \leq j \leq n-2$ entonces $z_j \leq z_{j+1}$, $0 \leq j \leq n-2$. Si existe j, $0 \leq j \leq n-2$ tal que $z_j = z_{j+1}$ entonces $\sigma_{n-(j+1)}z_j = \sigma_{n-(j+1)}z_{j+1}$, esto es $\sigma_{n-(j+1)}a_j \wedge b = \sigma_{n-(j+1)}a_{j+1} \wedge b$. Por (A1) tenemos (2) $\sigma_{n-(j+1)}a_j = 0$. Por (A3) tenemos (3) $\sigma_{n-(j+1)}a_{j+1} = \sigma_{n-1}a_1$, luego de (2), (3) y (1) resulta $b = \sigma_{n-1}a_1 \wedge b = 0$, lo que contradice que b es un átomo de $\mathcal{B}(L)$. Luego $N[Z] = n$.
Si $x \in (b]$, esto es $0 \leq x \leq b$ entonces $0 \leq \sigma_i x \leq \sigma_i b = b$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n-1$. Como b es un átomo de $\mathcal{B}(L)$ y $\sigma_i x \in \mathcal{B}(L)$ tenemos que:

$$\text{para cada índice } i,\ 1 \leq i \leq n-1,\quad \sigma_i x = b \text{ ó } \sigma_i x = 0. \tag{1}$$

Si $\sigma_i x \neq 0$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$, entonces por (1) $\sigma_i x = b$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$, luego por (A5) tenemos

$$x = \bigvee_{j=2}^{n-1}(\sigma_j x \wedge a_{n-j}) \vee \sigma_1 x = \bigvee_{j=2}^{n-1}(b \wedge a_{n-j}) \vee b = b = z_{n-1} \in Z.$$

Sea k, $1 \leq k \leq n-1$, el mayor índice tal que $\sigma_k x = 0$. Como $\sigma_1 x \leq \sigma_2 x \leq \ldots \leq \sigma_k x$, entonces

$$\sigma_i x = 0 \text{ para todo } i \text{ tal que } 1 \leq i \leq k. \tag{2}$$

Si $k = n-1$, esto es $\sigma_{n-1}x = 0$, entonces como $x \leq \sigma_{n-1}x$ tenemos que $x = 0 = z_0 \in Z$. Si $1 \leq k \leq n-2$ entonces por (1) y (2) $\sigma_i x = b$ para todo i, $i > k$, luego por (A5) $x = \bigvee\limits_{j=k+1}^{n-1}(\sigma_j x \wedge a_{n-j}) = \bigvee\limits_{j=k+1}^{n-1}(b \wedge a_{n-j}) = b \wedge (\bigvee\limits_{j=k+1}^{n-1} a_{n-j})$, luego por (A4) $x = b \wedge a_{n-(k+1)} = z_{n-(k+1)} \in Z$.
Por lo tanto probamos que $(b] = \{0, b \wedge a_1, b \wedge a_2 \ldots, b \wedge a_{n-2}, b\}$.

Por la Observación 1.1, $(b]$ es un M-álgebra n-valente, donde $\sim_2 z_j = \sim z_j \wedge b = \sim a_j \wedge b$, para todo $z_j \in (b]$.
Vamos a probar que (*) $\sim_2 z_j = z_{n-(j+1)}$, para $0 \leq j \leq n-1$, lo cuál es obvio para $j = 0$ ó $j = n-1$. Si $1 \leq j \leq n-2$ y $1 \leq i \leq n-1$ entonces por L4) tenemos

$$(4)\quad \sigma_i \sim_2 z_j = \sigma_i \sim a_j \wedge b = \sim \sigma_{n-i}a_j \wedge b.$$

Por otro lado

$$(5)\quad \sigma_i z_{n-(j+1)} = \sigma_i a_{n-(j+1)} \wedge b$$

Si (6) $j < i$ entonces $n - i + j < n$ luego por (4) y (A1) tenemos

$$\sigma_i \sim_2 z_j = \sim \sigma_{n-i}a_j \wedge b = \sim 0 \wedge b = 0.$$

De (6) $j \leq i-1$ luego $n = (n-j) + j \leq (n-j) + i - 1 = i + n - (j+1)$, y por lo tanto de (A3) y la hipótesis $b \leq \sigma_{n-1}a_1$ tenemos

$$\sigma_i a_{n-(j+1)} \wedge b = \sigma_{n-1}a_1 \wedge b = b,$$

luego

$$\sigma_i \sim_2 z_j = \sigma_i z_{n-(j+1)},\quad \text{para } i < j.$$

Supongamos ahora quew (7) $j \geq i$ luego (8) $n - i + j \geq n$ y (9) $i + n - (j+1) \leq n - 1 < n$. De la hipótesis $b \leq \sigma_{n-1}a_1$ resulta (10) $\sim \sigma_{n-1}a_1 \wedge b = 0$. De (8), (A3) y

(10):

$$\sigma_i \sim_2 z_j = \sim \sigma_{n-i}a_j \wedge b = \sim \sigma_{n-1}a_1 \wedge b = 0,$$

y por (9) y (A1)

$$\sigma_i a_{n-(j+1)} \wedge b = 0 \wedge b = 0.$$

Luego

$$\sigma_i \sim_2 z_j = \sigma_i z_{n-(j+1)}, \quad \text{para } j \geq i.$$

Además $\sigma_i z_0 = 0$, $\sigma_i z_{n-1} = b$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Si $1 \leq j \leq n-2$, y $1 \leq i \leq n-1$, tenemos que $\sigma_i z_j = \sigma_i(a_j \wedge b) = \sigma_i a_j \wedge b$, luego si $i+j < n$ entonces por (A1) $\sigma_i a_j = 0$ luego $\sigma_i z_j = 0$. Si $i+j \geq n$ entonces por (A3) y $b \leq \sigma_{n-1}a_1$ tenemos que $\sigma_i z_j = \sigma_i a_j \wedge b = \sigma_{n-1}a_1 \wedge b = b$.
Por lo tanto acabamos de probar que $(b] \cong C_n$.

Si $\mathcal{B}(L)$ tiene m átomos y $b \in \mathcal{A}(\mathcal{B}(L))$ entonces ya vimos que $b \leq\sim \sigma_{n-1}a_1$ ó $b \leq \sigma_{n-1}a_1$.
Sean

$$j = N[\{b \in \mathcal{A}(\mathcal{B}(L)) : b \leq \sim \sigma_{n-1}a_1\} \text{ y } k = N[\{b \in \mathcal{A}(\mathcal{B}(L)) : b \leq \sigma_{n-1}a_1\},$$

luego $m = j + k$.
Por el Lema 1.1, sabemos que $[\sigma_{n-1}a_1) \cong (\sim \sigma_{n-1}a_1]$, luego

$$L \cong (\sim \sigma_{n-1}a_1] \times (\sigma_{n-1}a_1] \tag{I}$$

y como

$$(\sim \sigma_{n-1}a_1] \cong \prod\{(b] : b \in \mathcal{A}(\mathcal{B}(L),\ b \leq\sim \sigma_{n-1}a_1\},$$

$$(\sigma_{n-1}a_1] \cong \prod\{(b] : b \in \mathcal{A}(\mathcal{B}(L),\ b \leq \sigma_{n-1}a_1\}$$

entonces

$$L \cong C_2^j \times C_n^k.$$

Esto generaliza nuestros resultados para las álgebras de Łukasiewicz trivalentes con eje [10], [1], y dá una mayor precisión al resultado indicado en [4], pág. 293.

Si $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $y \in B_m$, $y \neq 0$ entonces $M_n(B_m, (y])$ es axled. En efecto, sean a_j, $1 \leq j \leq n-2$, los siguientes elementos de $M_n(B_m, (y])$:

$$a_j = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i(n-1)}),$$

tales que $a_{jh} = 0$, para $1 \leq h < n-j$ y $a_{jh} = y$, para $n-j \leq h$, esto es

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & (0, 0, \ldots, 0, y), \\ a_2 & = & (0, 0, \ldots, y, y), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & = & (0, y, \ldots, y, y). \end{array}$$

Luego se verifica la condición (A1). En efecto, si (*) $1 \leq i \leq n-1 1 \leq j \leq n-2$ e $i+j < n$ entonces:

$$\sigma_i a_j = (a_{ji}, a_{ji}, \ldots, a_{ji}) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Supongamos ahora que $i+j=n$; si $i=1$ no existe j, $1\leq j\leq n-2$ tal que $i+j=n$, luego $2\leq i\leq n-1$ y por lo tanto

$$\sigma_i a_j=\sigma_i a_{n-i}=(y,y,\ldots,y). \tag{1}$$

Si $x=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\in M_n(B_m,(y])$ entonces

$$x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_{n-1}, \tag{2}$$

$$-x_1\wedge x_{n-1}\in(y], \tag{3}$$

$$\sigma_i x=(x_i,x_i,\ldots,x_i),\ \text{ para todo } i,\ 1\leq i\leq n-1. \tag{4}$$

De (3) resulta $-x_1\wedge x_{n-1}\leq y$, luego $x_1\vee(-x_1\wedge x_{n-1})\leq x_1\vee y$, esto es $x_1\vee x_{n-1}\leq x_1\vee y$ y como por (2) $x_1\leq x_{n-1}$ deducimos que

$$x_{n-1}\leq x_1\vee y. \tag{5}$$

Luego si, $i+j=n$, $2\leq i\leq n-1$ entonces por (4), (1) y (5):

$$\sigma_1 x\vee\sigma_i a_j=(x_1\vee y,x_1\vee y,\ldots,x_1\vee y)\geq\sigma_{n-1}x, \tag{6}$$

luego se verifica (A2).

Sea $\mathcal{A}(B_m)=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$, como $y\in B_m\setminus\{0\}$ entonces y es supremo de t átomos, $1\leq t\leq m$, de B_m. Supongamos que $y=b_1\vee b_2\vee\ldots\vee b_t$. Entonces:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}(M_n(B_m,(y]))=\{(b_i,b_i,\ldots,b_i)\in B^{n-1}:1\leq i\leq m\}. \tag{II}$$

Por (I):

$$M_n(B_m,(y])\cong(\sim\sigma_{n-1}a_1]\times(\sigma_{n-1}a_1].$$

Como

$$\sim\sigma_{n-1}a_1=\sim(y,y,\ldots,y)=(-y,-y,\ldots,-y)=(\bigvee_{k=t+1}^{m}b_k,\bigvee_{k=t+1}^{m}b_k,\ldots,\bigvee_{k=t+1}^{m}b_k)$$

entonces por (II) resulta:

$$N[\{x\in\mathcal{A}(\mathcal{B}(M_n(B_m,(y])):x\leq\sim\sigma_{n-1}a_1\}]=m-t,$$

y como

$$\sigma_{n-1}a_1=(y,y,\ldots,y)=(\bigvee_{k=1}^{t}b_k,\bigvee_{k=1}^{t}b_k,\ldots,\bigvee_{k=1}^{t}b_k)$$

entonces por (II) resulta:

$$N[\{x\in\mathcal{A}(\mathcal{B}(M_n(B_m,(y])):x\leq\sigma_{n-1}a_1\}]=t,$$

luego $M_n(B_m,(y])\cong C_2^{m-t}\times C_n^t$.

Si $y=0$, esto es $t=0$ entonces, $M_n(B_m,\{0\})\cong C_2^{m-0}\times C_n^0\cong C_2^m\cong B_m$. Si $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, entonces $M_n(B_m)=M_n(B_m,B_m)\cong C_2^{m-m}\times C_n^m\cong C_n^m$, luego $N[M_n(B_m)]=n^m$.

Si $n \in \mathbb{N}$, sea $B_m^{[C_n]}$ el conjunto de todas las funciones isótonas de la cadena C_n en el álgebra de Boole B_m, luego si $n \geq 3$, $M_n(B_m) = B_m^{[C_{n-1}]}$ y por lo tanto $N[B_m^{[C_{n-1}]}] = n^m$. Si $n = 1$, es claro que $N[B_m^{[C_1]}] = N[B_m] = 2^m$ y si $n = 2$ es fácil ver que $N[B_m^{[C_2]}] = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot 2^{m-k} = 3^m$. Luego tenemos

$$N[B_m^{[C_n]}] = (n+1)^m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que

(1) $M_3(B_{2^m}, \{0\}) \cong (C_2)^{2^m}$ es un álgebra de Boole con un conjunto de m generadores libres.

(2) Si $p = 3^m$ e $y \in B_p$ es supremo de $t = 3^m - 2^m$ átomos de B_p entonces $M_3(B_{3^m}, (y]) \cong C_2^{2^n} \times C_3^{3^m - 2^m}$, es un álgebra de Łukasiewicz trivalente con un conjunto de m generadores libres [7],

(3) $M_n(B_{n^m}, (1]) \cong (C_n)^{n^m}$ es un álgebra de Post n-valente con un conjunto de m generadores libres,

(4) Si y es supremo de 3^m átomos del álgebra de Boole $B_{3^m+2^m}$ entonces

$$M_3(B_{3^m+2^m}, (y]) \cong C_2^{2^m} \times C_3^{3^m},$$

es el álgebra de Moisil n-valente axled con un conjunto de m generadores libres, [4]. Para el caso particular $n = 3$, [7], [9].

Lema 3.1 *Si L es un M-álgebra n-valente entonces $I = \sigma_{n-1}(\sigma_1^{-1}(0))$ es un ideal de $\mathcal{B}(L)$.*

Dem. Observemos en primer lugar que $x \in I$ si y solo si (1) $x = \sigma_{n-1}y$ donde $y \in \sigma_1^{-1}(0)$ esto es $\sigma_1 y = 0$. Luego de (1) resulta que $I \subseteq \mathcal{B}(L)$.
Claramente $0 \in I$. Sean $x_1, x_2 \in I$ luego $x_1 = \sigma_{n-1}y_1$ con $\sigma_1 y_1 = 0$ y $x_2 = \sigma_{n-1}y_2$ con $\sigma_1 y_2 = 0$. luego $x \vee y = \sigma_{n-1}y_1 \vee \sigma_{n-1}y_2 = \sigma_{n-1}(y_1 \vee y_2)$ y $\sigma_1(y_1 \vee y_2) = \sigma_1 y_1 \vee \sigma_1 y_2 = 0$. Luego $x_1 \vee y_2 \in I$.
Probemos que: Si $x \in I$ e $y \in \mathcal{B}(L)$ verifica $y \leq x$ entonces $y \in I$. En efecto por hipótesis $x = \sigma_{n-1}x_1$ con $\sigma_1 x_1 = 0$ y $\sigma_{n-1}y = \sigma_1 y = y$. Sea $y_1 = x_1 \wedge y$ luego (2) $\sigma_1 y_1 = \sigma_1 x_1 \wedge \sigma_1 y = 0 \wedge y = 0$. Además (3) $\sigma_{n-1}y_1 = \sigma_{n-1}(x_1 \wedge y) = \sigma_{n-1}x_1 \wedge \sigma_{n-1}y = x \wedge y = y$. De (2) y (3) resulta que $y \in I$. ∎

Si $b \in \mathcal{B}(L)$ notaremos $(b]_{\mathcal{B}(L)} = \{x \in \mathcal{B}(L) : x \leq b\}$. Es claro que $(b]_{\mathcal{B}(L)} = (b] \cap \mathcal{B}(L)$.

Lema 3.2 *Si L es un M-álgebra n-valente axled entonces $\sigma_{n-1}(\sigma_1^{-1}(0)) = (\sigma_{n-1}a_1]_{\mathcal{B}(L)}$.*

Dem. En efecto como $\sigma_1 a_1 = 0$ entonces $a_1 \in \sigma_1^{-1}(0)$ luego $\sigma_{n-1}a_1 \in \sigma_{n-1}(\sigma_1^{-1}(0))$ y en consecuencia $(\sigma_{n-1}a_1]_{\mathcal{B}(L)} \subseteq \sigma_{n-1}(\sigma_1^{-1}(0))$.
Sea $y \in \sigma_{n-1}(\sigma_1^{-1}(0))$, luego (1) $y = \sigma_{n-1}y_1$ con $\sigma_1 y_1 = 0$. Por (1) $y \in \mathcal{B}(L)$. Como L es axled se verifica (2) $y = \sigma_{n-1}y_1 \leq \sigma_1 y_1 \vee \sigma_{n-1}a_1 = 0 \vee \sigma_{n-1}a_1 = \sigma_{n-1}a_1$. De (1) y (2) resulta que $y \in (\sigma_{n-1}a_1]_{\mathcal{B}(L)}$. ∎

Lema 3.3 *Si L es un M-álgebra n-valente axled entonces la transformación*

$$\alpha : L \to M_n(\mathcal{B}(L), (\sigma_{n-1}a_1]_{\mathcal{B}(L)})$$

definida por $\alpha(x) = (\sigma_1 x, \sigma_2 x, \ldots, \sigma_{n-1}x)$ es un isomorfismo.

Dem. Sabemos, [3], [4], que la transformación α es un homomorfismo inyectivo. Probemos que es suryectivo. Dado $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in M_n(\mathcal{B}(L), (\sigma_{n-1}a_1]_{\mathcal{B}(L)})$, esto es

$$y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_{n-1}, \tag{1}$$

y

$$-y_1 \wedge y_{n-1} \leq \sigma_{n-1}a_1. \tag{2}$$

Sea h tal que $1 \leq h \leq n-1$, luego de (2) y (1) resulta que:

$$-y_1 \wedge y_h = -y_1 \wedge y_{n-1} \wedge y_h \leq \sigma_{n-1}a_1 \wedge y_h \leq \sigma_{n-1}a_1, \text{ para } 1 \leq h \leq n-1.$$

y por lo tanto

$$y_h = y_1 \vee y_h = y_1 \vee (-y_1 \wedge y_h) \leq y_1 \vee \sigma_{n-1}a_1. \tag{3}$$

Sea

$$x = [\bigvee_{k=2}^{n-1} (y_k \wedge a_{n-k})] \vee y_1,$$

luego $x \in L$. Entonces

$$\sigma_h x = [\bigvee_{k=2}^{n-1} (y_k \wedge \sigma_h a_{n-k})] \vee y_1.$$

Si $h = 1$ entonces como $1 + (n-k) \leq n-1$ resulta por (A1) que $\sigma_1 a_{n-k} = 0$, luego

$$\sigma_1 x = y_1. \tag{4}$$

Si $2 \leq h \leq n-1$, entonces si $h < k$ tenemos que $h + (n-k) \leq n-1$ y por lo tanto teniendo en cuenta (A1) resulta que $\sigma_h a_{n-k} = 0$, luego:

$$\sigma_h x = [\bigvee_{k=2}^{h} (y_k \wedge \sigma_h a_{n-k})] \vee y_1. \tag{5}$$

Pero por (A3) sabemos que

$$\text{si } t + s \geq n \text{ entonces } \sigma_t a_s = \sigma_{n-1}a_1. \tag{6}$$

Luego de (5) y (6) resulta que

$$\sigma_h x = [\bigvee_{k=2}^{h} (y_k \wedge \sigma_{n-1}a_1)] \vee y_1 = [(\bigvee_{k=2}^{h} y_k) \wedge \sigma_{n-1}a_1] \vee y_1. \tag{7}$$

Y por lo tanto teniendo en cuenta (1) tenemos que

$$\sigma_h x = (y_h \wedge \sigma_{n-1} a_1) \vee y_1 = y_h \wedge (\sigma_{n-1} a_1 \vee y_1). \tag{8}$$

Luego de (8) y (3) resulta que

$$\sigma_h x = y_h, \text{ cualquiera que sea } h,\ 2 \leq h \leq n-1 \tag{9}$$

De (4) y (9) $\sigma_h x = y_h$, cualquiera que sea h, $1 \leq h \leq n-1$ y por lo tanto $\alpha(x) = y$, luego α es una función suryectiva. ■

Corolario 3.1 *Si L es un álgebra de Post n-valente entonces:* $\sigma_{n-1}(\sigma_1^1(0)) = (\sigma_{n-1}c_1]_{\mathcal{B}(L)} = (1]_{\mathcal{B}(L)} = \mathcal{B}(L)$ *y por lo tanto* $L \cong M_n(\mathcal{B}(L), \mathcal{B}(L))$.

Si $(B, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica, $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in M_n(B)$ y definimos: $\exists(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (\exists x_1, \exists x_2, \ldots, \exists x_{n-1})$., entonces $(\exists x_1, \exists x_2, \ldots, \exists x_{n-1}) \in M_n(B)$. Además:

E1) $\exists \mathbf{0} = \exists(0, 0, \ldots, 0) = (\exists 0, \exists 0, \ldots, \exists 0) = (0, 0, \ldots, 0)$.

E2) $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \wedge \exists(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) =$
$(x_1 \wedge \exists x_1, x_2 \wedge \exists x_2, \ldots, x_{n-1} \wedge \exists x_{n-1}) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

E3) $\exists\left((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \wedge \exists(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\right) =$
$\exists\left(x_1 \wedge \exists y_1, x_2 \wedge \exists y_2, \ldots, x_{n-1} \wedge \exists y_{n-1}\right) =$
$\left(\exists\left(x_1 \wedge \exists y_1\right), \exists\left(x_2 \wedge \exists y_2\right), \ldots, \exists\left(x_{n-1} \wedge \exists y_{n-1}\right)\right) =$
$(\exists x_1 \wedge \exists y_1, \exists x_2 \wedge \exists y_2, \ldots, \exists x_{n-1} \wedge \exists y_{n-1}) =$
$(\exists x_1, \exists x_2, \ldots, \exists x_{n-1}) \wedge (\exists y_1, \exists y_2, \ldots, \exists y_{n-1}) =$
$\exists(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \wedge \exists(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$.

E4) $\sigma_i \exists(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sigma_i(\exists x_1, \exists x_2, \ldots, \exists x_{n-1}) =$
$(\exists x_i, \exists x_i, \ldots, \exists x_i) = \exists(x_i, x_i, \ldots, x_i) = \exists \sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Entonces $(M_n(B), \exists)$ es un M-álgebra n-valente monádica, que notaremos $MM_n(B)$.

Sea I un ideal monádico de B esto es: $\exists x \in I$, cualquiera que sea $x \in I$.
Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ un elemento de $M_n(B, I)$ luego (1) $-x_1 \wedge x_{n-1} \in I$.
Como (2) $\forall - x_1 \wedge x_{n-1} \leq -x_1 \wedge x_{n-1}$, e dado que I es un ideal, entonces de (1) y (2) tenemos que $\forall - x_1 \wedge x_{n-1} \in I$. Y como I es un ideal monádico resulta que $\exists\left(\forall - x_1 \wedge x_{n-1}\right) \in I$, esto es $-\exists x_1 \wedge \exists x_{n-1} \in I$, luego $\exists x \in M_n(B, I)$, y por lo tanto $M_n(B, I)$ es un M-álgebra monádica n-valente [4], que notaremos $MM_n(B, I)$.

Si $(B_p, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica es bien conocido que $K(B_p) = \{x \in B_p : \exists x = x\}$ es una subálgebra de Boole de B_p y que si $y \in B_p$ entonces $(y]$ es un ideal monádico si y solo si $y \in K(B_p)$.

Si $y \in K(B_p) \backslash \{0\}$ es supremo de t átomos de B_p entonces la M-álgebra n-valente monádica $MM_n(B_p, (y])$ es isomorfa a $C_2^{p-t} \times C_n^t$.

Si $m \in \mathbb{N}$, sean $p = 3^m \cdot 2^{3^m - 1}$, $q = 2^{2^m + m - 1}$ y $t = p - q$. Si $(B_p, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica tal que existe $y \in K(B_p)$ donde y es el supremo de t átomos of B_p entonces

$$MM_3(B_p, (y]) \cong C_2^{p-t} \times C_3^t = C_2^q \times C_3^{p-q},$$

luego $MM_3(B_p, (y])$ es el álgebra de Łukasiewicz trivalente monádica, con un conjunto de m generadores libres, [8].

Referencias

[1] Abad, M., Monteiro L., Savini S. and Sewald J., *Subalgebras of a finite three-valued Lukasiewicz algebra*, Proceedings of the IX Latin American Symposium on Mathematical Logic (Part1), Notas de Lógica Matemática 38 (1993),181-190, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

[2] Cignoli, R., *Moisil Algebras*, Notas de Lógica Matemática 27, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina,(1970).

[3] Cignoli, R., *Some algebraic aspects of many-valued logics*, Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic, (1980), 49-69.

[4] Boicescu, V., Filipoiu, A., Georgescu, G. and Rudeanu, S., *Łukasiewicz-Moisil Algebras*, Annals of Discrete Mathematics 49, North-Holland, 1991.

[5] Halmos P.R., *Algebraic Logic*, Chelsea Pub. Co. New York (1962).

[6] Moisil Gr. C., *Essais sur les logiques non-chrysippiennes*, Editions de L'Academie de Roumanie, 1972.

[7] Monteiro A., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes con un número finito de generadores libres, Algebras de Moisil trivalentes con un número finito de generadores libres* Informes Técnicos Internos 61, INMABB-CONICET-UNS (1998).

[8] Monteiro L., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas*, Notas de Lógica Matemática 32, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina,(1974).

[9] Monteiro L., *Algèbres de Post et de Moisil trivalentes monadiques*, Logique et Analyse, 79 (1977), 329-337.

[10] Monteiro L., Savini S. and Sewald J., *Construction of Monadic Three-valued Łukasiewicz algebras*. Studia Logica, L , 3/4 (1991), 473-483.