INFORME TECNICO INTERNO

N°. 89

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA
República Argentina

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 89

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2004 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 89

ÁLGEBRAS INCLINADAS

Juan A. Cappa – Melina Verdecchia

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2004

INTRODUCCIÓN

Las álgebras inclinadas y los módulos inclinantes fueron definidos por Happel y Ringel [11] en 1982, y su estudio forma parte de la teoría inclinante. Esta teoría estudia la relación entre $\operatorname{mod} A$ y $\operatorname{mod} B$, donde $A \cong End_B(U)$ y U_B es un B- módulo con propiedades homológicas especiales (inclinante). Para la historia de la teoría inclinante, ver Happel [10]. Esta relación entre las categorías de módulos es muy estrecha cuando B es un álgebra hereditaria. Además las álgebras hereditarias y sus categorías de módulos han sido extensamente estudiadas. Esto nos lleva a considerar las álgebras $A \cong End_B(U)$, con B hereditaria y U_B inclinante, que denominamos álgebras inclinadas.

El propósito de este trabajo, que está basado principalmente en una publicación de Assem [1], es exponer resultados clásicos de caracterización de las álgebras inclinadas debidos a Ringel [14], Bakke [7] y otros. Se da aquí un tratamiento unificado de estos resultados, siguiendo fundamentalmente los lineamientos de un trabajo de Bakke [6] de 1988, pero algunas demostraciones son originales, y ponen de manifiesto la relación entre las distintas estructuras cuya existencia caracteriza las álgebras inclinadas. En particular se presenta una nueva demostración de un resultado de Assem, Platzeck y Trepode [2] de 2004, que dice que un álgebra inclinada A está caracterizada por la existencia de un A - módulo inclinante convexo. También se define la noción de sección en $\operatorname{mod} A$, introducida en unas notas de seminario de Sandra Michelena, que es más general que la de sección completa que fuera introducida por Ringel [14] en 1984, y menos general que el módulo sincero considerado por Bakke, y se relaciona este concepto con los anteriores. En particular se muestra que toda sección puede extenderse a una sección completa.

El trabajo está dividido en dos partes. En la primera parte se introducen las nociones de módulo inclinante y teoría de torsión en $\operatorname{mod} A$, y se presentan sin demostración los resultados preliminares, tales como el teorema de Brenner- Butler. Este material está desarrollado en detalle en [1]. En la segunda parte definimos álgebra inclinada y demostramos una serie de resultados que nos conducen a los Teoremas 2.27 y 2.28, que engloban el objetivo de este trabajo.

1. PRELIMINARES.

En toda esta monografía, k será un cuerpo algebraicamente cerrado fijo, y A una k - álgebra asociativa con unidad de dimensión finita.

Designaremos $\operatorname{mod} A$ a la categoría de los A - módulos a derecha finitamente generados, $\underline{\operatorname{mod}}A$ (respectivamente, $\overline{\operatorname{mod}}A$) a la correspondiente categoría de módulos módulo proyectivos (respectivamente, módulo inyectivos) y D a la dualidad usual de $\operatorname{mod} A$, esto es, $D = Hom_k(-,k)$.

Para una categoría aditiva C, denotaremos por $ind(C)$ a la subcategoría llena de C que consiste de un conjunto completo de representantes de objetos indescomponibles no isomorfos de C. Si, en particular, $C = \operatorname{mod} A$ escribiremos $ind(C) = ind(A)$. Cuando consideremos módulos indescomponibles, supondremos que están en $ind(A)$, toda vez que sea necesario.

Para un A -módulo M, denotaremos por $add(M)$ a la subcategoría llena de $\operatorname{mod} A$ que consiste de las sumas directas de sumandos directos de M, y por $Gen(M)$ (respectivamente, $Cogen(M)$) a la subcategoría llena de $\operatorname{mod} A$ generada (respectivamente, cogenerada) por M. La dimensión proyectiva (respectivamente, inyectiva) de M se notará por $\dim proy(M)$ (respectivamente, $\dim iny(M)$).

Recordemos ahora la noción de módulo inclinante. Un módulo de este tipo inducirá una teoría de torsión en $\operatorname{mod} A$ que está en correspondencia con una teoría de torsión en $\operatorname{mod} B$, donde $B = End(T_A)$, por medio del Teorema de Brenner-Butler.

Comenzamos dando la siguiente definición, debida a Happel y Ringel [11].

DEFINICIÓN 1.1: Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Un módulo T_A se dice un *módulo inclinante* si :

T1) $\dim proy(T_A) \leq 1$;

T2) $Ext_A^1(T_A, T_A) = 0$;

T3) Existe una sucesión exacta corta $0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0$, donde T'_A y T''_A están en $add(T)$.

DEFINICIÓN 1.2: Si T_A es un módulo que satisface las condiciones T1) y T2), se dice que T_A es un *módulo inclinante parcial.*

Observación 1.3: Sea $T_A = T_1^{(m_1)} \oplus ... \oplus T_t^{(m_t)}$ donde los T_i son módulos indescomponibles tales que $T_i \not\cong T_j$ si $i \neq j$. Entonces T_A es un módulo inclinante si y sólo si T_A es un módulo inclinante parcial y satisface:

T3`) t es igual al rango de $K_0(A)$,

donde $K_0(A)$ es el grupo de Grothendieck de A.

DEFINICIÓN 1.4: Si T_A es un módulo que satisface las condiciones T2), T3`) y

T1*) $\dim iny(T_A) \leq 1$,

se dice que T_A es un *módulo coinclinante.*

Si A es hereditaria, todo módulo inclinante es un módulo coinclinante, y recíprocamente. En general, si A es cualquier álgebra, T_A es un A -módulo inclinante si y sólo si ${}_A(DT)$ es un A^{op} -módulo inclinante.

Ahora vamos a presentar un teorema, demostrado por Bongartz [7], que justifica el nombre de módulo inclinante parcial. Su demostración está también en [1], pág. 137.

TEOREMA 1.5: Sea T_A un módulo inclinante parcial. Entonces existe un módulo X_A tal que $T \oplus X$ es un módulo inclinante.

Definimos a continuación teoría de torsión (Dickson [9]).

DEFINICIÓN 1.6: Una *teoría de torsión* en $\operatorname{mod} A$ es un par $(\tau, \Im)$ de clases de módulos tales que:

(1) $Hom_A(M,N)=0$ para todo $M \in \tau$ y $N \in \Im$.

(2) Si $Hom_A(M,X)=0$ para todo $X \in \Im$, entonces $M \in \tau$.

(3) Si $Hom_A(X,N)=0$ para todo $X \in \tau$, entonces $N \in \Im$.

La clase τ es llamada la *clase de torsión* de esta teoría y sus elementos son llamados *módulos de torsión*, mientras que $\Im$ es llamada la *clase sin torsión* y sus elementos son llamados *módulos sin torsión.*

Una clase ζ en $\operatorname{mod} A$ induce una teoría de torsión como sigue:

$$\Im = \{N_A : Hom_A(-,N)|_{\zeta} = 0\} \quad \text{y} \quad \tau = \{M_A : Hom_A(M,-)|_{\Im} = 0\}.$$

DEFINICIÓN 1.7 [5]: Sea C una subcategoría de $\operatorname{mod} A$ cerrada por extensiones. Un módulo no nulo M_A en C se dice *Ext-proyectivo* (respectivamente, *Ext-inyectivo*) en C si $Ext_A^1(M,-)|_C = 0$ (respectivamente, $Ext_A^1(-,M)|_C = 0$).

La siguiente caracterización de módulos Ext-proyectivos y Ext-inyectivos en clases de torsión y sin torsión fue realizada por Auslander y Smalø [5]. También se puede ver su demostración en [1], pág. 132.

LEMA 1.8: Sea $(\tau, \Im)$ una teoría de torsión en $\operatorname{mod} A$. Entonces:

(i) Si $M \in \tau$ entonces: M es Ext-proyectivo en τ si y sólo si $DTrM \in \Im$.

(ii) Si $N \in \Im$ entonces: N es Ext-inyectivo en $\Im$ si y sólo si $TrDN \in \tau$.

Enunciamos ahora algunos resultados. Para su demostración ver [1], págs. 133 y 134.

PROPOSICIÓN 1.9: Si T es un módulo inclinante entonces $Gen(T_A)$ es una clase de torsión y la denominamos $\tau(T_A)$. Además se tiene:

$\tau(T_A) = Gen(T_A) = \{M \in \text{mod}\, A : Ext_A^1(T,M) = 0\}$ (por lo que los A -módulos inyectivos están en $\tau(T_A)$).

PROPOSICIÓN 1.10: Si T es un módulo inclinante entonces la clase sin torsión correspondiente a la clase de torsión $\tau(T_A)$ es $\Im(T_A) = \{M \in \text{mod}\, A : Hom_A(T,M) = 0\}$ y resulta que $\Im(T_A) = Cogen(DTrT)$.

COROLARIO 1.11: Si T es un módulo inclinante entonces los módulos Ext-inyectivos en $\tau(T_A)$ coinciden con los A - módulos inyectivos.

Nuestro próximo paso a seguir es enunciar un lema y su corolario que serán utilizados en la segunda parte. Se puede hallar su demostración en [1], pág. 138.

LEMA 1.12: Si T es un módulo inclinante, para cada $M \in \tau(T_A)$ existe una sucesión exacta corta $0 \to K \to T_0 \to M \to 0$, con $T_0 \in add(T)$ y $K \in \tau(T_A)$.

COROLARIO 1.13: Si X_A es un módulo Ext-proyectivo en $\tau(T_A)$ entonces $X \in add(T)$. Además, si T_A es minimal (en el sentido que si $T = T' \oplus T''$, con $T' \neq 0$, entonces $T' \notin Gen(T'')$) entonces T_A es la suma directa de todos los módulos de $ind(A)$ que son Ext-proyectivos en $\tau(T_A)$.

Ahora vamos a formular el importante Teorema de Brenner-Butler [10].

TEOREMA 1.14: Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, T_A un módulo inclinante y $B = End(T_A)$. Entonces:

(a) ${}_BT$ es un módulo inclinante y $A \cong End({}_BT)^{op}$.

(b) Los funtores $Hom_A(T,-)$ y $-\otimes_B T$ inducen equivalencias inversas entre las subcategorías

$$\tau(T_A) = \{M_A : Ext_A^1(T,M) = 0\} \qquad \text{y} \qquad \gamma(T_A) = \{N_B : \operatorname{Tor}_1^B(N,T) = 0\},$$

mientras que los funtores $Ext_A^1(T,-)$ y $\operatorname{Tor}_1^B(-,T)$ inducen equivalencias inversas entre las subcategorías

$$\Im(T_A) = \{M_A : Hom_A(T,M) = 0\} \qquad \text{y} \qquad \chi(T_A) = \{N_B : N \otimes_B T = 0\}.$$

COROLARIO 1.15: Tenemos $D\chi(T_A) = \Im({}_BT)$ y $D\gamma(T_A) = \tau({}_BT)$. En particular, $(\chi(T_A), \gamma(T_A))$ es una teoría de torsión en $\text{mod}\, B$.

A continuación damos algunas definiciones que servirán para el desarrollo de la segunda parte, como las de módulo inclinante que separa y módulo inclinante que parte una teoría de torsión.

DEFINICIÓN 1.16: Se dice que una teoría de torsión $(\tau, \Im)$ en $\text{mod}(A)$ *se parte* si cada A -módulo indescomponible M es de torsión o sin torsión.

DEFINICIÓN 1.17: Una *terna inclinante* (B,T,A) consiste de dos k -álgebras de dimensión finita A y B, y un módulo T_A inclinante tales que $B \cong End(T_A)$.

Sea (B,T,A) una terna inclinante. Entonces T_A se dice *módulo inclinante que separa* (respectivamente, *que parte*) si la teoría de torsión $(\tau(T_A),\Im(T_A))$ se parte en $\mathrm{mod}(A)$ (respectivamente, la teoría de torsión $(\chi(T_A),\gamma(T_A))$ se parte en $\mathrm{mod}\,B$).

COROLARIO 1.18: Sean A y B álgebras. Si (B,T,A) es una terna inclinante entonces ${}_BT$ es inclinante y $A \cong End({}_BT)^{op}$. Recíprocamente, si ${}_BT$ es un módulo inclinante y $A \cong End({}_BT)^{op}$, entonces (B,T,A) es una terna inclinante.

DEFINICIÓN 1.19: Si A y B son álgebras y ${}_AU_B$ es un bimódulo, decimos que (A,U,B) es una terna coinclinante cuando (B,DU,A) es una terna inclinante.

Observación 1.20: Sean A y B álgebras tales que alguna de ellas es hereditaria. Si ${}_AU_B$ es un bimódulo entonces: (A,U,B) es una terna inclinante si y sólo si es una terna coinclinante.

PROPOSICIÓN 1.21: Sea (B,T,A) una terna inclinante. Entonces: T_A parte si y sólo si ${}_BT$ separa.

El siguiente criterio, debido a Hoshino [13], da una caracterización homológica de los módulos inclinantes que separan (parten).

TEOREMA 1.22: Sea (B,T,A) una terna inclinante.

(a) T_A es un módulo que separa si y sólo si para cada $X_B \in \chi(T)$, X_B no nulo: $\dim proy(X_B) = 1$.

(b) T_A es un módulo que parte si y sólo si para cada $M_A \in \Im(T)$, M_A no nulo: $\dim iny(M_A) = 1$.

COROLARIO 1.23: Si A es un álgebra hereditaria entonces todo módulo inclinante parte.

Ahora escribimos la siguiente relación, llamada Fórmula de Auslander-Reiten, que será utilizada en algunas demostraciones de la segundas parte. Para su demostración ver Auslander y Reiten [3].

TEOREMA 1.24: Sean X e Y en $\mathrm{mod}(A)$. Entonces existen isomorfismos funtoriales

$$Ext_A^1(X,Y) \cong D\underline{Hom}_A(TrDY,X) \cong D\overline{Hom}_A(Y,DTrX).$$

El siguiente lema de Harada- Sai [12], será una herramienta esencial en los Teoremas 2.19 y 2.23. La demostración se puede encontrar en Auslander, Reiten y Smalø [4], págs. 192 y 193.

LEMA 1.25: Si $f_i : M_i \to M_{i+1}$ son no isomorfismos entre módulos indescomponibles M_i para $i = 1,\ldots,2^n - 1$ y $long(M_i) \leq n, \forall i$, entonces $f_{2^n-1} \cdots f_1 = 0$.

2. ÁLGEBRAS INCLINADAS.

El principal objetivo de esta sección es caracterizar ciertas álgebras denominadas inclinadas. Comencemos dando la definición de dichas álgebras.

DEFINICIÓN 2.1: Un álgebra A se dice *inclinada* si existen un álgebra hereditaria B y un módulo inclinante U_B tales que $A \cong End(U_B)$.

Observación 2.2: Por el Corolario 1.23, en la definición precedente, U_B es un módulo inclinante que parte y, por la Proposición 1.21, ${}_AU$ separa.

PROPOSICIÓN 2.3: Sean A un álgebra, B un álgebra hereditaria y ${}_AU_B$ un bimódulo. Entonces (A,U,B) es una terna inclinante si y sólo si (B,DU,A) lo es.

Demostración: Por definición, la terna (A,U,B) es inclinante (coinclinante) si y sólo si la terna (B,DU,A) es coinclinante (inclinante). Como B es hereditaria, la terna (A,U,B) es inclinante si y sólo si es coinclinante. Luego, (A,U,B) es inclinante $\Leftrightarrow$ (A,T,B) es coinclinante $\Leftrightarrow$ (B,DU,A) es inclinante. □

COROLARIO 2.4: A es un álgebra inclinada si y sólo si existe un módulo inclinante T_A tal que $B = End(T_A)$ es hereditaria.

Demostración: Si A es inclinada existen un álgebra hereditaria B y un módulo inclinante U_B tales que $A \cong End(U_B)$. Luego, la terna (A,U,B) es inclinante. Poniendo $T = DU$, por la Proposición 2.3, la terna (B,T,A) es inclinante y
$B \cong End({}_AU)^{op} \cong End(T_A)$.

Recíprocamente, si T_A es un módulo inclinante tal que $B = End(T_A)$ es hereditaria, aplicando nuevamente la Proposición 2.3, obtenemos que la terna (A,DT,B) es inclinante. Por lo tanto, A es inclinada. □

El siguiente lema técnico es una herramienta útil para probar que la dimensión inyectiva de un módulo es menor o igual que 1.

LEMA 2.5: Si M está en $\operatorname{mod} A$ entonces: $\dim proy(M) \leq 1 \Leftrightarrow Hom_A(DA, DTrM) = 0$.
En forma dual: $\dim iny(M) \leq 1 \Leftrightarrow Hom_A(TrDM, A) = 0$.

Demostración: Sea $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{\pi} M \to 0$ una presentación proyectiva minimal de M. Si $Hom_A(-,A) = (-)^*$, se tiene la sucesión exacta:

$$P_0^* \xrightarrow{f^*} P_1^* \to TrM \to 0.$$

Entonces el siguiente diagrama conmuta y tiene filas exactas:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0\to (TrM)^* \to & P_1^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & P_0^{**} & \xrightarrow{\pi\varphi_0} & M & \to 0\\
& \varphi_1\downarrow\cong & & \varphi_0\downarrow\cong & & || & \\
& P_1 & \xrightarrow{f} & P_0 & \xrightarrow{\pi} & M & \to 0
\end{array}
$$

Además: $(TrM)^* = Hom_A(TrM, A) \cong Hom_A(DA, DTrM)$.
Luego, $\dim proy(M) \leq 1 \Leftrightarrow Hom_A(DA, DTrM) = 0$. □

Probaremos a continuación algunos lemas que nos permitirán formular el Teorema 2.11, en el que se dan caracterizaciones homológicas de los módulos inclinantes T_A tales que $End_A(T)$ es hereditaria. Como corolario (2.12) obtendremos el primer resultado de caracterización de las álgebras inclinadas.

LEMA 2.6: Sea T_A un módulo inclinante. Entonces valen las siguientes implicaciones: a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d), donde

a) Para todo $M \in \tau(T)$ existe una sucesión exacta $0 \to T'' \to T' \to M \to 0$, con T' y T'' en $add(T)$.
b) $Ext_A^2(M, N) = 0$, para todo $M, N \in \tau(T)$.
c) Para todo $M \in \tau(T)$, $\dim iny(M) \leq 1$.
d) Para todo $M \in \tau(T)$, $Hom_A(TrDM, T) = 0$.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b) Sean $M, N \in \tau(T)$. Aplicando $Hom_A(-, N)$ a la sucesión exacta $0 \to T'' \to T' \to M \to 0$ tenemos la sucesión exacta en homología
$0 = Ext_A^1(T'', N) \to Ext_A^2(M, N) \to Ext_A^2(T', N) = 0$
Luego, $Ext_A^2(M, N) = 0$.

b) $\Rightarrow$ c) Sea $M \in \tau(T)$. Sea $0 \to M \xrightarrow{inc} I_0(M) \to L \to 0$ exacta, donde $I_0(M)$ es la cápsula inyectiva de M. Hay que probar que L es inyectivo, para lo cual, por el Corolario 1.11, basta ver que es Ext- inyectivo en $\tau(T)$.
Aplicando $Hom_A(N, -)$ con N en $\tau(T)$ a la sucesión de arriba obtenemos la sucesión exacta en homología: $0 = Ext_A^1(N, I_0(M)) \to Ext_A^1(N, L) \to Ext_A^2(N, M)$. Por hipótesis, $Ext_A^2(N, M) = 0$. Luego, $Ext_A^1(N, L) = 0$ y entonces L es Ext- inyectivo en $\tau(T)$.

c) $\Rightarrow$ d) Sea $M \in \tau(T)$. Por el Lema 2.5, $Hom_A(TrDM, A) = 0$. Luego, $Hom_A(TrDM, P) = 0$ para todo proyectivo P. Entonces, $Hom_A(TrDM, T) \cong \underline{Hom}_A(TrDM, T) \cong DExt_A^1(T, M) = 0$. □

LEMA 2.7: Sea T_A un módulo inclinante tal que $X \in add(T)$ siempre que X sea indescomponible en $\tau(T)$ y $Hom_A(X, T) \neq 0$. Entonces $B = End(T_A)$ es hereditaria.

Demostración: Sea P_B un módulo proyectivo. Entonces $P \cong Hom_A(T,T')$, con $T' \in add(T)$. Sea Y_B un submódulo indescomponible de P. Entonces $Y \in \gamma(T)$ y, por el Teorema 1.14, $Y \cong Hom_A(T,X)$ para algún X indescomponible en $\tau(T)$. Como el funtor $Hom_A(T,-)$ restringido a $\tau(T)$ es fiel y lleno, el morfismo inclusión $Hom_A(T,X) \xrightarrow{inc} Hom_A(T,T')$ proviene de un morfismo no nulo $X \to T'$ en $\mathrm{mod}\, A$. Luego, $Hom_A(X,T) \neq 0$ y de aquí, $X \in add(T)$. Luego, $Y \cong Hom_A(T,X)$ es proyectivo y por ende B es hereditaria.□

DEFINICIÓN 2.8: Sean $X,Y \in ind(A)$. Un *camino* de X a Y es una sucesión de morfismos no nulos de la forma $X = X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_n = Y$, con X_i en $ind(A)$ para todo i.

DEFINICIÓN 2.9: Un conjunto $\Sigma \subseteq ind(A)$ se dice *convexo* si para todo $X,Y \in \Sigma$, y para todo camino $X = X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_n = Y$, se tiene que $X_i \in \Sigma$ para todo i.

Un módulo T se dice *convexo* si $\Sigma_T = ind(add(T))$ es un conjunto convexo.

LEMA 2.10: Sea T_A un módulo inclinante. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Si X es indescomponible en $\tau(T)$ y $Hom_A(X,T) \neq 0$ entonces $X \in add(T)$.
b) T_A es un módulo convexo.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b) Sean $T',T'' \in ind(add(T))$, y sea $T' \to X_1 \to \ldots \to X_n \to T''$ un camino de T' a T''. Por el Lema 2.7 y la Observación 2.2, sabemos que T_A es un módulo que separa. Como $T' \in \tau(T)$ y $T' \to X_1$ es no nulo, $X_1 \notin \Im(T)$. Luego, $X_1 \in \tau(T)$ y, por inducción, $X_i \in \tau(T)$ para todo i. Entonces $Hom_A(X_n,T) \neq 0$, con $X_n \in \tau(T)$. Por lo tanto, $X_n \in add(T)$. Como los X_i son indescomponibles podemos reiterar el razonamiento anterior para concluir que $X_i \in add(T)$, para todo i.

b) $\Rightarrow$ a) Sea X indescomponible en $\tau(T)$ tal que $Hom_A(X,T) \neq 0$. Entonces existe un camino de la forma $T' \to X \to T''$, con T' y T'' en add(T). Luego, $X \in add(T)$ por la convexidad de T_A.□

TEOREMA 2.11: Sea T_A un módulo inclinante que separa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $B = End(T_A)$ es hereditaria.
b) Para todo $M \in \tau(T)$ existe una sucesión exacta $0 \to T'' \to T' \to M \to 0$, con T' y T'' en $add(T)$.
c) $Ext_A^2(M,N) = 0$, para todo $M,N \in \tau(T)$.
d) Para todo $M \in \tau(T)$, $\dim iny(M) \leq 1$.
e) Para todo $M \in \tau(T)$, $Hom_A(TrDM,T) = 0$.
f) Si X es indescomponible en $\tau(T)$ y $Hom_A(X,T) \neq 0$ entonces $X \in add(T)$.

g) T_A es un módulo convexo.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b) Dado $M \in \tau(T)$, por el Lema 1.12, podemos tomar la siguiente sucesión exacta:

(*) $$0 \to T'' \to T' \to M \to 0,$$

donde $T' \in add\, T$ y $T'' \in \tau(T)$. Probemos que $T'' \in add\, T$. Aplicando $Hom_A(T,-)$ a **(*)** se tiene la sucesión exacta:

$$0 \to Hom_A(T,T'') \to Hom_A(T,T') \to Hom_A(T,M) \to Ext_A^1(T,T'') = 0.$$

Como $Hom_A(T,T')$ es B - proyectivo y B es hereditaria, resulta que $Hom_A(T,T'')$ es B - proyectivo. Luego, T'' está en $add(T)$.

b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) Es lo que demostramos en el Lema 2.6.

e) $\Rightarrow$ f) Sea X indescomponible en $\tau(T)$ tal que $Hom_A(X,T) \neq 0$. Por el Corolario 1.13, sabemos que $X \in add(T)$ si y sólo si X es Ext- proyectivo en $\tau(T)$. Luego, por el Lema 1.8, basta probar que $DTrX \in \Im(T)$. Supongamos que no. Como T_A separa, $0 \neq DTrX \in \tau(T)$. Luego, $0 = Hom_A(TrDDTrX, T) = Hom_A(X,T)$. Absurdo.

f) $\Rightarrow$ a) Es el Lema 2.7.

e) $\Leftrightarrow$ g) Corresponde al Lema 2.10. ◻

El siguiente corolario muestra en particular que un álgebra A es inclinada si y sólo si existe un A - módulo inclinante y convexo (Assem, Platzeck y Trepode [2]).

COROLARIO 2.12: Sea A un álgebra. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A es inclinada.
b) Existe un módulo inclinante T_A tal que $B = End(T_A)$ es hereditaria.
c) Existe un módulo inclinante que separa T_A tal que para todo $M \in \tau(T)$ existe una sucesión exacta $0 \to T'' \to T' \to M \to 0$ con T' y T'' en $add(T)$.
d) Existe un módulo inclinante que separa T_A tal que $Ext_A^2(M,N) = 0$, para todo $M, N \in \tau(T)$.
e) Existe un módulo inclinante que separa T_A tal que para todo $M \in \tau(T)$, $\dim iny(M) \leq 1$.
f) Existe un módulo inclinante que separa T_A tal que para todo $M \in \tau(T)$, $Hom_A(TrDM, T) = 0$.
g) Existe un módulo inclinante T_A tal que $X \in add(T)$ siempre que X sea indescomponible en $\tau(T)$ y $Hom_A(X,T) \neq 0$.
h) Existe un módulo inclinante convexo T_A.

Demostración:

a) $\Leftrightarrow$ b) Corolario 2.4.

b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ f) $\Rightarrow$ g) $\Leftrightarrow$ h) Sigue en forma inmediata del Teorema 2.11 y la Observación 2.2.

g) $\Rightarrow$ b) Lema 2.7. □

LEMA 2.13: Sean $(\tau, \Im)$ una teoría de torsión que se parte, $M \in \tau$ y $f : L \to M$ un morfismo irreducible, con L en $ind(\Im)$ no inyectivo. Entonces $TrDL$ es Ext-proyectivo en τ.

Demostración: Por hipótesis L no es inyectivo; luego $TrDL$ es indescomponible. Como $f : L \to M$ es irreducible tenemos la siguiente sucesión de Auslander-Reiten

$$0 \to L \to M \oplus X \to TrDL \to 0$$

Luego, $Hom_A(T, TrDL) \neq 0$. Entonces, como $M \in \tau$ y la teoría de torsión $(\tau, \Im)$ se parte, $TrDL \in \tau$. Además, $DTrTrDL \cong L \in \Im$. Entonces, por el Lema 1.8, $TrDL$ es Ext-proyectivo en τ. □

A continuación introducimos la definición de módulo sincero. Estos módulos tendrán gran importancia cuando demos una caracterización de las álgebras inclinadas mediante un teorema más fuerte que el Corolario 2.12.

DEFINICIÓN 2.14: Sea M en $\operatorname{mod} A$. Se dice que M es un módulo *sincero* si todos los A–módulos simples son factores de composición de M.

El corolario de la siguiente proposición nos provee de una útil caracterización de los módulos sinceros. Omitimos su demostración, que no ofrece mayores dificultades.

PROPOSICIÓN 2.15: Son equivalentes para M y S en $\operatorname{mod} A$, S simple:
(a) S es factor de composición de M.
(b) Existe un homomorfismo no nulo de $P_0(S)$ en M, donde $P_0(S)$ es la cápsula proyectiva de S.
(c) Existe un homomorfismo no nulo de M en $I_0(S)$, donde $I_0(S)$ es la cápsula inyectiva de S.

COROLARIO 2.16: Para un A - módulo M son equivalentes:
(a) M es sincero.
(b) Para todo A - módulo simple S existe un homomorfismo no nulo de $P_0(S)$ en M.
(c) Para todo A - módulo simple S existe un homomorfismo no nulo de M en $I_0(S)$.

Ahora vamos a asociar a un módulo M una teoría de torsión que se parte.

DEFINICIÓN 2.17: Para M en $\operatorname{mod} A$, sea τ_M la subcategoría aditiva de $\operatorname{mod} A$ generada por los módulos indescomponibles N tales que existe un camino de M' a N, con $M' \in add(M)$, y sea $\Im_M$ la subcategoría generada por los módulos indescomponibles restantes, es decir: $ind(\Im_M) = ind(A) \setminus \tau_M$.

Observación 2.18: De la definición resulta que $(\tau_M, \Im_M)$ es una teoría de torsión que se parte.

Veremos a continuación que la teoría de torsión $(\tau_M, \Im_M)$ asociada a un cierto módulo sincero M_A puede describirse como la teoría de torsión asociada a un A-módulo inclinante y convexo. Este teorema juega un papel crucial en lo que sigue.

TEOREMA: 2.19 Sea M un A - módulo sincero tal que no existen caminos de la forma $M' \to \ldots \to N \to X \to TrDN \to \ldots \to M''$, con M' y M'' en $add(M)$. Entonces $(\tau_M, \Im_M)$ satisface:

(a) Para todo $N \in \tau_M$, $\dim iny(N) \leq 1$.

(b) M es Ext-proyectivo en τ_M.

(c) $DA \in \tau_M$.

(d) Todo módulo T_0 Ext-proyectivo en τ_M es un módulo inclinante parcial y el número de módulos indescomponibles Ext-proyectivos en τ_M no isomorfos es finito.

Sea T la suma de todos los módulos de $ind(\tau_M)$ que son Ext-proyectivos en τ_M. Entonces:

(e) Sea $K \in ind\, \tau_M$ y $T' \in ind(add(T))$. Si existe un morfismo $K \to T'$ irreducible entonces $K \in add(T)$.

(f) T es un módulo inclinante.

(g) $(\tau_M, \Im_M) = (\tau(T), \Im(T))$.

(h) T es un módulo convexo.

Demostración:

(a) Sea $N \in ind(\tau_M)$ y supongamos que $\dim iny(N) > 1$. Entonces $Hom_A(TrDN, A) \neq 0$ por lo que existe algún módulo proyectivo P indescomponible tal que $Hom_A(TrDN, P) \neq 0$. Como M es sincero, $Hom_A(P, M'') \neq 0$ para algún sumando directo indescomponible M'' de M. Además, $N \in \tau_M$. Luego, existe un camino de la forma $M' \to \ldots \to N \to X \to TrDN \to P \to M''$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\dim iny(N) \leq 1$.

(b) Sea $N \in ind(\tau_M)$ y supongamos que $0 \neq Ext_A^1(M, N) \cong D\underline{Hom}_A(TrDN, M)$. Entonces existe un morfismo no nulo $TrDN \to M''$, con $M'' \in ind(add(M))$, y un camino de M' a N, con $M' \in add(M)$. Además, si X es un sumando directo indescomponible del término medio de la sucesión de Auslander-Reiten de N, hay un camino $N \to X \to TrDN$. Luego, existe un camino $M' \to \ldots \to N \to X \to TrDN \to M''$ y esto contradice la hipótesis. Por lo tanto, $Ext_A^1(M, N) = 0$ y M es Ext-proyectivo en τ_M.

(c) Probemos que $DA \in \tau_M$. Para todo A - módulo simple S, $Hom_A(M, I_0(S)) \neq 0$ ya que M es sincero. Entonces existen M', sumando directo indescomponible de M, y un morfismo no nulo $M' \to I_0(S)$. Luego, $I_0(S) \in \tau_M$ y, por lo tanto, $DA \in \tau_M$.

(d) Sea T_0 un módulo Ext-proyectivo en τ_M. Entonces $Ext_A^1(T_0, T_0) = 0$. Para probar que T_0 es inclinante parcial sólo nos resta ver que $\dim proy(T_0) \leq 1$.

Por el Lema 1.8, $DTrT_0 \in \Im_M$, y, por el inciso (c), $DA \in \tau_M$. Entonces, por la definición de teoría de torsión, $Hom_A(DA, DTrT_0) = 0$ y, por el Lema 2.5, $\dim proy(T_0) \leq 1$.

Ahora supongamos que el número de indescomponibles Ext-proyectivos en τ_M no isomorfos es estrictamente mayor que el rango n de $K_0(A)$. Entonces existe un módulo T_0 Ext-proyectivo en τ_M con t sumandos indescomponibles no isomorfos, donde $t > n$.

Como T_0 es un módulo inclinante parcial, por el Teorema 1.5, existe un módulo X tal que $T_0 \oplus X$ es un módulo inclinante y, por la Observación 1.3, los sumandos indescomponibles no isomorfos de $T_0 \oplus X$ son exactamente n, lo que contradice nuestra afirmación. Por lo tanto, el número de módulos indescomponibles Ext-proyectivos en τ_M no isomorfos es menor o igual que n y, entonces, es finito.

(e) Sean $K \in ind\, \tau_M$, $T' \in ind(add(T))$ y $K \to T'$ un morfismo irreducible. Queremos probar que $K \in add(T)$, es decir, que K es Ext-proyectivo en τ_M. Para ello basta ver que $DTrK \in \Im_M$. Supongamos que no. Entonces, $DTrK \in ind(\tau_M)$ y existe un camino de la forma $M' \to \ldots \to DTrK \to X \to K \to T'$, con $M' \in add(M)$. Si T' es proyectivo, como M es sincero, el camino precedente puede extenderse a uno de la forma $M' \to \ldots \to DTrK \to X \to K \to T' \to M''$, con $M'' \in add(M)$, lo que contradice la hipótesis. Luego, T' no es proyectivo. Por lo tanto, el morfismo $K \to T'$ induce un morfismo irreducible $DTrK \to DTrT'$. Absurdo, pues $DTrK \in \tau_M$ y $DTrT \in \Im_M$.

(f) A continuación probaremos que T es inclinante. Por (b), sabemos que T es inclinante parcial. Sólo nos resta probar T3).

Sea $d = \dim_k Ext_A^1(T, A)$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ una k - base de $Ext_A^1(T, A)$. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to A_A \xrightarrow{f} E_A \xrightarrow{g} T_A^{(d)} \to 0 \quad \textbf{(*)}$$

definida como el pushout de la sucesión exacta $\bigoplus_{i=1}^{d} \alpha_i$ a través de la aplicación diagonal $A^d \to A$. Queremos probar que $E \in add(T)$.

Como $(\tau_M, \Im_M)$ es una teoría de torsión que se parte, $E = X \oplus Y$ con $X \in \tau_M$, $Y \in \Im_M$. Demostremos que $Y = 0$. Supongamos que no es así. Entonces $Hom_A(Y, T) \neq 0$. En efecto: si $Hom_A(Y, T) = 0$, la restricción a Y del morfismo g de **(*)** es cero y entonces tenemos:

$$X \oplus Y \xrightarrow{g = g_1 \oplus g_2} T_A^{(d)} \to 0 \ , \qquad \text{con } g_2 = 0.$$

Además, $A \cong \operatorname{Im} f = Ker(g_1 \oplus g_2) = Ker(g_1) \oplus Y$, por lo que Y es proyectivo. Entonces, como M es sincero, $Hom_A(Y, M) \neq 0$. Pero $M \in add(T)$; luego $Hom_A(Y, T) \neq 0$. Contradicción. Por lo tanto, $Hom_A(Y, T) \neq 0$.**(**)**

Veamos que $Hom_A(Y, DTrT) = 0$. Por un lado, $Hom_A(Y, DTrT) \cong \overline{Hom}_A(Y, DTrT)$ pues, por (c), $DA \in \tau_M$ y $DTrT \in \Im_M$. Por otro lado, $\overline{Hom}_A(Y, DTrT) \cong DExt_A^1(T, Y) = 0$. En efecto, aplicando a **(*)** $Hom_A(T, -)$ tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to Hom_A(T,A) \to Hom_A(T,E) \to Hom_A(T,T^{(d)}) \xrightarrow{\Theta} Ext_A^1(T,A) \to Ext_A^1(T,E) \to 0.$$

Por construcción, Θ es epiyectiva. Luego, $Ext_A^1(T,E)=0$, de donde se deduce que $Ext_A^1(T,Y)=0$. Por lo tanto, $Hom_A(Y,DTrT)=0$.
Por **(**)**, existe un morfismo no nulo $v_1 : Y \to T_1$, con $T_1 \in add(T)$ indescomponible. Veamos que v_1 no es un epimorfismo que se parte. Supongamos que lo es. Entonces T_1 es isomorfo a un submódulo de Y y, como $Y \in \Im_M$, $T_1 \in \Im_M$. Absurdo. Luego, v_1 no es un epimorfismo que se parte, de donde se obtiene que T_1 no es un módulo simple proyectivo.
Por esto último, existe un morfismo minimal que casi se parte a derecha $f_1 = u_1 \oplus u : K_1 \oplus L_1 \to T_1$, donde $K_1 \in \tau_M$ y $L_1 \in \Im_M$. Como $v_1 : Y \to T_1$ no es un epimorfismo que se parte, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} K_1 \oplus L_1 \arrow[r, "u_1 \oplus u"] & T_1 \\ & Y \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "v_1"'] \end{tikzcd}$$

donde $f_1 g_1 = v_1$.
Probemos que $Hom_A(Y,L_1)=0$. Si $L_1=0$, es trivial. Supongamos que $L_1 \neq 0$. Entonces, $u : L_1 \to T_1$ es irreducible. Como $L_1 \in \Im_M$ y $DA \in \tau_M$, sabemos que L_1 no tiene sumandos indescomponibles inyectivos. Entonces, por el Lema 2.13, $TrDL_1$ es Ext-proyectivo en τ_M. Luego, $TrDL_1 \in add(T)$ y entonces $L_1 \in add(DTrT)$. Como $Hom_A(Y,DTrT)=0$, tenemos que $Hom_A(Y,L_1)=0$.
Entonces existe $v_2' : Y \to K_1$ tal que $u_1 v_2' = v_1 \neq 0$. Además, por (e), $K_1 \in add(T)$ pues el morfismo $u_1 : K_1 \to T_1$ es irreducible y T_1 es indescomponible.
Ahora elijamos un sumando indescomponible T_2 de K_1 tal que $u_1|_{T_2} \pi v_2' \neq 0$, donde $K_1 = T_2 \oplus K$ y $\pi : K_1 \to T_2$ es la proyección canónica. Como T_2 es sumando indescomponible de K_1 y $K_1 \in add(T)$, $T_2 \in add(T)$.
Si $v_2 = \pi v_2' : Y \to T_2$ entonces $u_1|_{T_2} v_2 \neq 0$. Razonando como antes, obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} K_2 \arrow[r, "u_2"] & T_2 \\ & Y \arrow[ul, "v_3'"] \arrow[u, "v_2"'] \end{tikzcd}$$

donde u_2 es irreducible, $u_2 v_3' = v_2 \neq 0$ y $K_2 \in add(T)$.
Ahora podemos elegir un sumando indescomponible T_3 de K_2 tal que $u_1|_{T_2} u_2|_{T_3} v_3 \neq 0$, donde $v_3 = \pi v_3' : Y \to T_3$ y $T_3 \in add(T)$.
Renombrando $u_i = u_i|_{T_{i+1}}$, se obtienen inductivamente, $\forall i$, morfismos irreducibles $u_i : T_{i+1} \to T_i$, $v_i : Y \to T_i$, con $T_i \in add(T)$ indescomponibles tales que $u_1 \ldots u_{i-1} v_i \neq 0$.

Pero esto contradice al Lema 1.25, ya que $long(T_i) \leq long(T), \forall i$. Por lo tanto, $Y = 0$.

Esto implica que la sucesión exacta corta **(*)** es de la forma:

$$0 \to A_A \to X_A \to T_A^{(d)} \to 0,$$

con $X_A \in \tau_M$. Aplicando a la sucesión anterior $Ext_A^1(-, N)$, con $N \in \tau_M$, tenemos:

$$0 = Ext_A^1(T^{(d)}, N) \to Ext_A^1(X, N) \to Ext_A^1(A, N) = 0.$$

Luego, X es Ext-proyectivo en τ_M y, por lo tanto, $E = X \in add(T)$.

(g) Por último vamos a probar que $(\tau_M, \Im_M) = (\tau(T), \Im(T))$. Sea $N \in \tau_M$. Como T_A es Ext-proyectivo en τ_M, $Ext_A^1(T, N) = 0$. Luego, $N \in \tau(T)$.
Recíprocamente, sea $N \in \tau(T)$. Entonces existe un epimorfismo $T_0 \to N$, con $T_0 \in add(T) \subset \tau_M$. Pero τ_M es cerrado por imágenes epimórficas por ser clase de torsión. Luego, $N \in \tau_M$. Por lo tanto, $\tau_M = \tau(T)$ y $\Im_M = \Im(T)$.

(h) Probemos que T es un módulo convexo. Por el inciso (f), T es inclinante y, por (g), T es un módulo que separa. Entonces, por (a) y el Teorema 2.11, T es un módulo convexo.□

A continuación introducimos la noción de sección, que generaliza la de sección completa que fuera definida por Ringel [14]. Más adelante veremos que su existencia caracteriza las álgebras inclinadas.

DEFINICIÓN 2.20: Se dice que un conjunto finito $S \subseteq ind(A)$ es una *sección* en $\mathrm{mod}(A)$ si satisface los siguientes axiomas:

S1) $U = \underset{M \in S}{\oplus} M$ es un módulo sincero.

S2) S es un conjunto convexo.

S3) Si $0 \to L \to M \to N \to 0$ es una sucesión de Auslander-Reiten entonces a lo sumo uno de los módulos L y N está en S.

La clase S se llama *sección completa* si además satisface la condición:

S3') Si $0 \to L \to M \to N \to 0$ es una sucesión de Auslander-Reiten y un sumando indescomponible de M está en S entonces $L \in S$ ó $N \in S$.

Recordamos al lector que notamos por $K_0(A)$ al grupo de Grothendieck de A. En lo que sigue $|X|$ será el cardinal de X.

LEMA 2.21: Sea S una sección en $\mathrm{mod}\, A$. Entonces $|S|$ es menor o igual que el rango de $K_0(A)$ y $M = \underset{X \in S}{\oplus} X$ satisface las hipótesis del Teorema 2.19. Más aún: $|S|$ es igual al rango de $K_0(A)$ si y sólo si M es un módulo inclinante convexo.

Demostración: Es inmediato de la definición de sección ver que M cumple las hipótesis del Teorema 2.19. Ahora, sea n el rango de $K_0(A)$. Si consideramos T como en el Teorema 2.19, tenemos que T es un módulo inclinante convexo y M es sumando directo de T. De aquí:

$$|S| = |ind(add(M))| \leq |ind(add(T))| = n.$$

Por construcción de M y T, la igualdad se satisface si y sólo si $M = T$, es decir, si y sólo si M es inclinante y convexo. □

LEMA 2.22: Sea T_A un módulo inclinante convexo. Entonces $S = ind(add(T))$ es una sección completa en $\mathrm{mod}\, A$.

Demostración: Probemos las cuatro condiciones de la definición de sección completa.

S1) Sabemos que $T = \underset{M \in S}{\oplus} M$ y, como T_A es fiel, es sincero.

S2) Por hipótesis, T_A es un módulo convexo. Entonces S es un conjunto convexo.

S3) Sea $0 \to DTrX \to Y \to X \to 0$ una sucesión de Auslander-Reiten. Queremos probar que a lo sumo uno de los módulos $DTrX$, X está en S. Supongamos que $X \in S$. Entonces X es Ext- proyectivo en $\tau(T)$. Luego, por el Lema 1.8, $DTrX \in \Im(T)$, de donde $DTrX \notin S$.

S3') Sea $0 \to DTrX \to T' \oplus Y \to X \to 0$ una sucesión de Auslander-Reiten con T' en S. Aplicando primero el Lema 2.10 y luego el Lema 2.7 con la Observación 2.2, tenemos que T_A separa. Además, como $T' \in add(T)$, $X \notin \Im(T)$ pues existe un morfismo no nulo $T' \to X$. Entonces, $X \in \tau(T)$. Supongamos que $X \notin S$. Entonces, por el Lema 1.8, $DTrX \notin \Im(T)$. Luego, $DTrX \in \tau(T)$. Aplicando el Lema 2.10 nuevamente, obtenemos que $DTrX \in ind(add(T)) = S$. □

El siguiente teorema relaciona la noción de sección completa con la de módulo inclinante convexo.

TEOREMA 2.23: Sean S una sección en $\mathrm{mod}\, A$ y $M = \underset{X \in S}{\oplus} X$. Entonces existe una sección completa S' que contiene a S y las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) S es una sección completa.
b) M es un módulo inclinante convexo.
c) $|S|$ es igual al rango de $K_0(A)$.

Demostración: Sabemos que M satisface las hipótesis del Teorema 2.19. Sea T como en dicho Teorema. Entonces, si definimos $S' = ind(add(T))$, por el Lema 2.22 S' es una sección completa que contiene a S.

a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que la sección S es completa. Queremos probar que M es inclinante convexo. Basta ver que $M = T$. Sea $T' \in S'$. Queremos probar que $T' \in S$. Como $T' \in \tau_M$, existe un camino $X = T_0 \to T_1 \to \ldots \to T_n = T'$ con $X \in S \subseteq S'$. Como S' es convexa, $T_i \in add(T), \forall i$. Por inducción, basta ver que $T_1 \in S$. Podemos suponer que $f_1 : X \to T_1$ no es un isomorfismo. Luego, f_1 no es un epimorfismo que se parte. Sea $g : E_1 \to T_1$ un morfismo minimal que casi se parte a derecha. Entonces existe

$h: X \to E_1$ tal que $f_1 = gh$. Sea T_2 un sumando directo indescomponible de E_1 tal que $g|_{T_2} \pi h \neq 0$, donde $E_1 = T_2 \oplus K_2$ y $\pi : E_1 \to T_2$ es la proyección canónica.

Entonces tenemos un camino de composición no nula $X \xrightarrow{f_2 = \pi h} T_2 \xrightarrow{u_1 = g|_{T_2}} T_1$, donde u_1 es irreducible y $T_2 \in add(T)$ por la convexidad de T. Si f_2 no es un isomorfismo podemos repetir el procedimiento y obtener un camino de composición no nula de la forma $X \xrightarrow{f_3} T_3 \xrightarrow{u_2} T_2 \xrightarrow{u_1} T_1$, con los u_i irreducibles y los T_i en $add(T)$. En forma análoga, reiteramos hasta que, para algún m, $f_m : X \to T_m$ sea un isomorfismo. Como $long(T_i) \leq long(T) = t$, el Lema 1.25 nos asegura la existencia de un tal m, con $m < 2^t$. Entonces tenemos que $T_m = X \in S$. Veamos que $T_{m-1} \in S$. Si T_{m-1} es proyectivo, existe un morfismo no nulo $T_{m-1} \to X'$ con $X' \in S$, ya que M es sincero. Luego tenemos un camino $X \to T_{m-1} \to X'$ y $T_{m-1} \in S$ por la convexidad de S. Si T_{m-1} no es proyectivo, consideremos la sucesión de Auslander- Reiten siguiente:

$$0 \to DTr(T_{m-1}) \to X \oplus Y \to T_{m-1} \to 0.$$

Como $T_{m-1} \in S'$, $DTr(T_{m-1}) \notin S'$. Luego, $DTr(T_{m-1}) \notin S$. Entonces $T_{m-1} \in S$, pues $X \in S$ y S es completa. Reiterando el razonamiento $m-2$ veces, podemos concluir que T_1 está en S. Por lo tanto, M es un módulo inclinante convexo.

b) $\Rightarrow$ c) Es por la Observación 1.3.

c) $\Rightarrow$ a) Supongamos que $|S|$ es igual al rango de $K_0(A)$. Entonces, por el Lema 2.21, M es un módulo inclinante convexo y, aplicando el Lema 2.22, $S = ind(add(M))$ es una sección completa. □

El siguiente corolario justifica el nombre de sección completa.

COROLARIO 2.24: Sea S' una sección en $\operatorname{mod} A$ que contiene a una sección completa S. Entonces $S = S'$.

Demostración: Sea n el rango de $K_0(A)$. Por el Teorema 2.23, $n = |S|$ y, por el Lema 2.21, $|S'| \leq n$. Luego, $n = |S| \leq |S'| \leq n$, de donde $|S| = |S'|$. Por lo tanto, $S = S'$. □

COROLARIO 2.25: Sea T en $\operatorname{mod} A$. Entonces T es un módulo inclinante convexo si y sólo si $ind(add(T))$ es una sección completa en $\operatorname{mod} A$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Es lo que afirma el Lema 2.22.

$\Leftarrow$) Es por a) $\Rightarrow$ b) del Teorema 2.23. □

COROLARIO 2.26: Sea A un álgebra. Son equivalentes:

a) Existe un módulo inclinante convexo T_A.
b) Existe una sección completa en $\operatorname{mod} A$.
c) Existe una sección en $\operatorname{mod} A$.

d) Existe un A -módulo sincero M tal que no existen caminos de la forma $M' \to \ldots \to N \to X \to TrDN \to \ldots \to M''$, con M' y M'' en $add(M)$.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b) Lema 2.22.

b) $\Rightarrow$ c) Trivial.

c) $\Rightarrow$ d) Sea S una sección en $\mathrm{mod}\, A$. Entonces se verifica fácilmente que $M = \bigoplus_{X \in S} X$ satisface lo pedido.

e) $\Rightarrow$ a) Es el Teorema 2.19. □

Todas las condiciones que caracterizan las álgebras inclinadas que hemos conseguido hasta aquí están reunidas en el siguiente teorema. Las equivalencias a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c) $\Leftrightarrow$ i) se deben a Happel y Ringel [11]. a) $\Leftrightarrow$ i) $\Leftrightarrow$... se deben a Ringel [14]. a) $\Leftrightarrow$ e) $\Leftrightarrow$ f) $\Leftrightarrow$ k) se debe a Bakke [6]. Por último: h) $\Leftrightarrow$ i) se debe a Assem, Platzeck y Trepode [2].

TEOREMA 2.27: Sea A un álgebra. Son equivalentes:

a) A es inclinada.
b) Existe un módulo inclinante T_A tal que $B = End(T_A)$ es hereditaria.
c) Existe un módulo inclinante que separa T_A tal que para todo $M \in \tau(T)$ existe una sucesión exacta $0 \to T'' \to T' \to M \to 0$ con T' y T'' en $add(T)$.
d) Existe un módulo inclinante que separa T_A tal que $Ext_A^2(M, N) = 0$, para todo $M, N \in \tau(T)$.
e) Existe un módulo inclinante que separa T_A tal que para todo $M \in \tau(T)$, $\dim iny(M) \leq 1$.
f) Existe un módulo inclinante que separa T_A tal que para todo $M \in \tau(T)$, $Hom_A(TrDM, T) = 0$.
g) Existe un módulo inclinante T_A tal que $X \in add(T)$ siempre que X sea indescomponible en $\tau(T)$ y $Hom_A(X, T) \neq 0$.
h) Existe un módulo inclinante convexo T_A.
i) Existe una sección completa en $\mathrm{mod}\, A$.
j) Existe una sección en $\mathrm{mod}\, A$.
k) Existe un A -módulo sincero M tal que no existen caminos de la forma $M' \to \ldots \to N \to X \to TrDN \to \ldots \to M''$, con M' y M'' en $add(M)$.

Demostración: Es inmediata de los Corolarios 2.12 y 2.26. □

El siguiente teorema de Ringel es el último resultado que presentamos aquí.

TEOREMA 2.28[14]: Sean B un álgebra hereditaria básica, U_B un módulo inclinante y $A = End(U_B)$. Entonces $\{Hom_B(U,I)\}_{I\in J}$ es una sección completa en $\operatorname{mod} A$, donde J es el conjunto de los inyectivos en $ind\, B$.

Recíprocamente, sean A un álgebra y S una sección completa en $\operatorname{mod} A$. Entonces $T_A = \underset{M\in S}{\oplus} M$ es un módulo inclinante convexo, $B = End(T_A)$ es hereditaria básica, $(DT)_B$ es inclinante y S es isomorfa a una sección completa de la forma anterior, con $U_B = (DT)_B$.

Demostración: Sean B un álgebra hereditaria básica, U_B un módulo inclinante y $A = End(U_B)$. Por la Proposición 2.3, (B, DU, A) es una terna inclinante. Sea $T_A = (DU)_A$. Entonces, por el Teorema 2.11 y el Lema 2.22, tenemos que $ind(add(T_A))$ es una sección completa en $\operatorname{mod} A$. Ahora bien:

$$T_A = Hom_k(U,k) \cong Hom_k(U \otimes_B B, k) \cong Hom_B(U, DB) \cong Hom_B\left(U, \underset{I\in J}{\oplus} I\right) \cong \underset{I\in J}{\oplus} Hom_B(U,I).$$

Por el Teorema 1.14, en la última expresión los sumandos son indescomponibles. Luego, $\{Hom_B(U,I)\}_{I\in J} = ind(add(T_A))$ es una sección completa en $\operatorname{mod} A$.

Recíprocamente, sea S una sección completa en $\operatorname{mod} A$. Por el Teorema 2.23, $T_A = \underset{M\in S}{\oplus} M$ es un módulo inclinante convexo. Por el Teorema 2.11, $B = End(T_A)$ es hereditaria. Además, B es básica por construcción. Sea $U_B = (DT)_B$. Por la Proposición 2.3, U_B es inclinante y $A \cong End(U_B)$. Luego, $\underset{M\in S}{\oplus} M = T_A \cong (DU)_A \cong \underset{I\in J}{\oplus} Hom_B(U,I)$ y, por lo tanto, S es de la forma requerida. □

REFERENCIAS

[1] I. Assem, *Tilting theory – an introduction*, en: Topics in Algebra, Banach Centre Publications, vol. 26, PWN, Warsaw (1990), 127-180.

[2] I. Assem, M. I. Platzeck y S. Trepode, *On the representation dimension of tilted and laura algebras,* Preprint (2004).

[3] M. Auslander e I. Reiten, *Representation Theory of Artin Algebras III,* Comm. Algebra, (3) (1975), 239-294.

[4] M. Auslander, I. Reiten y S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge Univ. Press, (1995).

[5] M. Auslander y S. O. Smalø, *Almost split sequences in subcategories*, J. Algebra 69 (2) (1981), 426-454.

[6] Ø. Bakke, *Some characterizations of tilted álgebras,* Math. Scand. 63 (1988), 1-14.

[7] K. Bongartz, *Tilted algebras*, en: Representations of Algebras, Springer Lecture Notes in Math. 903 (1982) 26-38.

[8] S. Brenner y M. C. R. Butler, *Generalizations of the Bernstein- Gelfand- Ponomarev reflection functors,* en: Proc. ICRA II (Ottawa 1979), Lecture Notes in Math. 832, Springer, Berlín (1980), 103-169.

[9] S. Dickson, *A torsion theory for abelian categories,* Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 223-235.

[10] D. Happel, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras,* London Math. Soc. Lecture Note Ser. 119, Cambridge Univ. Press, 1988.

[11] D. Happel y C. M. Ringel, *Tilted algebras,* Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), 399-443.

[12] M. Harada y Y. Sai, *On categories of indecomposable modules I*, Osaka J. Math., 8 (1971), 309-321.

[13] M. Hoshino, *Splitting torsion theories induced by tilting modules*, Comm. Algebra II (4) (1983), 427-441.

[14] C. M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms,* Lecture Notes in Math. 1099, Springer, Berlín (1984).