ISSM 0078 - 2009

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS

11

RAFAEL PANZONE

LECCIONES PRELIMINARES DE ANALISIS FUNCIONAL

1983

INMABB - CONICET
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS es una colección destinada principalmente a reunir los trabajos de investigación, notas de curso, conferencias, seminarios, realizados en la Universidad Nacional del Sur en el campo del Algebra y del Análisis.

Esta publicación no tendrá un carácter periódico. Los fascículos —cada uno de los cuales contendrá en general un solo trabajo— serán numerados en forma continuada.

Las Universidades, Academias, Sociedades Científicas y los Editores de Revistas de Matemática quedan invitados a canjear sus publicaciones por las del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Toda la correspondencia relativa a esta colección deberá ser dirigida a:

SERVICIO DE CANJE
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS est une collection destinèe principalement à reunir les travaux de recherches, notes de cours, conférences, séminaires, réalisés dans l'Université Nationale du Sud dans le domaine de l'Algèbre et de l'Analyse.

Cette publication n'aura pas un caractère périodique. Les fascicules —chacun desquels aura en genéral un seul travail— seront numérotés d'une façon continuée.

Les Universitês, les Académies, les Sociétés Savantes et les Editeurs de Revues de Mathématiques sont instamment priés d'échanger leurs publications contre celles de l'Institut de Mathématique de l'Université Nationale du Sud.

Toute la correspondance relative à cette collection doit être adressée à:

SERVICIO DE CANJE
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS (*)

N° 11

LECCIONES PRELIMINARES DE ANALISIS FUNCIONAL

Rafael Panzone

INMABB - CONICET

1983

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

LECCIONES PRELIMINARES de ANALISIS FUNCIONAL

por

Rafael PANZONE

Notas de Algebra y Análisis Nº 11, 1983

ERRATA et ADDENDA

PAG	LIN	DICE	DEBE DECIR
4	23	$F = \text{ím}_n\, F$	$F = \lim_n F_n$
8	6	[M,g] están ... por	[M.g] determinan unívocamente a
11	17	$\Vert F'' \Vert_{M'} = \dots$	$\Vert F'' \Vert_{M''} = \Vert F' \Vert_{M'}$
	27	isomorfismo	monomorfismo
12	30	Esto puede verse así.	Por ejemplo, $\vert\vert\vert \alpha\, h + N_F \vert\vert\vert = \vert\alpha\vert$. Pero hay una manera de normalizar el cociente $\mathcal{B}/M$ aún en el caso que M no sea el núcleo de un funcional. Esto puede verse así.
14	10	lineal	lineal según sea $\mathcal{B}$ real o complejo.
15	25	Si $g \in U(f,F_1,\dots,\varepsilon_1)$ y $g \in U(f,G_1,\dots,\varepsilon_2)$	Dados $U(f,F_1,\dots,F_m,\varepsilon_1)$ y $U(f,G_1,\dots,G_n,\varepsilon_2)$
	26	$g \in$	
	27	δ suficientemente	δ es suficientemente
16	6	$= \varepsilon$	$= \varepsilon > 0.$
	8	$\leqq \varepsilon,$	$< \varepsilon,$
	13	$F \in \mathcal{B}^*.$	$0 \neq F \in \mathcal{B}^*.$
17	28	paralelogramo.	paralelogramo. Supongamos H complejo.
19	11	$\{ \Vert ix+iy \Vert^2 - \dots$	$\{ \Vert x+iy \Vert^2 - \dots$
	14/15		(Este caso implica el precedente).
20	23	de pre-Hilbert.	pre-Hilbert.
21	5	.	. Si H es real la fórmula de polaridad es simplemente: $(x,y) = \frac{1}{4} \{ \Vert x + y \Vert^2 - \Vert x - y \Vert^2 \}$.
	29	cerrado, entonces	cerrado de un espacio de Hilbert entonces
23	20	Banach.	Banach compleja.
	22	Banach $\mathcal{B}$	Banach complejo $\mathcal{B}$
24	2	TEOREMA 3.4. 1)	TEOREMA 3.4. $F \neq 0$, 1)
	9	teoremas,	teoremas, los cuales son ciertos en el marco de las álgebras de Banach conmutativas con unidad e tal que $\Vert e \Vert = 1$.
27	1	Basta tomar,	Basta tomar, si los espacios son reales,

PAG	LIN	DICE	DEBE DECIR
	7/8		3) Demostrar usando (i), p. 11 que si $x \in \mathcal{B}$ espacio de Banach entonces $\|x\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\substack{\|x^*\|_{\mathcal{B}^*}=1, \\ x^* \in \mathcal{B}^*}} x^*(x)$.
28	5	$\sum_{i=1}^{\infty} \|a_n(i) - a_m(i)\|^p = \sum_{i=1}^{\infty} \text{lím} \|a_n(i) - a_m(i)\|^p \leq$	$\sum_{i=1}^{\infty} \|a_n(i) - a(i)\|^p = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_m \|a_n(i) - a_m(i)\|^p \leq$
29	20	[0,1],	[a,b],
32	1	h;	h_n;
33	3	máx $(x_x - x_{x-1})$	máx $(x_k - x_{k-1})$
	24	$= \beta(d) - \beta(0)$,	$\longrightarrow \beta(d) - \beta(0)$,
35	27	$<$	$\leq$
	29	$<$	$\leq$
37	23	$\supset R$	$\supset R_r$
39	11	aplicación biyectiva	aplicación lineal biyectiva
	13	es biyectiva	es lineal, biyectiva
	30	es acotado,	es lineal y acotado,
40	4	Sea	Sean
	23	$\{f,g\}$,	$\{f,g\}$:
41	16	K(f),	$K(f) < \infty$
42	18	$K \geq 0$.	$K < \infty$.
43	18	un subespacio de	una variedad lineal en
	20	, un subespacio F de dimensión finita es cerrado	una variedad lineal de dimensión finita es cerrada
44	1	TEOREMA 4.8.	TEOREMA 4.9.
45	11	.	, (ver [19 bis], p. 23).
	14	4.8).	4.8. Véase [7], p. 421 para una demostración directa.).
46	17	para todo φ	para todo φ real
	18	cuerpo	espacio
47	15	$\|f\| = d$.	$\|f\| = d$. f es única.
54	17	A =	$\|A\|$ =
56	6	(< f,g >) .	< f,g >.
59	4	si y sólo si	si (y sólo si)
67	5	(Ax,x)	$\|(Ax,x)\|$
70	29	$\mathcal{D}_T$	$\mathcal{D}_{T^*}$
72	29	$G(T^{-1})^*$	$G_{(T^{-1})^*}$
	31	$G(T^*)^{-1}$	$G_{(T^*)^{-1}}$
76	11	= 0 sí y sólo sí	= 0 para todo $f,g \in \mathcal{D}_{T_c}$ si y sólo si.
	20	*autoadjuntos*, como veremos más adelante	*autoadjuntos*.

PAG	LIN	DICE	DEBE DECIR
77	20	T	$\overline{T}$
78	3	T^* es	T^* que es
85	3	$b_{12}\ b_{13} \cdots$	$b'_{12}\ b'_{13} \cdots b'_{1n}$
86	30	det $(\lambda I - T_{\mathcal{B}})$,	det $(T_{\mathcal{B}} - \lambda I)$,
90	12	(15) y (14)	(15) a (14)
96	15	(des. de Cauchy – Schwartz)	(des. de Minkowski)
98	$^{11}/_{12}$		La multiplicidad de un autovalor es la dimensión del autoespacio correspondiente. En la sucesión decreciente del T.4 los autovalores aparecen repetidos según su multiplicidad. A cada úno de ellos le corresponde un autovalor: $\lambda_j \longleftrightarrow e_j$.
100	21	ρ.	ρ en módulo.
104	16	$(A-\lambda)^{k-1} h \neq 0$ y	$(A-\lambda I)^k h \in K_\lambda = G_{2k}$, por lo tanto existe $g \in K_\lambda = G_k$ tal que $(A-\lambda I)^k g = (A-\lambda I)^k h$. Luego $g-h \in M_k \setminus M_{k-1}$ y
105	29		NOTA. Bajo las hipótesis del T.11 vale que $AN_\lambda \subset N_\lambda$, $AK_\lambda \subset K_\lambda$. Más aún, para todo $g \in K_\lambda$, para todo $n \geqq 1$ existe exactamente una $f \in K_\lambda$ tal que $(A-\lambda I)^n f = g$.
109	20	para cada g	para un g
	26	tendremos:	para que exista una solución debemos tener:
112	16	si y sólo si	si sólo
115	2	$**$	X^{**}
117	10	(Sug. $N(A)^\circ \supset R(A^*)$, $N(A) = {}^\circ(N(A)^\circ) \subset R(A^*)$).	Sabemos que $N(A) = {}^\circ R(A^*)$. En consecuencia $N(A)^\circ = R(A^*)$ si y sólo si $({}^\circ R(A^*))^\circ = R(A^*)$, (cf.2) p.45). Una relación de este tipo no debe esperarse en general, ni siquiera para subespacios de codimensión finita. En efecto, dado un subespacio S de ℓ^∞, propio y tal que $S \supset c_0$ vale ${}^\circ S = \{0\}$, $({}^\circ S)^\circ = \ell^\infty \neq S$. Es decir, todo subespacio ℓ^∞, propio, y que contenga a c_0 no es ℓ^1- cerrado. Vale para todo operador $A \in B(X,Y)$ que $N(A)^\circ \supset R(A^*)$. TEOREMA. Sea $A \in B(X,Y)$ y $R(A) = \overline{R(A)}$. Entonces $N(A)^\circ \subset R(A^*)$. DEMOSTRACION. Sea $x^* \in N(A)^\circ$ e $y \in R(A)$: $y = Ax$. Definamos $f(y) := x^*(x)$. f está bien definida pues si también $y=Ax_1$ entonces $x-x_1 \in N(A)$ y $x^*(x-x_1)=0$. La funcional lineal f definida sobre R(A) es acotada.

PAG	LIN	DICE	DEBE DECIR
			En efecto, $\lvert f(y)\rvert = \lvert x^*(x)\rvert \leq \lVert x^*\rVert . \lVert x\rVert$. Como $x^*(x) = x^*(x-z)$ para todo $z \in N(A)$ sigue que $\lvert f(y)\rvert \leq \lVert x^*\rVert . \text{dist}\ (x,N(A))$. Por otra parte el operador A define en X/N(A) un operador acotado $\hat{A}$: $\hat{A}(\hat{x}) = A(x)$. Si $x \in \hat{x}$ = clase lateral que contiene a x, pues $\lVert \hat{A}(\hat{x})\rVert = \lVert A(x)\rVert = \lVert A(x-z)\rVert \leq \lVert A\rVert . \lVert x-z\rVert$ implica $\lVert \hat{A}(\hat{x})\rVert \leq \lVert A\rVert . \lVert \hat{x}\rVert$. Como $\hat{A}$ es biunívoco y sobre $R(A) = \overline{R(A)}$, tendremos: $\lVert \hat{x}\rVert \leq \lVert \hat{A}^{-1}\rVert . \lVert y\rVert$ para todo $y \in R(A)$, si $\hat{A}(\hat{x}) = y$. Por lo tanto, $\lvert f(y)\rvert \leq (\lVert \hat{A}^{-1}\rVert . \lVert x^*\rVert)\ \lVert y\rVert$, y f es acotado como afirmamos. Extendiendo f de R(A) a Y en forma continua tenemos $f(y) = y^*(y)$ con cierto $y^* \in Y^*$. O sea, $y^*(Ax) = x^*(x)$ para todo x, y en consecuencia: $A^* y^* = x^*$, QED.
	23		. Esto podía sospecharse pues en el caso en que $A = I-\lambda K$, $\lambda \neq 0$, $K \in$ C.C., ese resultado ya sigue del T. 12 cap. III.
118	1	$\varepsilon\, \Phi(X,Y)$,	es de Fredholm
	1	pertenece a Φ y es	es Fredholm
	13	Z resulta	Z, y resulta
	15	que la perturbación de A por	que su perturbación por
	19	$\Phi(Y^*,Z^*)$	$\Phi(Y^*,X^*)$
129	20	s) $\leq$	s)$\rVert \leq$
131	5	= i.	$= -\gamma$.
	6	x =	t =
135	7	$\frac{C}{D}$	$\frac{D}{C}$
139	9	$\sigma\,' =$	$\sigma_1 =$
143	28	de los	de las combinaciones lineales de los
147	15	ortonormal.	ortonormal. (cf. pgs. 161-2, alli el sistema se define en una forma ligeramente diferente).
149	27	$F(\frac{2k}{2^{n-1}}) - \cdots$	$F(\frac{2k}{2^{n+1}}) - \cdots$
151	15	$\frac{G(\dots}{G(\dots}$	$0 < \frac{G(g_k,g_{k+1},\dots,g_n)}{G(g_{k+1},g_{k+2},\dots,g_n)}$
153	1	$\frac{\prod_{i>k}(\dots}{\prod_{i,k=1}^{m,n}(\dots}$	$\frac{\prod_{i>k}(a_i-a_k)\cdot(b_i-b_k)}{\prod_{i,k=1}^{m,m}(a_i+b_k)} = \frac{A_m \cdot B_m}{C_m}$
	7	$a_i - b_k$	$a_i - a_k$
154	3	$\frac{\prod_{i>k}\cdots}{\prod_1^m\prod_1^m\cdots}$	$\frac{\prod_{i>k}(p_i - p_k)^2}{\prod_1^n\prod_1^n(p_i+p_k+1)}$

PAG	LIN	DICE	DEBE DECIR
157	27	$\geqq 1.$	$> 1.$
158	6	$\{x_i, x^*\}$	$\{x_i, x_i^*\}$
161	2	$S_1(t)=\ldots$	$S_1(t)=\chi_{[0,1]}(t).t.,$
162	6	$\geqq$	$\geqq$ (des. de Hölder)
163	8	y inyectiva	e inyectiva
	11	§ 1.	§ 4.
164	26	funcional sobre	funcional lineal continua sobre
165	22	$[\Vert \sum_{i\in\mu_t^+} f_i\Vert \ldots$	$[\Vert \sum_{i\in\mu_t^+} f_i\Vert + \Vert \sum_{i\in\mu_t^-} f_i\Vert]^2$
169	5	base normalizada cuyos	base, normalizada si λ_n es real para todo n, cuyos
	23	$\{x_n\}$ resulta	$\{x_n\}$ en el T. de Paley - Wiener resulta
170	29	.	. (cf. nota de p. 144).
172	26	$\vert(f,f_n)\vert$	$\vert(f,f_n)\vert^2$
176	8	$0\leqq\Vert T\Vert\leqq 1,$	$0\leqq\Vert T\Vert<1,$
	10	$\varepsilon M,$	$\varepsilon H,$
	30	.	.(cf. Ej. 1)).
183	8	(x+k)	(x+h)
	9	(x+k)	(x+h)
187	3	deberán	deberían
188	29	δ	γ
	33	$\geqq$	$>$
190	25	con	en $\{\vert x-a\vert \leqq d\}$ con
191	25	$x =$	$x_n =$
	30	no	no,
	34	$(\subseteq$	$(\equiv C^1)$
192	5	. Buscamos	, p continua. Buscamos
	17	+ as + b,	.
	18	con a y b constantes.	
193	1	$= as + b + \int_0^T$	$= \int_0^T$
	12	$= as + b - \int_0^T$	$= - \int_0^T$
	13	Entonces sigue de x(T) = x(-T) necesariamente que a = 0.	
	14	$x(\sigma) = - x(s) + 2b$. Obviamente b = 0 y	$x(\sigma) = -x(s)$ y
	17	(7) con a = b = 0 es	(7) es
	18	. Si	. (Verificarlo incluso si t = 0). Si
195	35		[19 bis] LOOMIS, L.H., An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, Van Nostrand, New York, 1953.

INDICE GENERAL

PROLOGO.

Estas Lecciones son el resultado de la yuxtaposición de diversas notas de cursos dictados por el autor. Aunque no parece haber solución de continuidad en la secuencia lógica de los temas tratados, las diferencias entre las audiencias receptoras se revelan en los diferentes ritmos de los capítulos. Esto es especialmente evidente al pasar del Capítulo I a los restantes; éstos últimos exigen del lector un mayor esfuerzo. Sin embargo creo, y espero, que servirán - al menos en nuestro ambiente - de apoyo para cursos especiales, o de introducción a los textos que se recomiendan en la Bibliografía.

AGRADECIMIENTOS.

Al Lic. Carlos Robledo, quien revisó el Capítulo II y completó varias demostraciones del mismo; a la Lic. Susana Orofino de Tolosa, quien redactó el Capítulo I; a la Lic. Aurora Germani de Pousa, quien tuvo a su cargo la edición y a la Lic. Sara Vincet de Monteiro, por el especial esmero puesto en el mecanografiado de estas Lecciones.

Rafael Panzone

N.B. Las secciones marcadas con un asterisco pueden omitirse en una primera lectura.

CAPITULO I

ESPACIOS DE BANACH.

1. INTRODUCCION.

El objetivo de este capítulo es extender conceptos ya conocidos en espacios euclídeos a situaciones más generales. Estos conceptos son: vector, distancia, convexidad, funcional, norma, producto interior, subespacio invariante, transformación lineal, operador, sistema ortogonal, proyección, forma hermitiana, autovalor, autovector, resolvente, espectro, etc..

Para ello comenzamos dando la siguiente:

DEFINICION 1.1. Un espacio normado es un espacio vectorial (real o complejo) $\mathcal{B}$ en el cual se ha definido una función a valores reales $F: \mathcal{B} \longrightarrow R$, $F(f) = \|f\|$ $\forall f \in \mathcal{B}$, con las siguientes propiedades:

(1) $\|f\| \geqslant 0$; $\|f\| = 0$ si y sólo si $f = 0$,

(2) $\|cf\| = |c|\,\|f\|$, c escalar,

(3) $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

La función F se llama "*norma*".

Tomando $c = -1$ en (2) resulta $\|-f\| = \|f\|$.

De la propiedad (3), llamada también desigualdad triangular, se deduce:

(3a) $\|f-g\| \geqslant |\,\|f\| - \|g\|\,|$

En efecto, $\|f\| = \|(f-g) + g\| \leqslant \|f-g\| + \|g\|$

$\|f\| - \|g\| \leqslant \|f-g\|$

análogamente $\|g\| - \|f\| \leqslant \|g-f\| = \|f-g\|$.

Si $\|f\| = a > 0$ y $g = \frac{f}{a}$ resulta $\|g\| = 1$: $\|g\| = \left\|\frac{f}{a}\right\| = \frac{\|f\|}{|a|} = \frac{\|f\|}{a} = 1$.

Si $\mathcal{B}$ es un espacio normado y $\forall f,g \in \mathcal{B}$ definimos $d(f,g) = \|f-g\|$, esta función es una distancia, es decir satisface los axiomas:

(1') $d(f,g) \geqslant 0$, $d(f,g) = 0$ si y sólo si $f=g$,

(2') $d(f,g) = d(g,f)$,

(3') $d(f,g) \leqslant d(f,h) + d(h,g)$.

con esta definición de distancia $\mathcal{B}$ es un espacio métrico y por lo tanto podemos introducir los conceptos de límite, entorno, abierto, cerrado, compacto, completo, etc. .

Una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{B}$ se dice de Cauchy si $\|f_n - f_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.

Si para toda sucesión $\{f_n\}$ de Cauchy en $\mathcal{B}$ existe un elemento $f \in \mathcal{B}$ tal que $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ entonces $\mathcal{B}$ se dice *completo*.

DEFINICION 1.2. Un espacio de Banach es un espacio normado completo.

EJEMPLOS. $C([0,1])$; ℓ^1; ℓ^2; ℓ^p; ℓ^∞; $L^1(0,1)$; L^2; L^p; L^∞; los espacios de Hilbert H; los espacios de Orlicz ; el espacio de Besicovitch de funciones casi periódicas; los espacios de funciones de variación acotada, etc.

En lo que sigue estudiaremos algunos de estos ejemplos.

Las operaciones $f+g$, cf, son continuas en la topología de la norma; es decir si $f_n \longrightarrow f$, $g_n \longrightarrow g$ entonces $f_n+g_n \longrightarrow f+g$ y $cf_n \longrightarrow cf$; y si $c_n \longrightarrow c$ $c_n f \longrightarrow cf$. La función norma es continua, es decir, si $f_n \longrightarrow f$ entonces $\|f_n\| \longrightarrow \|f\|$.

En efecto:
$$\|(f_n+g_n) - (f+g)\| \leqslant \|f_n-f\| + \|g_n-g\| \longrightarrow 0+0 = 0;$$
$$\|cf_n-cf\| = |c|\,\|f_n-f\| \longrightarrow 0;$$
$$\|c_nf-cf\| = |c_n-c|\,\|f\| \longrightarrow 0;$$
$$|\,\|f_n\|-\|f\|\,| \leqslant \|f_n-f\| \longrightarrow 0.$$

Sabemos que $\|\cdot\|$ en $\mathcal{B}$ induce una topología. Dada otra norma $|\cdot|$ podemos preguntarnos cuando la topología inducida por ella será igual a la topología inducida por $\|\cdot\|$.

Esto nos lleva a dar la siguiente:

DEFINICION 1.3. Sean $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ dos normas definidas en $\mathcal{B}$. Se dice que son equivalentes si existen constantes positivas m y M tal que se verifica:

$$m|f| \leqslant \|f\| \leqslant M|f| \qquad \forall \quad f \in \mathcal{B}.$$

Si dos normas son equivalentes y $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a $|\cdot|$, $\{f_n\}$ también es de Cauchy con respecto a $\|\cdot\|$, y recíprocamente.

Las topologías que resultan de normas equivalentes son iguales.

DEFINICION 1.4. Si $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach (real o complejo) se llama funcional a una función de $\mathcal{B}$ en el cuerpo de escalares (real o complejo).

La función norma es una funcional.

Notaremos las funcionales con letras mayúsculas: F, G, H,... .

DEFINICION 1.5. Una funcional F es lineal si:

$$F(f+g) = F(f) + F(g) \quad \forall \quad f,g \in \mathcal{B},$$
$$F(\alpha f) = \alpha F(f) \qquad \alpha \text{ escalar}.$$

DEFINICION 1.6. Una funcional F se dice acotada si existe una constante $K \geqslant 0$

tal que: $|F(f)| \leqslant K.\|f\| \ \forall f \in \mathcal{B}$.

TEOREMA 1.1. Una funcional lineal es continua si y sólo si es acotada.

DEMOSTRACION. Si F es acotada existe $K \geqslant 0$ tal que: $|F(f)| \leqslant K\|f\| \ \forall f \in \mathcal{B}$. Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{B}$ tal que $f_n \longrightarrow f$. Entonces $|F(f_n)-F(f)| = |F(f_n-f)| \leqslant$ $\leqslant K \|f_n-f\| \longrightarrow 0$ y $F(f_n) \longrightarrow F(f)$.

Supongamos que F no es acotada. Luego $\forall n > 0$ existe $f_n \in \mathcal{B}$, $\|f_n\| = 1$ y $|F(f_n)| \geqslant n$; por lo tanto $|F(\frac{f_n}{n})| \geqslant 1$. La sucesión $\frac{f_n}{n}$ converge a 0 puesto que $\|\frac{f_n}{n}\| = \frac{\|f_n\|}{n} = \frac{1}{n}$. Si F fuera continua $F(\frac{f_n}{n})$ debería converger a 0; pero esto no es posible ya que $|F(\frac{f_n}{n})| \geqslant 1$. Luego F no es continua. QED.

DEFINICION 1.7. Sean F y G funcionales. Definimos, la igualdad, F+G y $\alpha.F$ de la siguiente manera:

$$F = G \text{ si y sólo si } F(f) = G(f) \quad \forall f \in \mathcal{B}$$
$$(F+G)(f) = F(f) + G(f) \quad \forall f \in \mathcal{B}$$
$$(\alpha F)(f) = \alpha.F(f) \quad \forall f \in \mathcal{B}.$$

Las que nos interesan son las funcionales lineales acotadas y para ellas existe al menos un $K \geqslant 0$ tal que:

$|F(f)| \leqslant K\|f\|$; luego $\frac{|F(f)|}{\|f\|} \leqslant K$ si $f \neq 0$. El conjunto de números reales $\frac{|F(f)|}{\|f\|}$, $f \neq 0$, está acotado superiormente; podemos definir $\|F\| = \sup_{f\neq 0} \frac{|F(f)|}{\|f\|}$ como la menor cota que se puede utilizar en la definición de acotación. A esta se la denomina *norma* de la funcional.

Consideremos el espacio:

$\mathcal{B}^* = \{F$: F funcional lineal acotada sobre $\mathcal{B}$; $\|F\| = \sup_{f\neq 0} \frac{|F(f)|}{\|f\|}\}$.

$\mathcal{B}^*$ se llama el adjunto de $\mathcal{B}$ (suele también denominarse el dual de $\mathcal{B}$ o conjugado de $\mathcal{B}$).

TEOREMA 1.2. El espacio $\mathcal{B}^*$ es de Banach.

DEMOSTRACION. Sean $F, G \in \mathcal{B}^*$ probaremos:

(i) $F+G \in \mathcal{B}^*$,

(ii) $\alpha F \in \mathcal{B}^*$, α escalar

(i) $(F+G)(f+g) = F(f+g) + G(f+g) = F(f) + F(g) + G(f) + G(g) = (F+G)(f)+(F+G)(g)$;

$(F+G)(c.f) = F(cf) + G(c.f) = c.F(f) + c.G(f) = c(F(f)+G(f)) = c.(F+G)(f)$;

$|(F+G)(f)| = |F(f)+G(f)| \leq |F(f)| + |G(f)| \leq K_1\|f\| + K_2\|f\| = (K_1+K_2)\|f\|.$

(ii) $(\alpha F)(f+g) = \alpha.F(f+g) = \alpha.(F(f)+F(g)) = \alpha F(f) + \alpha F(g);$

$(\alpha F)(c.f) = \alpha.F(c.f) = \alpha.cF(f) = c.\alpha F(f) = c.(\alpha F)(f);$

$|(\alpha F)(f)| = |\alpha F(f)| = |\alpha||F(f)| \leq |\alpha|.K.\|f\|.$

(iii) $\mathcal{B}^*$ es un espacio normado:

$\|F\| \geq 0$ pues $\frac{|F(f)|}{\|f\|}$, $f\neq 0$, es un conjunto de números reales no negativos;

$\|F\| = 0 \iff \sup\limits_{f\neq 0} \frac{|F(f)|}{\|f\|} = 0 \iff \frac{|F(f)|}{\|f\|} = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{B},\ f \neq 0 \iff |F(f)| = 0$

$\iff F \equiv 0;$

$\|\alpha F\| = \sup\limits_{f\neq 0} \frac{|\alpha F(f)|}{\|f\|} = \sup\limits_{f\neq 0} |\alpha| \frac{|F(f)|}{\|f\|} = |\alpha|.\|F\|$.

Como $|F(f)+G(f)| \leq |F(f)| + |G(f)|$ entonces:

$$\frac{|F(f)+G(f)|}{\|f\|} \leq \frac{|F(f)|}{\|f\|} + \frac{|G(f)|}{\|f\|} \leq \sup_{f\neq 0} \frac{|F(f)|}{\|f\|} + \sup_{f\neq 0} \frac{|G(f)|}{\|f\|} = \|F\| + \|G\| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|F+G\| \leq \|F\| + \|G\|.$

iv) $\mathcal{B}^*$ es completo.

Sea $\{F_n\} \subset \mathcal{B}^*$ una sucesión de Cauchy. Luego:

$|F_n(f)-F_m(f)| = |(F_n-F_m)(f)| \leq \|F_n-F_m\|\|f\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.

La sucesión de escalares $\{F_n(f)\}$ es de Cauchy y como el cuerpo de escalares es completo existe el límite de $F_n(f)$ que notaremos $F(f)$.

Debemos probar que $F \in \mathcal{B}^*$:

$F(c_1f+c_2g) = \lim\limits_n F_n(c_1f+c_2g) = \lim\limits_n (c_1F_n(f)+c_2F_n(g)) =$

$= c_1 \lim\limits_n F_n(f) + c_2 \lim\limits_n F_n(g) = c_1F(f) + c_2F(g);$

$|F(f)| - |F_n(f)| \leq |F(f) - F_n(f)| \leq (\overline{\lim\limits_m} \|F_m-F_n\|).\|f\| \leq \varepsilon\|f\| \Rightarrow |F(f)| \leq$

$\leq \varepsilon\|f\| + |F_n(f)| \leq \varepsilon\|f\| + \|F_n\|\|f\| = (\varepsilon+\|F_n\|)\|f\|$ luego $\|F\| < \infty$; además

$|F(f) - F_n(f)| \leq \varepsilon\|f\|$ implica $\|F - F_n\| \leq \varepsilon$, es decir $F = \lim\limits_n F_n$. QED.

EJEMPLOS. (1) Sea $1 < p < \infty$

$$\ell^p = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots): \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}.$$

Si $\mathcal{B} = \ell^p$, $\mathcal{B}^* = \ell^q$ con q definido por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

(2) Si $\mathcal{B} = \ell^1$, $\mathcal{B}^* = \ell^\infty$:

$$\ell^1 = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots): \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty\} ,$$

$$\ell^\infty = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots): \sup_i |a_i| < \infty\}$$

(3) Sea $1 < p < \infty$, $L^p = \{f$ medibles en $[0,1] : \int_0^1 |f|^p \, dx < \infty\}$ y q definido por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Si $\mathcal{B} = L^p$, $\mathcal{B}^* = L^q$.

(4) Si $\mathcal{B} = L^1$, $\mathcal{B}^* = L^\infty$, $L^\infty = \{f$ medibles en $[0,1]$: esencialmente acotadas$\}$

(5) $\mathcal{B} = C([0,1])$, $\|f\| = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$, $\mathcal{B}^* = \{$funciones de variación acotada$\}$, $\|F\|$ = variación total.

(6) $\mathcal{B} = \{$sucesiones convergentes$\}$, $\mathcal{B}^* = \ell^1$.

(7) $\mathcal{B} = \{$sucesiones convergentes a $0\}$, $\mathcal{B}^* = \ell^1$.

Hemos probado que $\mathcal{B}^*$ es de Banach. Luego podemos definir su adjunto $(\mathcal{B}^*)^* = \mathcal{B}^{**}$.

Sea $f \in \mathcal{B}$ un elemento fijo. Consideremos la funcional f^{**} definida sobre $\mathcal{B}^*$ como sigue:

$$f^{**}(F) = F(f) \quad \forall \ F \in \mathcal{B}^* .$$

Es claro que f^{**} es lineal y acotada pues:

$$|f^{**}(F)| = |F(f)| \leqslant \|F\|\|f\|.$$

O sea: $\|f^{**}\| \leqslant \|f\|$.

La aplicación Φ: $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}^{**}$ tal que $f \longrightarrow f^{**}$ es un homomorfismo. En efecto:
$(f+g)^{**}(F) = F(f+g) = F(f)+F(g) = f^{**}(F)+g^{**}(F) = (f^{**}+g^{**})(F) \quad \forall \ F \in \mathcal{B}^*$,
implica $\Phi(f+g) = (f+g)^{**} = f^{**}+g^{**} = \Phi(f)+\Phi(g)$;
$(\alpha f)^{**}(F) = F(\alpha f) = \alpha.F(f) = \alpha.f^{**}(F)$ implica $\Phi(\alpha f) = (\alpha f)^{**} = \alpha f^{**} = \alpha\Phi(f)$.

Hemos sumergido así el espacio $\mathcal{B}$ *en* $\mathcal{B}^{**}$ con la propiedad

$$\|f^{**}\| \leqslant \|f\|.$$

Más adelante probaremos que $\|f^{**}\| = \|f\|$.

DEFINICION 1.8. Si la imagen de $\mathcal{B}$ por Φ es todo $\mathcal{B}^{**}$ diremos que el espacio $\mathcal{B}$ es reflexivo.

EJEMPLOS. 1) $\ell_n^2 = \{(a_1,\ldots,a_n): \sum_{i=1}^n |a_i|^2 < \infty\}$

2) ℓ^p , $1 < p < \infty$,

3) L^p , $1 < p < \infty$.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n; todo elemento de V es una n-upla (a(1),a(2),...,a(n)).

Consideremos en V la norma euclídea: $\|a\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |a(i)|^2)^{1/2}$.

Probaremos el siguiente:

LEMA 1.1. Dos normas sobre V, $|\cdot|$, $\|\cdot\|$, son equivalentes.

DEMOSTRACION. Dado $x \in V$, la aplicación que lleva el escalar b en $b.x \in V$ es continua en cualquier norma. Por lo tanto, si $e_i = (0,0,\ldots,\overset{i}{1},0,\ldots,0)$ entonces $\sum_1^n a_i^h e_i$ converge a $\sum_1^n a_i e_i$ cuando $a_i^h \xrightarrow[h\to\infty]{} a_i$, $i=1,\ldots,n$. Esto implica que $|\sum_1^n a_i^h e_i| = |(a_1^h,\ldots,a_n^h)|$ converge a $|(a_1,\ldots,a_n)|$. El conjunto $S = \{x\colon \sum_1^n x_i^2 = 1\}$ es un conjunto compacto en la norma $\|\cdot\|_2$. Como $|\cdot|$ es continua y no nula sobre S existen dos constantes positivas m y M tales que

$$m \leqslant |x| \leqslant M\ , \qquad x \in S.$$

Por linealidad sigue entonces que $m\|x\|_2 \leqslant |x| \leqslant M\|x\|_2$. Luego $\|\cdot\|_2 \sim |\cdot|$ y por lo tanto $\|\cdot\| \sim |\cdot|$. QED.

DEFINICION 1.9. Dos espacios de Banach B_1 y B_2 se dicen isomorfos si existe una aplicación lineal inyectiva de B_1 sobre B_2, Φ, tal que $\forall\ x \in B_1$ se verifica

$$k\|x\|_1 \leqslant \|\Phi(x)\|_2 \leqslant K.\|x\|_1$$

donde K y k son constantes positivas.

EJERCICIOS. 1) Demostrar que si $B = (V,\|\cdot\|_2)$ entonces toda funcional lineal es de la forma:

$$F((a_1,\ldots,a_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{f}_i$$

con $\|F\| = (\sum_i^n |f_i|^2)^{1/2}$. O sea, B* es isomorfo a B.

2) B es reflexivo.

3) Sea $\widetilde{B} = (V,|\cdot|)$. Entonces $\widetilde{B}^*$ es isomorfo a B*.

4) Si $\widetilde{B}$ es un espacio de Banach de dimensión finita entonces es reflexivo.

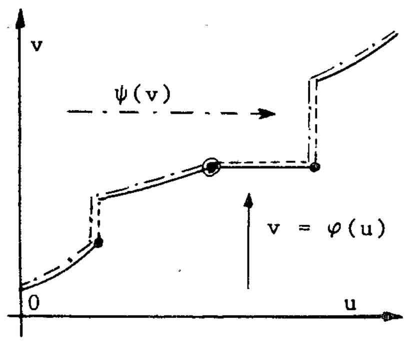
COMPLEMENTOS Y EJERCICIOS.

1. COMPLETACION DE UN ESPACIO NORMADO. Sea N un espacio normado. Existe un único espacio de Banach B - salvo isomorfismo - donde N puede sumergirse densamente y en forma isométrica.

(Sean $\{x_n\} \subset N$, $\{y_n\} \subset N$, sucesiones de N. Se dirán equivalentes si

$\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Los elementos de B serán las sucesiones equivalentes a una sucesión de Cauchy en N. Dada una de ellas, $\{x_n\}$, definimos $x \in B$, como x = clase de equivalencia de $\{x_n\}$ y $\|x\|_B = \lim \|x_n\|$, etc.)

2. DESIGUALDAD DE YOUNG. Sea $v = \varphi(u)$ no decreciente, $\varphi(0) = 0$, continua a izquierda definida en $0 \leqslant u < \infty$, y $\psi(v)$ continua a izquierda, inversa de φ.



Sean $\Phi(u) = \int_0^u \varphi(x)dx$, $\Psi(v) = \int_0^v \psi(y)dy$, Φ y Ψ se dicen *complementarias* en el sentido de Young. Vale entonces la *desigualdad de Young*: $u.v \leqslant \Phi(u) + \Psi(v)$. El signo = se presenta si y sólo si $\psi(v) = u$ o $v = \varphi(u)$.

3. Sea N un espacio normado (no trivial) y D un subconjunto tal que todo elemento x de N puede escribirse en forma única como $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, $\alpha_i \in C$ (o reales si N es vectorial real). Tal conjunto se dice una *base de Hamel*. Demostrar que D es una base de Hamel si y sólo si es un conjunto linealmente independiente maximal, y que N posee siempre una base de Hamel. Si D tiene cardinalidad finita, N es un espacio vectorial de dimensión finita. La cardinalidad de una base de Hamel de N es por definición la dimensión de N. dim N = $|D|$. Supongamos que $|D|$ = infinito. Demostrar que si $\tilde{D}$ es otra base de Hamel, $|\tilde{D}| = |D|$. (Usar el teorema de Cantor-Bernstein de comparación de cardinales infinitos).

2. SUBESPACIOS Y EL TEOREMA DE HAHN-BANACH.

DEFINICION 2.1. Sea $\mathcal{B}$ un espacio de Banach. A un subconjunto $M \subset \mathcal{B}$ cerrado con respecto a la suma y al producto por escalares se le denominará variedad lineal.

DEFINICION 2.2. Se llama subespacio a una variedad lineal cerrada.

Si $G \subset \mathcal{B}$ podemos considerar la menor variedad lineal que contiene a G, ésta se llama variedad lineal generada por G y se nota $[G]$.

TEOREMA 2.1. La clausura de una variedad lineal es un subespacio.

DEMOSTRACION. Sea M una variedad lineal; consideremos la clausura de M = $\overline{M}$. $\overline{M}$ es una variedad lineal:

Sean $f,g \in \overline{M}$. Entonces existen $\{f_n\} \in M$, $\{g_n\} \in M$ tal:

$f_n \longrightarrow f$, $g_n \longrightarrow g$. Luego $f_n+g_n \longrightarrow f+g$, $\alpha f_n \longrightarrow \alpha f$.
Como M es una variedad lineal $\{f_n+g_n\} \subset M$ y $\{\alpha f_n\} \subset M$. Entonces $f+g \in \overline{M}$ y $\alpha f \in \overline{M}$. QED.

TEOREMA 2.2. Sea M un subespacio de un espacio de Banach $\mathcal{B}$ y $g \notin M$; sea $[M,g] = \{f + \alpha g: f \in M, \alpha \text{ escalar}\}$. Entonces $[M,g]$ es un subespacio.

DEMOSTRACION. Veamos que los elementos del conjunto $[M,g]$ están unívocámente determinados por f y α.
Supongamos que: $f + \alpha g = \tilde{f} + \tilde{\alpha} g$. Luego $f - \tilde{f} = (\tilde{\alpha}-\alpha)g$.
Si fuese $(\tilde{\alpha}-\alpha) \neq 0$ entonces $(\tilde{\alpha}-\alpha)^{-1}(f-\tilde{f}) = g \in M$, contradicción.
Esto es $\tilde{\alpha}-\alpha = 0$; es decir $\tilde{\alpha} = \alpha$ y $\tilde{f} = f$.
$[M,g]$ es una variedad lineal. Debemos probar que es cerrada. Sea $\{f_n + \alpha_n g\} \subset [M,g]$ una sucesión de Cauchy; consideremos dos casos:

(i) $\{\alpha_n\}$ es acotada , (ii) $\{\alpha_n\}$ no es acotada.

(i) Si $\{\alpha_n\}$ es acotada existe una subsucesión convergente; podemos suponer que $\{\alpha_n\}$ es la subsucesión convergente. Si $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ entonces $\alpha_n g \longrightarrow \alpha g$ y $\alpha g \in \mathcal{B}$. La sucesión $\{f_n + \alpha_n g\}$ es de Cauchy y como $\mathcal{B}$ es completo existe $h \in \mathcal{B}$ tal que: $f_n + \alpha_n g \longrightarrow h$; luego: $f_n \longrightarrow h-\alpha g$. La sucesión $\{f_n\}$ es convergente y M es cerrado; luego $f_n \longrightarrow f = h-\alpha g \in M$, de donde $h = f + \alpha g \in$
$\in [M,g]$.

(ii) Podemos suponer que $|\alpha_n| \longrightarrow \infty$.
Por ser $\{f_n + \alpha_n g\}$ de Cauchy resulta $\|f_n + \alpha_n g\| < K < \infty$ para algún K; luego $\left\|\frac{f_n}{\alpha_n} + g\right\| < \frac{K}{|\alpha_n|} \longrightarrow 0$, $\{-\frac{f_n}{\alpha_n}\} \subset M$ y $-\frac{f_n}{\alpha_n} \longrightarrow g$. Puesto que M es cerrado, $g \in M$, contradicción. QED.

COROLARIO. Toda variedad lineal de dimensión finita de un espacio de Banach es cerrada, es decir, es un subeapacio.

Dada una variedad lineal y una funcional definida sobre ella puede plantearse el problema de extender la funcional. Veamos en primer lugar como puede extenderse una funcional a la clausura de la variedad.

TEOREMA 2.3. Sea M una variedad lineal, $\overline{M}$ su clausura. Si F es una funcional lineal acotada en M, F puede extenderse en forma única a una funcional lineal acotada en $\overline{M}$ preservando la norma.

DEMOSTRACION. Sea $f \in \overline{M}$. Existe una sucesión $\{f_n\} \subset M$ tal que $f_n \longrightarrow f$ y tenemos: $|F(f_n)-F(f_m)| = |F(f_n-f_m)| \leqslant K\|f_n-f_m\| < K\varepsilon$. Por lo tanto la sucesión $\{F(f_n)\}$ es de Cauchy.

Definimos $F(f) = \lim\limits_{n\to\infty} F(f_n)$. Se vé fácilmente que F es la funcional lineal acotada en $\overline{M}$ buscada. QED.

TEOREMA 2.4. Sea M un subespacio y $g \notin M$. Consideremos $M \oplus [g] = \{f + \alpha g: f \in M, \alpha \text{ escalar}\}$ y definamos $\hat{\hat{F}}(f + \alpha g) = \alpha$. Entonces $\hat{F}$ es una funcional acotada en $M \oplus [g]$ $(= [M,g])$.

DEMOSTRACION. (i) $\hat{F}$ es lineal:

$\hat{F}[(f_1+\alpha_1 g)+(f_2+\alpha_2 g)] = \hat{F}[(f_1+f_2)+(\alpha_1+\alpha_2)g] = \alpha_1+\alpha_2 = \hat{F}(f_1+\alpha_1 g)+\hat{F}(f_2+\alpha_2 g)$;

$\hat{F}[c(f_1+\alpha_1 g)] = \hat{F}(cf_1+c\alpha_1 g) = c\alpha_1 = c.\hat{F}(f_1+\alpha_1 g)$.

(ii) $\hat{F}$ es acotada:

Si $\hat{F}$ no fuese acotada existiría una sucesión $\{f_n+\alpha_n g\}$ tal que $\|f_n+\alpha_n g\| = 1$ y $|\hat{F}(f_n+\alpha_n g)| = |\alpha_n| \longrightarrow \infty$. Esto implicaría que

$\left\|\frac{f_n}{\alpha_n} + g\right\| = \frac{1}{|\alpha_n|} \|f_n + \alpha_n g\| = \frac{1}{|\alpha_n|} \longrightarrow 0$. Esto es: $-\frac{f_n}{\alpha_n} \longrightarrow g$; pero $-\frac{f_n}{\alpha_n} \in M$

y M es cerrado. Luego $g \in M$, contradicción. QED.

OBSERVACION. Si $\alpha = 0$, $\hat{F}(f) = 0$, o sea $\|\hat{F}\|_M = 0$.

TEOREMA 2.5. Sea M un subespacio, F una funcional lineal acotada en M; definamos $G(f+\alpha g) = F(f) + \alpha$. Entonces G es una funcional lineal acotada en $M \oplus [g]$.

DEMOSTRACION. G está bien definida y es lineal.

G es acotada:

$|G(f+\alpha g)| = |F(f)+\alpha| \leqslant |F(f)| + |\alpha| = |F(f)| + |\hat{F}(f+\alpha g)| \leqslant \|F\|\|f\| + C\|f+\alpha g\|$.

Bastará entonces probar que $\|f\| \leqslant H\|f+\alpha g\|$, con H independiente de f y α. Si esto no fuera cierto existiría una sucesión $\{f_n+\alpha_n g\}$ tal que $\|f_n+\alpha_n g\| = 1$ y $\|f_n\| \longrightarrow \infty$. Pero:

$1 = \|f_n+\alpha_n g\| \geqslant |\|f_n\| - |\alpha_n|\|g\||$ implicaría $|\alpha_n| \longrightarrow \infty$, contradicción.

Entonces $|G(f+\alpha g)| \leqslant (\|F\|.H+C)\|f+\alpha g\|$. QED.

TEOREMA 2.6. Sea M un subespacio de un espacio de Banach $\mathcal{B}$, F una funcional lineal acotada definida en M con norma $\|F\|_M$. Existe una funcional lineal acotada G en $M' = M \oplus [g]$ tal que $G(f) = F(f)$ $\forall$ $f \in M$ y $\|G\|_{M'} = \|F\|_M$.

DEMOSTRACION. (a) Consideremos el caso $\mathcal{B}$ real (o sea, su cuerpo de escalares es el conjunto de los números reales). Sean $f', f'' \in M$. De:

$F(f') - F(f'') = F(f'-f'') \leqslant |F(f'-f'')| \leqslant \|F\|_M\|f'-f''\| = \|F\|_M\|(f'+g)-(f''+g)\| \leqslant$

$\leqslant \|F\|_M\|f'+g\| + \|F\|_M\|f''+g\|$,

$A(f'') = -\|F\|_M\|f''+g\| - F(f'') \leqslant \|F\|_M\|f'+g\| - F(f') = B(f')$.

Entonces $S = \sup\limits_{f''\varepsilon M} A(f'') \leqslant \inf\limits_{f'\varepsilon M} B(f') = I$ y $\exists$ γ que satisface $S \leqslant \gamma \leqslant I$.

Sea $f = f' = f''$. Luego:

$$-\|F\|_M\|f+g\| - F(f) \leqslant \gamma \leqslant \|F\|_M\|f+g\| - F(f) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\|F\|_M\|f+g\| \leqslant F(f) + \gamma \leqslant \|F\|_M\|f+g\| \quad \Rightarrow$$

(*) $\qquad |F(f) + \gamma| \leqslant \|F\|_M\|f+g\|$.

Definamos $G(f+\alpha g) = F(f) + \alpha.\gamma$.

Es claro que G es una extensión lineal de F. Si $\alpha = 0$, $G(f) = F(f)$ $\forall$ $f \in M$ y por lo tanto $\|G\|_M = \|F\|_M$.

G es acotada: Supongamos $\alpha \neq 0$, $|G(f+\alpha g)| = |\alpha G(\frac{f}{\alpha} + g)| = |\alpha(F(\frac{f}{\alpha})+ \gamma)| \leqslant$

$\leqslant$ (por (*)) $\leqslant |\alpha|\,\|F\|_M\|\frac{f}{\alpha} + g\| = \|F\|_M\|f + \alpha g\|$. O sea, $\|G\|_{M'} \leqslant \|F\|_M$, y sigue que $\|F\|_M = \|G\|_{M'}$.

(b) Sea $\mathcal{B}$ complejo, la funcional lineal compleja F puede descomponerse así:

$F(f) = R(f) + iI(f)$, $R(f), I(f)$ funcionales lineales reales.

Si F es acotada resulta: $|R(f)| \leqslant |F(f)| \leqslant \|F\|_M\|f\|$. Por ser F lineal:

$-iF(if) = F(f)$, o sea: $-iR(if) + i(-iI(if)) = R(f) + iI(f)$.

Luego deben verificarse: $\quad I(f) = -R(if)$,
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad R(f) = I(if)$.

Podemos entonces expresar la funcional compleja F en función de la funcional acotada $R(f)$ definida sobre M:

$$F(f) = R(f) - iR(if).$$

Extendamos la funcional real $R(f)$ usando (a); sea S la extensión y definamos

$$G(h) = S(h) - iS(ih) \quad \forall \quad h \in M \oplus [g].$$

Probemos que G es lineal:

$G(h_1+h_2) = S(h_1+h_2) - iS(i(h_1+h_2)) = S(h_1)+S(h_2) - i[S(ih_1+ih_2)] =$

$= S(h_1)+S(h_2) - iS(ih_1)-iS(ih_2) = [S(h_1)-iS(ih_1)] + [S(h_2)-iS(ih_2)] =$

$= G(h_1) + G(h_2)$.

$G((\alpha+i\beta)h) = S((\alpha+i\beta)h) - iS(i(\alpha+i\beta)h) = S(\alpha h+i\beta h)-iS(i\alpha h-\beta h) =$
$= S(\alpha h) + S(i\beta h) - iS(i\alpha h) + iS(\beta h) = \alpha S(h) + \beta S(ih) - \alpha iS(ih) + \beta iS(h) =$
$= (\alpha+i\beta)(S(h)-iS(ih)) = (\alpha+i\beta)G(h)$.

G es acotada: dada f existe θ tal que

$G(f) = e^{i\theta}|G(f)|$ entonces $|G(f)| = e^{-i\theta}G(f) = G(e^{-i\theta}f) = S(e^{-i\theta}f) \leqslant$
$\leqslant \|S\|_{M'}\|e^{-i\theta}f\| = \|S\|_{M'}\|f\| = \|R\|_M\|f\| \leqslant \|F\|_M\|f\|$. Esto significa que $\|G\|_{M'} \leqslant \|F\|_M$ y como siempre vale $\|F\|_M \leqslant \|G\|_{M'}$, resulta que la extensión preserva la norma. QED.

TEOREMA 2.7. (Hahn-Banach). Sea M una variedad lineal contenida en $\mathcal{B}$ y F una funcional lineal acotada definida sobre M. Existe una funcional lineal acotada G definida sobre $\mathcal{B}$ tal que $G(f) = F(f)$ $\forall f \in M$ y $\|G\|_{\mathcal{B}} = \|F\|_M$.

DEMOSTRACION. (Es suficiente pedir que M sea una variedad lineal pues por el teorema 2.3 F se extiende unívocamente a $\overline{M}$ que es un subespacio).

Sea $\mathcal{F} = \{\{M',F'\}$: M' variedad lineal; F' funcional lineal acotada sobre M'$\}$.
Definamos en $\mathcal{F}$ la siguiente relación que es de orden parcial:
$\{M',F'\} \leqslant \{M'',F''\}$ si y sólo si $M' \subset M''$ y F'' es una extensión de F' con la propiedad $\|F''\|_{M'} = \|F'\|_{M'}$.
Como toda cadena $\{M,F\} \leqslant \{M',F'\} \leqslant \{M'',F''\} \leqslant \ldots$ tiene una cota superior, del lema de Zorn sigue que existe un elemento maximal $\{P,G\}$. Entonces $P = \overline{P}$.

Si $P \neq \mathcal{B}$ existiría $g \in \mathcal{B}\setminus P$. Luego podríamos extender G a la variedad $P' =$ $= P \oplus [g] \neq P$ contradiciendo el hecho que $\{P,G\}$ es maximal (cf. Teorema 2.6).
Concluimos entonces que $P = \mathcal{B}$, $G(f) = F(f)$ $\forall f \in M$, y $\|G\|_{\mathcal{B}} = \|F\|_M$, QED.

APLICACIONES DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH.

(i) Sea $f \in \mathcal{B}$, $f \neq 0$; existe $F \in \mathcal{B}^*$ tal que $\|F\| = 1$ y $F(f) = \|f\|$.

En efecto, sea $M = [f] = \{\alpha f: \alpha \text{ escalar}\}$, $F(\alpha f) := \alpha\|f\|$. F es lineal y de norma 1 en M.

(ii) Sea $\mathcal{B}$ de Banach y $\Phi:\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}^{**}$ definida por $\Phi(f) = f^{**}$. Φ es un isomorfismo y una isometría.

Hemos probado que Φ es un homomorfismo y $\|f^{**}\| \leqslant \|f\|$. Sea $F \in \mathcal{B}^*$, $\|F\| = 1$ y tal que $F(f) = \|f\|$. Entonces $|f^{**}(F)| = |F(f)| = \|f\|$ $\Rightarrow$

$$\|f^{**}\| = \sup_{G\in\mathcal{B}^*} \frac{|f^{**}(G)|}{\|G\|} \geqslant \frac{|f^{**}(F)|}{\|F\|} = |f^{**}(F)| = \|f\|.$$

(iii) Sea M un subespacio y $g \notin M$; existe $F \in \mathcal{B}^*$ tal que $F(g) = 1$ y $F(M) = 0$.

Consideremos $M \oplus [g]$ y $\hat{F}(f + \alpha g) = \alpha$; por el teorema 2.4,$\hat{F}$ es una funcional lineal acotada en $M \oplus [g]$.

Usando el teorema de Hahn-Banach,$\hat{F}$ se puede extender a una funcional lineal acotada en todo el espacio, sea F tal funcional; luego $F(M) = \hat{F}(M) = 0$ y $F(g) = \hat{F}(g) = 1$.

(iv) $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^*$ están en dualidad (es decir, cada uno separa puntos del otro).

Sean $h,f \in \mathcal{B}$, $h \neq f$, $g = h-f$. Existe $F \in \mathcal{B}^*$ tal que $F(g) = F(h - f) \neq 0$; esto implica $F(h) \neq F(f)$.

Análogamente, si $F,G \in \mathcal{B}^*$, $F \neq G$ si existe $f \in \mathcal{B}$ tal que $F(f) \neq G(f)$ (por definición).

(v) Sea M un subespacio, $g \notin M$; entonces existe $F \in \mathcal{B}^*$ tal que $\|F\| = 1$, $F(M) = 0$, $F(g) = d$ donde $d := \inf_{m\in M} \|g - m\|$.

Consideremos $M \oplus [g] = \{f + \alpha g: f \in M\}$ y definamos: $F(\alpha g - f) = \alpha.d$; es claro que F es lineal. Probemos que es continua y de norma 1.

$$\sup_{\substack{f\in M\\ f\neq 0}} \frac{|F(\alpha g - f)|}{\|\alpha g - f\|} = \sup_{\substack{f\in M\\ f\neq 0}} \frac{|\alpha.d|}{\|\alpha g - f\|} = \frac{|\alpha|.d}{\inf\limits_{\substack{f\in M\\ f\neq 0}}\|\alpha g - f\|} = \frac{d}{\inf\limits_{\substack{f\in M\\ f\neq 0}}\|g - f\|} = \frac{d}{d} = 1.$$

Sea $\mathcal{B}$ un espacio de Banach complejo, $F \in \mathcal{B}^*$, $F\neq 0$; podemos considerar $N_F = \{f \in \mathcal{B}: F(f) = 0\}$ = núcleo de F.

N_F es una variedad lineal pues si f,g pertenecen a N_F entonces $F(f+g) = 0$ y $F(\alpha.f) = 0$; además es cerrada pues $N = F^{-1}\{0\}$.

Consideremos el espacio cociente $\mathcal{B}/N_F$, sea $g \in \mathcal{B}$ y sea $\hat{g}$ la clase lateral $\hat{g} = g+N_F$; entonces $F(g+N_F) = F(g) + F(N_F) = F(g)$,esto es,la funcional F es constante sobre la clase y puede definirse $F(\hat{g})$.

La funcional F es sobre pues si $g \notin N_F$ entonces $F(g) = \alpha \neq 0$ luego $F(\frac{g}{\alpha}) = 1$, es decir existe $h \in \mathcal{B}$ tal que $F(h) = 1$ y para todo $\alpha \in C$, $\alpha h \in \mathcal{B}$ y $F(\alpha h) = \alpha F(h) = \alpha$.

Hemos probado entonces que cualquier elemento de $\mathcal{B}$ pertenece a una de las clases laterales $\alpha h + N_F$ con $F(h) = 1$. Esto significa que $\mathcal{B} = [h] \oplus N_F$, es decir el núcleo de la funcional es un subespacio de codimensión 1. Luego, podemos definir una norma en el espacio cociente de modo que sea isomorfo al espacio de los números complejos. Esto puede verse así.

Sea M un subespacio de $\mathcal{B}$ y sea $\mathcal{B}/M$ el conjunto de clases laterales $\{f+M\}$.

Sea $Y = y + M$. Definimos $\|Y\| = \inf_{x\in Y} \|x\|$.

Esta definición tiene otras formas equivalentes:

$$\|Y\| = \inf_{x\in Y} \|x\| = \inf_{m\in M} \|y + m\| = \inf_{x\in Y} \|x - m\| = \inf_{\substack{x\in Y \\ m\in M}} \|x - m\|.$$

TEOREMA 2.8. El espacio $\mathcal{B}/M$ es de Banach.

DEMOSTRACION. Es fácil verificar que $\mathcal{B}/M$ es un espacio vectorial; debemos probar que $\mathcal{B}/M$ es normado.

1) $\|Y\| \geq 0$ pues $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in Y$; $\|Y\| = 0 \iff \inf_{m\in M} \|y + m\| = 0 \iff$ existe una sucesión $\{y + m_n\} \subset Y$ tal que $y + m_n \longrightarrow 0 \iff m_n \longrightarrow -y$, como M es cerrado, $-y \in M \iff Y = M$.

2) $\|\lambda Y\| = |\lambda| \|Y\|$.

$$\|\lambda Y\| = \inf_{m\in M} \|\lambda y + m\| = \inf_{m\in M} \|\lambda y + \lambda m\| = \inf_{m\in M} \|\lambda(y + m)\| = |\lambda| \inf_{m\in M} \|y + m\| =$$
$$= |\lambda| \|Y\|.$$

3) $\|Y_1 + Y_2\| \leq \|Y_1\| + \|Y_2\|$.

$$\|Y_1 + Y_2\| = \inf_{m\in M} \|(y_1 + y_2) + m\| = \inf_{m_1, m_2\in M} \|(y_1 + m_1) + (y_2 + m_2)\| \leq$$
$$\leq \inf_{m_1\in M} \|y_1 + m_1\| + \inf_{m_2\in M} \|y_2 + m_2\| = \|Y_1\| + \|Y_2\|.$$

Veamos que $\mathcal{B}/M$ es completo.

Sea $\{Y_n\}$ de Cauchy; existe una subsucesión, que indicaremos de la misma forma, tal que $\|Y_{n+1} - Y_n\| < 2^{-n}$. (En efecto, sea Y_{n_1} tal que si $n > n_1$, $\|Y_n - Y_{n_1}\| < 1/2$; elijamos ahora $n_2 > n_1$ de manera que $\|Y_m - Y_{n_2}\| < 1/4$ $\forall\ m > n_2$, etc.. $\{Y_{n_j}\}$ verifica la propiedad enunciada). Sean $x_{n+1} \in Y_{n+1}$, $x_n \in Y_n$ tales que $\|x_{n+1} - x_n\| < 2^{-n}$; luego $\{x_n\}$ es de Cauchy en $\mathcal{B}$ que es completo. Entonces existe $x_0 \in \mathcal{B}$ tal que $\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0$. Sea $Y_0 = x_0 + M$.

$$\|Y_0 - Y_n\| = \inf_{m\in M} \|(x_0 - x_n) + m\| \leq \|x_0 - x_n\| \longrightarrow 0.$$

Obsérvese ahora que si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente también ella converge y al mismo límite. O sea, la sucesión original converge a Y_0. QED.

DEFINICION 2.3. Dado un subespacio M, $\{F \in B^*: F(M) = 0\}$ es el *anulador* de M, o complemento ortogonal de M, y se nota $M^{\perp}$.

$M^{\perp}$ es un subespacio y si F es una funcional lineal continua y $M = N_F$ resulta que $[F] = M^{\perp}$.

Recordemos la aplicación $\Phi: B \longrightarrow B^{**}$. Si $M \subset B$, $\Phi(M) \subset B^{**}$. Si $F \in M^{\perp}$,

$F(f) = 0$ para todo $f \in M$, esto es $f^{**}(F) = 0$ para todo $f^{**} \in \Phi(M)$. O sea,

$f^{**} \in (M^{\perp})^{\perp} = M^{\perp\perp}$. Luego $M \cong \Phi(M) \subseteq M^{\perp\perp}$.

Sean B y $\hat{B}$ dos espacios de Banach, el conjunto de las aplicaciones lineales de B en $\hat{B}$ es un espacio vectorial.

Si $\hat{B}$ es R o C el operador lineal $T: B \longrightarrow \hat{B}$ es una funcional lineal.

Consideremos en particular el conjunto de las aplicaciones lineales de B en B. Si T_1 y T_2 son elementos del conjunto entonces $T_1.T_2$ y $T_2.T_1$ tambien son aplicaciones lineales de B en B. Esto nos conduce al siguiente concepto.

DEFINICION 2.4. Un álgebra de Banach B es un espacio de Banach B en el que está definido un producto interno ".". Respecto a esta operación de multiplicación B es un anillo, no necesariamente conmutativo, donde se verifica: $\|f.g\| \leq \|f\|.\|g\|$. También se la llama anillo normado.

Recordemos las siguientes definiciones:

Dada una correspondencia $T: B \longrightarrow \hat{B}$ tal que B y $\hat{B}$ son vectorialmente isomorfos y elementos correspondientes tienen la misma norma se dice que B y $\hat{B}$ son *isométricamente isomorfos*. Notaremos $B \cong \hat{B}$.

Si B y $\hat{B}$ son vectorialmente isomorfos y $T: B \longrightarrow \hat{B}$ es una aplicación lineal tal que para todo $f \in B$ $\|Tf\| \leq M\|f\| \leq K\|Tf\|$, M, K independientes de f, entonces se dice que B y $\hat{B}$ son *isomorfos* o *equivalentes*. Notaremos $B \sim \hat{B}$.

TEOREMA 2.9. Sea B un espacio de Banach. Dim $B < \infty$ si y sólo si $B_1 = \{f \in B: \|f\| \leq 1\}$, la esfera unitaria de B, es compacta.

DEMOSTRACION. Si B es de dimensión finita sabemos que las normas definidas sobre B son equivalentes y que respecto a la norma euclídea B_1 es compacta.

Para demostrar la recíproca supongamos que dim $B = \infty$. Sea f_1 tal que $\|f_1\| = 1$ y $[f_1] = M_1$; consideremos el espacio cociente B/M_1, sea una clase $Y \in B/M_1$ tal que $\|Y\| = 1$.

Si $f_2 \in Y$, $1 \leq \|f_2\| \leq 1 + \epsilon_2$, f_2 y f_1 son linealmente independientes y $\|f_1 - f_2\| \geq 1$.

Consideremos el subespacio $M_2 = [f_1, f_2]$ de dimensión 2 y el cociente $\mathcal{B}/M_2$ ($\neq \{0\}$ pues $\mathcal{B}$ es infinito). Existe una clase $Z \in \mathcal{B}/M_2$ tal que $\|Z\| = 1$ y $f_3 \in Z$, $1 \leq \|f_3\| \leq 1 + \varepsilon_3$. Además $\|f_3 - f_1\| \geq 1$; $\|f_3 - f_2\| \geq 1$. Reiterando este proceso construimos una sucesión $\{f_n\}$ tal que: $1 \leq \|f_n - f_1\|$; ....; $1 \leq \|f_n - f_{n-1}\|$.

Definimos $z_n = \dfrac{f_n}{1 + \varepsilon_n}$. Entonces: $\|z_n - z_m\| = \left\| \dfrac{f_n}{1 + \varepsilon_n} - \dfrac{f_m}{1 + \varepsilon_m} \right\| =$

$$= \frac{1}{1 + \varepsilon_n} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_m} \|(1 + \varepsilon_m) f_n - (1 + \varepsilon_n) f_m\| \geq$$

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_n} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_m} [\|f_n - f_m\| - \varepsilon_m \|f_n\| - \varepsilon_n \|f_m\|] \geq (\text{si } \varepsilon_n < \varepsilon) \geq$$

$$\geq \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \|f_n - f_m\| - \frac{\varepsilon(\|f_n\| + \|f_m\|)}{1} .$$

Si ε es bastante pequeño tendremos:

$$\|z_n - z_m\| \geq \frac{\|f_n - f_m\|}{(1 + \varepsilon)^2} - 2\varepsilon(1 + \varepsilon) \geq \frac{3}{4} \|f_n - f_m\| - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} .$$

$\{z_n\}$ no es relativamente compacta. QED.

Sea $\mathcal{B}$ un espacio normado; la norma induce una topología llamada topología *fuerte*.

Sea $F \in \mathcal{B}^*$ y $g \in \mathcal{B}$; consideremos $\{f: |F(f) - F(g)| < \varepsilon\}$, este conjunto es abierto.

Veamos cómo es la menor topología que hace continuas todas las funcionales lineales que son continuas respecto de la topología inducida por la norma.

Sean $F_1, \ldots, F_m \in \mathcal{B}^*$, $\varepsilon > 0$; definimos entonces los entornos:

$U(f, F_1, \ldots, F_m, \varepsilon) = \{g: |F_i(g) - F_i(f)| < \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, m\}$. Por lo dicho antes U es un abierto, y $\{U\}$ genera una topología pues:

(i) Si $f \in \mathcal{B}$, $f \in U(f, F_1, \ldots, F_m, \varepsilon)$,

(ii) Si $g \in U(f, F_1, \ldots, F_m, \varepsilon_1)$ y $g \in U(f, G_1, \ldots, G_n, \varepsilon_2)$ entonces $g \in U(f, F_1, \ldots, F_m, G_1, \ldots, G_n, \delta) \subset U(f, F_1, \ldots, F_m, \varepsilon_1) \cap U(f, G_1, \ldots, G_n, \varepsilon_2')$ si δ suficientemente pequeño,

(iii) Si $h \in U(f, F_1, \ldots, F_m, \varepsilon)$ entonces existe $U(h, F_1, \ldots, F_m, \delta)$ tal que

$U(h,F_1,\dots,F_m,\delta) \subset U(f,F_1,\dots,F_m,\varepsilon)$ si δ es suficientemente pequeño. Además $U(f,F_1,\dots,F_m,\varepsilon) = f + U(0,F_1,\dots,F_m,\varepsilon)$, es decir, los entornos básicos $U(f)$ se obtienen por traslación de sus correspondientes $U(0)$. Esta topología se llama topología *débil*, ω - topología, o $\mathcal{B}^*$ - topología sobre $\mathcal{B}$.

El espacio $\mathcal{B}$ con esta topología es Hausdorff pues si $f \neq g$ existe una funcional F tal que $F(f-g) = \varepsilon$. Consideremos $U(f,F,\varepsilon/2)$ y $U(g,F,\varepsilon/2)$ y supongamos $U(f,F,\varepsilon/2) \cap U(g,F,\varepsilon/2) \neq \emptyset$, entonces existe $h \in U(f,F,\varepsilon/2) \cap U(g,F,\varepsilon/2)$ y $|F(f)-F(g)| \leq |F(f)-F(h)| + |F(h)-F(g)| \leq \varepsilon$, contradicción.

Indiquemos con τ_ω la topología débil y con $\tau_{\|.\|}$ la topología inducida por la norma. τ_ω es menos fina que $\tau_{\|.\|}$ ($\tau_\omega < \tau_{\|.\|}$) pues como ya observamos todo abierto débil es abierto fuerte.

Directamente, sea $\mathcal{B}_\varepsilon(f) = \{g \in \mathcal{B}: \|f-g\| < \varepsilon\}$ y sea $g \in \mathcal{B}_\varepsilon(f)$ y $F \in \mathcal{B}^*$. Luego $|F(g)-F(f)| = |F(g-f)| \leq \|F\|\|f-g\| < \|F\|\varepsilon$. Tomando $\varepsilon' = \|F\|\varepsilon$ y $U(f,F,\varepsilon')$ resulta $g \in U(f,F,\varepsilon')$, es decir $\mathcal{B}_\varepsilon(f) \subset U(f,F,\varepsilon')$.

Es natural que nos preguntemos cuando la topología débil y la topología inducida por la norma son iguales.

Veamos que en los espacios de dimensión finita ambas topologías coinciden.

Sea $\mathcal{B} = \ell_n^2 = \mathcal{B}^*$.

Como $\mathcal{B}$ es de dimensión finita todas las normas definidas en el espacio son equivalentes; por lo tanto $\tau_{\|.\|_2} = \tau_{\|.\|_\infty} = \tau_{\|.\|}$. Sea $S(0,r)$ un entorno de $\tau_{\|.\|_\infty}$:

$$S(0,r) = \{a \in \mathcal{B}: \sup |a_i| < r\} .$$

¿Cómo debemos elegir $F_1,\dots,F_m \in \mathcal{B}^*$ de manera tal que:

$$U(0,F_1,\dots,F_m,\varepsilon) \subseteq S(0,r)?.$$

Sean $\varepsilon = r$ y F_i, $i = 1,\dots,n$, definida por $F_i((a_1,\dots,a_n)) = a_i$. Entonces $a \in U(0,F_1,\dots,F_n,\varepsilon)$ si y sólo si $|F_i(a)| < \varepsilon$, $i = 1,\dots,n$, si y sólo si $|a_i| < \varepsilon = r$, $i = 1,\dots,n$. Es decir, $U(0,F_1,\dots,F_n,\varepsilon) = S(0,\varepsilon)$. Luego $\tau_\omega = \tau_{\|.\|_\infty} = \tau_{\|.\|}$.

Sin embargo vale más aún:

TEOREMA 2.10. $\mathcal{B}$ tiene dimensión finita si y sólo si $\tau_\omega = \tau_{\|.\|}$.

En consecuencia la esfera unitaria de $\mathcal{B}$ es débilmente compacta.

Si recordamos que $\mathcal{B}$ es reflexivo si es de dimensión finita podremos sospechar que la compacidad débil de la esfera unitaria y la reflexividad están estrechamente vinculadas. Y así es. Vale el siguiente:

TEOREMA 2.11. B_1 es compacta en τ_ω si y sólo si B es reflexivo.

Consideremos ahora el espacio de Banach B^*; denotaremos su topología fuerte inducida por la norma con $\tau_{\|.\|}$. Los elementos de $B \subseteq B^{**}$ inducen en B^* una topología que llamaremos B - *topología sobre* B^* o ω^* - *topología* y notaremos τ_{ω^*}.

Si $0 \neq F \in B^*$, existen $f,g \in B$ tales que $F(f) \neq F(g)$. O sea: $f^{**}(F) \neq g^{**}(F)$.

Entornos básicos de τ_{ω^*} son de la forma:

$U(F,f_1^{**},\ldots,f_m^{**},\varepsilon) = U(F,f_1,\ldots,f_m,\varepsilon) = \{ G: |G(f_i)-F(f_i)| = |(G-F)(f_i)| = |f_i^{**}(G-F)| < \varepsilon \ , \ i = 1,2,\ldots m\}$.

Esta topología es de Hausdorff:

Si $F \neq H$ entonces existe $f \in B$ tal que $F(f) \neq H(f)$. Sea $|F(f)-H(f)| = \varepsilon > 0$. Sean $U(F,f,\frac{\varepsilon}{2})$, $U(H,f,\frac{\varepsilon}{2})$. Si $U(F,f,\frac{\varepsilon}{2}) \cap U(H,f,\frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ existe $G \in U(F,f,\frac{\varepsilon}{2}) \cap U(H,f,\frac{\varepsilon}{2})$ tal que $|F(f)-H(f)| \leqslant |F(f)-G(f)| + |G(f)-H(f)| < \varepsilon$ contradicción.

Si $\dim B = n < \infty$ entonces $\dim B^* = \dim B^{**} = n$. Entonces la topología fuerte en B^*, la B-topología sobre B^* y la B^{**}-topología sobre B^* coinciden. En particular, la esfera unitaria de B^* es compacta en la B-topología. Este resultado vale en general y se lo conoce como el teorema de Alaoglu, o de Alaoglu-Bourbaki. Su enunciado reza así:

TEOREMA 2.12. La esfera unitaria B_1^* del dual de B es compacta en la B-topología sobre B^*, cualquiera sea el espacio de Banach B.

EJERCICIO. Todo subespacio de B es B^*-cerrado (usar el teorema de Hahn-Banach).

3. ESPACIOS DE HILBERT, ℓ^p Y OTROS.

DEFINICION 3.1. Un espacio de Hilbert H es un espacio de Banach en el cual vale la relación:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \forall \ x,y \in H.$$

llamada ley del paralelogramo.

Definamos un producto escalar por medio de la fórmula de polaridad:

$$(x,y) = \frac{1}{4} \{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\} .$$

Veamos que esta función bilineal tiene las siguientes propiedades:

1) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

2) $(x,x) > 0$ si $x \neq 0$

3) $(x_1+x_2,y) = (x_1,y) + (x_2,y)$

4) $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$

(De 1) y 4) resulta $(x,\lambda y) = \bar{\lambda}(x,y)$ pues: $(x,\lambda y) = \overline{(\lambda y,x)} = \bar{\lambda}\overline{(y,x)} = \bar{\lambda}(x,y)$).

La función (x,y) es lineal en la primera variable y antilineal en la segunda.

DEMOSTRACION DE LAS PROPIEDADES.

1) $(y,x) = \frac{1}{4}\{\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 + i\|y + ix\|^2 - i\|y - ix\|^2\}$.

$$\overline{(y,x)} = \frac{1}{4}\{\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 - i\|y + ix\|^2 + i\|y - ix\|^2\} =$$

$$= \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|-(x - y)\|^2 + i\|-i(x + iy)\|^2 - i\|i(x - iy)\|^2\} =$$

$$= \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\} = (x,y).$$

2) $(x,x) = \frac{1}{4}\{\|2x\|^2 + i\|(1 + i)x\|^2 - i\|(1 - i)x\|^2\} = \|x\|^2$.

3) $(x_1 + x_2,y) = \frac{1}{4}\{\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2+i\|x_1+x_2+iy\|^2-i\|x_1+x_2-iy\|^2\} =$

$= \frac{1}{4}\{\|x_1+x_2+y\|^2+\|x_1-x_2+y\|^2-\|-x_1+x_2-y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2+i\|x_1+x_2+iy\|^2-$

$- i\|x_1+x_2-iy\|^2+i\|x_1-x_2+iy\|^2-i\|-x_1+x_2-iy\|^2\}$.

Aplicando la ley del paralelogramo:

$= \frac{1}{4}\{2\|x_1+y\|^2+2\|x_2\|^2-(2\|x_2-y\|^2+2\|x_1\|^2)+$

$+ i(2\|x_1+iy\|^2+2\|x_2\|^2) - i(2\|x_2-iy\|^2+2\|x_1\|^2)\}$.

Análogamente:

$(x_2 + x_1,y) = \frac{1}{4}\{2\|x_2 + y\|^2 + 2\|x_1\|^2 - (2\|x_1 - y\|^2 + 2\|x_2\|^2) +$

$+ i(2\|x_2 + iy\|^2 + 2\|x_1\|^2) - i(2\|x_1 - iy\|^2 + 2\|x_2\|^2)\}$.

Luego:

$(x_1 + x_2,y) + (x_2 + x_1,y) = 2(x_1 + x_2,y) = \frac{1}{4}\{2\|x_1 + y\|^2 - 2\|x_2 - y\|^2 -$

$- 2\|x_1 - y\|^2 + 2\|x_2 + y\|^2 - 2i\|x_2 - iy\|^2 + 2i\|x_2 + iy\|^2 + 2i\|x_1 + iy\|^2 -$

$- 2i\|x_1 - iy\|^2\} =$

$= \frac{2}{4} \{ \|x_1 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 + i\|x_1 + iy\|^2 - i\|x_1 - iy\|^2 +$

$+ \|x_2 + y\|^2 - \|x_2 - y\|^2 + i\|x_2 + iy\|^2 - i\|x_2 - iy\|^2 \}.$

Entonces: $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.

4) $(\lambda x, y) = \frac{1}{4} \{\|\lambda x + y\|^2 - \|\lambda x - y\|^2 + i\|\lambda x + iy\|^2 - i\|\lambda x - iy\|^2\}$.

Si $\lambda = -1$

$$\begin{aligned}(-x,y) &= \frac{1}{4} \{\|-x + y\|^2 - \|-x - y\|^2 + i\|-x + iy\|^2 - i\|-x - iy\|^2\} = \\ &= \frac{1}{4} \{\|x - y\|^2 - \|x + y\|^2 + i\|x - iy\|^2 - i\|x + iy\|^2\} = \\ &= -\frac{1}{4} \{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\} = -(x,y).\end{aligned}$$

Si $\lambda = i$

$$\begin{aligned}(ix,y) &= \frac{1}{4} \{\|ix + iy\|^2 - \|ix - y\|^2 + i\|ix + iy\|^2 - i\|ix - iy\|^2\} = \\ &= \frac{1}{4} \{\|i(x - iy)\|^2 - \|i(x + iy)\|^2 + i\|i(x + y)\|^2 - i\|i(x - y)\|^2\} = \\ &= \frac{1}{4} \{\|x - iy\|^2 - \|x + iy\|^2 + i\|x + y\|^2 - i\|x - y\|^2\} = \\ &= i\frac{1}{4} \{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\} = i(x,y).\end{aligned}$$

Si probamos que $(ax,y) = a(x,y)$, a real y positivo, entonces la propiedad 4) valdrá para todo λ complejo.

Como $F(x) = \|x\|$ es una función continua resulta que (x,y) es continua en x e y. Por otra parte, $(mx,y) = m(x,y)$ si m es entero (usar $mx = \underbrace{x+x+\ldots+x}_{m}$ y propiedad 3)).

Tomemos $m = 2$: $(2x,y) = 2(x,y)$. Entonces $\frac{1}{2}(2x,y) = (x,y)$.

Si $z = 2x$, $\frac{1}{2}(z,y) = (\frac{z}{2},y)$ y por lo tanto $\frac{1}{2^n}(x,y) = (\frac{x}{2^n},y)$.

Si m y n son números enteros resulta:

$$\left(\frac{m}{2^n} x , y\right) = \frac{m}{2^n} (x , y) .$$

Dado un número real a se puede escribir:

$a = \beta_m 2^m + \beta_{m-1} 2^{m-1} + \ldots + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots = b + \varepsilon$ con b diádico finito. Si $b \longrightarrow a$ entonces $\varepsilon \longrightarrow 0$. Luego, $(ax,y) = (bx + \varepsilon x , y) =$

$= b(x,y) + (\varepsilon x,y) \longrightarrow a(x,y)$ y 4) queda así demostrada.

Sea N un espacio vectorial en el cual está definida una funcional (x,y) que satisface las propiedades 1), 2), 3), 4); definimos

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

Con esta definición de norma, N es un espacio normado. De la propiedad 2) resulta $\|x\| \geq 0$ para todo x.

Para probar la desigualdad triangular: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ usaremos la siguiente:

DESIGUALDAD DE SCHWARZ: $|(x,y)| \leq \|x\|.\|y\|$.

Veamos primero esta desigualdad.

$0 \leq \|x - \lambda y\|^2 = (x - \lambda y\ ,\ x - \lambda y) = \|x\|^2 - \lambda(y,x) - \bar{\lambda}(x,y) + |\lambda|^2\|y\|^2.$

Supongamos $(x,y) \neq 0$ y tomemos $\lambda = \frac{(x,x)}{(y,x)}$, reemplazando λ en la última expresión queda:

$$0 \leq \|x\|^2 - (x,x) - \overline{(x,x)} + \frac{|(x,x)|^2}{|(y,x)|^2}\|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \frac{\|x\|^4}{|(y,x)|^2}\|y\|^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|x\|^2 \leq \frac{\|x\|^4\ \|y\|^2}{|(y,x)|^2}$. Entonces $|(x,y)|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$, y resulta

$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$.

Probemos que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Se ve fácilmente que $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$, y que valen la ley del paralelogramo y la fórmula de polaridad (verificarlas usando la definición de norma).

DEFINICION 3.2. Un espacio vectorial en el cual está definida una funcional (x,y) con las propiedades 1), 2), 3) y 4) se dice un espacio de pre-Hilbert.

DEFINICION 3.3. Un espacio de Hilbert es un pre-Hilbert completo.

Sea H un espacio de Hilbert.

DEFINICION 3.4. Dos vectores x e y son ortogonales si $(x,y) = 0$. Se nota $x \perp y$.

Si $x \perp y$ entonces se verifica el teorema de Pitágoras: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Si el espacio es complejo, (x,y) e (y,x) son complejos conjugados; entonces $(x,y) + (y,x) = 2\,\mathrm{Re}(x,y)$.

Si se verifica el teorema de Pitágoras debe ser: $\mathrm{Re}(x,y) = 0$. O sea, si H es real es necesario y suficiente que $x \perp y$ para que valga el teorema de Pitágoras.

¿Cuándo vale la igualdad en la desigualdad triangular?.

Si $x=0$ o $y=0$ la igualdad se da automáticamente. Supongamos x e y no nulos, vale la igualdad si y sólo si $x = cy$, $c > 0$.

En efecto, si $x = cy$, $c > 0$, $\|x+y\| = \|cy+y\| = (c+1)\|y\| = c\|y\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|$.

Recíprocamente, supongamos que en la desigualdad triangular valga la igualdad.
x e y deben satisfacer:

$$|(x,y)| = \mathrm{Re}(x,y) = \|x\|.\|y\|.$$

Entonces (x,y) es un número real y positivo y:

$$(x,y) = \|x\|.\|y\|.$$

En estas condiciones el λ que utilizamos en la demostración de la desigualdad de Schwarz es $\lambda = \frac{(x,x)}{(y,x)} = \frac{\|x\|}{\|y\|}$. Por lo tanto: $\|x - \lambda y\|^2 = - \|x\|^2 + \lambda^2 . \|y\|^2 = 0$. Entonces $x = \lambda y$, $\lambda > 0$. QED.

Veamos que $|(x,y)| = \|x\|.\|y\|$ si y sólo si $x = \rho y$, $\rho \in C$.

Si $x = \rho y$, $\rho \in C$, $|(x,y)| = |(\rho y,y)| = |\rho(y,y)| = |\rho|\|y\|.\|y\| = \|x\|.\|y\|$.

Supongamos $|(x,y)| = \|x\|.\|y\|$. Introducimos un nuevo vector $z = e^{i\theta}.y$ (una rotación de y) de manera que: $(x,z) = |(x,z)|$. Entonces:

$\|x\|.\|y\| = |(x,y)| = |(x,e^{-i\theta} z)| = |(x,z)| = (x,z) = \|x\|.\|z\|$.

De lo ya visto: $x = cz$, $c > 0$; luego $x = c(e^{i\theta} y) = \rho y$, $\rho \in C$. QED.

CARACTERIZACION DE LAS FUNCIONALES LINEALES CONTINUAS EN ESPACIOS DE HILBERT.

Entenderemos por conjunto convexo a un conjunto C que tiene la propiedad siguiente: si $u,v \in C$ entonces $\frac{u+v}{2} \in C$.

TEOREMA 3.1. Si C es un conjunto convexo cerrado, entonces existe en C un elemento de norma mínima.

DEMOSTRACION. Si $0 \in C$ no hay nada que probar.

Supongamos $0 \notin C$. Luego, $0 < d = \inf \{\|x\|: x \in C\}$ y existe $\{x_n\}$ tal que $\|x_n\|$ es decreciente y $\|x_n\| \longrightarrow d$.

Como C es convexo, si $x_n, x_m \in C$ entonces $\dfrac{x_n + x_m}{2} \in C$ y $\|x_n + x_m\| \geqslant 2d$.

Aplicando la ley del paralelogramo:

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - \|x_n + x_m\|^2 .$$

Luego $\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$ si $n,m \longrightarrow \infty$; la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy y C es cerrado, luego existe $x_0 \in C$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$ si $n \longrightarrow \infty$.

Como $\|\cdot\|$ es una funcional continua resulta $\|x_0\| = d$. Hemos encontrado un elemento de norma mínima, veamos que es único.

Supongamos que $y \in C$, $\|y\| = d$; $\dfrac{y + x_0}{2} \in C$ y $\left\|\dfrac{y + x_0}{2}\right\| \leqslant \left\|\dfrac{y}{2}\right\| + \left\|\dfrac{x_0}{2}\right\| \leqslant d$, y también $\left\|\dfrac{y + x_0}{2}\right\| \geqslant d = \inf\limits_{x \in C} \|x\|$. Luego $\left\|\dfrac{y + x_0}{2}\right\| = d$. Hemos visto que la igualdad en la desigualdad triangular se presenta cuando $y = cx_0$, $c > 0$. En consecuencia, $d = \|y\| = \|cx_0\| = c\|x_0\|$, y por lo tanto $c = 1$. QED.

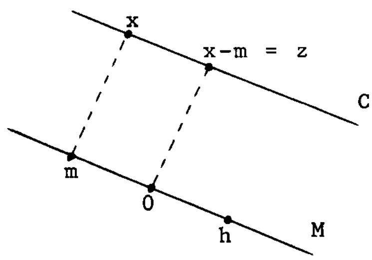
A diferencia de lo que en general sucede en espacios de Banach, en los espacios de Hilbert se puede encontrar el elemento de C que realiza la distancia al origen.

El siguiente teorema caracteriza los elementos ortogonales a un subespacio.

TEOREMA 3.2. Sea M un subespacio de H. $M^\perp = \{z \in H: (m,z) = 0 \text{ para todo } m \in M\}$. Entonces $H = M \oplus M^\perp$ y si $x = m+z$ con $z \in M^\perp$, $m \in M$, entonces m es la mejor aproximación a x desde M.

DEMOSTRACION. Sea $x \in H$ y $C = x+M$; por el teorema anterior existe $z \in C$ que realiza la mínima distancia, es decir, existe $m \in M$ tal que $z = x-m$ y

$$\|z\| = d = \inf \{\|u\| : u \in C\}.$$



Si $y \in M$ y λ complejo, $\lambda y \in M$ y se tiene

$$\|x - m - \lambda y\|^2 \geqslant \|x - m\|^2 = \|z\|^2.$$

Debemos probar que $(z,h) = 0$ para todo $h \in M$.

Supongamos que esto no es cierto, es decir existe $y_1 \in M$ tal que $(z,y_1) = (x-m,y_1) \neq 0$.

Sea $\lambda = \dfrac{(x-m,y_1)}{\|y_1\|^2} = \dfrac{(z,y_1)}{\|y_1\|^2}$. Entonces $\|z - \lambda y_1\|^2 = (z-\lambda y_1, z-\lambda y_1) =$

$$= \|z\|^2 - \bar{\lambda}(z,y_1) - \lambda(y_1,z) + |\lambda|^2 \|y_1\|^2 = \|z\|^2 - 2\mathrm{Re}\, \bar{\lambda}(z,y_1) +$$

$$+ \frac{|(z,y_1)|^2}{\|y_1\|^4}\|y_1\|^2 = \|z\|^2 - 2\frac{|(z,y_1)|^2}{\|y_1\|^2} + \frac{|(z,y_1)|^2}{\|y_1\|^2} = \|z\|^2 - \frac{|(z,y_1)|^2}{\|y_1\|^2} < \|z\|^2,$$

contradicción.

Veamos que la descomposición $z = x - m$ es única.

Si $x = m + z = m_1 + z_1$, $z \perp M$ y $z_1 \perp M$, entonces: $m - m_1 = z_1 - z$ y $\|m - m_1\|^2 = (m - m_1, z_1 - z) = 0$, luego $m = m_1$ y $z = z_1$, QED.

TEOREMA 3.3. (Representación de Riesz-Fréchet). **Para toda $F \in H^*$ existe un único $f \in H$ tal que $F(x) = (x,f)$ para todo $x \in H$.**

DEMOSTRACION: Si $F = 0$ tomamos $f = 0$.

Supongamos $F \neq 0$. Consideremos el espacio nulo de F, $M = M_F$, existe $z \neq 0$ tal que $z \perp M$.

Queremos encontrar entre los $f \in M^{\perp}$ el que verifique: $F(x) = (x,f)$ y cuando $x = f$, $F(f) = (f,f) = \|f\|^2$.

M_F tiene codimensión 1; luego $f = cz$ para algún c complejo si $f \in M^{\perp}$. Además $F(f) = F(cz) = cF(z)$ y $F(f) = (f,f) = (cz,cz) = |c|^2.\|z\|^2 = c.\bar{c}\|z\|^2$. Entonces $c = \frac{\overline{F(z)}}{\|z\|^2}$

Sea $x \in H$, $x = m + \lambda f$, $m \in M$. Luego $F(x) = F(m + \lambda f) = F(m) + \lambda F(f) =$
$= 0 + \lambda\|f\|^2 = \lambda(f,f) = (\lambda f,f) = (m,f) + (\lambda f,f) = (m + \lambda f,f) = (x,f)$, QED.

NB. Obsérvese que toda $f \in H$ define una funcional lineal contínua $F(x) := (x,f)$ pues $|F(x)| \leqslant \|f\|.\|x\|$.

Sea A un álgebra de Banach. En lo que sigue supondremos que es un álgebra de Banach con unidad, o sea, existe $e \in A$ tal que $ef = fe$ para todo $f \in A$.

El estudio de las funcionales lineales de un espacio de Banach $\mathcal{B}$ mostró ser muy útil. Ellas no son otra cosa que aplicaciones de $\mathcal{B}$ en $\mathbb{C}$ que respetan la estructura algebraica de $\mathcal{B}$, o sea, son homomorfismos de $\mathcal{B}$ en $\mathbb{C}$. Para el estudio de las álgebras de Banach puede uno, por analogía, sospechar que será importante estudiar los homomorfismos que respetan la estructura de anillo, es decir los F tales que $F: A \longrightarrow \mathbb{C}$ y

1) $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$

2) $F(f.g) = F(f).F(g)$.

No todas las funcionales lineales sobre $\mathcal{B}$ son continuas pero en las álgebras de Banach la estructura es tan fuerte que bastan 1) y 2) para que las funcionales lineales sean continuas. En efecto, vale el siguiente:

TEOREMA 3.4. 1) y 2) $\Rightarrow$ F es continua y $\|F\| = 1$.

Otros resultados que muestran cuan exigente es la estructura de álgebras de Banach se enuncian a continuación:

TEOREMA 3.5. i) Si A es un cuerpo entonces A es isométricamente isomorfa a C.
ii) Si en A se verifica $\|f.g\| = \|g\|\|f\|$ $\forall$ $f,g \in A$ entonces A es isométricamente isomorfa a C.

No demostraremos estos teoremas.

ESPACIOS ℓ^p.

$$\ell^p = \{(a_1,a_2,\ldots): \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty\}, \quad 1 \leqslant p < \infty;$$

Si $a = (a_1,a_2,\ldots)$, $\|a\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p)^{1/p}$.

$$\ell^\infty = (a_1,a_2,\ldots): \sup_i |a_i| < \infty\}, \quad \|a\|_\infty = \sup_i |a_i|.$$

Si $1 < p < \infty$ y q es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, p y q se dicen complementarios y los espacios ℓ^p y ℓ^q correspondientes también se dicen complementarios. Observemos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longleftrightarrow p.q = p+q$; $p = \frac{q}{q-1}$ y $q = \frac{p}{p-1}$; $p(q-1) = q$ y $q(p-1) = p$.

Fn lo que sigue usaremos estas relaciones entre p y q. Si p=1 (p=∞) entonces debe ser q=∞ (q=1) para que sus inversos sumen 1. Con esta convención diremos también que ℓ^p y ℓ^q son complementarios aún para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Notemos que si $a \geqslant b > 0$, $0 < p < \infty$ entonces $(a+b)^p \leqslant (2a)^p \leqslant 2^p(a^p+b^p)$.

Luego, si $a = (a_i)$, $b = (b_i) \in \ell^p$, entonces $a+b = (a_i+b_i) \in \ell^p$, pues

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (|a_i| + |b_i|)^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} 2^p(|a_i|^p + |b_i|^p) =$$

$$= 2^p (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p + \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p) < \infty.$$

Es decir, los espacios ℓ^p son espacios vectoriales cuando $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

LEMA 3.1. Sean p y q complementarios. Entonces si $a,b \geqslant 0$

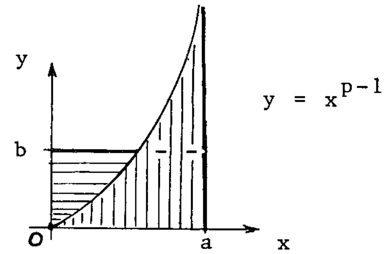
$$a.b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} .$$

DEMOSTRACION. Sea $y = x^{p-1}$. Su inversa es $x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$.

$\int_0^a x^{p-1}\, dx = \frac{a^p}{p}$ y

$\int_0^b y^{q-1} \cdot dy = \frac{b^q}{q} \Rightarrow$

$a.b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. QED.



DESIGUALDAD DE HÖLDER. Sea $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Si $a = (a_i) \in \ell^p$ y $b = (b_i) \in \ell^q$ entonces $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leqslant \|a\|_p \ \|b\|_q$.

DEMOSTRACION. Si $a = 0$ o $b = 0$ vale la igualdad.

Supongamos $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Usando la desigualdad que probamos en el lema 3.1

$$\frac{|a_i|}{\|a\|_p} \cdot \frac{|b_i|}{\|b\|_q} \leqslant \frac{|a_i|^p}{p.\|a\|_p^p} + \frac{|b_i|^q}{q.\|b\|_q^q}$$ tenemos

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i . b_i|}{\|a\|_p \ \|b\|_q} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p}{p \cdot \|a\|_p^p} + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q}{q \cdot \|b\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Hemos probado $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i . b_i| \leqslant \|a\|_p \ \|b\|_q$ si $1 < p,q < \infty$.

(El caso p=2, q=2, corresponde a la conocida desigualdad de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz). Si p=1 entonces $q=\infty$ y:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i . b_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| |b_i| \leqslant \sup_i |b_i| \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \|b\|_\infty \ \|a\|_1 .$$ QED.

DESIGUALDAD DE MINKOWSKI. Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $a,b \in \ell^p$ entonces:

$$\|a + b\|_p \leqslant \|a\|_p + \|b\|_p .$$

DEMOSTRACION. Si p=1, $\|a + b\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (|a_i| + |b_i|) =$
$= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| = \|a\|_1 + \|b\|_1$.

Si $p=\infty$, $\|a + b\|_\infty = \sup_i |a_i+b_i| \leqslant \sup|a_i| + \sup|b_i| = \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$.

Si $1 < p < \infty$ y $\|a + b\|_p \neq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (|a_i| + |b_i|)|a_i+b_i|^{p-1} =$

$= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| |a_i+b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| |a_i+b_i|^{p-1} \leqslant$ (usando la desigualdad de Hölder)

$\leq \|a\|_p(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i + b_i|^{q(p-1)})^{1/q} + \|b\|_p(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i + b_i|^{q(p-1)})^{1/q} =$

$= (\|a\|_p + \|b\|_p)(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i + b_i|^p)^{1/q}$. Entonces $\|a + b\|_p^p \leq (\|a\|_p + \|b\|_p)\|a+b\|_p^{p/q}$,

y por lo tanto $\|a + b\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|a\|_p + \|b\|_p$ con $p - \frac{p}{q} = 1$. QED.

CALCULO DE LA NORMA. Sea $1 \leq p < \infty$, q su complementario. Sea $a = (a_n) \in \ell^p$; $b = (b_n) \in \ell^q$. Queremos obtener la norma en ℓ^p en función de los elementos de ℓ^q.

Vamos a probar que:

I) $\|a\|_p = \sup\limits_{\|b\|_q \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i|$,

Sea $a \in \ell^{\infty}$. Entonces su norma es:

II) $\|a\|_{\infty} = \sup\limits_{\|b\|_1 \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i|$.

DEMOSTRACION. I) Si $a \in \ell^p$, $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p = \|a\|_p^p$. Si $\|b\|_q \leq 1$ por la desigualdad de Hölder se tiene: $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i\ b_i| \leq \|a\|_p \ \|b\|_q \leq \|a\|_p$.

Elijamos un b adecuado de norma 1. Sea $\tilde{b}_i = |a_i|^{p-1}$, $\tilde{b} = (\tilde{b}_i)$.

$\|\tilde{b}\|_q = (\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^{q(p-1)})^{1/q} = (\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p)^{1/q} = \|a\|_p^{p/q}$.

Definimos $b_i = \dfrac{\tilde{b}_i}{\|a\|_p^{p/q}}$ y $b = (b_i)$. Entonces $\|b\|_q = 1$: $\|b\|_q^q = \sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q =$

$= \sum_{i=1}^{\infty} (\dfrac{|a_i|^{p-1}}{\|a\|_p^{p/q}})^q = \dfrac{1}{\|a\|_p^p} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{(p-1)q} = 1$.

$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i\ b_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \dfrac{|a_i|^{p-1}}{\|a\|_p^{p/q}} = \dfrac{1}{\|a\|_p^{p/q}} \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p = \|a\|_p$.

Hemos probado así que $\|a\|_p = \sup\limits_{\|b\|_q \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i\ b_i|$.

II) $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i\ b_i| \leq \|a\|_{\infty} \ \|b\|_1 \leq \|a\|_{\infty}$.

$\|a\|_\infty = \sup_i |a_i|$ y sea $0 < |a_{n_k}| \longrightarrow \|a\|_\infty$. Basta tomar

$b_i^{(k)} = \begin{cases} \text{sign } a_{n_k} & \text{si } i = n_k, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$ Entonces $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i\, b_i^{(k)}| = |a_{n_k}|$ y

II) sigue. QED.

EJERCICIOS . 1) Si $a \notin \ell^p$, $\|a\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p = \infty$. Demostrar que si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, entonces vale I).

2) Demostrar, para esos valores de p, que en I) puede reemplazarse $\sum |a_i\, b_i|$ por $|\sum a_i\, b_i|$.

En lo que sigue usaremos la notación:

$$a = (a_1, a_2, \ldots) = (a(1), a(2), \ldots) ,$$

luego $\quad a_n = (a_n(1), a_n(2), \ldots)$.

LEMA DE FATOU. Sea $(p_n(i))$ una sucesión de números no negativos, $p_n = (p_n(1), p_n(2), \ldots)$. Entonces: $\sum_{i=1}^{\infty} \underline{\lim}_n\, p_n(i) \leqslant \underline{\lim}_n \sum_{i=1}^{\infty} p_n(i)$.

DEMOSTRACION. Sea $g_N(i) = \inf_{n \geq N} p_n(i)$; luego

$\sum_{i=1}^{\infty} g_N(i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} p_n(i)$ si $n \geqslant N$, N fijo. Entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_N(i) \leqslant \inf_{n \geq N} \sum_{i=1}^{\infty} p_n(i).$$

Cuando N crece, $g_N(i)$ también crece para todo i y

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g_N(i) \leqslant \lim_{N\to\infty} (\inf_{n \geq N} \sum_{i=1}^{\infty} p_n(i)) = \underline{\lim} \sum_{i=1}^{\infty} p_n(i).$$

Aplicando el teorema de Bepo-Levi, o directamente, resulta:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lim_{N\to\infty} g_N(i) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g_N(i). \qquad \text{QED.}$$

Probaremos a continuación que *los ℓ^p son completos*, o sea, son espacios de Banach.

Si $p=\infty$ y $(a_n) \in \ell^\infty$ es de Cauchy, para cada i $|a_m(i) - a_n(i)| \leqslant \|a_m - a_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$; luego $(a_n(i))$ es de Cauchy y existe $a(i)$ tal que $a_n(i) \xrightarrow[n\to\infty]{} a(i)$; entonces

$|a_n(i)-a(i)| \leqslant \varepsilon$ y $\|a_n-a\|_\infty = \sup_i |a_n(i)-a(i)| \leqslant \varepsilon$.

Si $1 \leqslant p < \infty$ y $(a_n) \in \ell^p$ es de Cauchy, $\|a_n-a_m\|_p \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$; luego:

$|a_n(i)-a_m(i)| \leqslant \|a_n-a_m\|_p$. Luego $(a_n(i))$ es de Cauchy y existe a(i) tal que $a_n(i) \xrightarrow[n\to\infty]{} a(i)$ para todo i. En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_n(i)-a_m(i)|^p = \sum_{i=1}^{\infty} \lim |a_n(i)-a_m(i)|^p \leqslant \underline{\lim}_m \sum_{i=1}^{\infty} |a_n(i)-a_m(i)|^p =$$

$= \underline{\lim}_m \|a_n-a_m\|_p^p \leqslant \varepsilon$. El elemento $a = (a(i)) \in \ell^p$ pues:

$\|a\|_p = \|a-a_n+a_n\|_p \leqslant \|a-a_n\|_p + \|a_n\|_p \leqslant \varepsilon + \|a_n\|_p < \infty$.

Los ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$, son *separables*. En efecto, todos los elementos de la forma:

$$(a(1),a(2),\dots,a(j),0,0,\dots)$$

con a(i) racional para todo i,j, $1 \leqslant i \leqslant j$, forman un conjunto numerable y denso en ℓ^p.

Probaremos ahora que $(\ell^p)^* = \ell^q$ si $1 \leqslant p < \infty$.

Sea $(f(k)) \in \ell^p$ y $(g(k)) \in \ell^q$.

Definimos $F(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\, g(k)$.

F es lineal y acotada:

$|F(f)| = |\sum_{k=1}^{\infty} f(k)g(k)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |f(k)g(k)| \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q$,

(1) $$\|F\| \leqslant \|g\|_q .$$

Recíprocamente, sea $F \in (\ell^p)^*$; queremos probar que existe un *único* elemento $g \in \ell^q$ tal que $F(f) = \sum f(k)g(k)$ y $\|F\| = \|g\|_q$.

Sean $e_1 = (1,0,0,\dots)$,

$e_2 = (0,1,0,\dots)$,

$\vdots$

$e_n = (0,0,\dots,1,0,\dots),\dots$ y consideremos

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} f(k)e_k\|_p = (\sum_{N+1}^{\infty} |f(k)|^p)^{1/p} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Definimos $F(e_n) = g(n)$

$$F(f) = F(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(k)\, e_k) = \lim_{N\to\infty} F(\sum_{k=1}^{N} f(k)e_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(k)\, F(e_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\, g(k).$$

Tomemos f con $\|f\|_p \leqslant 1$. Entonces: $|\sum_{k=1}^{\infty} f(k)\, g(k)| \leqslant \|F\|$ y

$$\sup_{\|f\|_p \leq 1} |\sum_{k=1}^{\infty} f(k)\, g(k)| \leqslant \|F\|.$$

Por otra parte sabemos que: $\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leq 1} |\sum_{k=1}^{\infty} f(k)\, g(k)|$; luego:

$$(2) \qquad \|g\|_q \leqslant \|F\| < \infty.$$

De (1) y (2) resulta $\|F\| = \|g\|_q$. QED.

EJERCICIO. Demostrar que c_0 es un espacio de Banach cuyo adjunto, c_0^*, es isométricamente isomorfo a ℓ^1.

EL ESPACIO $C[0,1]$. El espacio $C[0,1]$ es el conjunto de las funciones reales continuas definidas en $[0,1]$. Si $f(x) \in C[0,1]$, $\|f\| = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$. Con esta definición de norma $C[0,1]$ es un espacio de Banach.

¿Cuáles son sus funcionales lineales?. El teorema de representación de Riesz nos dará la respuesta.

Para ello primero recordaremos

LA INTEGRAL DE STIELTJES. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$, $\alpha(x)$ de variación acotada; definimos la integral de Stieltjes de $f(x)$ con respecto a $\alpha(x)$ así:

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$$

donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ es una partición de $[0,1]$, $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ y el límite se toma para $\max\,(x_i - x_{i-1}) \longrightarrow 0$.

Podemos suponer que $\alpha(x)$ es continua a derecha en $(0,1)$ y $\alpha(0) = 0$; en este caso diremos que $\alpha(x)$ está *normalizada*.

TEOREMA DE F.RIESZ. Sea A una funcional lineal continua sobre $C([0,1])$. Entonces existe exactamente una función $\alpha(x)$ de variación acotada normalizada tal que

$$A(f) = \int_0^1 f(x)\, d\alpha(x) \quad \text{para todo } f(x) \in C[0,1].$$

DEMOSTRACION. Consideremos una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas, creciente y acotada; en consecuencia $f_n(x)$ tiende a una función acotada $f(x)$, la cual no es necesariamente continua.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} |A(f_{n+1}-f_n)|$ es convergente. En efecto, sus sumas parciales verifican $\sum_{n=1}^{N} |A(f_{n+1}-f_n)| = \sum_{n=1}^{N} A(\pm(f_{n+1}-f_n)) = A \sum_{n=1}^{N} \pm(f_{n+1}-f_n)$ y la serie

$\pm (f_2 - f_1) \pm (f_3 - f_2) \pm \dots$ es en valor absoluto menor o igual que $[f_2 - f_1] + [f_3 - f_2] + \dots = f(x) - f_1(x)$. Luego,

$$| \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}-f_n)| \leqslant |f(x)-f_1(x)| \leqslant C \quad y \quad |A \sum_{n=1}^{N} \pm(f_{n+1}-f_n)| \leqslant \|A\| C.$$

En consecuencia, la serie $Af_1 + A(f_2-f_1) + A(f_3-f_2) + \dots$ converge y sus sumas parciales que son iguales a Af_n tienden a un límite finito. Escribamos $Af := \lim_{n\to\infty} Af_n$.

Veamos que este limite está bien definido.

Si f es continua, el teorema de Dini asegura que $f_n \xrightarrow{\cdot} f$ y sigue que la nueva definición de A coincide con la anterior. En caso contrario supongamos que dos sucesiones crecientes $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, de funciones continuas, tienen el mismo límite f; veamos que las sucesiones $\{Af_n\}$ y $\{Ag_n\}$ también tienden al mismo límite.

Supongamos que $f_1 < f_2 < f_3 < \dots$ y que $g_1 < g_2 < g_3 \dots$ (si no fueran estrictamente crecientes reemplazamos $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ por las sucesiones $\{f_n - \frac{1}{n}\}$; $\{g_n - \frac{1}{n}\}$).

Dado m existe n tal que $f_m < g_n$ (Supongamos que esto no suceda. Sea $K_i = \{x: f_m(x) \geqslant g_i(x)\}$; K_i es un conjunto cerrado no vacío contenido en $[0,1]$. Como las g_i crecen, los K_i decrecen y son compactos. Entonces existe $x \in \cap K_i$. Allí $f_m(x) \geqslant \lim g_i(x) = f(x)$ contradicción).

Análogamente, para cada g_n existe f_p tal que $g_n(x) < f_p(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Podemos formar entonces una sucesión creciente $f_{m_1} < g_{n_1} < f_{m_2} < g_{n_2} < \dots$ que tiende puntualmente a f. Sabemos que la sucesión $\{Af_{m_1}, Ag_{n_1}, Af_{m_2}, Ag_{n_2}, \dots\}$ converge. Luego, $\lim Af_{m_i} = \lim Af_n = \lim Ag_{n_i} = \lim Ag_n$. Esto es, la funcional A está bien definida para toda función f acotada la cual es el límite de una sucesión creciente de funciones continuas.

Sean f y g dos funciones del tipo considerado y $f_n \uparrow f$, $g_n \uparrow g$. Entonces

$A(f+g) = \lim\limits_n A(f_n+g_n) = \lim\limits_n [A(f_n) + A(g_n)] = \lim\limits_n A(f_n) + \lim A(g_n) =$

$= A(f) = A(g)$.

También vale $A(\lambda f) = \lambda A(f)$ si $\lambda \geqslant 0$.

Definamos $A(f-g) = A(f) - A(g)$ y observemos que la relación $f-g = f_1 - g_1$ puede escribirse: $f+g_1 = f_1 + g$. Entonces:

$A(f) + A(g_1) = A(f + g_1) = A(f_1 + g) = A(f_1) + A(g)$ y concluímos

$A(f) - A(g) = A(f_1) - A(g_1)$. Es decir, la definición es buena.

Supongamos tener $f_1, f_2, \ldots, f_m$ del tipo considerado.

¿Vale que $A(\pm f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_m) = \pm A(f_1) \pm A(f_2) \pm \ldots \pm A(f_m)$?.

Agrupando las f_i con signo positivo y las f_j con signo negativo:

$A((\underbrace{f_{m_1} + f_{m_2} + \ldots + f_{m_r}}_{f}) - (\underbrace{f_{m_{r+1}} + \ldots +}_{g})) = A(f) - A(g) =$

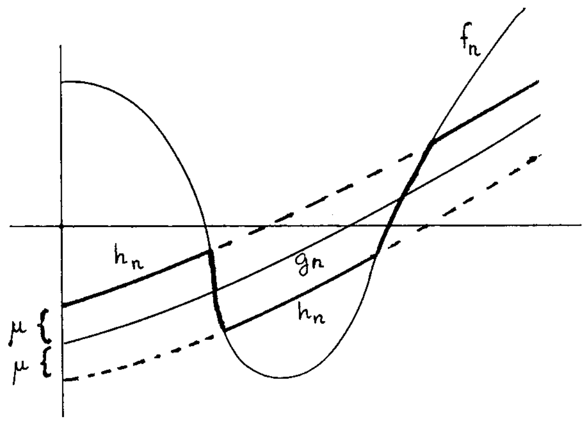
$= A(f_{m_1}) + \ldots + A(f_{m_r}) - A(f_{m_{r+1}}) - A(f_{m_{r+2}}) - \ldots$. Por lo tanto,

A es aditiva y homogénea (lineal) sobre una clase C' que contiene a $C[0,1]$ y que es un espacio vectorial.

Sea $f_n \uparrow f \in C'$, $g_n \uparrow g \in C'$ y $\sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x)-g(x)| = \mu$; si demostramos que $|A(f-g)| \leqslant \|A\| \mu$, tendremos "continuidad para esta extensión de A".

Consideremos las funciones auxiliares $h_n(x)$ definidas de la siguiente manera:

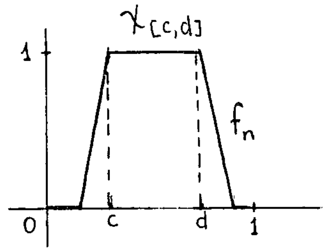
$$\begin{cases} h_n = f_n & \text{si} \quad |f_n(x)-g_n(x)| \leqslant \mu \\ h_n = g_n+\mu & \text{si} \quad f_n(x)-g_n(x) > \mu \\ h_n = g_n-\mu & \text{si} \quad f_n(x)-g_n(x) < -\mu \end{cases}$$



La continuidad de f_n y g_n implica la de h ; además $\|h_n - g_n\|_\infty \leqslant \mu$ y $h_n \uparrow f$. (Demostrarlo).

Luego $|A(f-g)| = |\lim A(h_n-g_n)| = \lim |A(h_n-g_n)| \leqslant \overline{\lim} \; \|A\|\|h_n-g_n\|_\infty \leqslant \|A\|\mu$.

Sea $\chi_{[c,d]}$ la función característica del intervalo $[c,d] \subset (0,1)$. $-\chi_{[c,d]}$ es el límite de la sucesión creciente formada por las funciones continuas $f_n(x)$ las cuales son cero fuera del intervalo $(c-\frac{1}{n}, d+\frac{1}{n})$; -1 en (c,d) y lineales en los segmentos restantes. Es decir, todas las funciones características de intervalos, cerradas o no, pertenecen a C' (completar la demostración).



Definimos $\alpha(0) = 0$; $\alpha(x) = A(\chi_{[0,x]})$ si $0 < x \leqslant 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| = |\alpha(x_1) - \alpha(x_0)| + |\alpha(x_2) - \alpha(x_1)| + \dots =$$

$$= |A(\chi_{[0,x_1]})| + |A(\chi_{(x_1,x_2]})| + \dots = A(\varepsilon_1 \chi_{[0,x_1]}) + A(\varepsilon_2 \chi_{(x_1,x_2]}) + \dots,$$

con $\varepsilon_1 = \operatorname{sgn} A \chi_{[x_0,x_1]}$, etc.. Luego $\sum_{k=1}^{n} |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| =$

$$= A(\varepsilon_1 \chi_{[0,x_1]} + \varepsilon_2 \chi_{(x_1,x_2]} + \dots) \leqslant \|A\| . 1 .$$

Esta acotación no depende de la partición; luego $\alpha(x)$ es de variación acotada y la variación total de α, $\overset{1}{\underset{0}{V}} \alpha$, es menor o igual que $\|A\|$.

Sea $f(x)$ una función continua en $[0,1]$ y sea $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ una partición del intervalo $[0,1]$. Notemos con ξ_k un punto del intervalo (x_{k-1}, x_k) y definamos la función $\varphi(x)$ como sigue:

$$\varphi(x) = f(\xi_k) \quad \text{si} \quad x \in (x_{k-1}, x_k]$$
$$\varphi(0) = f(\xi_1).$$

Podemos escribir $\varphi(x)$ como sigue:

$$\varphi(x) = f(\xi_1)\,\chi_{[0,x_1]} + f(\xi_2)\,\chi_{(x_1,x_2]} + \dots + f(\xi_n)\,\chi_{(x_{n-1},x_n]} .$$

$$A\varphi(x) = f(\xi_1)\,A\,\chi_{[0,x_1]} + f(\xi_2)\,A\,\chi_{(x_1,x_2]} + \dots + f(\xi_n)\,A\,\chi_{(x_{n-1},x_n]} =$$

$$= f(\xi_1)(\alpha(x_1)-\alpha(0)) + f(\xi_2)(\alpha(x_2)-\alpha(x_1)) + \dots + f(\xi_n)(\alpha(x_n)-\alpha(x_{n-1})).$$

Luego, por pertenecer φ a C' y f a $C \subset C'$ tenemos:

$|Af - A\varphi| = |A(f-\varphi)| \leqslant \|A\| \|f - \varphi\|$.

Si $\text{máx}(x_x - x_{x-1}) \longrightarrow 0$ entonces $\varphi(x)$ tiende a $f(x)$ uniformemente.

Como $A\varphi$ tiende a $\int_0^1 f(x)\, d\alpha(x)$ resulta

$$A(f) = \int_0^1 f(x)\, d\alpha(x).$$

Supongamos que $\tilde{\alpha}(x)$ se obtiene a partir de $\alpha(x)$ agregando la continuidad a derecha en los puntos interiores de $(0,1)$:

$$\int_0^1 f(x)\, d\alpha(x) = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] =$$

$$= \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\tilde{\alpha}(x_k) - \tilde{\alpha}(x_{k-1})].$$

El último igual resulta al elegir una partición apropiada (de manera de evitar que x_k sea uno de los a lo sumo numerables puntos de discontinuidad.)

Luego:

$$\int_0^1 f(x)\, d\alpha(x) = \int_0^1 f(x)\, d\tilde{\alpha}(x).$$

Veamos ahora que $\alpha(x)$ es única si está normalizada.

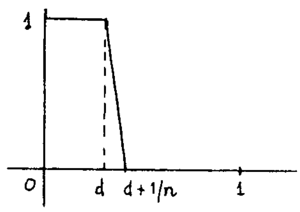
Supongamos $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$ funciones de variación acotada normalizadas; luego $\beta(x) = \alpha(x) - \alpha_1(x)$ es una función de variación acotada normalizada. Si

$$A(f) = \int_0^1 f(x)\, d\alpha(x) \quad \text{y} \quad A(f) = \int_0^1 f(x)\, d\alpha_1(x) \quad \text{para todo } f$$

luego $0 = \int_0^1 f(x)\, d\beta(x)$, para todo f.

Debemos probar que $\beta(x) \equiv 0$. Sea

$f(x)$ igual a 1 en el intervalo $[0,d]$, cero en $[d+\frac{1}{n}, 1]$ y lineal en $[d, d+\frac{1}{n}]$ y sea d un punto de continuidad de β.



$$0 = \int_0^d f(x)\, d\beta(x) + \int_d^{d+\frac{1}{n}} f(x)\, d\beta(x) + \int_{d+\frac{1}{n}}^1 f(x)\, d\beta(x) =$$

$$= \beta(d) - \beta(0) + \int_d^{d+\frac{1}{n}} f(x)\, d\beta(x) = \beta(d) - \beta(0) \quad , \text{ pues}$$

$$\left|\int_d^{d+\frac{1}{n}} f(x)\ d\beta(x)\right| \leqslant V\ \beta[d, d+\tfrac{1}{n}] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ ya que d es un punto de continuidad.

Luego $\beta(d) = \beta(0) = 0$, y como β es continua a derecha y los puntos de continuidad son densos es necesariamente $\beta(x) = \beta(0) = 0$ en $[0,1)$. Análogamente se prueba que $\beta(d) = \beta(1)$. QED.

OBSERVACION. $C[0,1]$ es un álgebra de Banach pues allí $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ y $\|f.g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty . \|g\|_\infty$.

Los homomorfismos de $C([0,1])$ son necesariamente continuos como ya observamos antes y por lo tanto son funcionales lineales sobre $C([0,1])$. Es decir, admiten la representación de Riesz recién demostrada.

Podemos definir un homomorfismo δ_{x_0} aplicando $f \longrightarrow f(x_0)$ para cada $x_0 \in [0,1]$. Entonces

$$\delta_{x_0} : f \longrightarrow f(x_0) = \int_0^1 f(x)\ dS_{x_0}(x) ,$$

donde $S_{x_0}(x)$ es una función continua a derecha en $(0,1)$, que *toma* los valores 0 y 1, y sólo ellos, y que verifica:

$$S_{x_o}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > x_0, \\ 0 & \text{si} \quad x < x_0. \end{cases}$$

Se demuestra que todos los homomorfismos son de esta forma.

4. OPERADORES EN ESPACIOS DE BANACH.

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{R}$ espacios de Banach sobre el mismo cuerpo de escalares y $T: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{R}$ una aplicación u operación lineal, es decir $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$ con dominio de T igual a $\mathcal{B}$ y rango de T un subconjunto de $\mathcal{R}$.

Un operador lineal T es acotado si existe una constante $K \geqslant 0$ tal que para todo $f \in \mathcal{B}$ se verifica:

$$\|Tf\|_{\mathcal{R}} \leqslant K\ \|f\|_{\mathcal{B}}$$

Se verifica que: T acotado $\Longleftrightarrow$ T continuo. La demostración es semejante a la del Teorema 1.1 y se dará en el siguiente capítulo.

Definamos la norma del operador T

$$(1) \qquad \|T\| = \sup_{0<\|f\|\leq 1} \frac{\|Tf\|}{\|f\|} = \inf \{K: \|Tf\|_{\mathcal{R}} \leqslant K\|f\|_{\mathcal{B}}\ \ \forall\ f \in \mathcal{B}\} .$$

Indiquemos con $\tau(\mathcal{B},\mathcal{R})$ la familia de todos los operadores lineales acotados de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{R}$. Cuando $\mathcal{B} = \mathcal{R}$ notaremos $\tau(\mathcal{B})$.

DEFINICION 4.1. Si $S,T \in \tau(\mathcal{B},\mathcal{R})$ definimos

$$(S + T)(f) = S(f) + T(f)$$

$$(\alpha T)(f) = \alpha T(f)$$

Veamos que $S+T \in \tau(\mathcal{B},\mathcal{R})$.

$(S+T)(\alpha f + \beta g) = S(\alpha f + \beta g) + T(\alpha f + \beta g) = \alpha S(f) + \beta S(g) + \alpha T(f) + \beta T(g) =$
$= \alpha((S + T)(f)) + \beta((S + T)(g))$.

$\|(S + T)(f)\| = \|S(f) + T(f)\| \leqslant \|S(f)\| + \|T(f)\| \leqslant \|S\|\|f\| + \|T\|\|f\| =$
$= (\|S\| + \|T\|)\|f\|$ y $\|S + T\| \leqslant \|S\| + \|T\|$.

En forma análoga puede comprobarse que $\alpha T \in \tau(\mathcal{B},\mathcal{R})$ y $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$.

$\tau(\mathcal{B},\mathcal{R})$ es un espacio vectorial y con la definición (1) es un espacio normado.

DEFINICION 4.2. Si $S,T \in \tau(\mathcal{B})$ definimos $(T \circ S)(f) = T(S(f))$.

Si $T = S$ escribiremos $T^2 = T \circ T$.

El operador $T \circ S$ es lineal; veamos que es acotado $\|(T \circ S)(f)\| = \|T(S(f))\| \leqslant$
$\leqslant \|T\|\|Sf\| \leqslant \|T\|\|S\|\|f\|$ y $\|T \circ S\| \leqslant \|T\|\|S\|$.

NOTA. En general la operación "$\circ$" no es conmutativa.

TEOREMA 4.1. I) $\tau(\mathcal{B},\mathcal{R})$ es un espacio de Banach.
II) $\tau(\mathcal{B})$ es un álgebra de Banach.

DEMOSTRACION. Sea (T_n) una sucesión de Cauchy, $\|T_n - T_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.
Luego para todo $f \in \mathcal{B}$: $\|T_n(f) - T_m(f)\| = \|(T_n - T_m)(f)\| \leqslant$
$\leqslant \|T_n - T_m\|\|f\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$; la sucesión $(T_n(f))$ es de Cauchy en $\mathcal{R}$ que es completo, por lo tanto existe $T(f) = \lim\limits_n T_n(f)$.

$T(f)$ es lineal:

$T(\alpha f + \beta g) = \lim\limits_n T_n(\alpha f + \beta g) = \lim\limits_n (\alpha T_n(f) + \beta T_n(g)) =$
$= \alpha \lim\limits_n T_n(f) + \beta \lim\limits_n T_n(g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$.

Además de $|\|T_n\| - \|T_m\|| < \|T_n - T_m\|$ sigue que $\{\|T_n\|\}$ es de Cauchy, y en particular la sucesión de normas está uniformemente acotada: $\|T_n\| \leqslant K$. En consecuencia: $\|T(f)\| < K\|f\|$, es decir el operador límite es acotado.

Además: $\|T(f) - T_n(f)\| = \lim\limits_m \|T_n(f) - T_m(f)\| \leqslant \varliminf\limits_m \|T_n - T_m\|\|f\| \leqslant \varepsilon\|f\|$,
o sea, $\|T - T_n\| \leqslant \varepsilon$ y $T = \lim\limits_n T_n$. QED.

TRANSFORMACION ADJUNTA (U OPERADOR ADJUNTO).

Si T es un operador lineal y acotado de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{R}$; T induce un operador T^* de $\mathcal{R}^*$ en $\mathcal{B}^*$ llamado el adjunto de T que se define:

$$(T^*F)(f) = F(Tf) \quad , \quad F \in \mathcal{R}^* \quad y \quad f \in \mathcal{B}.$$

T^* está bien definido pues si $F \in \mathcal{R}^*$, T^*F debe ser una funcional lineal acotada sobre $\mathcal{B}$ y esto resulta de que F y T son lineales y acotados.

Podemos considerar también el operador T^{**} de $\mathcal{B}^{**}$ en $\mathcal{R}^{**}$.

Indicaremos ahora algunas propiedades del operador T^*.

TEOREMA 4.2. Sea T un operador lineal y acotado de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{R}$. Entonces:

i) $T^* \in \tau(\mathcal{R}^*, \mathcal{B}^*)$

ii) $\|T^*\| = \|T\|$

iii) $\|T^{**}\| = \|T\|$

iv) T^{**} extiende a T.

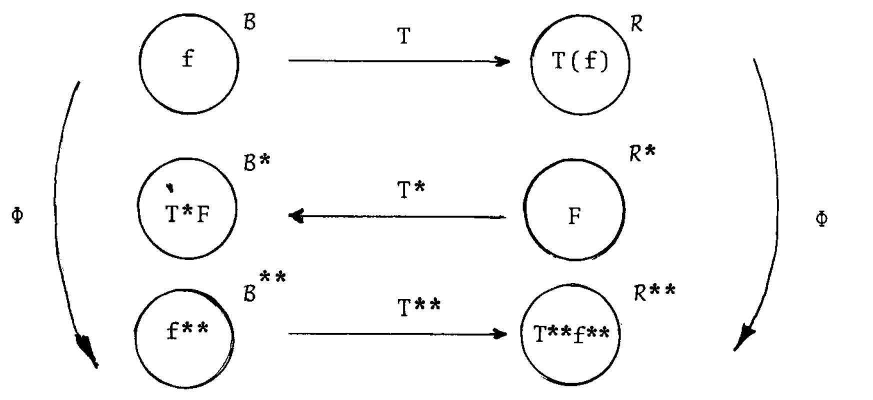
DEMOSTRACION. i), ii) $|(T^*F)(f)| = |F(Tf)| \leqslant \|F\|\|Tf\| \leqslant \|F\|\|T\|\|f\|$, entonces $\|T^*F\| \leqslant \|T\|\|F\|$ y de aquí resulta $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

Sea $f \in \mathcal{B}$, $T(f) \in \mathcal{R}$, por el teorema de Hahn-Banach existe $F \in \mathcal{R}^*$ tal que $\|F\| = 1$ y $F(Tf) = \|Tf\|$, luego: $\|Tf\| = |F(Tf)| = |T^*F(f)| \leqslant \|T^*F\|\|f\| \leqslant$ $\leqslant \|T^*\|\|F\|\|f\| = \|T^*\|\|f\|$ y resulta $\|T\| \leqslant \|T^*\|$.

iii) Sigue de ii).

iv) $T^{**}f^{**}(F) = f^{**}(T^*F) = (T^*F)(f) = F(Tf) = (Tf)^{**}(F)$ y hemos probado que $T^{**}(\Phi(f)) = \Phi(T(f))$. QED.

El siguiente esquema permite visualizar los operadores T^* y T^{**}.



TEOREMA 4.3. i) $(S + T)^* = S^* + T^*$

ii) $(\alpha S)^* = \alpha S^*$

Si $\mathcal{B} = \mathcal{R}$ iii) $(ST)^* = T^* S^*$

DEMOSTRACION. i) $(S + T)^*(F)(f) = F((S+T)(f)) = F(S(f) + T(f)) = F(Sf) + F(Tf) = (S^* + T^*)(F)(f)$.

ii) $(\alpha S)^*(F)(f) = F((\alpha S)(f)) = F(\alpha S(f)) = \alpha F(S(f)) = \alpha S^*(F)(f)$.

iii) $(ST)^*(F)(f) = F((ST)(f)) = F(S(Tf)) = (S^*F)(Tf) = (T^*(S^*F))(f) = (T^*S^*)(F)(f)$. QED.

En la teoría de espacios de Banach hay tres teoremas fundamentales; el primero es el teorema de Hahn-Banach cuya demostración ya hemos dado; el segundo es el teorema de la transformación inversa de Banach y el tercero es el llamado principio de acotación uniforme, o teorema de Banach-Steinhaus.

En lo que sigue usaremos la notación:

$$B_r = \{f \in \mathcal{B}: \|f\| < r\}$$

$$B_r(h) = \{f \in \mathcal{B}: \|f-h\| < r\}$$

En forma análoga notaremos las esferas de $\mathcal{R}$.

TEOREMA 4.4. (de la transformación inversa de Banach). Sea $T: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{R}$ una aplicación lineal y acotada. Supongamos que T es biunívoca y sobre; entonces la transformación inversa T^{-1} existe, es lineal y acotada.

DEMOSTRACION. Puesto que T es biunívoca y sobre, la aplicación T^{-1} existe y obviamente es lineal.

Para probar que T^{-1} es acotada daremos previamente los siguientes lemas.

LEMA 4.1. T^{-1} es acotada si y sólo si $T(B_1) \supset R$ para algún r.

DEMOSTRACION. Si T^{-1} es acotada entonces existe K tal que $\|T^{-1}(g)\| \leqslant K\|g\|, \leqslant K$ si $g \in R_1$, o sea $T^{-1}(R_1) \subseteq B_K$. Luego, $R_1 \subseteq T(B_K) = KT(B_1)$, esto es $R_{1/K} \subset T(B_1)$.

Recíprocamente, si $T(B_1) \supset R_r$ entonces $B_1 \supset T^{-1}(R_r)$, o $B_1 \supset rT^{-1}(R_1)$, esto es $B_{1/r} \supset T^{-1}(R_1)$ y esto significa que T^{-1} es acotado con $\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{r}$.

LEMA 4.2. $T(B_1)$ es denso en alguna esfera de $\mathcal{R}$.

DEMOSTRACION. Supongamos que $T(B_1)$ no es denso en ninguna esfera de $\mathcal{R}$. Esto ya implica que ningún $T(B_j)$ es denso en una esfera.

Sea $V^{(o)} = V^{(o)}(g_o)$ una esfera cerrada de R ; puesto que $T(B_1)$ no es denso en ninguna esfera de R, $\overline{T(B_1)} \not\supset V^{(o)}$ y existe $g_1 \in$ interior $V^{(o)}$, $g_1 \notin \overline{T(B_1)}$. Entonces existe $V^{(1)}(g_1)$, una esfera cerrada de R con centro g_1, tal que radio $V^{(1)} < 1/2$ radio de $V^{(o)}$, $V^{(1)}(g_1) \subset V^{(o)}$ y $T(B_1) \cap V^{(1)}(g_1) = \emptyset$.

Análogamente resulta que existen $g_2 \in V^{(1)}(g_1)$, $g_2 \notin \overline{T(B_2)}$ y una esfera cerrada $V^{(2)}(g_2)$ tal que: radio $V^{(2)}(g_2) < 1/2$ radio de $V^{(1)}(g_1)$, $V^{(2)}(g_2) \subset V^{(1)}(g_1)$ y $T(B_2) \cap V^{(2)}(g_2) = \emptyset$.

Construímos así una sucesión $\{g_i\}$ donde cada g_i es centro de $V^{(i)} \ni g_{i+1}$ y $T(B_i) \cap V^{(i)} = \emptyset$. $\{g_i\}$ es de Cauchy en R y existe $g \in R$ tal que $g = \lim\limits_n g_n$ y $g \in \cap V^{(n)}$. Como T es sobre existen $f \in B$ con $T(f) = g$ y m tal que $\|f\| < m$. Entonces $f \in B_m$ y $T(f) \in T(B_m)$. En consecuencia: $T(B_m) \cap V^{(m)} \neq \emptyset$, contradicción. QED.

LEMA 4.3. Si $T(B_1)$ es denso en alguna esfera de R entonces también lo es en una esfera alrededor del origen.

DEMOSTRACION. Si $T(B_1)$ es denso en alguna esfera de $R, \overline{T(B_1)} \supset R_{r_1}(h)$; entonces existen $g \in R_{r_1}(h)$ y $f \in B_1$ tales que $T(f) = g$; eligiendo r adecuadamente resulta: $R_r(g) \subset \overline{T(B_1)}$.

Como $\overline{T(B_1-f)} = \overline{T(B_1)-T(f)} = \overline{T(B_1)}-g \supseteq -g+R_r(g) = -g+(g+R_r(0)) = R_r(0)$ sigue $\overline{T(2B_1)} \supset R_r$ y por lo tanto $\overline{T(B_1)} \supset R_{r/2}$. QED.

Continuaremos ahora con la demostración del teorema, debemos probar que T^{-1} es acotado; por el lema 4.1 es suficiente probar que $T(B_1) \supset R_r$ para algún r. De los lemas 4.2 y 3 sigue que existe $R_r \subset \overline{T(B_1)}$. Sea $g \in R_r \subset \overline{T(B_1)}$, demostraremos que existe f tal que $\|f\| < 2$ y $T(f) = g$. Esto implicará que $R_r \subset T(B_2)$ y entonces $R_{r/2} \subset T(B_1)$, demostrando así el teorema.

Como $g \in \overline{T(B_1)}$ existe una esfera $R_{r/2}(g)$ tal que $R_{r/2}(g) \cap T(B_1) \neq \emptyset$. Sea $g_1 \in R_{r/2}(g) \cap T(B_1)$; existe $f_1 \in B_1$ tal que $T(f_1) = g_1$, $\|g-g_1\| < r/2$. Además $\overline{T(f_1+B_{1/2})} = \overline{T(B_{1/2})+T(f_1)} = g_1 + \overline{T(B_{1/2})} \supseteq g_1 + R_{r/2}$. Puesto que $\|g-g_1\| < r/2$ entonces $g \in R_{r/2}(g_1)$, luego $g \in \overline{T(f_1+B_{1/2})}$; entonces $R_{r/2^2}(g) \cap T(f_1+B_{1/2}) \neq \emptyset$. Sea $g_2 \in R_{r/2^2}(g) \cap T(f_1+B_{1/2})$, luego:

$\|g-g_2\| < r/2^2$ y existe $f_2 \in f_1+B_{1/2}$ tal que $T(f_2) = g_2$; $\|f_2-f_1\| < 1/2$, $\overline{T(f_2+B_{1/2^2})} = \overline{T(B_{1/2^2})} + T(f_2) = g_2 + R_{r/2^2}$, luego $g \in R_{r/2^2}(g_2)$ y en consecuencia $g \in \overline{T(f_2+B_{1/2^2})}$; entonces $R_{r/2^3}(g) \cap T(f_2+B_{1/2^2}) \neq \emptyset$.

Sea $g_3 \in R_{r/2^3}(g) \cap T(f_2+B_{1/2^2})$, $\|g-g_3\| < r/2^3$, $g_3 = T(f_3)$, $\|f_3-f_2\| < 1/2^2$.

Por inducción sobre n se tiene: $T(f_n) = g_n$, $\overline{T(f_n+B_{1/2^n})} = \overline{T(B_{1/2^n})}+T(f_n) \supseteq$ $\supseteq g_n + R_{r/2^n} \ni g$ y $\|f_n-f_{n-1}\| < 1/2^{n-1}$, $\|g_n-g\| < r/2^n$.

Tenemos así una sucesión $\{g_n\}$ tal que $g_n \longrightarrow g$, y otra $\{f_n\}$ de Cauchy. En consecuencia, $f = \lim\limits_n f_n$, $\|f\| < \|f_1\| + \|f_2-f_1\| + \ldots < 1 + \frac{1}{2} + \ldots = 2$ y $T(f) = T(\lim\limits_n f_n) = \lim\limits_n T(f_n) = \lim g_n = g$. QED

APLICACIONES DEL TEOREMA.

1) Recordemos que $\mathcal{B} \sim \hat{\mathcal{B}}$ si existe una aplicación biyectiva T de $\mathcal{B}$ sobre $\hat{\mathcal{B}}$ y existen constantes K y K' tales que $\|Tf\|_{\hat{\mathcal{B}}} \leqslant K\|f\|_{\mathcal{B}} \leqslant K'\|Tf\|_{\hat{\mathcal{B}}}$.

Si existe $T: \mathcal{B} \longrightarrow \hat{\mathcal{B}}$ tal que T es biyectiva y acotada entonces $\mathcal{B} \sim \hat{\mathcal{B}}$. En efecto, que T^{-1} es acotada sigue del teorema de la transformación inversa.

2) Sea $\mathcal{B}$ un espacio de Banach de dimensión n (complejo). Sea $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ una base de $\mathcal{B}$, podemos suponer $\|e_i\| = 1$.

Sea $T: C^n \longrightarrow \mathcal{B}$ definida como sigue:

$$T(a_1,a_2,\ldots,a_n) = a_1e_1 + a_2e_2 +\ldots+a_ne_n.$$

Puesto que $e_1,e_2,\ldots,e_n$ es una base de $\mathcal{B}$ la aplicación T es una biyección.

Sea $a = (a_1,\ldots,a_n)$ y supongamos en C la norma ℓ^1: $\|a\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$. Entonces $\|T(a)\| = \|a_1e_1+ a_2e_2+ \ldots + a_ne_n\| \leqslant |a_1| + \ldots + |a_n| = \|a\|_1$. En consecuencia $\|T\| \leqslant 1$ y por el teorema de la transformación inversa existe T^{-1} acotada, y $\mathcal{B} \sim C^n$.

El teorema del gráfico cerrado de Banach tiene importantes aplicaciones en Análisis y es equivalente al teorema de la transformación inversa.

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{R}$ espacios de Banach.

DEFINICION 4.3. Sea $A(\subseteq \mathcal{B})$ una variedad lineal, T una transformación lineal definida en A a valores en $\mathcal{R}$, T se dice cerrada si para toda sucesión $\{f_n\} \subset A$ tal que $f_n \longrightarrow f$ y $Tf_n \longrightarrow g$, entonces $f \in A$ y $Tf = g$.

Si $A = \mathcal{B}$ y T es acotado, se ve facilmente que T es cerrada. La recíproca no es cierta; el ejemplo más importante lo dan los operadores autoadjuntos no acotados en un espacio de Hilbert que son cerrados y cuyo tratamiento diferimos al capítulo 2.

DEFINICION 4.4. Sea $\mathcal{B}$ y $\mathcal{R}$ dos espacios de Banach sobre el mismo cuerpo de escalares; consideremos

$$\mathcal{B} \oplus \mathcal{R} = \{\{f,g\}:\ f \in \mathcal{B},\ g \in \mathcal{R}\}.$$

Definamos la suma y el producto por escalares como sigue:

$$\{f,g\} + \{f',g'\} = \{f + f',g + g'\},$$

$$\alpha\{f,g\} = \{\alpha f,\alpha g\}.$$

Con esta definición de suma y producto por escalares $\mathcal{B} \oplus \mathcal{R}$ es un espacio vectorial.

Introducimos en $\mathcal{B} \oplus \mathcal{R}$ la siguiente norma y probaremos que con esa norma $\mathcal{B} \oplus \mathcal{R}$ es de Banach:

$$\|\{f,g\}\| = \|f\| + \|g\|.$$

Sea $\{\{f_n,g_n\}\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B} \oplus \mathcal{R}$: O sea, $\|\{f_n,g_n\} - \{f_m,g_m\}\| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$; esto es $\|f_n - f_m\| + \|g_n - g_m\| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$. Las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son de Cauchy en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{R}$ respectivamente; luego existen $f \in \mathcal{B}$, $g \in \mathcal{R}$ tal que $f_n \longrightarrow f$, $g_n \longrightarrow g$ y $\{f,g\} = \lim_n \{f_n,g_n\}$.

DEFINICION 4.5. Si $T: A \subseteq \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{R}$ definimos

$$G(T) = \text{gráfico de } T = \{\{f,Tf\} : f \in A\}.$$

Es claro que si T es lineal, $G(T)$ es una variedad lineal en $\mathcal{B} \oplus \mathcal{R}$.

TEOREMA 4.5. T es cerrada si y sólo si $G(T)$ es cerrado en $\mathcal{B} \oplus \mathcal{R}$.

DEMOSTRACION. Sea $\{f_n,Tf_n\} \subseteq G(T)$ tal que $\{f_n,Tf_n\} \longrightarrow \{f,g\}$, $f_n \longrightarrow f$, $Tf_n \longrightarrow g$. Como T es cerrada, $f \in A$ y $g = Tf$, entonces $\{f,g\} \in G(T)$. Recíprocamente, sea $\{f_n\} \subset A$, $f_n \longrightarrow f$ y $Tf_n \longrightarrow g$; esto significa que $\{f_n,Tf_n\} \longrightarrow \{f,g\}$ y $\{f,g\} \in G(T)$ pues $G(T)$ es cerrado; luego $f \in A$ y $g = Tf$. QED.

TEOREMA 4.6. Sea T cerrada y $A = \mathcal{B}$; entonces T es acotada.

DEMOSTRACION. Sea T cerrada, entonces $G(T)$ ($\subseteq \mathcal{B} \oplus \mathcal{R}$) es cerrado. Sea

$S: G(T) \longrightarrow \mathcal{B}$ definida como sigue: $S(\{f,Tf\}) = f$.

Es claro que S es lineal y biyectiva. Además

$\|S(\{f,Tf\})\| = \|f\| \leqslant \|f\| + \|Tf\| = \|\{f,Tf\}\|$, luego S es acotada; por el teorema de la transformación inversa S^{-1} existe y es acotada:

$\|S^{-1}(f)\| = \|\{f,Tf\}\| = \|f\| + \|Tf\| \leqslant \|S^{-1}\|\|f\|$ y de aquí sigue que:

$\|Tf\| \leqslant (\|S^{-1}\| - 1)\ \|f\|$, es decir T es acotada. QED.

APLICACION. Supongamos que en espacio $\mathcal{B}$ tenemos definidas dos normas $\|\ \|_1$ y $\|\ \|_2$ de modo que con cada una de estas normas el espacio $\mathcal{B}$ es de Banach. Si $\|f_n\|_1 \longrightarrow 0$ implica $\|f_n\|_2 \longrightarrow 0$ entonces existen constantes m y M tales que $0 < m \leqslant \frac{\|f\|_1}{\|f\|_2} \leqslant M$. En efecto, sea $T: (\mathcal{B},\|\ \|_1) \longrightarrow (\mathcal{B},\|\ \|_2)$, $T(f) = f$. Supongamos $f_n \longrightarrow f$ y $Tf_n \longrightarrow g$. Entonces $f_n - f \xrightarrow[\|\ \|_1]{} 0$ y esto implica $f_n - f \xrightarrow[\|\ \|_2]{} 0$, luego $f = g = T(f)$ y T es cerrada; por el teorema 4.6, T es acotada; como T es biyectiva T^{-1} también es acotada. QED.

PRINCIPIO DE ACOTACION UNIFORME.

DEFINICION 4.6. Una familia de operadores $T_n: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{R}$ se dice puntualmente acotada si para cada $f \in \mathcal{B}$, $\|T_n(f)\| \leqslant K(f)$, para todo n.

DEFINICION 4.7. Una familia de operadores $T_n: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{R}$ se dice uniformemente acotada si $\|T_n\| \leqslant K$ para todo n.

Es claro que si $\{T_n\}$ es uniformemente acotada entonces es puntualmente acotada.

El principio de acotación uniforme afirma que la recíproca es válida.

TEOREMA 4.7. Sea $\{T_n\}$ una familia de operadores continuos de un espacio de Banach $\mathcal{B}$ en otro $\mathcal{R}$. Si $\|T_n(f)\| \leqslant K(f)$ para todo n, entonces existe K' tal que $\|T_n\| \leqslant K'$ para todo n.

Previamente demostraremos el siguiente lema:

LEMA 4.4. Si existe una esfera $B_{r_o}(f_o)$ de radio $r_o > 0$ y centro f_o tal que la familia $\{T_n(f) : f \in B_{r_o}(f_o)\ , n = 1,2,\ldots\}$ es acotada, entonces $\{\|T_n\|\}$ es acotada.

DEMOSTRACION. Supongamos que para $f \in B_{r_o}(f_o)$ y para todo $n, \|T_n(f)\| \leq K$. Sea $g \in B_{r_o}(0)$, entonces $g+f_o \in B_{r_o}(f_o)$, $T_n(g) = T_n(g+f_o) - T_n(f_o)$, $\|T_n(g)\| \leq \|T_n(g+f_o)\| + \|T_n(f_o)\| \leq 2K$. QED.

Veamos a continuación la demostración del teorema.

Supongamos que $\{\|T_n\|\}$ no es acotada. Entonces dada $B_{r_o}(f_o)$ existen $f_1 \in B_{r_o}(f_o)$ y un índice n_1 tal que $\|T_{n_1}(f_1)\| > 1$. En consecuencia existe una esfera $B_{r_1}(f_1)$ tal que $\overline{B_{r_1}(f_1)} \subset B_{r_o}(f_o)$ y tal que $\sup_{h \in B_{r_1}(f_1)} \|T_{n_1}(h)\| > 1$. Elijamos $r_1 < \frac{r_o}{2}$. Luego existen n_2 y $f_2 \in B_{r_1}(f_1)$ tal que $\|T_{n_2}(f_2)\| > 2$, etc..

Siguiendo con el proceso encontramos que dado j existen n_j y $f_j \in B_{r_{j-1}}(f_{j-1})$ tales que $\|T_{n_j}(f_j)\| > j$, y existen r_j y $B_{r_j}(f_j)$ tales que $\overline{B_{r_j}(f_j)} \subset B_{r_{j-1}}(f_{j-1})$, $r_j < \frac{r_{j-1}}{2}$ y $\sup_{h \in B_{r_j}(f_j)} \|T_{n_j}(h)\| > j$.

La sucesión $\{f_j\}$ es de Cauchy y por lo tanto hay un $f \in \mathcal{B}$ para el cual $f_j \longrightarrow f$; luego $f \in B_{r_j}(f_j)$ para todo j y $\|T_{n_j}(f)\| > j$, contradicción. QED.

OBSERVACION. La hipótesis de que $\mathcal{B}$ es completo es esencial en la demostración del teorema.

COROLARIO. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{B}$ tal que $f_n \longrightarrow f$ en la $\mathcal{B}^*$-topología. Entonces $\|f_n\| \leq K$ para algún $K \geq 0$.

DEMOSTRACION. $f_n \longrightarrow f$ en la $\mathcal{B}^*$-topología significa que $F(f_n) \longrightarrow F(f)$ para todo $F \in \mathcal{B}^*$. Pero $F(f_n) = f_n^{**}(F)$ donde $f_n^{**} \in \mathcal{B}^{**}$ y $\Phi(f_n) = f_n^{**}$; entonces $f_n^{**}(F) \longrightarrow f^{**}(F)$ para todo $F \in \mathcal{B}^*$; luego para todo F $\|f_n^{**}(F)\| \leq K(F)$. Por el teorema 4.7, $\|f_n^{**}\| \leq K'$, o sea $\|f_n\| \leq K'$. QED.

Una estructura más general que la de espacio de Banach es la de espacio de Fréchet. Esta a su vez es un caso particular de espacio vectorial topológico.

COMPLEMENTOS. ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

DEFINICION 4.8. Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial E, real o complejo, tal que su topología es Hausdorff y es compatible con la estructura de grupo aditivo, y tal que la aplicación $(\lambda,x) \longrightarrow \lambda.x$ es continua.

Probar que la aplicación $(\lambda,x) \longrightarrow \lambda.x$ es continua *equivale* a probar las tres propiedades siguientes:

i) para todo $x_0 \in E$, la aplicación $\lambda \longrightarrow \lambda x_0$ es continua en $\lambda = 0$.

ii) para todo λ_0 escalar, la aplicación $x \longrightarrow \lambda_0 x$ es continua en $x = 0$.

iii) $(\lambda,x) \longrightarrow \lambda.x$ es continua en $(0,0)$.

Enunciaremos a continuación dos teoremas que generalizan resultados ya vistos al tratar la teoría de espacios de Banach.

TEOREMA 4.8. Si F es un espacio vectorial topológico de dimensión n entonces es isomorfo a C^n (o R^n de acuerdo a su cuerpo de escalares). Es decir, para toda base $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de F la aplicación $(\xi_1,\dots,\xi_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ de C^n en F es bicontinua.

COROLARIO. Sea E un espacio vectorial topológico y M una variedad lineal cerrada de E. Sea F un subespacio de E de dimensión finita. Entonces M+F es un subespacio de E.

(En particular, un subespacio F de dimensión finita es cerrado en E).

EJERCICIO. Un subespacio de dimensión finita en B^* es B-cerrado. Un subespacio de dimensión finita en B es B^*-cerrado.

Convenimos que un conjunto convexo es uno tal que con cada dos puntos contiene el segmento que los une. Un espacio vectorial topológico se dice *convexo* si tiene una base de entornos (del origen) convexos.

DEFINICION 4.9. Sea E un espacio vectorial topológico. Una función a valores reales no negativa, definida en E, será llamada una *seminorma* si verifica: $p(\lambda x) = |\lambda|.p(x)$ y $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x,y \in E$, $\lambda \in C$ (o al cuerpo de los reales si el espacio es real).

Hay estrecha relación entre seminormas y ciertos conjuntos convexos. Nosotros nos limitaremos a tratar la llamada funcional de Minkowski que se define sobre espacios normados. De todas maneras con lo dicho podemos enunciar el siguiente importante resultado.

TEOREMA 4.8. i) (teorema de extensión de Hahn-Banach) Sea p una seminorma en el espacio vectorial topológico E y f una funcional lineal sobre un subespacio $M \subset E$ con $|f(x)| \leqslant p(x)$ para todo $x \in M$. Entonces, existe una fnl. lineal F sobre E que extiende a f y verifica $|F(x)| \leqslant p(x)$ para todo $x \in E$.

ii) (teorema de separación de Banach) Sea E un espacio vectorial topológico convexo, y sean A y B conjuntos convexos disjuntos y A abierto. Existe entonces una funcional lineal continua F sobre E tal que F separa A de B, es decir, $F(A) \cap F(B) = \emptyset$.

ESPACIOS DE FRÉCHET.

DEFINICION 4.10. Un espacio de Fréchet es un espacio vectorial en el que está definida una distancia invariante por traslaciones, es decir, $d(x,y) = d(x-y,0)$. Respecto a esa métrica el espacio es completo y la aplicación $(\lambda,x) \longrightarrow \lambda.x$ es continua

Todo espacio de Banach es de Fréchet y todo Fréchet es un espacio vectorial topológico. El siguiente resultado es el principio de acotación uniforme en estos espacios y el siguiente el teorema del gráfico cerrado.

TEOREMA 4.10. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de aplicaciones lineales continuas de X en Y, espacios de Fréchet.

Sea $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$; entonces:

i) $\lim_{x\to 0} T_n(x) = 0$ uniformemente en n

ii) T es una aplicación lineal continua de X en Y.

EJERCICIO. Demostrar el teorema 4.10 si X e Y son de Banach (Usar teorema 4.7).

TEOREMA 4.11. Sea T una aplicación lineal de X en Y, ambos de Fréchet.

i) Si T es continua, T transforma abiertos en abiertos.

ii) Si T es una inyección continua entonces T^{-1} es continua.

iii) Si T es cerrada entonces T es continua.

EJERCICIOS. 1) Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{R}$ son de Banach y $\{T_n\}$ es una familia de operadores distinguimos tres tipos de convergencia:

I) CONVERGENCIA UNIFORME. Se dice que T_n converge a T uniformemente si $\|T_n - T\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (en norma).

II) CONVERGENCIA FUERTE. Se dice que T_n converge a T fuertemente si $\forall$ f $\in \mathcal{B}$, $T_n(f) \longrightarrow T(f)$ (Puntual).

III) CONVERGENCIA DEBIL. Se dice que T_n converge a T débilmente si para todo $f \in \mathcal{B}$, para todo $F \in \mathcal{R}^*$, es $F(T_n(f) \longrightarrow F(T(f))$; esto implica $F((T_n-T)(f)) \longrightarrow 0$.

Se verifica fácilmente que:

convergencia uniforme $\Rightarrow$ convergencia puntual $\Rightarrow$ convergencia débil.

Las recíprocas no valen en general.

2) Sea S una variedad lineal en $\mathcal{B}^*$, $S^{\perp} = \{f \in \mathcal{B}: F(f) = 0$ para todo $F \in S\}$, $S^{\perp\perp} = \{G \in \mathcal{B}^*: G(f) = 0$ para todo $f \in S^{\perp}\}$. Se demuestra que:

S es $\mathcal{B}$-cerrado si y sólo si $S = S^{\perp\perp}$.

Sea $\{F_1,\dots,F_j\} \subseteq \mathcal{B}^*$, $G \in \mathcal{B}^*$ y $M_F = \{x: F(x) = 0\}$. Probar que:

$$G = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i F_i \iff M_G \supseteq \bigcap_{i=1}^{j} M_{F_i}.$$

(Usar el ejercicio que sigue al corolario del teorema 4.8).

FUNCIONAL DE MINKOWSKI. Sea N un espacio normado. Diremos que $K \subset N$ es convexo en sentido estricto si se verifica que:

$$f,g \in K \Rightarrow \frac{f+g}{2} \in K.$$

Diremos que K es convexo en sentido amplio si se verifica que:
$f,g \in K \Rightarrow \lambda f + (1-\lambda)g \in K$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Si $K = \overline{K}$ entonces K es convexo en sentido estricto si y sólo si lo es en sentido amplio.

DEFINICION 4.11. Un cuerpo convexo es un convexo cerrado con interior no vacío.

La esfera unitaria de un espacio normado es un conjunto convexo; la pregunta es ¿ cuándo un conjunto convexo define una esfera unitaria para cierta norma?.

Sea K un cuerpo convexo tal que 0 (el origen) pertenece al interior de K ($\mathring{K}$).

Definimos $M(f) = \inf \{a: a > 0 \text{ y } \frac{f}{a} \in K\}$.

Esta es la funcional de Minkowski.

TEOREMA 4.12.

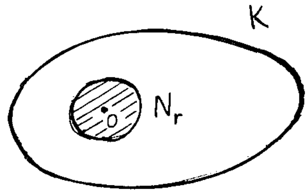
1) $M(f) < \infty$ para todo $f \in N$,

2) Si $f \in \overset{\circ}{K}$ entonces $M(f) < 1$ y si $f \in \partial K$ entonces $M(f) = 1$,

3) $M(f) + M(g) \geqslant M(f+g)$

4) $M(bf) = b\, M(f)$ si $b \geqslant 0$,

5) $M(f) \leqslant A\|f\|$ para toda $f \in N$.



DEMOSTRACION. 2) Como $f \in \overset{\circ}{K}$ implica que todo un entorno de f está contenido en $\overset{\circ}{K}$ obtenemos $M(f) < 1$. Si $f \in \partial K$, $M(f) \leqslant 1$. Supongamos $M(f) < 1$, y sea $f' \in N_r$, que por hipótesis es un entorno del origen contenido en $\overset{\circ}{K}$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(1-\varepsilon)^{-1} f \in K$, y $(1-\varepsilon)[\frac{f}{1-\varepsilon}] + \varepsilon f' \in K$; es decir: $f+\varepsilon N_r \subseteq K$ y $f \notin \partial K$.

3) $f/a \in K$, $g/b \in K \Rightarrow \frac{1/b}{1/a+1/b}(f/a) + \frac{1/a}{1/a+1/b}(g/b) \in K \Rightarrow$

$\Rightarrow (f+g)/(a+b) \in K \Rightarrow M(f+g) \leqslant a+b \Rightarrow M(f+g) \leqslant M(f) + M(g)$.

5) Si $\|f/a\| \leqslant r$ entonces $f/a \in K$. Luego, $M(f) \leqslant \|f\|/r = A.\|f\|$. (Es decir, A puede elegirse como el $\inf\{\frac{1}{r} : N_r \leqslant K\}$). QED.

DEFINICION 4.12. Un cuerpo convexo se dirá equilibrado si:

$$f \in K \Rightarrow e^{i\varphi} f \in K \quad \text{para todo } \varphi$$

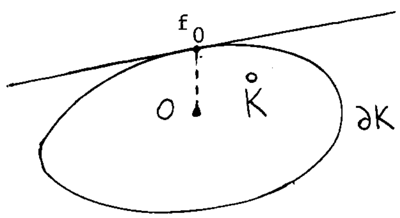
(si el cuerpo es real se reemplazará $e^{i\varphi}f$ por $-f$).

DEFINICION 4.13. Un cuerpo convexo se dirá acotado si $\sup_{f \in K} \|f\| < \infty$.

TEOREMA 4.13. 1) Si K es equilibrado entonces $M(f)$ define una seminorma. Además $M(f) \leqslant 1 \iff f \in K$, $M(f) = 1 \iff f \in \partial K$.

2) Si K es equilibrado y acotado entonces existe B tal que $\forall f \in N$ es $\|f\| \leqslant BM(f)$, y M define una norma equivalente a $\|.\|$ cuya esfera unitaria es K.

3) En las mismas hipótesis que 2) si N es de Banach y $f_0 \in \partial K$ entonces existe $F \in N^*$ tal que $F(f_0) = 1$ y $|F(f)| < 1$ en $\overset{\circ}{K}$.



DEMOSTRACION. 1) sigue de 4) del teorema precedente.

2) Sea $h > 0$. Vale entonces la siguiente relación:

$$h.M_{hK}(f) = M_K(f).$$

Sea c el menor entero positivo tal que $cN_r \supset K$. O sea, $N_1 \supseteq h.K$ donde $h = 1/cr$. Luego, si $f \in N_1$ entonces $\|f\| \leqslant M_{hK}(f) = \frac{1}{h} M_K(f) = cr.\ M(f) = B.M(f)$.

Cf. ahora 5) del teorema precedente.

3) Si $(N,\|\cdot\|)$ es de Banach entonces también lo es $(N,M(.))$, y una fnl. lineal es continua en uno si y sólo si lo es en el otro. Sea $F \in (N,M(.))^*$ de norma 1 tal que $F(f_0) = 1 = M(f_0)$. Entonces $|F(f)| \leqslant 1.M(f) < 1$ si $f \in \mathring{K}$.

QED.

EJERCICIOS.

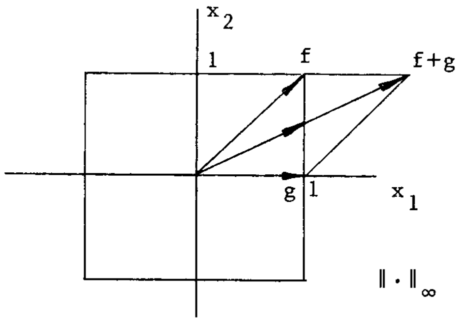
1) B se dice *uniformemente convexo* si $\|f_n\| = \|g_n\| = 1$ y $\left\|\frac{f_n+g_n}{2}\right\| \longrightarrow 1$ implican $\|f_n-g_n\| \longrightarrow 0$. Sea K un convexo en B uniformemente convexo y $d = \inf_{f\varepsilon K} \|f\|$. Si $\{f_n\} \subseteq K$ y $\|f_n\| \longrightarrow d$ entonces $\|f_n-f_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. O sea, si $K = \overline{K}$ entonces existe $f \in K$ tal que $\|f\| = d$.

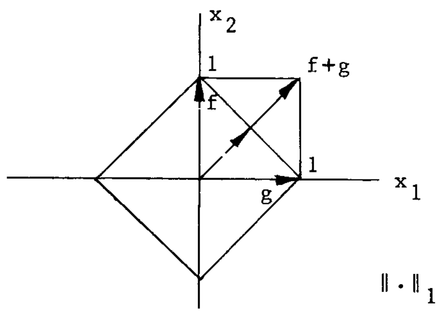
Sug.: $\tilde{f}_n := f_n/\|f_n\| \Rightarrow \|\tilde{f}_n-\tilde{f}_m\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|f_n-f_m\| \longrightarrow 0$.

(ℓ^p y $L^p(0,1)$ son uniformemente convexos si $1 < p < \infty$).

2) Demostrar que ni ℓ^∞ ni ℓ^1 son uniformemente convexos.

Sug.: en el espacio de pares reales la norma ∞ y la norma 1 responden a los siguientes diagramas:





CAPITULO II. ESPACIOS DE HILBERT.

1. INTRODUCCION.

1.1. Un espacio de Hilbert H, es un espacio de Banach - o sea un espacio vectorial normado y completo - en el que está definido un producto escalar (x,y), que verifica:

1) $(x,x) = \|x\|^2$

2) $(x,y) = \overline{(y,x)} \quad \forall\ x,y \in H$

3) $(\lambda x,y) = \lambda(x,y) \quad \forall\ x,y \in H$

4) $(x_1 + x_2,y) = (x_1,y) + (x_2,y)$.

Con estas propiedades resultan inmediatamente:

5) $(x,\lambda y) = \overline{\lambda}(x,y)$

6) $(x,y_1+y_2) = (x,y_1) + (x,y_2)$.

Dos vectores x e y se dicen *ortogonales*, y se nota $x \perp y$, si $(x,y) = 0$. Obsérvese que un producto escalar con estas propiedades determina la norma del espacio. Recíprocamente, la norma en un espacio de Hilbert determina el producto escalar (que verifica las propiedades de 1 a 4) mediante la identidad, (que se demuestra fácilmente desarrollando el miembro derecho):

$(x,y) = (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)/4$ (Fórmula de Polaridad).

Además, cálculos muy simples permiten demostrar:

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall\ x,y \in H$ (Ley del Paralelogramo)

y que si $x \perp y$ entonces $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Teorema de Pitágoras).

Se puede demostrar que en un espacio de Banach donde vale la Ley del Paralelogramo, el lado derecho de la fórmula de polaridad define un producto escalar - lado izquierdo - que determina la norma del espacio: $(x,x) = \|x\|^2$. Es decir, un espacio de Banach en el que se verifica la ley del paralelogramo, es un espacio de Hilbert.

En un espacio de Hilbert vale la desigualdad de Cauchy-Bunjakowski-Schwarz:

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \,.\, \|y\| \quad \forall\ x,y \in H.$$

En efecto, como

$0 \leqslant \|x-\lambda y\|^2 = (x-\lambda y,x-\lambda y) = (x,x) - \overline{\lambda}(x,y) - \lambda(\overline{x,y}) + |\lambda|^2(y,y)$,

tomando

$$\lambda = \frac{(x,y)}{(y,y)} \quad (\text{para } y \neq 0) \quad \text{obtenemos,}$$

$|(x,y)|^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$. Es decir, $|(x,y)| \leqslant \|x\| \|y\| \quad \forall\ x,y \in H$.

DEFINICION. Un funcional lineal $F\colon H \longrightarrow C$ se dice *acotado*, si existe algún $M \geqslant 0$ tal que $|F(x)| \leqslant M \|x\| \quad \forall\ x \in H$.

Si F es acotado, se llama norma de F al número

$$\|F\| = \inf \{M: |F(x)| \leqslant M \|x\| \quad \forall\ x \in H\}$$

Observemos que

$$\inf \{M:\ |F(x)| \leqslant M.\|x\| \quad \forall\ x \in H\} = \sup_{\substack{x\in H\\ x\neq 0}} \left\{\frac{|F(x)|}{\|x\|}\right\} = \sup_{\|x\|=1} \{|F(x)|\}.$$

Enunciaremos ahora el teorema de Hahn-Banach, que brinda un resultado básico para la teoría de los espacios lineales normados, al asegurar que: todo funcional lineal y acotado sobre un subespacio cerrado de un espacio de Banach B, puede extenderse a un funcional sobre B conservando la norma; es claro, en particular, que propiedades verificadas sobre uno de tales subespacios y traducibles mediante un funcional lineal acotado, valen naturalmente sobre todo el espacio.

TEOREMA DE HAHN-BANACH. Sea B un espacio de Banach, M un subespacio cerrado y F un funcional lineal definido en M y acotado, $F\colon M \longrightarrow C$, entonces existe una extensión de F a todo B que preserva la norma.

COROLARIO. Si $x_o \notin M$ (M subespacio cerrado de B), existe un funcional lineal en B tal que:

1) $F(M) = 0$ 2) $F(x_o) \neq 0$ 3) $\|F\| = 1$

4) $F(x_o) = \text{dist}\,(x_o,M) := \inf\limits_{m\in M} \|x_o - m\| = d$.

En efecto, sobre el subespacio $M + [x_o] = \{\lambda x_o + m;\ \lambda \in C \text{ y } m \in M\}$ se define $F(\lambda x_o + m) = \lambda d$; F está bien definida, es lineal y si $\lambda = 0$ entonces $F(m) = 0$. Además:

$$\|F\| = \sup_{\lambda x_o + m} \frac{|\lambda d|}{\|\lambda x_o + m\|} = \sup_{m\in M} \frac{|d|}{\|x_o + m\|} = \frac{|d|}{\inf\limits_{m\in M} \|x_o + m\|} = \frac{|d|}{|d|} = 1.$$

$M + [x_o]$ es cerrado, como puede verificar el lector. Entonces, por el teorema de Hahn-Banach, F puede extenderse a todo B preservando la norma. Q.E.D.

Un resultado fundamental en la teoría de espacios de Hilbert es la siguiente caracterización de funcionales lineales, cuya demostración omitimos.

TEOREMA DE F. RIESZ (de representación de funcionales lineales acotados en un espacio de Hilbert).

Si F es un funcional lineal acotado definido sobre H, existe $\varphi \in H$ tal que $F(x) = (x,\varphi) \quad \forall\ x \in H$, y tal φ es único.

Por otra parte, la desigualdad de Cauchy-Bunjakowski-Schwarz asegura que cada $\varphi \in H$, define, por medio de (x,φ), un funcional lineal acotado F tal que $\|F\| = \|\varphi\|$.

Los resultados anteriores aseguran la existencia de vectores ortogonales a un subespacio propio. En efecto, si M es un subespacio cerrado de H, $M \neq H$ y $z \notin M$, el teorema de Hahn-Banach afirma la existencia de un funcional lineal acotado F tal que $F(M) = 0$ y $F(z) \neq 0$.

Por el teorema de representación de Riesz sabemos que existe un único $\varphi \in H$ tal que $F(x) = (x,\varphi) \quad \forall\ x \in H$; luego $\varphi \neq 0$ y $\varphi \perp M$.

Recurriendo al lema de Zorn, se ve ahora que existen sistemas ortonormales $\{e_\alpha\} \subset H$, (es decir, $(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$), maximales respecto a esta propiedad.

Tales sistemas se llaman *bases* o bien *sistemas ortonormales completos*, y se verifica *el teorema de las bases*, que asegura que dos bases cualesquiera de un espacio son equipotentes.

En lo que sigue nos limitaremos a considerar el término *espacio de Hilbert* en un sentido estricto y original: espacio de Banach con producto escalar y base infinita numerable.

(Es obvio que la existencia de una base finita reduce el espacio en cuestión a un espacio euclídeo ordinario).

Se comprueba fácilmente - usando, por ejemplo, la desigualdad de Bessel que se menciona luego - que si un espacio de Hilbert tiene una base infinita numerable, toda otra tiene la misma propiedad (que es la versión del teorema de las bases que colma nuestras necesidades).

1.2. Nuestro objetivo inmediato es caracterizar a los elementos de H en términos de una base ortonormal $\{e_i\}$ del mismo. A tal fin veamos primero los siguientes resultados:

PROPOSICION 1. En un espacio normado se verifica la siguiente desigualdad:

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x - y\|.$$

En efecto, $\|x\| = \|x-y+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|$; entonces $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$, análogamente $\|y\| \leqslant \|x-y\| + \|x\|$, o sea $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x-y\|$.

PROPOSICION 2. La norma es un funcional continuo. Es decir, si $x_n \longrightarrow x$ entonces $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$.

Resultado inmediato a partir de la proposición anterior.

PROPOSICION 3. El producto escalar es continuo (en ambas variables). Es decir, si $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$, entonces $(x_n,y_n) \longrightarrow (x,y)$.

En efecto, $|(x_n,y_n) - (x,y)| \leqslant |(x_n-x,y_n) + (x,y_n-y)| \leqslant$
$\leqslant |(x_n-x,y_n)| + |(x,y_n-y)| \leqslant \|x_n-x\|\cdot\|y_n\| + \|x\|\cdot\|y_n-y\| \longrightarrow 0.$

PROPOSICION 4. Si $x \perp x_n$ y $x_n \longrightarrow y$ entonces $x \perp y$.

Demostración inmediata a partir de la proposición anterior.

También necesitaremos el siguiente resultado de la teoría de la integral:

LEMA DE FATOU. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas entonces,

$$\int (\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

OBSERVACION. En particular se verifica una desigualdad análoga para series.

Veremos en el próximo teorema que si $\{e_i\}$ es una base ortonormal de H, es decir $(e_i,e_j) = \delta_{ij}$, todo elemento del mismo se escribe de una única forma como $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ y en el sentido que $\|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i - x\| \longrightarrow 0$ si $N \longrightarrow \infty$.

Pero antes algunas observaciones. Si $x \in H$ y admite una representación: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, entonces

$$\left|\|x\| - \|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i\|\right| \leqslant \|x - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \qquad \text{y además ,}$$

$$\|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i\|^2 = (\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^2 \quad ; \quad \text{luego}$$

$$\left|\|x\| - \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^2}\right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \text{ , o sea } \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|x\|^2 < \infty.$$

Recíprocamente, si una sucesión $\{\alpha_i\}$ verifica $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$ entonces $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i . e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, es un elemento del espacio, pues

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{M} \alpha_i e_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=N+1}^{M} \alpha_i e_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=N+1}^{M} \alpha_i e_i , \sum_{i=N+1}^{M} \alpha_i e_i \right) =$$

$= \sum_{i=N+1}^{M} |\alpha_i|^2 \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0$. Es decir, la sucesión $\{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i\}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente a un elemento del espacio.

OBSERVACION 1. La representación $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ es única pues

$$(x,e_i) = (\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j , e_i) = \lim_{N\to\infty} (\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j , e_i) = \alpha_i .$$

OBSERVACION 2. Si $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$, entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i$ converge absolutamente y además $(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i$.

En efecto,

$$\left| (\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i , \sum_{i=1}^{N} \beta_i e_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overline{\beta}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^2} . \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |\beta_i|^2} .$$

Es claro que esta acotación se mantiene para cualquier rotación de los sumandos $\alpha_i \overline{\beta}_i$, en particular para aquella que hace $\alpha_i \overline{\beta}_i \geq 0$; o sea

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overline{\beta}_i \right| \leq \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i \overline{\beta}_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |\beta_i|^2} \leq \|x\| . \|y\| < \infty$$

lo que indica que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i$ es absolutamente convergente y que $(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i$.

En general, si $\{e_i\}$ es un sistema ortonormal, completo o no, vale la *desigualdad de Bessel:* $\sum_{i=1}^{\infty} |(x,e_i)|^2 \leq \|x\|^2$, pues:

$\left\| \sum_{k=1}^{m} (x,e_k) e_k \right\| = (\sum_{k=1}^{m} (x,e_k)^2)^{1/2}$ coincide con la norma de un vector y del subespacio generado por $\{e_1,\ldots,e_m\}$. Además, $x\text{-}y \perp \{e_1,\ldots,e_m\}$. Entonces, $\sum_{k=1}^{m} |(x,e_k)|^2 \leq \|x\|^2 \ \forall\ m$ y por lo tanto se verifica la desigualdad de Bessel. (En este argumento $\{e_i\}$ no necesita ser numerable).

TEOREMA 1. Si $\{e_i\}$ es una base ortonormal de H y $S = \{x \in H: x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\}$ entonces $S = H$.

DEMOSTRACION. Debemos demostrar que $\forall\ x \in H$, $\sum (x,e_i)e_i = x$. Pero por lo ya visto la serie converge, digamos a $g \in H$. Como $\forall\ j$, $(x,e_j) = (g,e_j)$, si $x \neq g$ existirá $e = (x-g)/\|x-g\|$ ortogonal a todo elemento de la base, contradiciendo la maximalidad de $\{e_i\}$. Q.E.D.

Este resultado equivale a la completidad de H. Veamos esto. A tal fin debemos probar que si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy contenida en S, entonces existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in S$. Si $\{x_n\}$ de Cauchy, $\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$ para $n,m \longrightarrow \infty$, y si $x_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^n e_i$ entonces $\alpha_i^n = (x_n, e_i)$ y $|\alpha_i^n - \alpha_i^m| = |(x_n,e_i) - (x_m,e_i)| =$ $= |(x_n - x_m, e_i)| \leqslant \|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ independientemente de i; es decir, la sucesión $\{\alpha_i^n\}$ es de Cauchy $\forall\ i$ y además $\alpha_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_i$, uniformemente respecto de i. Luego,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\lim |\alpha_i^n|^2) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^n|^2 \right) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n\|^2 < \infty ,$$

en otras palabras, el elemento $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \in S$.

Por otra parte, como $\|x_n - x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^n - \alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\lim}_{m\to\infty} |\alpha_i^n - \alpha_i^m|^2 \leqslant$ $\underline{\lim}_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^n - \alpha_i^m|^2 = \underline{\lim}_{m\to\infty} \|x_n - x_m\|^2 < \varepsilon^2$ para n suficientemente grande, se tiene que $x_n \longrightarrow x$.

OBSERVACION. Dos espacios de Hilbert son isomorfos. Es decir, salvo isomorfismos, hay un solo espacio de Hilbert (en el sentido estricto que hemos convenido en aceptar).

1.3. EJEMPLOS DE ESPACIOS DE HILBERT.

De lo visto anteriormente resulta claramente que un modelo que realiza nuestro espacio de Hilbert es el $l^2 = \{(a_1, a_2, \ldots): \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty\}$.

El espacio $L^2 = \{f: \int_0^1 |f|^2 \, dx < \infty\}$ es también un espacio de Hilbert, con el producto escalar $(f,g) = \int_0^1 f \, \overline{g} \, dx$, y el conjunto

$\{f_n \in L^2: f_n(x) = e^{2\pi inx}, \text{ n entero}\}$ es una base del espacio. Esta última afirmación se prueba fácilmente, ya que es inmediato que el sistema $\{e^{2\pi inx}; \text{ n entero}\}$ es ortogonal; y si $\varphi \in L^2$ es tal que $\varphi \perp e^{2\pi inx}$ $\forall$ n, es decir si $\int_0^1 \varphi e^{2\pi inx} \, dx = 0$ $\forall$ n, resulta $\int_0^1 \varphi . \mathrm{sen}(2\pi \, nx) \, dx = 0$ y $\int_0^1 \varphi . \cos(2\pi \, nx) \, dx = 0$ $\forall$ n, por lo tanto φ es ortogonal a todo polinomio trigonométrico. Entonces por el teorema de aproximación de Weierstrass, φ es ortogonal a toda función continua, es decir φ es ortogonal a un subespacio denso de L^2. Resulta entonces de la continuidad del producto escalar que $\varphi \perp L^2$, o sea $\varphi = 0$.

OBSERVACION. $L^2 \sim l^2$.

2. OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT.

2.1. DEFINICION. Sea H un espacio de Hilbert. Un operador A — aplicación lineal de H en H — se dice *acotado* si existe una constante C no negativa tal que $\|Ax\| \leqslant C \, \|x\|$ $\forall$ $x \in H$. A la menor de tales C se la llama la *norma* del operador A y se escribe $\|A\|$. En otras palabras, $A = \inf \{C: \|Ax\| \leqslant C \, \|x\| , x \in H\}$.

Se prueba fácilmente a partir de la definición, que si A y B son dos operadores acotados, entonces A+B y A.B son acotados; y si A es acotado, λA también lo es $\forall$ $\lambda \in C$.

TEOREMA. Si $A: H \longrightarrow H$, entonces A es un operador acotado si y sólo si A es continuo.

DEMOSTRACION. Sea A acotado y $\{x_n\} \subset H$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leqslant C \, \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, resulta que $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$, o sea A es continuo. Recíprocamente, sea A continuo, entonces la imagen inversa de un entorno es un entorno. Llamando $S_1 = \{x: \|x\| \leqslant 1\}$, $A^{-1}(S_1)$ es un entorno de cero y por lo tanto existe una esfera $S_\alpha = \{x: \|x\| \leqslant \alpha\}$ tal que $S_\alpha \subset A^{-1}(S_1)$, luego $A(S_\alpha) \subset S_1$. Además, cualquiera sea $y \in H$, $y \neq 0$, el elemento $\frac{\alpha y}{\|y\|} \in S_\alpha$ y

$A(\frac{\alpha y}{\|y\|}) \in S_1$, es decir $\|A(\frac{\alpha y}{\|y\|})\| \leq 1$, o sea $\|Ay\| \leq \frac{1}{\alpha}\|y\|$, $\forall\ y \in H$. Q.E.D.

2.2. OPERADOR ADJUNTO.

Si $A: H \longrightarrow H$ es un operador acotado e $y \in H$, la identidad $F(x) = (Ax,y)$ define un funcional lineal acotado F, dado que

$$(1) \qquad |(Ax,y)| \leq \|Ax\|.\|y\| \leq \|A\|.\|x\|.\|y\|$$

Entonces, por el teorema de representación de funcionales acotados existe un único $z \in H$ tal que $F(x) = (Ax,y) = (x,z)$ $\forall\ x \in H$. De este modo a cada $y \in H$ se le puede asociar unívocamente un $z \in H$, quedando establecida así una correspondencia $A^*: H \longrightarrow H$, definida por $A^*y = z$, que verifica $(Ax,y) = (x,z)$ $\forall\ x,y \in H$. Es decir, para cada operador acotado A, existe otro operador A^* tal que $(Ax,y) = (x,A^*y)$. Tal operador se llama *adjunto de* A y además la desigualdad (1) muestra que es acotado.

A partir de la definición de operador adjunto, resultan inmediatamente las siguientes propiedades,

1) $(A+B)^* = A^* + B^*$

2) $(A\circ B)^* = B^* \circ A^*$

3) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ $\forall\ \lambda \in C$

4) $A^{**} = A$

Además $\|A^*\| = \|A\|$, pues como $\frac{|(x,z)|}{\|z\|} \leq \|x\|$ $\forall\ z \neq 0$ y para $x = z$ es $\frac{|(x,x)|}{\|x\|} = \|x\|$, resulta $\|x\| = \sup\limits_{z} \frac{|(x,z)|}{\|z\|}$; entonces

$$\|A\| = \sup_{x} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x,y} \frac{|(Ax,y)|}{\|x\|\ \|y\|} = \sup_{x,y} \frac{|(x,A^*y)|}{\|x\|\ \|y\|} = \sup_{y} \frac{\|A^*y\|}{\|y\|} = \|A^*\| .$$

DEFINICION 1. Un operador lineal y acotado $A: H \longrightarrow H$ que coincide con su adjunto se llama *autoadjunto*.

NB. Al estudiar l^2 vimos que $(l^2)^*$ puede identificarse con l^2. La funcional $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que establece la dualidad entre ambos espacios es:

$$(*) \qquad f,g \in l^2 \ :\ \langle f,g \rangle = \sum_i f(i)g(i) = G(f) \quad , \quad G \in (l^2)^*$$

(Sigue entonces que $(l^2)^{**}$ también es isométricamente isomorfo a l^2). Pero:

$\langle f,f \rangle \neq \|f\|^2$ en general, pues $\|f\|^2 = (f,f) = \langle f,\bar{f} \rangle$. Sea $H = l^2$. Si A es un operador lineal acotado: $H \longrightarrow H$, y $\hat{A}$ su adjunto: $H^* \longrightarrow H^*$, sabemos que $\widehat{\lambda A} = \lambda\hat{A}$. En efecto, $\hat{A}$ está definido por la relación: $\langle Af,g \rangle = \langle f,\hat{A}g \rangle$. Sin embargo si usamos la representación de Riesz de la funcional lineal G debemos escribir:

$$(**) \qquad G(f) = (f,\bar{g}) = (\langle f,g \rangle).$$

El adjunto A^* definido para espacios de Hilbert actúa, como A, también sobre H, y de manera que: $(Au,v) = (u,A^*v)$. Así $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$. Esto es consecuencia de la antilinealidad del producto escalar. Las siguientes igualdades muestran la relación entre A^* y $\hat{A}$ cuando éste es interpretado como operador de l^2 en l^2:

i) $\langle Af,\bar{h} \rangle = (Af,h) = (f,A^*h) = \langle f,\hat{A}\bar{h} \rangle \Rightarrow A^*h = \hat{A}\bar{h}$;

ii) $(\bar{\lambda}A^*)(h) = A^*(\bar{\lambda}h) = \hat{A}(\overline{\bar{\lambda}h}) = \hat{A}(\lambda\bar{h}) = (\lambda\hat{A})(\bar{h})$.

No todas las aplicaciones de H en H que nos interesarán tienen, como las consideradas hasta ahora, dominio H.

Sea $D_A = \{x \in H$: A está definida en $x\}$ = dominio de A.

DEFINICION 2. Un operador lineal A se dice *simétrico* si,

i) D_A es denso en H

ii) $\forall\, x,y \in D_A$, $(Ax,y) = (x,Ay)$.

Es inmediato que un operador simétrico acotado con dominio H es autoadjunto.

Reservamos el adjetivo "*hermitiano*" para indicar operadores autoadjuntos de este último tipo.

2.3. OPERADOR PROYECCION.

Comencemos observando que todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert, si no es de dimensión finita, es también un espacio de Hilbert.

Sea M un subespacio cerrado de H, $M \neq H$. Si $\{e_s'\}$ es una base del espacio M, esta puede extenderse a una base ortonormal $\{e_i\}$ de H, de modo que $\{e_i\} = \{e_s'\} \cup \{e_t''\}$.

PROPOSICION 1. Todo elemento $x \in H$ se puede escribir de una única forma como $x = x_1+x_2$ con $x_1 \in M$ y $x_2 \in M^{\perp} := \{x: x \perp M\}$.

DEMOSTRACION. Si $x \in H$ es $x = \sum_{i=1}^{\infty} (x,e_i)e_i = \sum_s (x,e'_s)e'_s + \sum_t (x,e''_t)e''_t =$ $= x_1 + x_2$ y como $e'_s \perp e''_t$ $\forall$ s,t resulta que $x_1 \in M$ y $x_2 \perp M$. Por otra parte si $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ con $x_1,y_1 \in M$ y $x_2,y_2 \in M^\perp$, entonces $(x_1-y_1) + (x_2-y_2) = 0$, o sea $x_1-y_1 = -x_2+y_2$, pero como $(x_1-y_1) \in M$ y $(x_2-y_2) \perp M$ debe ser $x_1-y_1 = x_2-y_2 = 0$. Q.E.D.

NOTACION. Convendremos en usar la siguiente notación, que resulta muy adecuada para el desarrollo de las secciones que siguen.

Si M_1 y M_2 son dos subespacios de H y $M_1 \perp M_2$ (*) escribiremos,

$M_1 \oplus M_2 = \{x_1+x_2 : x_1 \in M_1 \text{ y } x_2 \in M_2\}$; y si $M_2 \supset M_1$,

$M_2 \ominus M_1 = \{x : x \in M_2 \text{ y } x \perp M_1\}$.

Entonces si M es un subespacio cerrado de H, resulta $H = M \oplus (H \ominus M)$ y $H \ominus M = M^\perp$ también es cerrado. En otras palabras, cualquiera sea $x \in H$ se escribe de una única manera como $x = x_1+x_2$ con $x_1 \in M$ y $x_2 \in H \ominus M$; a este único elemento $x_1 \in M$, determinado por x, se lo llama *proyección* de x sobre M.

DEFINICION. A la aplicación P_M: $H \longrightarrow M$, que a cada elemento $x \in H$ le hace corresponder su proyección en M, la llamaremos proyector sobre el subespacio M.

Resulta inmediatamente de la definición que el operador P_M es lineal y acotado con norma $\|P_M\| = 1$ si $M \neq \{0\}$.

TEOREMA 1. Si $P: H \longrightarrow H$ es un proyector entonces verifica las propiedades,

1) $P^2 = P$ (el operador es idempotente)

2) $\|P\| = 1$ y $P^* = P$ (el operador es Hermitiano).

Recíprocamente, si $P: H \longrightarrow H$ es un operador idempotente y Hermitiano existe un subespacio cerrado M de H tal que $P = P_M$.

DEMOSTRACION. Si P es el proyector sobre el subespacio M, claramente $M = \{x: Px = x\} = P(H)$, y por lo tanto la propiedad 1) es evidente.

2) Si $x,y \in H$ es $x = x_1+x_2$ e $y = y_1+y_2$ con $x_1,y_1 \in M$ y $x_2,y_2 \perp M$. Entonces $(Px,y) = (x_1,y_1+y_2) = (x_1,y_1)$ y $(x,Py) = (x_1+x_2,y_1) = (x_1,y_1)$, es decir $(Px,y) = (x,Py)$ $\forall x,y \in H$, por lo tanto $P = P^*$.

(*) $\forall m_1 \in M_1$, $\forall m_2 \in M_2$ vale $m_1 \perp m_2$.

Recíprocamente, sea $P: H \longrightarrow H$ un operador Hermitiano e idempotente. Tomando $M = P(H)$, por ser $P^2 = P$ y acotado, resulta que $M = \{x: Px = x\}$ y además cerrado. Por lo tanto $\forall\ y \in H$ es $y = P_M y+x$ con $x \perp M$, o sea con $Px = 0$ pues $(Px,z) = (x,P^*z) = (x,Pz) = 0 \quad \forall\ z \in H$. Entonces $P\ y = P\ (P_M y) + Px = P_M y$ $\forall\ y \in H$. Q.E.D.

En síntesis, un proyector es un operador acotado, idempotente y simétrico.

DEFINICION. Se dice que dos operadores definidos en M, A y B conmutan, y se nota $A \smile B$ si $A \circ B = B \circ A$.

TEOREMA 2. Valen las siguientes proposiciones,

1) $M_1 \perp M_2$ si y sólo si $P_{M_1} \circ P_{M_2} = P_{M_2} \circ P_{M_1} = 0$

2) Si $P_{M_1} \smile P_{M_2}$ entonces $P_{M_1} + P_{M_2} - P_{M_1} \circ P_{M_2}$ es el proyector sobre el subespacio $\overline{M_1 + M_2}$, la clausura de la suma vectorial de M_1 y M_2. En este caso, $M_1 + M_2 = \overline{M_1 + M_2}$.

3) a) $M_1 \supset M_2$ si y sólo si $P_{M_1} \circ P_{M_2} = P_{M_2} \circ P_{M_1} = P_{M_2}$.

b) $M_1 \supset M_2$ si y sólo si $\|P_{M_2} x\| \leqslant \|P_{M_1} x\| \quad \forall x \in H$.

c) $M_1 \supset M_2$ si y sólo si $P_{M_1} - P_{M_2} = P_{M_1 \ominus M_2}$.

4) $I - P_M$ es el proyector sobre $H \ominus M$.

5) Si $M_1 \perp M_2$ entonces $P_{M_1} + P_{M_2}$ es el proyector sobre $M_1 \oplus M_2$.

DEMOSTRACION. 1) Sea $M_1 \perp M_2$ y sea M_3 el complemento ortogonal del subespacio $M_1 \oplus M_2$. En estas condiciones se tiene que $H = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ y si $x \in H$ es $x = x_1+x_2+x_3$ y naturalmente $P_{M_i} x = x_i$, entonces $P_{M_2} P_{M_1} x = P_{M_2} x_1 = 0$ y $P_{M_1} P_{M_2} x = P_{M_1} x_2 = 0$, es decir $P_{M_1} P_{M_2} = P_{M_2} P_{M_1} = 0$.

Recíprocamente, consideremos que $P_{M_1} P_{M_2} = P_{M_2} P_{M_1} = 0$ y tomemos $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, se tiene así que $(m_1,m_2) = (P_{M_1} m_1, P_{M_2} m_2) = (P_{M_2} P_{M_1} m_1, m_2) = 0$, por lo tanto $M_1 \perp M_2$.

2) Sea $P_{M_1} \smile P_{M_2}$. Es de verificación directa que $P_{M_1} + P_{M_2} - P_{M_1} P_{M_2}$ es un proyector. Además se tiene que $P_{M_1} . P_{M_2} x = x$ si y sólo si $x \in M_1 \cap M_2$. En efec-

to, supongamos que $P_{M_1}P_{M_2}x = x$. En este caso $P_{M_1}x = P_{M_1}(P_{M_1}P_{M_2}x) = P_{M_1}P_{M_2}x = x$, o sea $x \in M_1$, y $P_{M_2}x = P_{M_2}(P_{M_1}P_{M_2}x) = P_{M_2}(P_{M_2}P_{M_1}x) = P_{M_2}P_{M_1}x = x$, o sea $x \in M_2$, por lo tanto $x \in M_1 \cap M_2$. En otras palabras, hemos probado que $P_{M_1}.P_{M_2} = P_{M_1 \cap M_2}$ sí y sólo si $P_{M_1} \smile P_{M_2}$.

Retomando nuestra demostración comprobemos que $(P_{M_1}+P_{M_2}-P_{M_1}.P_{M_2})\,x = x$ sí y sólo sí $x \in M_1+M_2$: Si $x = (P_{M_1}+P_{M_2}-P_{M_1}.P_{M_2})\,x$, como
$x = P_{M_1}x + P_{M_2}x - P_{M_1}P_{M_2}x = P_{M_1}x + P_{M_2}x - P_{M_1\cap M_2}x$, entonces $x \in M_1+M_2$. Esto probará que M_1+M_2 es un subespacio (cerrado) de H, (en general no es cierto que la suma vectorial de dos subespacios es un subespacio), tan pronto quede probado que esos x llenan M_1+M_2.

Sea $x = m_1+m_2 \in M_1+M_2$, entonces $(P_{M_1} + P_{M_2} - P_{M_1}P_{M_2})\,x = m_1 + P_{M_1}m_2 + P_{M_2}m_1 + m_2 - P_{M_1}P_{M_2}m_1 - P_{M_1}P_{M_2}m_2 = m_1 + P_{M_1}m_2 + P_{M_2}m_1 + m_2 - P_{M_2}m_1 - P_{M_1}m_2 = m_1 + m_2 = x$.

Por lo tanto, $P_{M_1} + P_{M_2} - P_{M_1}P_{M_2} = P_{M_1+M_2}$.

3) a) Suponiendo $M_1 \supset M_2$ es $M_1 = (M_1 \ominus M_2) \oplus M_2$, si llamamos $M_3 = H \ominus M_1$, se tiene que $H = (M_1 \ominus M_2) \oplus M_2 \oplus M_3$. Luego $\forall\ x \in H$ es $x = x_1+x_2+x_3$, por lo tanto $P_{M_1}P_{M_2}x = P_{M_1}x_2 = x_2 = P_{M_2}x$ y $P_{M_2}P_{M_1}x = P_{M_2}(x_1+x_2) = x_2 = P_{M_2}x$ es decir $P_{M_1}P_{M_2} = P_{M_2}P_{M_1} = P_{M_2}$.

Recíprocamente, si vale la igualdad anterior y $x \in M_2$ es $P_{M_1}x = P_{M_1}(P_{M_2}x) = P_{M_2}x = x$, o sea $x \in M_1$.

b) Si $M_1 \supset M_2$, vimos en (a) que $H = (M_1 \ominus M_2) \oplus M_2 \oplus M_3$ y $\forall\ x \in H$ es $x = x_1+x_2+x_3$, entonces $\|P_{M_1}x\|^2 = \|x_1+x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geqslant \|x_2\|^2 = \|P_{M_2}x\|^2$ $\forall\ x \in H$.

Recíprocamente, sea $\|P_{M_1}x\| \geqslant \|P_{M_2}x\|$ $\forall\ x \in H$ y supongamos $M_1 \not\supset M_2$.
Entonces existe $x \in M_2$ tal que $x \notin M_1$, por lo tanto $P_{M_2}x = x = P_{M_1}x + x'$ con $0 \neq x' \perp P_{M_1}x$, luego $\|P_{M_2}x\|^2 = \|x\|^2 = \|P_{M_1}x + x'\|^2 = \|P_{M_1}x\|^2 + \|x'\|^2 >$

$> \|P_{M_1}x\|^2$ contradice la hipótesis.

Por lo tanto debe ser $M_1 \supset M_2$.

c) Si $M_1 \supset M_2$, usando la misma descomposición de H que en (a) y (b), resulta $(P_{M_1} - P_{M_2})x = x_1 = P_{M_1 \ominus M_2}x$.

Recíprocamente, si $P_{M_1} - P_{M_2} = P_{M_1 \ominus M_2}$, se tiene, $P_{M_1} = P_{M_1} - P_{M_2} + P_{M_2} =$
$= P_{M_1 \ominus M_2} + P_{M_2}$, luego $P_{M_2}P_{M_1} = P_{M_2}(P_{M_1 \ominus M_2} + P_{M_2}) = P_{M_2}$ y análogamente resulta $P_{M_1}P_{M_2} = P_{M_2}$. Por lo tanto $M_1 \supset M_2$.

4) Es consecuencia inmediata de (3c).

5) Es consecuencia inmediata de (1) y (2). Q.E.D.

EJERCICIOS. Sea $P = P_M$ y A y B aplicaciones lineales de H en sí mismo. Sea T un operador lineal acotado de H en H.

i) $A(M) \subseteq M$, $A(H \ominus M) \subseteq H \ominus M \Rightarrow AP = PA$,

ii) $A \smile B$, $N = A^{-1}(0)$, $R = A(H) \Rightarrow B(N) \subseteq N$, $B(R) \subseteq R$,

iii) $\|T^*T\| = \|T\|^2$,

iv) existe la inversa de $I+T^*T$, $(I+T^*T)^{-1}$, y es un operador acotado.

(iii) $\|T\|^2 = \sup (Tx,Tx)/\|x\|^2 = \sup (x,T^*Tx)/\|x\|^2 \leqslant \|T^*T\|$;

iv) $\|x\|^2 + \|Tx\|^2 = ((I+T^*T)x,x) \leqslant \|(I+T^*T)x\|.\|x\|$ implica $\|x\| \leqslant \|(I+T^*T)x\|$; $I+T^*T$ es 1-1 y autoadjunto. Todo operador hermitiano y biunívoco tiene rango denso. Sea $y \in H$ y $\{x_n\}$ tal que $(I+T^*T)x_n \longrightarrow y$. Entonces $\{(I+T^*T)(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy. Luego $\{x_n\}$es una sucesión de Cauchy. Sea $x = \lim x_n$. Luego $y = (I+T^*T)x$. O sea $(I+T^*T)(H) = H$. El teorema de la transformación inversa de Banach implica que $(I+T^*T)^{-1}$ es acotado, y de lo visto sigue que su norma no supera a uno).

NB. La densidad del rango de un operador hermitiano y 1-1 sigue de la siguiente

PROPOSICION. El espacio nulo de una transformación lineal acotada A es el complemento ortogonal del rango de su adjunto A*.

En efecto, $Ax = 0$ sii $(Ax,y) = 0 \quad \forall y \in H$ sii $(x,A^*y) = 0 \quad \forall y \in H$ sii $x \perp A^*(H)$.

2.4. OPERADORES ISOMETRICOS.

DEFINICION. Un operador $U: H \longrightarrow H$ se dice *isométrico* si

$$(Ux,Uy) = (x,y) \quad \forall \; x,y \in H.$$

Un operador isométrico y *sobre* se llama *unitario*.

OBSERVACION. Todo operador isométrico es acotado pues,

$$\|Ux\|^2 = (Ux,Ux) = (x,x) = \|x\|^2.$$

PROPOSICION. U unitario sí y sólo sí $U^*.U = U.U^* = I$.

DEMOSTRACION. Si U es unitario en particular es isométrico y acotado; por lo tanto existe el adjunto U^* que verifica $(x,y) = (Ux,Uy) = (x,U^*.Uy)$ $\forall \; x,y \in H$, o sea $U^*.U = I$.

Por otra parte $(Ux,U.U^*y) = (x,U^*y) = (Ux,y)$ $\forall \; x,y \in H$, y como U es sobre, debe ser $U.U^* = I$. O sea $U.U^* = U^*.U = I$.

Recíprocamente, si U verifica la igualdad anterior, U debe ser sobre, pues en este caso $U^* = U^{-1}$, y además $(x,y) = (x,U^*Uy) = (Ux,Uy)$ $\forall \; x,y \in H$. Es decir U es unitario. Q.E.D.

En otras palabras, un operador $U: H \longrightarrow H$ es unitario sí y sólo sí $U^{-1} = U^*$.

De la misma manera se ve que U es isométrico sí y sólo sí $U^*.U = I$. O sea U es unitario cuando y sólo cuando es isométrico y $U.U^* = I$.

EJEMPLOS. 1) En el espacio l^2 consideremos T definido por

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots) \xrightarrow{T} (0,x_1,x_2,\ldots)$$

Obviamente T es isométrico pero no unitario.

2) Sea el operador U definido en $L^2(-\infty,\infty)$ de la siguiente manera $Uf = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y)\, dy$, entendiendo por $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots$ el límite en L^2 de

$\int_{-N}^{N} e^{-ixy} f(y)\, dy$, que existe $\forall \; f \in L^2(-\infty,\infty)$.

U es unitario.

Este resultado es el *teorema de Plancherel* y U se llama el *operador de Fourier-Plancherel*.

2.5. OPERADORES COMPLETAMENTE CONTINUOS.

DEFINICION. Un conjunto $X \subset E$ se dice *precompacto* si de toda sucesión

$\{x_n\} \subset X$ se puede extraer una subsucesión convergente.

Si de cada sucesión de elementos de X se puede extraer una subsucesión convergente a un elemento de X se dice que X es *compacto*.

En los espacios de dimensión finita los conjuntos precompactos son los conjuntos acotados, y los compactos los acotados y cerrados.

Estas afirmaciones no son ciertas en los espacios de dimensión infinita.

Precisamente, la condición que caracteriza la dimensión infinita de un espacio de Banach, es que la esfera unitaria (acotada y cerrada) no es compacta.

Por ejemplo, si H es un espacio de Hilbert y si la sucesión $\{e_n\} \subset H$ es una base ortonormal, entonces $\{e_j\}$ no contiene ninguna subsucesión convergente pues $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2} \quad \forall\, i \neq j$.

Los operadores lineales sobre espacios de dimensión finita preservan la precompacidad. Esto equivale a decir que transforman conjuntos acotados en precompactos. No ocurre lo mismo con los operadores acotados sobre espacios de dimensión infinita.

Esto sugiere que para lograr que operadores acotados definidos sobre espacios de dimensión infinita tengan más propiedades en común con los definidos sobre espacios finito-dimensionales, es necesario exigirles condiciones más fuertes que la continuidad.

DEFINICION. Un operador se dice *completamente continuo* si transforma conjuntos acotados en conjuntos precompactos.

PROPOSICION. Todo operador completamente continuo es acotado.

DEMOSTRACION. Sea A un operador completamente continuo. Si A no fuera acotado, existiría una sucesión $\{x_n\}$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|Ax_n\| > n$. Q.E.D.

TEOREMA. 1) Si A es un operador completamente continuo y B un operador acotado, entonces AB y BA son completamente continuos.

2) Si A es completamente continuo A^* también lo es.

3) Si A y B son completamente continuos, A+B también lo es.

4) Si $\{A_n\}$ es una sucesión de operadores completamente continuos y A es un operador tal que $\|A - A_n\| \longrightarrow 0$, entonces A es completamente continuo.

DEMOSTRACION. Omitiremos por el momento la demostración de (2) y dejamos al lector las demostraciones de (1) y (3).

Para la demostración de 4) usaremos el siguiente corolario de un teorema de

Hausdorff: "Un conjunto $E \subset H$ es precompacto sí y sólo si $\forall\ \varepsilon > 0$ existe una ε-red (*) precompacta de E".

La versión más conocida de este teorema se refiere a ε-redes finitas, de la cual se deduce inmediatamente la enunciada.

Sea entonces $\{A_n\}$ una sucesión de operadores completamente continuos tal que $\|A - A_n\| \longrightarrow 0$. Para demostrar que A es completamente continuo basta probar que si S es la esfera unitaria, entonces A(S) es precompacto.

Dado $\varepsilon > 0$ existe n_o tal que $\|A - A_{n_o}\| < \varepsilon$. Entonces $\forall\ x \in S$ es $\|(A - A_{n_o})x\| < \varepsilon$, o sea $\|Ax - A_{n_o}x\| < \varepsilon$, es decir $\forall\ x \in S$, Ax dista de $A_{n_o}x$ en menos de ε, por lo tanto $A_{n_o}(S)$ define una ε-red precompacta para A(S).

Q.E.D.

EJEMPLOS DE OPERADORES COMPLETAMENTE CONTINUOS.

1) En l^2 el operador $A: l^2 \longrightarrow l^2$ definido por la matriz infinita $\{a_{jk}\}$, que verifica $\sum\limits_{j,k} |a_{jk}|^2 < \infty$, del siguiente modo

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots) \quad \text{donde } y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, x_k .$$

Verifiquemos en primer lugar que A está bien definido:

$$|y_i| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| . |x_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \Big)^{1/2} . \quad \text{Entonces}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \Big) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \Big) \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = M \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$$

Por otra parte, definiendo para cada n el operador A_n por:

$A_n x = (y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)$, resulta que A_n es, para cada n, acotado y de rango finito-dimensional, por lo tanto completamente continuo.

$$\text{Además } \|(A - A_n)x\|^2 = \sum_{n+1}^{\infty} |y_i|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, x_k \Big|^2 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 . \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 .$$

$$\text{Entonces } \frac{\|(A - A_n)x\|}{\|x\|} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ o sea } \|A - A_n\| \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto A es completamente continuo.

2) Otro ejemplo de operador completamente continuo es el siguiente.

(*) La unión de esferas de radio ε con centros en los puntos de la ε-red cubre E.

Sea $K(s,t)$ un núcleo de Hilbert tal que $\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^2\, ds\, dt = M < \infty$. Entonces el operador $K: L^2 \longrightarrow L^2$ definido por

$$K(f) = g(s) = \int_0^1 K(s,t)\, f(t)\, dt \ , \quad \forall\ f \in L^2(0,1) \ ,$$

es completamente continuo.

Veamos en primer lugar que el operador está bien definido y es acotado.

De $|g(s)| = |\int_0^1 K(s,t)\, f(t)\, dt| \leq \int_0^1 |K(s,t)||f(t)|\, dt$ resulta $|g(s)| \leq$

$\leq (\int_0^1 |K(s,t)|^2\, dt)^{1/2} (\int_0^1 |f(t)|^2\, dt)^{1/2}$, entonces $\|g\|_2 \leq M\ \|f\|_2$.

Para ver que es completamente continuo, sea $\{\varphi_n\}$ una base en $L^2(0,1)$ y pongamos $x_k = (f,\varphi_k)$, $y_k = (K(f),\varphi_k) = (g,\varphi_k)$. Entonces $y_i = (g,\varphi_i) =$

$= \iint K(s,t)\, f(t)\, \overline{\varphi_i(s)}\, ds\, dt = \iint \overline{\varphi_i(s)}\, K(s,t)\, (\sum_k x_k\, \varphi_k(t))\, ds\, dt =$

$= \sum_k (\iint K(s,t)\, \varphi_k(t)\, \overline{\varphi_i(s)}\, ds\, dt)\, x_k = \sum_k a_{ik}\, x_k$.

Por otra parte $\sum_{j,k} |a_{jk}|^2 < \infty$ pues $a_{ik} = \iint K(s,t)\, \varphi_k(t)\, \overline{\varphi_i(s)}\, ds\, dt =$

$= \iint K(s,t)\, \overline{\varphi_i(s)\, \overline{\varphi_k(t)}}\, ds\, dt = ((K,\varphi_i\, \overline{\varphi_k}))$ donde $((\ldots))$ designa el producto escalar en $L^2((0,1)\times(0,1))$. Como el sistema $\{\varphi_i . \overline{\varphi_k}\}$ es un sistema ortonormal en este espacio, los a_{jk} son los coeficientes de Fourier de $K(s,t)$ en tal sistema, por lo tanto $\sum_{j,k} |a_{jk}|^2 < \infty$.

Finalmente, la correspondencia $f \longrightarrow (x_1,x_2,\ldots)$ define un isomorfismo de $L^2(0,1)$ en l^2, y la acción de K en L^2 se reduce a la de $\{a_{jk}\}$ en l^2. Del ejemplo 1) se concluye que K es completamente continuo.

3. TRES TEOREMAS FUNDAMENTALES.

Uno es el teorema de Hahn-Banach que ya mencionamos en §1 de este capítulo. Los otros dos son el teorema de Banach-Steinhaus y el del gráfico cerrado.

TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS. Si $\{F_\alpha\}$ es una familia de operadores acotados de un espacio de Banach B_1 en otro B_2 tal que $\forall\ x \in B_1$ existe C_x para el cual $\|F_\alpha(x)\| \leqslant C_x$ independientemente de α (es decir si la familia $\{F_\alpha\}$ es puntualmente acotada), entonces existe una constante C tal que $\|F_\alpha\| < C$ (la familia $\{F_\alpha\}$ es uniformemente acotada).

Como una aplicación de este teorema demostramos el siguiente:

TEOREMA DE HELLINGER-TOEPLITZ. Sea A un operador lineal *simétrico* con $D_A = H$ ($(Ax,y) = (x,Ay)$ $\forall\ x,y \in H$). Entonces A es acotado.

DEMOSTRACION. Sea A en las condiciones de la hipótesis y supongamos que no es acotado, entonces existe $\{y_n\} \subset H$ tal que $\|y_n\| = 1$ y $\|Ay_n\| \longrightarrow \infty$.
Definamos para cada n, el operador $L_n(x) = (x,Ay_n)$ $\forall\ x \in H$. La familia $\{L_n\}$ resulta una familia de funcionales lineales continuos ($\|L_n\| = \|Ay_n\|$) y puntualmente acotada pues $|L_n(x)| = |(Ax,y_n)| \leqslant \|Ax\|$. Entonces es uniformemente acotada, es decir, existe una constante C tal que $|L_n(x)| \leqslant C\ \|x\|$ $\forall\ x$, $\forall\ n$.
Luego $\|Ay_n\|^2 = (Ay_n,Ay_n) = L_n(Ay_n) \leqslant C\ \|Ay_n\|$ $\forall\ n$, o sea $\|Ay_n\| \leqslant C$ $\forall\ n$.
Contradicción! Por lo tanto A es acotado. Q.E.D.

Se demostró entonces que: A simétrico con dominio H es lo mismo que Hermitiano.

TEOREMA DEL OPERADOR INVERSO (Banach). Si T es un operador lineal acotado, biunívoco y sobre de un espacio de Banach B_1 en otro B_2, entonces T^{-1} es acotado.

Ilustraremos este teorema con la demostración del siguiente

COROLARIO (TEOREMA DEL GRAFICO CERRADO). Si T es un operador de un espacio de Banach B_1 en otro B_2 y si el gráfico de T es cerrado (como subespacio de $B_1 \times B_2$), entonces T es acotado.

DEMOSTRACION. Sea $G_T = \{\langle x,Tx\rangle : x \in B_1\}$ el gráfico de T. G_T es un espacio de Banach respecto de la norma $\|\langle x,Tx\rangle\| = \|x\| + \|Tx\|$ pues por hipótesis G_T es un subespacio cerrado del espacio de Banach $B_1 \times B_2$ con norma: $\|\langle x,y\rangle\| = \|x\| + \|y\|$.
La transformación τ: $G_T \longrightarrow B_1$ definida por $\tau(\langle x,Tx\rangle) = x$ es biunívoca y sobre. Además es acotada pues

$$\|\tau(\langle x,Tx\rangle)\| = \|x\| \leqslant \|x\| + \|Tx\| = \|\langle x,Tx\rangle\|$$

Entonces el teorema del operador inverso asegura que $\tau^{-1}: B_1 \longrightarrow G_T$ es acotado. Sea C tal que

$$\|\tau^{-1}(x)\| = \|\langle x, Tx\rangle\| = \|x\| + \|Tx\| \leqslant C\ \|x\| \quad \forall\ x \in B_1,$$

entonces $\|Tx\| \leqslant (C-1).\|x\| \quad \forall\ x \in B_1$. Q.E.D.

Se deja como ejercicio para el lector probar que el teorema del gráfico cerrado implica el del operador inverso.

EJERCICIO. (Proceso de ortogonalización de E.Schmidt).

i) Sea $g_1,\dots,g_n$ un conjunto de vectores del espacio de Hilbert H linealmente independientes. Existe un sistema ortogonal $e_1,\dots,e_n$, y normalizado: $\|e_i\| = 1$, que genera el mismo subespacio:

$$e_1 = g_1/\|g_1\| \ ; \quad e_2 = \frac{g_2 - (g_2,e_1)e_1}{\|g_2 - (g_2,e_1)e_1\|} \ ; \ \dots\dots \ ; \quad \text{si } g_k' =$$

$$= g_k - (g_k,e_1)e_1 - \dots - (g_k,e_{k-1})e_{k-1} \ , \quad e_k = g_k'/\|g_k'\| \ ; \ \dots .$$

ii)
$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11}\, g_1 \ , \\ e_2 &= \alpha_{21}\, g_1 + \alpha_{22}\, g_2 \ , \\ e_3 &= \alpha_{31}\, g_1 + \alpha_{32}\, g_2 + \alpha_{33}\, g_3 \ , \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ e_n &= \alpha_{n1}\, g_1 + \dots\dots\dots\dots\dots + \alpha_{nn}\, g_n \ , \end{aligned}$$

donde $\alpha_{kk} \neq 0$ para $k = 1,2,\dots,n$.

iii) Demostrar que si $G_o = 1$ y

$$G_k = \begin{vmatrix} (g_1,g_1) & (g_2,g_1) & \dots & (g_k,g_1) \\ (g_1,g_2) & (g_2,g_2) & \dots & (g_k,g_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_1,g_k) & (g_2,g_k) & \dots & (g_k,g_k) \end{vmatrix}$$

entonces $G_k \neq 0$, $k = 0,\dots,n$.

iv)
$$e_k = C \cdot \begin{vmatrix} (g_1,g_1) & (g_2,g_1) & \dots & (g_k,g_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_1,g_{k-1}) & (g_2,g_{k-1}) & \dots & (g_k,g_{k-1}) \\ g_1 & g_2 & \dots & g_k \end{vmatrix}$$

NB. Puede demostrarse que $C = 1/\sqrt{G_k\ G_{k-1}}$.

4. ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE OPERADORES HERMITIANOS.

1) Si A es hermitiano entonces (Ax,x) es *real* $\forall\ x \in \mathcal{H}$:

$$(Ax,x) = (x,A^*x) = (x,Ax) = \overline{(Ax,x)} \quad \forall\ x \in \mathcal{H}\ .$$

2) De la desigualdad $|(Ax,x)| \leqslant \|A\|.\|x\|^2$ resulta

$$\|A\| \geqslant \sup_{x\in\mathcal{H}} \frac{(Ax,x)}{\|x\|^2} = N$$ cualquiera sea el operador acotado A.

3) Si A es *hermitiano* entonces $\|A\| = N$.

En efecto: $\forall\ \lambda$ real se tiene,

$$\|Ax\|^2 = \frac{1}{4}[(A(\lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax),(\lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax)) - (A(\lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax),(\lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax))] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N}{4}[\|\lambda x + \frac{Ax}{\lambda}\|^2 + \|\lambda x - \frac{Ax}{\lambda}\|^2] = \frac{N}{2}[\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Ax\|^2]\ .$$

Como el mínimo del miembro de la derecha de la desigualdad se alcanza en $\lambda^2 = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ se tiene que:

$$\|Ax\|^2 \leqslant N\ \|Ax\|.\|x\|.\ \text{Por lo tanto } N \geqslant \|A\|.$$

4) Probemos ahora que si $\mathcal{D}_A = \mathcal{H}$ y (Ax,x) es real $\forall\ x \in \mathcal{H}$, entonces A es hermitiano.

Consideremos la identidad:

(I) $(T(f+g),f+g)-(T(f-g),f-g)+i(T(f+ig),f+ig)-i(T(f-ig),f-ig) = 4(Tf,g)$.

Cambiando f con g y conjugando se obtiene:

(II) $(f+g,T(f+g))-(f-g,T(f-g))+i(f+ig,T(f+ig))-i(f-ig,T(f-ig)) = 4(f,Tg)$.

De $(Af,f) = \overline{(Af,f)} = (f,Af)$, (I) y (II), resulta que A es hermitiano.

5) Un operador A se dice *positivo* si $(Af,f) \geqslant 0 \quad \forall\ f \in \mathcal{H}$.

Entonces, todo operador (hermitiano) positivo tiene *raíz única positiva*. Es decir, si A es positivo, existe un único B positivo tal que $B^2 = A$.

(No se demuestra este resultado por ahora).

5. ESPECTRO DE UN OPERADOR.

DEFINICION 1. Sea M un subespacio de $\mathcal{H}$ y P su proyector. Diremos que el subespacio M *reduce* al operador A si $Px \in \mathcal{D}_A$ y $APx = PAx \quad \forall\ x \in \mathcal{D}_A$.

DEFINICION 2. Un número complejo λ se dice un *punto regular* del operador A, si el operador $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ está definido en $\mathcal{H}$ y es acotado.

El operador R_λ se llama *resolvente* del operador A.

DEFINICION 3. Se llama *espectro* del operador A al conjunto de puntos no regulares de A, y se nota $\sigma(A)$. Es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda : \lambda \in C \quad y \quad \lambda \text{ es no regular}\}$$

Si el operador $A - \lambda I$ no es biunívoco, entonces el operador $(A - \lambda I)^{-1}$ no existe. En tal caso se dice que λ pertenece al *espectro puntual* σ_p de A.

Si existe $(A - \lambda I)^{-1}$ y el rango de $(A - \lambda I)$ es denso en $\mathcal{H}$ y $\lambda \in \sigma(A)$, se dice que λ pertenece al *espectro continuo* σ_c de A. Si $\lambda \in \sigma$ y existe $(A - \lambda I)^{-1}$ pero el rango de $(A - \lambda I)$ no es denso en $\mathcal{H}$, se dice que λ pertenece al *espectro residual* σ_r de A.

OBSERVACION. $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_{\sim p} = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r$.

Enunciaremos ahora una serie de propiedades que valen para operadores *acotados* definidos en $\mathcal{H}$:

1) $\emptyset \neq \sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant \|A\|\}$; $\sigma(A)$ es cerrado.

2) $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$ ($\overline{\sigma(A)}$ es el conjugado de $\sigma(A)$).

3) Supongamos que exista el operador acotado A^{-1}. Entonces,

$$\sigma(A^{-1}) = (\sigma(A))^{-1} = \{\mu : \mu^{-1} \in \sigma(A)\}$$

4) Si p es un polinomio: $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$.

5) Si A es hermitiano, entonces $\sigma(A)$ es real (es un conjunto de números reales) y $\|A\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

6) Si A es completamente continuo y hermitiano, entonces $\sigma(A)$ tiene a lo más al cero como punto de acumulación y todo punto distinto de cero del espectro pertenece a σ_p y es de multiplicidad finita. (Esto significa que el correspondiente espacio de autofunciones es de dimensión finita y a la *dimensión* de este espacio es a lo que se llama *multiplicidad del autovalor*).

Un operador hermitiano *con estas propiedades es* completamente continuo.

7) El espectro de un operador unitario verifica:

$$\sigma(U) \subset \{|z| = 1\}.$$

No demostraremos por ahora estas propiedades.

6. OPERADORES CON DOMINIO CONTENIDO PROPIAMENTE EN H.

Estudiaremos ahora operadores cuyo dominio *no* es necesariamente todo el espacio. De todas maneras siempre se supondrá que el dominio es una variedad lineal, a menos que se aclare explícitamente que esto no ocurre.

6.1. PROLONGACION DE OPERADORES.

DEFINICION. Dados dos operadores T y T', se dice que T' *prolonga* - o *extiende* - a T, y se nota $T' \supset T$, si $\mathcal{D}_{T'} \supset \mathcal{D}_T$ y $T' = T$ en $\mathcal{D}_T$.
T' es entonces una *extensión* de T.

TEOREMA. Si T es un operador lineal y acotado en $\mathcal{D}_T$, entonces existe un único $\tilde{T}$ que prolonga T a $\overline{\mathcal{D}_T}$ y $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

DEMOSTRACION. Sea $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}_T$ tal que $x_n \longrightarrow x \notin \mathcal{D}_T$. Como T es acotado se tiene que $\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leqslant C.\|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Entonces existe un único y tal que $Tx_n \longrightarrow y$.
Definiendo $\tilde{T}x = y$ es fácil ver que esta es una buena definición. Por lo tanto $\tilde{T}$ prolonga a T y $\mathcal{D}_{\tilde{T}} = \overline{\mathcal{D}_T}$.
Veamos que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$: Como $\tilde{T} \supset T$ debe ser $\|\tilde{T}\| \geqslant \|T\|$. Por otra parte, si $x \in \overline{\mathcal{D}_T}$ existe $\{x_n\} \subset \mathcal{D}_T$ tal que $x_n \longrightarrow x$, entonces

$$\|\tilde{T}x\| = \text{lím}\ \|Tx_n\| \leqslant \overline{\text{lím}}_{n\to\infty}\ \|T\|.\|x_n\| \leqslant \|T\|.\|x\|, \text{o sea } \|\tilde{T}\| \leqslant \|T\| \qquad \text{Q.E.D.}$$

Este teorema asegura que todo operador acotado T con dominio $\mathcal{D}_T$ denso en $\mathcal{H}$ *se puede extender a todo* el espacio conservando la norma y en forma única.
Si T_1 y T_2 son dos operadores con dominios $\mathcal{D}_{T_1}$ y $\mathcal{D}_{T_2}$ respectivamente, se definen los operadores T_1+T_2 y $T_1.T_2$ del siguiente modo:

$(T_1+T_2)x = T_1x + T_2x$ con $\mathcal{D}_{T_1+T_2} = \mathcal{D}_{T_1} \cap \mathcal{D}_{T_2}$ y

$(T_1.T_2)x = T_1(T_2x)$ con $\mathcal{D}_{T_1.T_2} = \{x : x \in \mathcal{D}_{T_2} \text{ y } T_2x \in \mathcal{D}_{T_1}\}$

Si T es un operador biunívoco, existe T^{-1} definido en $\mathcal{D}_{T^{-1}} = \mathcal{R}_T$ (= rango de T) y si c es una constante $\mathcal{D}_{cT} = \mathcal{D}_T$, $(cT)(x) = c.Tx$.

6.2. ADJUNTO DE UN OPERADOR CON DOMINIO DENSO EN $\mathcal{H}$.

El teorema de representación de funcionales lineales acotados asegura que si F es un tal funcional *definido sobre* $\mathcal{H}$ existe un único $\varphi \in \mathcal{H}$ tal que $F(x) = (x,\varphi) \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$.

Si F no está definido sobre $\mathcal{H}$ sino sobre una variedad lineal $M \subset \mathcal{H}$ con $\overline{M} \neq \mathcal{H}$, entonces la representación no es única. Para que $(x,\varphi_1) = (x,\varphi_2)$ basta tomar $\varphi_1 - \varphi_2 \perp M$.

Si la variedad M es tal que $\overline{M} = \mathcal{H}$, φ queda unívocamente determinado por F.

Si recordamos que en la definición de operador adjunto juega un rol esencial la unicidad de la representación de un funcional lineal, las consideraciones anteriores nos permiten asegurar que es posible definir el adjunto T^* de cualquier operador lineal T cuyo dominio sea *denso* en $\mathcal{H}$. En efecto, sea T un operador en esas condiciones, entonces si para un $y \in \mathcal{H}$ existe y^* tal que $(Tx,y) = (x,y^*) \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_T$, y^* es único. Por lo tanto poniendo $T^*y = y^*$ queda definido un operador T^* que se llama el *adjunto de* T, siendo

$$\mathcal{D}_{T^*} = \{y : \text{existe } y^* \text{ verificando } (Tx,y) = (x,y^*) \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_T\}.$$

Siempre supondremos, por lo tanto, que $\overline{\mathcal{D}_T} = \mathcal{H}$ cuando consideremos T^*, aunque no se mencione explícitamente. Se ve fácilmente que T^* es lineal. Si T es acotado en $\mathcal{D}_T$, T puede extenderse a todo $\mathcal{H}$. Sea $\widetilde{T}$ dicha extensión; como $\mathcal{D}_{\widetilde{T}} = \mathcal{H}$ se puede obtener $(\widetilde{T})^*$ con $\|(\widetilde{T})^*\| = \|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Veamos ahora que $T^* = (\widetilde{T})^*$.

Es claro que $(\widetilde{T})^*$ extiende a T^* pues, $(\widetilde{T}x,y) = (x,(\widetilde{T})^*y) \quad \forall\, x,y \in \mathcal{H}$; y si $x \in \mathcal{D}_T$ es $(\widetilde{T}x,y) = (Tx,y) \quad \forall\, y \in \mathcal{H}$. Pero $(Tx,y) = (x,T^*y) \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_T$ e $y \in \mathcal{D}_{T^*}$, entonces $(\widetilde{T})^* = T^*$ en $\mathcal{D}_{T^*}$.

Por otra parte $\widetilde{T} \supset T$; por lo tanto $T^* \supset (\widetilde{T})^*$ como se ve en 4) del próximo teorema 2. Luego $T^* = (\widetilde{T})^*$.

DEFINICION. Un operador T con $\mathcal{D}_T \subset \mathcal{H}$ se dice *cerrado* si las condiciones $x_n \longrightarrow x$ y $Tx_n \longrightarrow y$ implican que $x \in \mathcal{D}_T$ y que $Tx = y$.

TEOREMA 1. T^* es un operador cerrado.

DEMOSTRACION. Sea $\{y_n\} \subset \mathcal{D}_T$ tal que $y_n \longrightarrow y$, $T^*y_n \longrightarrow z$. Entonces $(Tx,y) = \lim\limits_{\to\infty} (Tx,y_n) = \lim\limits_{\to\infty} (x,T^*y_n) = (x,z) \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_T$. O sea $T^*y = z$ Q.E.D.

TEOREMA 2. Valen los siguientes resultados:

1) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda}\, T^* \quad (\lambda \neq 0)$

2) $(T_1 + T_2)^* \supset T_1^* + T_2^*$

3) $(T_1.T_2)^* \supset T_2^*.T_1^*$

4) Si $T_2 \supset T_1$ entonces $T_1^* \supset T_2^*$.

DEMOSTRACION DE (4). Si $x \in \mathcal{D}_{T_1} \subset \mathcal{D}_{T_2}$ e $y \in \mathcal{D}_{T_2^*}$, se tiene $(T_1x,y) =$ $= (T_2x,y) = (x,T_2^*y)$ $\forall\, x \in \mathcal{D}_{T_1}$. Entonces $T_1^*y = T_2^*y$ $\forall\, y \in \mathcal{D}_{T_2^*}$. Q.E.D.

6.3. Consideremos ahora el espacio $H = \mathcal{H} \times \mathcal{H} = \{\langle x,y\rangle : x,y \in \mathcal{H}\}$ con el producto escalar: $(\langle x_1,y_1\rangle, \langle x_2,y_2\rangle) := (x_1,x_2) + (y_1,y_2)$. Nótese que $\|\langle x,y\rangle\|^2 = (\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle) = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Recordemos que si T es un operador definido en $\mathcal{H}$, el conjunto $G_T = \{\langle x,Tx\rangle : x \in \mathcal{D}_T\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, se llama *gráfico de* T.

PROPOSICION 1. El gráfico de T es cerrado sí y sólo sí T es cerrado.

DEMOSTRACION. Sea $G_T = \overline{G_T}$, $\{x_n\} \subset \mathcal{D}_T$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $Tx_n \longrightarrow y$. Entonces $\langle x_n, T x_n\rangle \longrightarrow \langle x,y\rangle \in G_T$, por lo tanto $x \in \mathcal{D}_T$ y $Tx = y$. O sea T es cerrado.

Recíprocamente, si T es cerrado, como $\langle x_n, T x_n\rangle \longrightarrow \langle x,y\rangle$ implica $x_n \longrightarrow x$ y $T x_n \longrightarrow y$, resulta que $x \in \mathcal{D}_T$ y $Tx = y$, o sea $\langle x,y\rangle \in G_T$. Q.E.D.

Veamos ahora otra demostración del

TEOREMA DE HELLINGER-TOEPLITZ. Si T es simétrico y $\mathcal{D}_T = \mathcal{H}$ entonces T es acotado.

DEMOSTRACION. Como $(Tx,y) = (x,Ty)$ $\forall\, x,y \in \mathcal{H}$, es $T = T^*$. Entonces T es cerrado; sigue que $G_T = \overline{G_T}$ y por lo tanto el teorema del gráfico cerrado asegura que T es acotado. Q.E.D.

Sin embargo, la otra demostración que vimos de este resultado puede aplicarse para demostrar la siguiente:

PROPOSICION 2. Si T es tal que $\mathcal{D}_T = \mathcal{H}$ entonces T^* es acotado en $\mathcal{D}_{T^*}$.

DEMOSTRACION. Si T^* no fuera acotado, existiría una sucesión $\{y_n\} \subset \mathcal{D}_{T^*}$ tal que $\|y_n\| = 1$ y $\|T^*y_n\| \longrightarrow \infty$. Definiendo $L_n(x) = (x,T^*y_n)$, la familia de operadores $\{L_n\}$ resulta puntualmente acotada pues $|L_n(x)| = |(x,T^*y_n)| =$ $= |(Tx,y_n)| \leqslant \|Tx\|$ $\forall\, n$. Entonces, por el teorema de Banach-Steinhaus, $\{L_n\}$ está uniformemente acotada, es decir $\|L_n\| \leqslant C$ $\forall\, n$. Por lo tanto $\|L_n(T^*y_n)\| =$

$= \|T^*y_n\|^2 \leqslant C\ \|T^*y_n\|$, o sea $\|T^*y_n\| \leqslant C\quad \forall\ n$. Contradicción! Luego T^* debe ser acotado. Q.E.D.

La acotación de la adjunta asegura que su dominio es un subespacio. En efecto, vale la:

PROPOSICION 3. Si T^* es acotado, entonces $\mathcal{D}_{T^*} = \overline{\mathcal{D}_{T^*}}$.

DEMOSTRACION. Sea $\{y_n\} \subset \mathcal{D}_{T^*}$ tal que $y_n \longrightarrow y$. Como $\|T^*(y_n - y_m)\| \leqslant C\ \|y_n - y_m\|$ $\forall\ n,m$, la sucesión $\{T^*y_n\}$ converge a algún z. Por ser T^* cerrado las condiciones $y_n \longrightarrow y$ y $T^*y_n \longrightarrow z$ implican en particular $y \in \mathcal{D}_{T^*}$. Q.E.D.

La demostración de la proposición 3 muestra en realidad que *si T es un operador cerrado y acotado sobre su dominio, éste es cerrado.*

Sea $H = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ el espacio de Hilbert ya considerado anteriormente y definamos sobre el mismo los siguientes operadores:

$$U(\langle x,y\rangle) = \langle y,x\rangle \qquad \text{y} \qquad V(\langle x,y\rangle) = \langle y,-x\rangle$$

Es de verificación inmediata que U y V son operadores unitarios y además que satisfacen:

a) $U.V = -V.U$ y b) $U^2 = -V^2 = I$.

Se puede afirmar ahora que la ecuación $(Tx,y) = (x,y^*)\quad \forall\ x \in \mathcal{D}_T$, que define al operador T^*, puede escribirse como $(V\langle x,Tx\rangle,\langle y,y^*\rangle) = 0\quad \forall\ x$. En efecto, $(Tx,y)-(x,y^*) = (\langle Tx,-x\rangle,\langle y,y^*\rangle) = -(V\langle x,Tx\rangle,\langle y,y^*\rangle)$, entonces $\langle y,y^*\rangle$ define un par tal que $T^*y = y^*$ si y sólo si $\langle y,y^*\rangle \perp VG_T$; de donde resulta que $G_{T^*} = \{\langle y,T^*y\rangle : y \in \mathcal{D}_{T^*}\}$ es el complemento ortogonal de V_{G_T}. Por la continuidad del producto escalar concluímos que G_{T^*} es el complemento ortogonal de $\overline{VG_T} = V\overline{G_T}$ (esto último porque V es unitario).

Luego podemos escribir $G_{T^*} = H \ominus V\overline{G_T} = \overline{G_{T^*}}$. Además $V\overline{G_T} = H \ominus G_{T^*}$, entonces $V^2\overline{G_T} = VH \ominus VG_{T^*}$. Por lo tanto $\overline{G_T} = H \ominus VG_{T^*}$.

PROPOSICION 4. Si existen T^{-1}, $(T^{-1})^*$ y T^* entonces $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

DEMOSTRACION. $G_T = \{\langle x,Tx\rangle : x \in \mathcal{D}_T\}$, entonces $G_{T^{-1}} = \{\langle Tx,x\rangle : x \in \mathcal{D}_T\} = UG_T$. Por las consideraciones anteriores resulta,

$G(T^{-1})^* = H \ominus V\overline{G_{T^{-1}}} = H \ominus VU\overline{G_T} = U^2H \ominus UV\overline{G_T} = U(H \ominus V\overline{G_T}) = UG_{T^*}$.

Como éste último es un gráfico, tenemos:

$$UG_{T^*} = G(T^*)^{-1}\ , \text{ por lo tanto } (T^{-1})^* = (T^*)^{-1} \qquad \text{Q.E.D.}$$

Con $\overline{T}$ designaremos a la *clausura* de T, es decir, a la menor extensión cerrada del operador T: $\overline{T} \supset T$.

PROPOSICION 5. Valen las siguientes propiedades:

1) Si T es un operador autoadjunto ($T = T^*$), entonces

   a) $T + c\, I$ es autoadjunto cuando y sólo cuando c es real.

   b) Si existe T^{-1} entonces existe $(T^{-1})^*$ y $(T^{-1})^* = T^{-1}$.

2) Dado el operador T, existe $\overline{T}$ sí y sólo sí existe un operador S tal que $G_S \supset \overline{G_T}$. Además $\overline{G_T} = G_{\overline{T}}$.

3) Si existen T^* y $\overline{T}$, entonces $(\overline{T})^* = T^*$.

DEMOSTRACION. a) Se deja al lector. Como veremos más adelante, si c.I, c real, se reemplaza por un operador hermitiano K, también T+K es autoadjunto.

1) b) Sea $z \perp \mathcal{D}_{T^{-1}}$, entonces $(Tx,z) = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_T$, luego $(Tx,z) = (x,0)$ $\forall\, x \in \mathcal{D}_T$, o sea $z \in \mathcal{D}_{T^*}$ y $T^*z = 0$. Como $T = T^*$ debe ser $z = 0$. Por lo tanto $\overline{\mathcal{D}}_{T^{-1}} = \mathcal{H}$ y en consecuencia existe $(T^{-1})^*$ que, según se vio, verifica $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} = T^{-1}$.

2) Si existe $\overline{T}$, es $G_{\overline{T}} \supset \overline{G}_T$ y basta tomar $S = \overline{T}$.

Recíprocamente, si existe S tal que $G_S \supset \overline{G}_T$, resulta que $\overline{G}_T$ es el gráfico de un operador $\mathcal{U}$ cerrado, que es una prolongación (minimal) de T, o sea $\mathcal{U} = \overline{T}$.

Entonces $G_{\overline{T}} = \overline{G}_T$.

3) Si existen T^* y $\overline{T}$ se tiene:

$G_{T*} = H \ominus \overline{VG_T} = H \ominus V\overline{G_T} = H \ominus VG_{\overline{T}} = G_{\overline{T}*}$. Q.E.D.

TEOREMA 3. Sea $\overline{\mathcal{D}_T} = \mathcal{H}$. El dominio de T^* es denso en $\mathcal{H}$ sí y sólo sí T admite una prolongación cerrada. En este caso $T^{**} := (T^*)^*$, es la clausura de T, $\overline{T}$.

DEMOSTRACION. Resulta de las siguientes observaciones.

1) $h \perp \mathcal{D}_{T*}$ sí y sólo sí $\langle 0,h\rangle \in \overline{G_T} = H \ominus VG_{T*}$.

En efecto, $\mathcal{D}_{T*} = \{y$: existe y^* verificando $(Tx,y) = (x,y^*) \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_T\}$, $G_{T*} = \{\langle y,T^*y\rangle : y \in \mathcal{D}_{T*}\}$. Entonces si $h \perp \mathcal{D}_{T*}$, el par $\langle 0,h\rangle \perp \langle T^*y,-y\rangle$ $\forall\; y \in \mathcal{D}_{T*}$, o sea $\langle 0,h\rangle \perp VG_{T*}$ y esto significa que $\langle 0,h\rangle \in H \ominus VG_{T*} = \overline{G_T}$.

Recíprocamente, si $\langle 0,h\rangle \in H \ominus VG_{T*}$ es $\langle 0,h\rangle \perp VG_{T*}$, entonces $(h,y) = 0$ $\forall\; y \in \mathcal{D}_{T*}$.

2) Si T admite una prolongación cerrada, entonces $\overline{\mathcal{D}_{T*}} = \mathcal{H}$.

En efecto, si S es una prolongación cerrada de T, G_S es cerrado y $G_S \supset \overline{G_T}$. Por lo tanto si $\langle 0,h \rangle \in \overline{G_T}$, entonces está en el gráfico de un operador lineal y sigue que h = 0. Luego de 1) resulta $\overline{\mathcal{D}_{T^*}} = \mathcal{H}$.

3) Si $\overline{\mathcal{D}_{T^*}} = \mathcal{H}$, existe $T^{**} = (T^*)^*$. Como $\overline{G_T} = H \ominus VG_{T^*} = G_{(T^*)^*}$, T^{**} extiende a T y sabemos que es cerrado.

Finalmente, como $G_{T^{**}} = \overline{G_T} = G_{\overline{T}}$, resulta que T^{**} es la clausura de T. Q.E.D.

Obsérvese que el teorema 3 dice esencialmente que si existe T^{**} (es decir, $\overline{\mathcal{D}_{T^*}} = \mathcal{H}$) entonces $T^{**} = \overline{T}$, y que solamente $(T^*)^*$ puede ser la clausura de T.

6.4. OPERADORES SIMETRICOS.

Un operador T se dice *simétrico* si $\overline{\mathcal{D}_T} = \mathcal{H}$ y $T^* \supset T$.

En lo que sigue nos ocuparemos de los operadores simétricos y de sus extensiones.

PROPOSICION 1. Todo operador lineal simétrico admite una extensión simétrica cerrada: T^{**}.

DEMOSTRACION. Si T es simétrico $T^* \supset T$, luego $T^* \supset T^{**} = \overline{T}$.

Entonces $(T^{**})^* \supset T^{**}$; por lo tanto T^{**} es una extensión simétrica de T.

Q.E.D.

En otras palabras, la proposición afirma que la clausura de un operador simétrico es simétrica.

Se enuncian ahora algunos resultados que serán útiles en el desarrollo del ejemplo de operador simétrico y cerrado que se da seguidamente

a) Si $h \in L^1(0,1)$, $\int_0^x h(t)\,dt$ es una función absolutamente continua (A.C.) tal que $\frac{d}{dx}\int_0^x h(t)\,dt = h(x)$ casi doquier (c.d.).

b) Si $\{h_n\}$ es una sucesión tal que $h_n \longrightarrow h$ en L^2, entonces $h_n \longrightarrow h$ en L^1 y $\int_0^1 h_n(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 h(x)\,dx$.

c) Si $h_n \longrightarrow h$ en L^1, entonces existe una subsucesión $\{h_{n_j}\}$ tal que $h_{n_j} \longrightarrow h$ c.d.

EJEMPLO. Sea $T: \mathcal{D}_T \longrightarrow L^2(0,1)$ definido por $Tf = if' = i\frac{d}{dx}f$ con $\mathcal{D}_T = \{f : f \text{ es A.C.}, f' \in L^2 \text{ y } f(0) = f(1) = 0\}$.

T *es simétrico*. En efecto $\overline{\mathcal{D}_T} = \mathcal{H}$ y además $(Tf,g) = (f,Tg)$ $\forall$ $f,g \in \mathcal{D}_T$, sí y sólo sí $\int_0^1 (f'(x).\overline{g(x)} + f(x).\overline{g'(x)})\, dx = 0$, lo cual se verifica pues la última integral es igual a

$$\int_0^1 (f(x).\overline{g(x)})'\, dx = f(x).\overline{g(x)}\Big|_0^1 = 0 .$$

T *es cerrado*. Si $f_n \longrightarrow f$, $f_n \in \mathcal{D}_T$ e $i.f_n' \longrightarrow ih$ en L^2, entonces $i.f_n = \int_0^x i.f_n'(t)\, dt \longrightarrow i\int_0^x h(t)\, dt$, y como $f_n \longrightarrow f$ en L^2, debe ser $f(x) = \int_0^x h(t)\, dt$ c.d.

Por lo tanto podemos suponer $f(x)$ A.C., en cuyo caso es $f'(x) = h(x)$ y $f(0) = f(1) = 0$. O sea $f \in \mathcal{D}_T$ y $Tf = ih$.

T^* *es una extensión propia de* T *y está definido por la misma expresión diferencial.*

Para probar esto analizaremos los pares $\langle g,g^*\rangle$ tales que $(if',g) = (f,g^*)$ $\forall$ $f \in \mathcal{D}_T$.

Si g^{**} es una primitiva de g^* se tiene que,

$(f,g^*) = \int_0^1 f(x)\, \overline{g^*(x)}\, dx = -\int_0^1 f'(x)\, \overline{g^{**}(x)}\, dx$. Entonces $(if',g) = (f,g^*)$ sí y sólo sí $i\int_0^1 f'(x)\, \overline{g(x)}\, dx = -\int_0^1 f'(x)\, \overline{g^{**}(x)}\, dx$, o sea, sí y sólo sí $\int_0^1 f'(x)\, \overline{(g(x) + ig^{**}(x))}\, dx = 0$. Llamando $h(x) = g(x) + ig^{**}(x)$, el problema consiste en caracterizar las funciones $h(x)$ tales que

$\int_0^1 f'(x)\, \overline{h(x)}\, dx = 0 \quad \forall\ f \in \mathcal{D}_T$.

Veamos que $\int_0^1 f'(x)\, \overline{h(x)}\, dx = 0$ sí y sólo sí $h(x)$ es constante.

Si $h(x)$ es tal que verifica la igualdad anterior $\forall$ $f \in \mathcal{D}_T$, sea $f = \int_0^x f'dt$ y tal que $f'(x) = h(x) - C$ con $C = \int_0^1 h(t)\, dt$. Entonces $f \in \mathcal{D}_T$ y

$$\int_0^1 |h(x) - C|^2\, dx = \int_0^1 (h(x) - C)(\overline{h(x)} - \overline{C})\, dx = \int_0^1 f'(x)\, \overline{h(x)}\, dx = 0 .$$

Es decir $h(x) = C$.

Por lo tanto los pares $\langle g,g^*\rangle$ en cuestión son aquellos que satisfacen $g+ig^{**} = C$, o sea aquellos y sólo aquellos tales que g es A.C. en $[0,1]$ y $g'+ig^* = 0$, lo que equivale a que sea $g(x)$ A.C. y $g^* = T^*g = ig' = i\,\frac{d}{dx}\, g$.

Entonces $T^*g = Tg$ $\forall$ $g \in \mathcal{D}_T \subsetneqq \mathcal{D}_{T^*} = \{g : g$ es A.C. y $g' \in L^2\}$.

Consideremos ahora *el operador* T_c definido del siguiente modo:

$T_c f = i \frac{d}{dx} f$ y $\mathcal{D}_{T_c} = \{f : f$ es A.C., $f' \in L^2$ y $f(1) = C\, f(0)\}$.

Es inmediato que T_c es un operador lineal. Verifiquemos que es *cerrado:*

Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{D}_{T_c}$ tal que $f_n \longrightarrow f$ e $i.f_n' \longrightarrow i.h$ en L^2. Entonces $if_n(x) =$ $= i \int_0^x f_n'(t)\, dt + i\, K_n \longrightarrow if(x)$ en L^2; como $f_n' \longrightarrow h$ en L^2, la sucesión de constantes K_n converge a un K y $f(x) = \int_0^x h(t)\, dt + K$, c.d. Por lo tanto podemos considerar f(x) A.C. con $f(1) = C\, f(0)$, en cuyo caso $if'(x) = T_c\, f =$ $= i\, h(x)$. O sea T_c cerrado.

Veamos finalmente que *si* $|C| = 1$ *entonces* T_c *es simétrico:*

$(T_c f,g) - (f,T_c g) = (if',g) - (f,ig') = i \int_0^1 (f'(x)\, \overline{g(x)} + f(x)\, \overline{g'(x)})\, dx =$

$= i\, f(x)\, \overline{g(x)}\Big|_0^1 = i\, (C\, \bar{C}\, f(0)\, \overline{g(0)} - f(0)\, \overline{g(0)}) = 0$ sí y sólo sí $|C| = 1$.

OBSERVACIONES.

1) El operador $T = i \frac{d}{dx}$, con $\mathcal{D}_T = \{f : f$ es A.C., $f' \in L^2$ y $f(0) = f(1) = 0\}$ es simétrico, cerrado, no autoadjunto y admite extensiones cerradas: T_c con $\mathcal{D}_{T_c} = \{f : f$ es A.C., $f' \in L^2$ y $f(1) = C\, f(0)\}$, que son simétricas si $|C| = 1$.

2) Para que B sea una extensión simétrica de A es necesario y suficiente que $A \subset B \subset B^* \subset A^*$. Entonces, si A es autoadjunto ($A = A^*$) resulta $A = B$. Es decir, *todo operador autoadjunto es simétrico y maximal* en el sentido que no admite extensiones simétricas propias. Sin embargo *existen operadores simétricos maximales no autoadjuntos* como veremos más adelante.

PROPOSICION 2. Si T es un operador acotado en su dominio y cerrado, entonces $\mathcal{D}_T = \overline{\mathcal{D}_T}$. (Ver § 6.3, proposicion 3)

De aquí resulta, por ejemplo, que el operador $T = i \frac{d}{dx}$ *no* es acotado.

PROPOSICION 3. Un operador autoadjunto T es acotado sí y sólo sí $\mathcal{D}_T = \mathcal{H}$.

DEMOSTRACION. Si $\mathcal{D}_T = \mathcal{H}$, $(Tf,g) = (f,Tg)$ $\forall\, f,g \in \mathcal{H}$ y entonces T es acotado (Teorema de Hellinger-Toeplitz).

Recíprocamente, si T es acotado y autoadjunto, de la proposición 2 resulta $\mathcal{D}_T = \overline{\mathcal{D}_T} = \mathcal{H}$. Q.E.D.

Vamos a probar seguidamente que los operadores T_c definidos anteriormente son autoadjuntos para $|C| = 1$. Con lo cual quedará probado que el operador

$T = i\,\frac{d}{dx}$, $\mathcal{D}_T = \{f : f$ es A.C., $f' \in L^2$ y $f(0) = f(1) = 0\}$, admite extensiones simétricas maximales.

PROPOSICION 4. Los operadores T_c $(|C| = 1)$ son autoadjuntos.

DEMOSTRACION. (Nos limitaremos a hacer la demostración para $C = 1$).
Se sabe que $T_1^* \supset T_1 \supset T$. Entonces $\mathcal{D}_{T_1^*} \supset \mathcal{D}_{T_1}$. En estas condiciones es claro que $(T_1 f,g) = (f,T_1^* g)$ $\forall\, f \in \mathcal{D}_{T_1}$, $\forall\, g \in \mathcal{D}_{T_1^*}$. Como la función $f(x) \equiv 1 \in \mathcal{D}_{T_1}$ debe ser $\int_0^1 g^*(x)\,dx = 0$ $(g^* = T_1^*\, g)$ $\forall\, g \in \mathcal{D}_{T_1}$. Por lo tanto $g^{**}(x) = \int_0^x g^*(t)\,dt$ verifica $g^{**}(0) = g^{**}(1) = 0$ y además si $f \in \mathcal{D}_{T_1}$,
$(if',g) = i \int_0^1 f'(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_0^1 f(x)\,\overline{g^*(x)}\,dx = - \int_0^1 f'(x)\,\overline{g^{**}(x)}\,dx.$
Entonces $\int_0^1 f'(x)\,(\overline{g(x) + ig^{**}(x)})\,dx = 0$ $\forall\, f \in \mathcal{D}_{T_1}$, en particular $\forall\, f \in \mathcal{D}_T$.
En cuyo caso (ya se probó) debe ser $g(x) + ig^{**}(x) =$ constante. Por lo tanto g es A.C., $g(0) = g(1)$ e $ig'(x) = g^*(x) \in L^2$.
Es decir $g \in \mathcal{D}_{T_1}$ $\forall\, g \in \mathcal{D}_{T_1^*}$. Q.E.D.

7. ALGUNAS PROPIEDADES DEL OPERADOR CLAUSURA.

PROPOSICION 1. (CARACTERIZACION DE $\overline{T}$) Si T es tal que las condiciones: $x_n \longrightarrow x$, $x_n' \longrightarrow x$, $Tx_n \longrightarrow y$, $Tx_n' \longrightarrow y'$ implican $y = y'$, entonces existe $\overline{T}$ con $\mathcal{D}_{\overline{T}} = \{x :$ existe $\{x_n\} \subset \mathcal{D}_T$, $x_n \longrightarrow x$ y Tx_n converge$\} \subset \overline{\mathcal{D}_T}$ y $\overline{T}x = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n$, es un operador cerrado.

DEMOSTRACION. En las condiciones de la hipótesis, la relación $\overline{T}x = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n$ define un operador T sobre la variedad $\mathcal{D}_{\overline{T}}$. Veamos que ese operador T es cerrado.
Sea $\{z_n\} \subset \mathcal{D}_{\overline{T}}$ tal que $z_n \longrightarrow z$ y $\overline{T}z_n \longrightarrow w$, entonces existe una sucesión $\{u_n\} \subset \mathcal{D}_T$ tal que $\|u_n - z_n\| < \frac{1}{n}$ y $\|Tu_n - \overline{T}z_n\| < \frac{1}{n}$.
Por lo tanto, $u_n \longrightarrow z$ y $Tu_n \longrightarrow w$. Entonces $z \in \mathcal{D}_{\overline{T}}$ y $\overline{T}z = w$, o sea $\overline{T}$ es cerrado. Luego $\overline{T}$ contiene a la clausura de T.
Por otra parte, si $x_n \longrightarrow x$ y $Tx_n \longrightarrow y$, la clausura de T debe aplicar $x \longrightarrow y$; entonces la clausura de T extiende a $\overline{T}$. Q.E.D.

La condición en la proposición 1 puede enunciarse más simplemente así: $z_n \longrightarrow 0$, $Tz_n \longrightarrow w$ implican $w = 0$. En el caso de operadores simétricos esto se verifica siempre pues $T \subset T^*$ es cerrado.

De todas maneras, la existencia de $\overline{T}$ se conoce ya del teorema 3, § 6.3.

PROPOSICION 2. Si T es un operador cerrado ($T = \overline{T}$) y $\overline{\mathcal{D}_T} = \mathcal{H}$, entonces $T^*.T$ es un operador autoadjunto.

DEMOSTRACION. Si T es además acotado, $\mathcal{D}_T = \mathcal{H}$ y $(Tx,Ty) = (T^*.Tx,y) = (x,T^*Ty)$ $\forall\ x,y \in \mathcal{H}$ muestran que $T^*.T$ es autoadjunto.

Para demostrar la igualdad $T^*.T = (T^*.T)^*$ en el caso general usaremos un teorema de Von Neumann, que se demuestra luego, y que prueba que el operador $B = (I + T^*.T)^{-1}$ es hermitiano con $\|B\| \leqslant 1$.

En este caso existe $B^{-1} = I + T^*.T$ y entonces $T^*.T = B^{-1} - I$. Como $B = B^*$ y existe B^{-1}, resulta $(B^{-1})^* = (B^*)^{-1} = B^{-1}$ (cf. prop.5, § 6.3), o sea B^{-1} es autoadjunto. Por lo tanto $T^*.T$ es autoadjunto. Q.E.D.

COROLARIO. Bajo las mismas hipótesis, $T.T^*$ es autoadjunto.

EJERCICIO. Demostrar el Corolario.

APLICACION. Sea $Tf = if'$ con $f(0) = f(1) = 0$, f A.C., $f' \in L^2$. Entonces, $T^*f = if'$, f sin condiciones de contorno. En este caso: $T^*.Tf = -f''$ y $\mathcal{D}_{T^*T} = \{f\colon f \text{ y } f' \text{ son A.C.}, f(0) = f(1) = 0 \text{ y } f'' \in L^2\}$. De lo visto sigue que $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ es un operador autoadjunto en ese dominio.

TEOREMA 1 (VON NEUMANN). Sea T cerrado, $\overline{\mathcal{D}_T} = \mathcal{H}$. Entonces el operador $B = (I + T^*.T)^{-1}$ está definido en $\mathcal{H}$ y es hermitiano, positivo ($(Bf,f) \geqslant 0$ $\forall\ f \in \mathcal{H}$), de norma $\leqslant 1$.

DEMOSTRACION. Sabemos que $G_T = \overline{G_T}$ y que $G_T \oplus VG_{T^*} = H$. Entonces

(1) $\langle h,0 \rangle = \langle f,Tf \rangle + \langle T^*g,-g \rangle$ $\forall\ h \in \mathcal{H}$. La unicidad de esta descomposición muestra que el sistema de ecuaciones

(2) $$h = f + T^*g \quad , \quad 0 = Tf - g$$

tiene una única solución: $f \in \mathcal{D}_T$, $g \in \mathcal{D}_{T^*}$.

Definamos los operadores lineales A y B por:

$$f = Bh \quad , \quad g = Ah$$

El sistema (2) se escribe ahora:

$$I = B + T^*A \quad , \quad 0 = TB - A. \quad \text{Luego:}$$

(3) $A = TB$, $I = B + T^*TB = (I + T^*T)B$.

$\|h\|^2 = \|f\|^2 + \|Tf\|^2 + \|T^*g\|^2 + \|g\|^2$ por (1); por lo tanto

$\|Bh\|^2 + \|Ah\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \leqslant \|h\|^2$ de donde

$\|B\|$, $\|A\| \leqslant 1$.

Sea $u \in \mathcal{D}_{T^*T} \subset \mathcal{D}_T$, entonces de $(T^*Tu,u) = (Tu,Tu)$ resulta: $((I + T^*T)u,u) = (u,u) + (Tu,Tu) \geqslant (u,u)$ lo que asegura que $(I + T^*T)$ es biunívoco. Por lo tanto de (3) obtenemos: $B = (I + T^*T)^{-1}$, y el rango de B es exactamente $\mathcal{D}_{T^*T}$.

Veamos que $0 \leqslant B \subset B^*$. Como $Bu \in \mathcal{D}_T$, y $T^{**} = \overline{T} = T$,

$(Bu,v) = (Bu,Bv) + (Bu,T^*TBv) = ((I+T^*T)Bu,Bv) = (u,Bv)$,

$(Bu,u) = (Bu,Bu) + (TBu,TBu) \geqslant 0$. Q.E.D.

CAPITULO III

OPERADORES COMPLETAMENTE CONTINUOS.

*1.1. La teoría de ecuaciones integrales es sumamente extensa y tiene numerosas aplicaciones técnicas.

Sin entrar en mayores detalles describiremos algunos tipos de ecuaciones integrales. Sean $a \leqslant x,z \leqslant b$; $F(x)$ y $f(x)$ funciones datos lo mismo que el núcleo $K(x,z)$; $y(x)$ es la función buscada (solución).

1) $F(x) = \int_a^b K(x,z).y(z)\, dz$, ecuación integral de 1ª especie,

2) $y(x) = \int_a^b K(x,z).y(z)\, dz$, ecuación integral de 2ª especie homogénea,

3) $y(x) = \int_a^b K(x,z).y(z)\, dz + f(x)$, ecuación integral de 2ª especie no homogénea,

4) $y(x) = \int_a^x K(x,z).y(z)\, dz$, ecuación integral de tipo Volterra.

2) y 4) son homogéneas y lineales. Una ecuación de tipo Volterra, en general no lineal, aparece al tratar de resolver una ecuación diferencial de 1er orden.

Sea $y'(x) = f(x,y)$, $y' = \frac{dy}{dx}$, donde f está definida en una región R del plano (x,y), es allí continua y supongamos además que si $(x,y) \in R$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y en módulo está acotada por una constante N, lo mismo que $f(x,y)$. Resolver la ecuación diferencial es hallar una $y = y(x)$ tal que $y'(x) \equiv f(x,y(x))$ en un entorno de $x=a$. Si pedimos que $y(a) = A$, la solución debe satisfacer

$$y(x) = \int_a^x f(z,y(z))\, dz + A , \tag{1}$$

y recíprocamente, toda solución de (1) resuelve la ecuación diferencial con una función $y(x)$ tal que $y(a) = A$.

Sabemos que el método de aproximaciones sucesivas, que no es otra cosa que un proceso de mejoramiento progresivo de aproximantes a la solución, demuestra la existencia de exactamente una solución a nuestro problema.

*1.2. Consideremos ahora la ecuación $y'' = f(x,y)$ con f satisfaciendo las mismas exigencias del §1. Entonces, integrando dos veces:

$$y'(t) = \int_a^t f(z,y(z))\, dz + B \quad , \quad y(x) = \int_a^x \left[\int_a^t f(z,y(z))\, dz\right] dt + B(x-a) + A,$$

obtenemos una ecuación en $y(x)$ cuyas soluciones, si existen, satisfacen

$y(a) = A$, $y'(a) = B$. Si en la integral doble se cambia el orden de integración se obtiene:

$$(2) \qquad y(x) = \int_a^x (x-z).f(z,y(z))\, dz + B(x-a) + A.$$

Recíprocamente, una solución de (2) es solución de la ecuación diferencial con $y(a) = A$, $y'(a) = B$.

Es decir, el problema de *valores iniciales* se reduce nuevamente a resolver una ecuación integral de Volterra, no necesariamente lineal.

Supongamos que $x \in [0,\ell]$. La misma ecuación (2) con $a=0$, resuelve el problema de valores de contorno $y(0) = A$, $y(\ell) = C$, donde:

$$B = \frac{C-A}{\ell} - \frac{1}{\ell}\int_0^\ell (\ell-z)\, f(z,y(z))\, dz.$$

Reemplazando esta B en (2) se obtiene:

$$(3) \quad y(x) = F(x) - \int_0^\ell K(x,z).f(z,y(z))\, dz \quad , \quad F(x) = \frac{C-A}{\ell}\, x + A \quad ,$$

$$K(x,z) = \begin{cases} z\ (\ell-x)/\ell & \text{si} \quad z \leqslant x, \\ x\ (\ell-z)/\ell & \text{si} \quad x \leqslant z. \end{cases}$$

Así tenemos finalmente: el problema de *valores de contorno* $y'' = f(x,y)$, $y(0) = A$, $y(\ell) = C$ es equivalente al planteado por la ecuación integral (3).

En efecto, los cálculos que llevan del problema diferencial al integral pueden recorrerse en sentido inverso. Obsérvese que (3) no es de tipo Volterra, y en general, es no lineal.

Si $y'' + p(x).y + g(x) = 0$ es la ecuación a resolver, poniendo en (3) $f(x,y) \equiv -(p.y + g)$ se obtiene

$$(4) \qquad y(x) = G(x) + \int_0^\ell K(x,z).p(z).y(z)\, dz \ ,$$

donde $G(x) = F(x) + \int_0^\ell K(x,z).g(z)\, dz.$

Si el problema es *homogéneo:* $A = C = 0$, $g \equiv 0$, entonces (4) se reduce a:

$$(5) \qquad y(x) = \int_0^\ell K(x,z).p(z).y(z)\, dz.$$

Supongamos $p(x) > 0$. Entonces llamando $Y(x) = \sqrt{p(x)}.y(x)$ tenemos:

$$Y(x) = \sqrt{p(x)}.y(x) = \int_0^\ell K(x,z).\sqrt{p(x).p(z)}.\ Y(z)\, dz \ ,$$

(6) $$Y(x) = \int_0^{\ell} \widetilde{K}(x,z).Y(z)\, dz ,$$

donde $\widetilde{K}(x,z) = K(x,z).\sqrt{p(x).p(z)}$ es *simétrico:* $\widetilde{K}(x,z) = \widetilde{K}(z,x)$.

(6) es equivalente entonces al problema

$y'' + p(x)\, y = 0$, $y(0) = y(\ell) = 0$ si $Y(x) = \sqrt{p(x)}.y(x)$.

*1.3. Consideremos ahora el problema de valores de contorno

(7) $(k(x).y')' + q(x).y + r(x).\lambda y = 0$, $y(0) = y(\ell) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \ell$,

donde k,k',q y r se suponen continuas, k y r positivas.

Para resolverlo se demuestra en primer lugar la existencia de un núcleo $G(x,z)$, simétrico y continuo en $[0,\ell] \times [0,\ell]$, *el núcleo de Green*, tal que para toda $F(x)$ continua, la solución (única) de:

(8) $$(k.y')' + q\,y = F \quad , \quad y(0) = y(\ell) = 0 ,$$

viene dada por: $y(x) = - \int_0^{\ell} F(z).G(x,z)\, dz$.

La existencia de G está asegurada bajo la hipótesis adicional que (8) con $F \equiv 0$ admita como solución solamente a $y \equiv 0$. Aceptando esta hipótesis, la solución del problema:

(9) $(k\,y')' + q\,y + \lambda r y = f$, $y(0) = y(\ell) = 0$, $f \in C([0,\ell])$,

debe necesariamente ser de la forma:

(10) $$y(x) = \lambda. \int_0^{\ell} r(z).G(x,z).y(z)\, dz - \int_0^{\ell} f(z).G(x,z)\, dz .$$

Si escribimos: $Y(x) = \sqrt{r(x)}.y(x)$, $K(x,z) = \sqrt{r(x).r(z)}\,.G(x,z)$,

$g(x) = -\sqrt{r(x)}.\int_0^{\ell} f.G\, dz$, (10) se reduce a:

(11) $$Y(x) = \lambda \int_0^{\ell} K(x,z)\, Y(z)\, dz + g(x).$$

Si podemos resolver (11) queda también resuelto el problema de valores de contorno (9) con $\lambda \neq 0$.

Sintéticamente, (11) puede escribirse como: $(I - \lambda K)\, Y = g$, que tiene $\forall\, g$ solución única como veremos, siempre y cuando $I - \lambda K$ sea biunívoco, es decir, si y sólo si λ^{-1} no es autovalor para K. O sea, exactamente cuando: $(\lambda^{-1} I - K)\, Y = 0 \Rightarrow Y = 0$. Pero $g = 0 \iff f \equiv 0$ (por lo ya dicho sobre (8)), así que la condición sobre K y $\frac{1}{\lambda}$ es equivalente a

$y(0) = y(\ell) = 0 \quad , \quad (k\,y')' + q\,y + \lambda r y = 0 \Rightarrow y \equiv 0.$
Es decir, otra vez la condición utilizada para el caso $\lambda = 0$.

2. A continuación presentaremos los elementos de la teoría espectral de operadores compactos. Comenzaremos por el caso más sencillo: las transformaciones lineales de C^n $(= C \times \overset{n}{\smile} \times C)$ en C^n.

Toda aplicación lineal T del espacio vectorial X de dimensión n en si mismo es representable unívocamente por una matriz A: sea $\mathcal{B} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$ una base de X,

$$T\,\eta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\eta_i \quad , \quad A = (a_{ij}). \tag{12}$$

Si $\alpha = \sum_{j=1}^{n} x_j\,\eta_j$, entonces

$$T\alpha = \sum x_j . T\,\eta_j = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} . x_j\right)\eta_i \quad , \quad (T\alpha)_i = \sum_j a_{ij} . x_j . \tag{13}$$

De aquí sigue que existe un isomorfismo entre la familia de matrices: $M(n,C)$ y las aplicaciones de $X_{\mathcal{B}}$ en sí mismo: $L(X_{\mathcal{B}}, X_{\mathcal{B}})$.

PROPOSICION 1. Si X es normado entonces es isomorfo a C^n con la norma euclídea usual.

DEMOSTRACION. Esto sigue de las siguientes dos observaciones.

1) Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es cerrado y por lo tanto completo. (En nuestro caso sigue que X es de Banach).

2) Si $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\eta_i \in X$, $\|\eta_i\| = 1$, entonces $\|\alpha\| \leqslant \sum |x_i| \leqslant$ $\leqslant \sqrt{n}\,(\sum |x_i|^2)^{1/2}$. En consecuencia, la aplicación identidad es continua de X con la norma euclídea en X con $\|.\|$. El teorema de Banach de la transformación inversa prueba ahora el isomorfismo buscado. Q.E.D.

OTRA DEMOSTRACION. De $|\,\|\alpha_n\| - \|\alpha\|\,| \leqslant \|\alpha_n - \alpha\| \leqslant \sqrt{n}\,(\sum |x_i^n - x_i|^2)^{1/2}$ resulta que $\|\alpha\|$ es continua sobre el conjunto compacto $\sum$ de elementos de norma euclídea igual a uno. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que en $\sum$: $\|\alpha\| \geqslant \varepsilon$.
Así: $(\sum |x_i|^2)^{1/2} = 1 \leqslant \frac{\|\alpha\|}{\varepsilon}$; y por la linealidad tenemos: norma euclídea de $\alpha \leqslant \varepsilon^{-1} . \|\alpha\|$, y las dos normas son equivalentes. (Entonces $(X, \|.\|)$ es completo y enseguida se ve que 1) vale). Q.E.D.

Una *aplicación* de esta proposición dice que cualquier norma sobre el espacio de matrices $n \times n$ hace a este espacio isomorfo al espacio de operadores de X en X.

3. El operador T tiene, cuando X es provisto con una base $\mathcal{B} = \{\eta_i; i=1,\dots,n\}$, una expresión matricial $T_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$ cuya *columna i-ésima está formada por las coordenadas de* $T\eta_i$ (cf.(13)) *en la base* $\mathcal{B}$.

Sea $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\widetilde{\eta}_i\}$ otra base y $T_{\widetilde{\mathcal{B}}}$ la expresión matricial correspondiente.

Supongamos $\widetilde{\eta}_m = \sum p_{im} . \eta_i$. Entonces

$T\,\widetilde{\eta}_i = \sum\limits_m \widetilde{a}_{mi}\,\widetilde{\eta}_m = \sum\limits_{j,m} \widetilde{a}_{mi}\,p_{jm}\,\eta_j$, junto con

$T\,\widetilde{\eta}_i = T(\sum\limits_m p_{mi}\,\eta_m) = \sum p_{mi}\,T\eta_m = \sum\limits_{m,j} p_{mi}\,a_{jm}\,\eta_j$

muestra que $\sum\limits_m p_{jm}\,\widetilde{a}_{mi} = \sum\limits_m a_{jm}\,p_{mi}$. Es decir $T_{\mathcal{B}}P = P\,T_{\widetilde{\mathcal{B}}}$ cuando P *es la matriz que lleva la base* $\mathcal{B}$ *en la* $\widetilde{\mathcal{B}}$: $(\widetilde{\eta}_1,\dots,\widetilde{\eta}_n) = (\eta_1,\dots,\eta_n).P$. *Como* P *es no singular,*

$T_{\widetilde{\mathcal{B}}} = P^{-1}\,T_{\mathcal{B}}\,P$, $T_{\mathcal{B}} = (T\eta_1, T\eta_2,\dots, T\eta_n)$.

Sea ahora A la matriz que representa al operador T.

Existen n números complejos λ que satisfacen a $\det(A-\lambda I) = \det(P^{-1}AP-\lambda I) = 0$ pues $P^{-1}AP-\lambda I = P^{-1}(A-\lambda I)P$ y $\det P \neq 0$. Sea λ_1 uno de esos λ. Existe η_1 tal que $\eta_1 \neq 0$, $T\eta_1 = \lambda_1\,\eta_1$.

En una base $\mathcal{B}$ donde η_1 es un elemento de la misma, digamos el primero, T es representado por

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \beta \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

donde P es la matriz de cambio de base.

Esto prueba que para n=2 es posible encontrar P tal que $P^{-1}.A.P$ es triangular. Supuesta la validez de este resultado para n-1 (obsérvese que si $\det(B-\lambda_2 I) = 0$ entonces $\det(A-\lambda_2 I) = 0$) existe una matriz $\widetilde{Q}$ no singular tal que

$$\widetilde{Q}^{-1}\,B\,\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Entonces, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$ es una matriz no singular que cambia la base $\mathcal{B}$ en otra $\tilde{\mathcal{B}}$ dejando η_1 invariante y tal que:

$$Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & c_{3n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos la:

PROPOSICION 2. Si A es una matriz *cualquiera* $n \times n$, existe una matriz *no singular* R tal que $R^{-1}A\,R$ es *triangular*,

$$R^{-1}\;A\;R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & d_{23} & & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Los λ_i se denominan *autovalores* del operador que define la matriz. Es decir, son los ceros del *polinomio característico:*

$$\det(A-\lambda I) = 0.$$

Así, $\sigma(T) = \{\lambda : \text{pol. caract. } (\lambda) = 0\}$ = *espectro de* T, contiene a lo sumo n puntos distintos. El *autoespacio* correspondiente a λ es:
$N(\lambda,1) := \{x \in X : (T-\lambda I)x = 0\}$.

Llamemos $N(\lambda,k) := \{x \in X : (T-\lambda I)^k x = 0\}$. Entonces $N(\lambda,1) \subset N(\lambda,2) \subset \subset N(\lambda,3) \subset \ldots$.

Esta cadena es necesariamente finita pues $N(\lambda,i) \subset X$ y si se da la igualdad $N(\lambda,k+1) = N(\lambda,k)$ entonces $N(\lambda,k+2) = N(\lambda,k+1)$.

(En efecto, $(T-\lambda I)^{k+2}x = 0$ implica que $(T-\lambda I)^{k+1}(T-\lambda I)x = 0$, luego, $(T-\lambda I)x \in N(\lambda,k+1)$ y de la hipótesis resulta $(T-\lambda I)^k(T-\lambda I)x = 0$.)

4. TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON. Sean P(x) y Q(x) dos polinomios. $P(T) = Q(T)$ sí y sólo si $P(\lambda) - Q(\lambda)$ tiene un cero de orden $\geqslant \nu(\mu)$ para cada $\mu \in \sigma(T)$, donde $\nu(\mu)$ = menor entero tal que $N(\mu,\nu+1) = N(\mu,\nu)$.

DEMOSTRACION. Supongamos $Q \equiv 0$. Se ve enseguida que de este caso particular del teorema se deduce el resultado general. Si $S(\lambda)$ es un polinomio cualquiera y $Tx = \mu x$ entonces, $S(T)x = S(\mu)x$.

De aquí sigue que $P(\lambda)$ *se anula en todo* $\mu \in \sigma(T)$ *si* $P(T) = 0$.

Supongamos que $P(\lambda) = (\lambda-\mu)^{\alpha}.S(\lambda)$ con $S(\mu) \neq 0$.

Veamos que $\alpha \geqslant \nu(\mu)$. Si fuera $\alpha < \nu(\mu)$ existiría un $x \in N(\mu,\nu(\mu))$ tal que

$y = (T-\mu)^{\alpha}x \neq 0$, $(T-\mu)y = 0$.

Entonces $P(T)x = S(T).(T-\mu)^{\alpha}x = S(T)y = S(\mu)y \neq 0$, contradicción. De esto sigue que: $P(T) = 0 \Rightarrow R(\lambda)$ divide a $P(\lambda)$, donde $R(\lambda) = \prod_{\mu\in\sigma(T)} (\lambda-\mu)^{\nu(\mu)}$.

Veamos ahora la recíproca. Si $P(\lambda) = (\lambda-\delta)^{s}.D(\lambda)$, $P(T) = 0$, $P(\lambda) \not\equiv 0$, entonces o bien ya $D(T) = 0$, o bien $D(T) \neq 0$ y existe un x tal que $D(T)x = y \neq 0$. En consecuencia, $P(T)x = (T-\delta)^{s}y = 0$ y de aquí sigue que $\delta \in \sigma(T)$. Resumiendo: si $P(T) = 0$ y $P(\lambda) \not\equiv 0$ entonces *podemos suponer*, sin alterar estas propiedades, *que* P *sólo se anula en puntos de* $\sigma(T)$.

Sea $\mu \in \sigma(T)$, $P(\lambda) = (\lambda-\mu)^{\alpha}.S(\lambda)$, con $S(\mu) \neq 0$. Sabemos que $\alpha \geqslant \nu(\mu)$.

$(T-\mu)^{\alpha}S(T)x = 0 \quad \forall\ x$ implica que $\forall\ x$, $(T-\mu)^{\nu(\mu)}S(T)x = 0$, por definición de ν.

Es decir, $(\lambda-\mu)^{\alpha-\nu(\mu)}$ puede eliminarse de P sin alterar la hipótesis $P(T)=0$. En consecuencia

$$P(T) = 0 \Rightarrow R(T) = 0.$$

La demostración del teorema quedará concluída si exhibimos *un polinomio* $\tilde{Q}(\lambda) \not\equiv 0$ *tal que* $\tilde{Q}(T) = 0$. En efecto, en ese caso será cierto que $R(T) = 0$ y si R divide a P también $P(T) = 0$.

Sea $\{x_1,\ldots,x_n\}$ una base de X. La familia:

$$x_h \ , \ T\,x_h \ ,\ldots,\ T^n\,x_h$$

es linealmente dependiente: $\sum_{j=0}^{n} a_j\ T^j x_h = 0$ para cierta familia de coeficientes $\{a_i\}$ tal que $\sum |a_i| \neq 0$. Sea $Q_h(\lambda) = \sum_0^n a_j\ \lambda^j$. Entonces $Q_h(T)\ x_h = 0$.

De aquí sigue que $\tilde{Q}(\lambda) = \prod_{h=1}^{n} Q_h(\lambda)$ verifica $\tilde{Q}(T)\ x = 0 \quad \forall\ x$. Q.E.D.

COROLARIO. Sea $\mathcal{B}$ una base de X y $T_{\mathcal{B}}$ la representación matricial de T respecto de $\mathcal{B}$. El polinomio característico de $T_{\mathcal{B}}$, $P(\lambda) = \det(\lambda I-T_{\mathcal{B}})$, tiene un cero de orden por lo menos $\nu(\lambda_i)$ en cada $\lambda_i \in \sigma(T)$.

DEMOSTRACION. En efecto, se sabe de la teoría de matrices que $P(T_{\mathcal{B}}) = 0$, resultado conocido también como el teorema de Cayley-Hamilton.

Del teorema precedente sigue ahora la tesis. Sea $T_B = A$ y veamos que $P(A)=0$. (Esto es consecuencia del teorema homónimo ya visto pero la demostración que sigue es independiente del mismo).

Sea $D(\lambda)$ la matriz obtenida trasponiendo la formada con los adjuntos de los elementos de $A-\lambda I$. Entonces

$$(\#) \qquad (A-\lambda I).D(\lambda) = P(\lambda).I$$

$D(\lambda)$ es una matriz cuyos elementos son polinomios de grado $\leqslant n-1$ en λ. Luego $D(\lambda) = \lambda^{n-1}C_{n-1} + \lambda^{n-2}C_{n-2} + \dots + C_0$, ($C_i$ matrices), (#) se escribe

$$(A-\lambda I)(\lambda^{n-1}C_{n-1} + \dots + C_0) = \lambda^n p_n\ I + \lambda^{n-1}p_{n-1}I + \dots + p_0 I$$

o sea $\quad AC_i - C_{i-1} = p_i.I \quad i = 1,2,\dots,n-1, \quad -C_{n-1} = p_n I \ , \quad AC_0 = p_0 I.$

Luego, si reemplazamos λ por una matriz B que *conmuta con* A, tendremos

$$(A-B)(B^{n-1}C_{n-1} + \dots + C_0) = B^n.p_n + B^{n-1}.p_{n-1}+\dots+ I.p_0 = P(B)$$

en particular si tomamos $B = A$: $0 = P(A)$. Q.E.D.

TEOREMA 1. i) Sea $T \in L(X,X)$, $\sigma(T) = \{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\}$.
Entonces existen polinomios $E_i(\lambda)$ tales que:
$E_i(\lambda_i) = 1$, $E_i^{(m)}(\lambda_i) = 0$ si $1 \leqslant m \leqslant \nu(\lambda_i) - 1$; $E_i^{(t)}(\lambda_j) = 0$ para $0 \leqslant t \leqslant \nu(\lambda_j) - 1$ si $j \neq i$.

ii) Vale: $E_i(T) \neq 0$, $E_i^2(T) = E_i(T)$, $E_i(T)E_j(T) = 0$ si $i \neq j$, $I = \sum_1^p E_i(T)$.

DEMOSTRACION. i) $\Rightarrow$ ii) sigue fácilmente del teorema de Caley-Hamilton.

i) resulta de que dados los puntos distintos $\mu,a,b,\dots,d$ y un entero r positivo, existe un polinomio con valores prefijados en esos puntos lo mismo que sus r primeras derivadas. Esto sigue de la existencia de un polinomio P(x) tal que:

$$P^{(h)}(\mu) = B_h\ ,\quad P^{(h)}(a) = 0\ ,\ \dots\ ,\ P^{(h)}(d) = 0\ ,\quad 0 \leqslant h \leqslant r.$$

Veamos esto último. Sea $Q(x) = [(x-a)(x-b)\ \dots\ (x-d)]^{r+1}$ y

$$T(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{A_j}{j!}(x-\mu)^j \quad \text{donde} \quad T^{(j)}(\mu) = A_j.$$

Definamos $P(x) = T(x)\ Q(x)$. Entonces, de

$$P(\mu) = T(\mu)\ Q(\mu) = A_0\ Q(\mu) = B_0$$

$$P'(\mu) = T'(\mu)\ Q(\mu) + T(\mu)\ Q'(\mu) = A_1\ Q(\mu) + A_0\ Q'(\mu) = B_1$$

....

y de $Q(\mu) \neq 0$ se pueden determinar los A_j en función de los datos B_j. Q.E.D.

Si $A_j = E_j(T)\, X$ entonces $X = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_p$, es la suma directa de los A_j pues los proyectores $E_i(T)$ verifican $E_i E_j = 0$ si $i \neq j$ y su suma es igual a I. Por otra parte cada $E_i(T)$ conmuta con T, así que $TA_i \subset A_i$.

NOTA. Si $T = T^*$ entonces $E_i(T) = E_i(T)^*$ y los proyectores son ortogonales. Luego X es la suma directa ortogonal de los espacios $E_j(T)X$, (cf.Ej.7).

La matriz asociada a T respecto a una base $\mathcal{B}$ formada por elementos que *pertenecen* a los A_i es entonces de la forma:

$$T_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & M_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & M_p \end{array}\right) \quad ; \quad h \in \mathcal{B} \Rightarrow h \in \bigcup_{i=1}^{p} A_i .$$

TEOREMA 2. $A_i = N(\lambda_i, \nu(\lambda_i))$ y $\dim A_i \geqslant \nu(\lambda_i)$.

DEMOSTRACION. De la definición de $E_i(\lambda)$ sigue, por aplicación directa del Teorema de Cayley-Hamilton, que

$$(T-\lambda_i I)^{\nu(\lambda_i)}\, E_i(T) = 0 .$$

Luego, $E_i(T)\, X \subset N_i(\lambda_i, \nu(\lambda_i))$. Para probar la igualdad bastará ver que $N(\lambda_1, \nu(\lambda_1))$ no tiene ningún elemento no nulo en común con el espacio generado por $\bigcup_2^p N(\lambda_j, \nu(\lambda_j))$. Supongamos que un elemento x tal exista. Entonces, sea h tal que $0 \leqslant h < \nu(\lambda_1)$, $(T-\lambda_1)(T-\lambda_1)^h x = 0$, $y = (T-\lambda_1)^h x \neq 0$. Entonces y es un autovector de T para el autovalor λ_1. Si $x = \sum_2^p x_j$, $x_j \in N(\lambda_j, \nu(\lambda_j))$, entonces $(T-\lambda_1)^h \prod_2^p (T-\lambda_j)^{\nu(\lambda_j)} x =$

$$= \prod_2^p (T-\lambda_j)^{\nu(\lambda_j)} . (T-\lambda_1)^h x = \prod_2^p (T-\lambda_j)^{\nu(\lambda_j)} y = \prod_2^p (\lambda_1 - \lambda_j)^{\nu(\lambda_j)} .$$

Por otra parte $(T-\lambda_1)^h . \prod_2^p (T-\lambda_j)^{\nu(\lambda_j)} . \sum_2^p x_j = 0$, como se ve de la definición de $\nu(\lambda_j)$. O sea, $\prod_2^p (\lambda_1 - \lambda_j) = 0$; contradicción, Q.E.D.

5. Un teorema más fino que los precedentes permite representar T por una matriz de características muy especiales.

TEOREMA DE DESCOMPOSICION DE JORDAN. Sea M una matriz $n \times n$ de elementos de C. Existe una matriz no singular P tal que $M = P^{-1}JP$, donde J es de la forma:

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_q \end{array}\right) \quad , \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_\alpha \end{pmatrix} .$$

DEMOSTRACION. Llamemos $B = T-\lambda I$, λ autovalor. Entonces $B(A) \subset A = N(\lambda,\nu(\lambda))$. Allí $T = B+\lambda I$. Además $B^{\nu(\lambda)}(A) = 0$. A continuación elegiremos una base en A de manera que la restricción de B tenga una expresión sencilla en ese espacio. Recordemos que:

$\{0\} \subsetneqq N(\lambda,1) \subsetneqq N(\lambda,2) \subsetneqq \ldots \subsetneqq N(\lambda,\nu(\lambda)) = A = N(\lambda,\nu(\lambda)+1)$.

Sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_{h_1}\}$ una base de un subespacio $N(\lambda,\nu(\lambda)) \ominus N(\lambda,\nu(\lambda))-1)$. (*)

De $B^{\nu(\lambda)-1}.B\eta_1 = 0$, $B^{\nu(\lambda)-2}.B\eta_1 \neq 0$ se deduce que $\{B\eta_1,\ldots,B\eta_{h_1}\} \subset$

$\subset N(\lambda,\nu(\lambda)-1) \cap \complement N(\lambda,\nu(\lambda)-2)$.

Si $\sum \alpha_i B\eta_i \in N(\lambda,\nu(\lambda)-2)$ entonces $B^{\nu(\lambda)-1}(\sum \alpha_i\eta_i) = 0$.

Luego $\sum \alpha_i \eta_i \in N(\lambda, \nu(\lambda)-1)$. Dada la elección de los η_j tenemos $\sum \alpha_i \eta_i = 0$. Entonces $\alpha_i = 0 \quad \forall\ i$ y los $\{B\ \eta_j\}$ son linealmente independientes (mod. $N(\lambda,\nu(\lambda)-2)$). Un conjunto finito $\{\beta_1,\ldots,\beta_k\}$ se dice linealmente independiente módulo un subespacio M de H si y sólo si una combinación lineal de β_i que pertenece a M es forzosamente la trivial. En otras palabras, si $\{\beta_1,\ldots,\beta_k\}$ son linealmente independientes y generan un subespacio N tal que $N \cap M = \{0\}$. O sea, $\{B\eta_1,\ldots,B\eta_{h_1}\}$ puede completarse a una base de algún $N(\lambda,\nu(\lambda)-1) \ominus N(\lambda,\nu(\lambda)-2)$:

$$\{B\eta_1,\ldots,B\eta_{h_1},\eta_{h_1+1},\eta_{h_1+2},\ldots,\eta_{h_2}\}.$$

Repitiendo el proceso encontramos una familia tal que:

$\{B^2\eta_1,\ldots,B^2\eta_{h_1},B\eta_{h_1+1},\ldots,B\eta_{h_2},\eta_{h_2+1},\ldots,\eta_{h_3}\} \subset$

(*) Por esto entendemos aquí un subespacio de A cuya suma directa con $N(\lambda,\nu(\lambda)-1)$ es igual a A. Suponemos también $\nu(\lambda) > 1$ para evitar el caso trivial $\nu = 1$.

$\subset N(\lambda,\nu(\lambda)-2) \ominus N(\lambda,\nu(\lambda)-3)$, etc... .

La unión de estas familias es una base de A, siendo el último grupo de estas una base del espacio de autovectores correspondientes al autovalor λ.

Ordenando los elementos de esta base así:

$$(14)\quad \{\eta_1, B\eta_1, \ldots, B^{\nu(\lambda)-1}\eta_1; \eta_2, B\eta_2, \ldots, B^{\nu(\lambda)-1}\eta_2; \ldots; \eta_{h_1+1}, \\ , B\eta_{h_1+1}, \ldots, B^{\nu(\lambda)-2}\eta_{h_1+1}; \ldots\}$$

tenemos una base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_\alpha\}$.

Respecto a esta base, B actúa según la matriz

$$(15)\qquad \left(\begin{array}{c|c|c|c} \tilde{J}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{J}_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \tilde{J}_H \end{array}\right) ,$$

donde $H = H(\lambda)$ es el número de grupos en $\mathcal{B} = \{\xi_j\}$ de la forma $U = \{\eta_s, B\eta_s, \ldots, B^{\nu(\lambda)-k}\eta_s\}$ que en la expresión (14) se encuentran entre ; .

Cuando aplicamos (15) y (14) obtenemos $\forall\ s,\ s = 1,\ldots,H(\lambda)$,

$$(15')\quad \{\eta_s, B\eta_s, \ldots, B^{\nu(\lambda)-k}\eta_s\} \cdot \tilde{J}_s = \{B\eta_s, \ldots, B^{\nu(\lambda)-k}\eta_s, 0\} .$$

Es decir $\tilde{J}_s$ es de la forma

$$\tilde{J}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} , \text{ orden de } \tilde{J}_s = (\nu(\lambda)-k+1) \times (\nu(\lambda)-k+1)$$

Luego, $T|_A$ respecto de la base (14) admite la representación:

$$(16)\qquad \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_H \end{array}\right) ,\qquad J_s = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & \lambda & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Repitiendo el proceso *en cada* $N(\lambda_j,\nu(\lambda_j))$ tenemos:

$$(17) \qquad J = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc}
J_1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & \ddots & 0 & & & \mathbf{0} & \\
0 & 0 & J_{H(\lambda_1)} & & & & \\ \hline
 & & & \ddots & & & \\ \hline
 & & & & J_m & 0 & 0 \\
 & \mathbf{0} & & & 0 & \ddots & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & J_q
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \uparrow \\ \lambda = \lambda_1 \\ \downarrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ \lambda = \lambda_p \\ \downarrow \end{array}$$

Q.E.D.

(17) se denomina la forma *canónica* de Jordán de M. *Los* $N(\lambda_j, \nu(\lambda_j))$ *son subespacios invariantes de* X *por* T.

De la construcción se deduce que J es una matriz *unívocamente determinada* salvo permutaciones de los bloques (demuéstrese).

EJERCICIOS. 1) Demostrar que si $A = P\,J\,P^{-1}$ y $Q(\lambda)$ es un polinomio, entonces $Q(A) = P\,Q(J)\,P^{-1}$.

2) Supongamos que $T \in L(X,X)$. Entonces $e^T = \exp(T) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$.

Demostrar que la serie converge a un operador (verificando la condición de Cauchy) y que vale $\|e^T\| \leqslant e^{\|T\|}$.

3) Si $T\,U = U\,T$, $T, U \in L(X,X)$, entonces $e^{T+U} = e^T . e^U = e^U . e^T$.

4) $e^{-T} = (e^T)^{-1}$ (e^T nunca es singular).

5) Si A representa a T entonces la matriz $e^A := \sum_0^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ representa a e^T. (Basta ver que $\sum_0^N A^k/_{k!}$ converge. Esto sigue de
$\sum_1^{\infty} \frac{(n.\|A\|_\infty)^j}{j!} < \infty$, $\|A\|_\infty = \sup |a_{ij}|$).

6) Si J tiene la forma canónica de Jordán, entonces

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_q} \end{pmatrix}, \qquad e^{J_1} = e^{\lambda_1}. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/1! & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2! & 1/1! & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/(\nu-1)! & \dots\dots & & 1/1! & 1 \end{pmatrix},$$

(cf.(22)).

7) Considérese la forma bilineal $\bar{y}'A\,x$, donde A es una matriz $n\times n$ hermítica: $A = A^*(= \bar{A}')$. Utilizando la notación de producto escalar la forma bilineal se escribe: (Ax,y). Ya sabemos (Cap. 1) que un operador acotado es hermítico sí y sólo sí (Ax,x) es real $\forall\ x \in X$.

De (15') con s=1 sigue que si $y = B^{\nu-2}\eta_1$, $x = B^{\nu-1}\eta_1$ entonces $0 = (Bx,y) = (x,By) = (x,x)$. O sea, necesariamente $\nu(\lambda) = 1$. Como los autovalores son reales, J es diagonal y real. Luego podemos escribir $P^{-1}AP = J$ con P una matriz unitaria.

8) Demuéstrese que para $A \in M(n,C)$:

$$\|A\|^2 = \text{sup autovalores de } A^*A \leqslant \text{tr } A^*A.$$

(Obsérvese que $\text{tr } A = \sum\limits_i a_{ii}$ aparece como factor de $(-1)^{n-1}.\lambda^{n-1}$ en $\det(A-\lambda I)$).

9) Usando la forma triangular de $A \in M(n,C)$ demostrar que:

$$\det e^{At} = e^{(\text{tr } A)t} \quad , \quad \forall\ t \in R.$$

10) Sea T operador normal: $TT^* = T^*T$. Entonces $\nu(\lambda) = 1\ \ \forall\ \lambda \in \sigma(T)$.

$((T-\lambda)^2x = 0 \Rightarrow ((T^*-\bar{\lambda})(T-\lambda))^2x = 0 \Rightarrow (T^*-\bar{\lambda})(T-\lambda)x = 0 \Rightarrow \|(T-\lambda)x\|^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (T-\lambda)x = 0)$.

11) Demostrar que el producto de dos operadores autoadjuntos es autoadjunto si y sólo si conmutan.

Mostrar que el producto de las matrices hermíticas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \text{ no es hermítica.}$$

6. APLICACIONES DE LA FORMA CANONICA DE JORDAN.

a) Sea $A(t)$: $[t_0,t_1] \longrightarrow M(n,C)$, una función a valores matrices, continua en t ($a_{ij} \in C([t_0,t_1])$). Sea $b(t): [t_0,t_1] \longrightarrow C^n$ continua. Dado un vector η existe una única solución de

$$(18) \qquad \begin{cases} x'(t) = A(t).x(t) + b(t) \quad , \quad t \in [t_0,t_1] \ , \\ x(t_0) = \eta \ . \end{cases}$$

Si $\Phi(t)$ es una matriz formada por vectores (columna) $x_j(t)$, $j = 1,\ldots,n$, de soluciones de la ecuación homogénea ($b \equiv 0$) tal que $\det \Phi(t) \neq 0$ para algún t, entonces $\Phi(t)$ es denominada *matriz fundamental* de la ecuación, y vale que $\det \Phi(t) \neq 0 \quad \forall\ t$.

Se tiene entonces la *fórmula de Lagrange:*

$$(19) \qquad x(t) = \Phi(t).\eta + \Phi(t).\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, b(s)\, ds \quad , \quad \text{si} \quad \Phi(t_0) = I .$$

Una tal matriz Φ existe y es única.

Supongamos A constante. La matriz fundamental en (18) toma ahora la forma $e^{A(t-t_0)}$, y la fórmula de Lagrange se reduce a:

$$(20) \qquad x(t) = e^{(t-t_0)A}.\eta + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}.b(s)\, ds \ .$$

Si $K = \lambda I + H$, con

$$(21) \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad H \in k \times k \ ,$$

entonces H^j es de la forma:

$$H^j = j\updownarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 1 & & \ddots & & \\ 0 & \ddots\, 1 & & \ddots & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

y de $e^{Kt} = e^{\lambda t}.e^{Ht}$ resulta:

$$(22) \qquad e^{Kt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ t/1! & \ddots & & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \cdots & \cdots & t/1! & 1 \end{pmatrix} .$$

Si J es la forma de Jordan de A, $J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_q \end{pmatrix}$; se tiene:

$$e^{At} = P^{-1}\, e^{Jt}\, P = \quad P^{-1}. \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_q t} \end{pmatrix} . P$$

donde cada $e^{J_i t}$ es de la forma (22) y $A = P^{-1}JP$.

b) Supongamos ahora $b \equiv 0$ pero A(t) periódica de período τ: $A(t+\tau) = A(t)$, $\forall$ t. *El teorema de Floquet* afirma que toda matriz fundamental para el sistema periódico: $x'(t) = A(t).x(t)$ puede representarse en la forma:

$$\Phi(t) = B(t)\, e^{tL} \quad ,$$

L = matriz constante y B(t) periódica de período τ.

La demostración de este resultado se reduce rápidamente a demostrar que *dada* $C \in M(n,C)$ *existe una matriz* L *tal que* $e^L = C$ *si* det $C \neq 0$. (Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental entonces también $\Phi(t+\tau)$ lo es, y por lo tanto $\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C$. Entonces: $B(t) = \Phi(t)e^{-tL}$ si $C = e^{\tau L}$). Veamos la demostración de la existencia de L. Sea $C = P^{-1}JP$,

$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_h \end{pmatrix}$ = forma canónica de Jordan de C y supongamos que sabemos determinar L_j tal que $e^{L_j} = J_j$. Si $M = \begin{pmatrix} L_1 & & & 0 \\ & L_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & L_h \end{pmatrix}$ entonces

$e^{P^{-1}MP} = P^{-1}e^{M}P = P^{-1}. \begin{pmatrix} e^{L_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{L_h} \end{pmatrix} . P = P^{-1}JP = C$, así que, $L = P^{-1}MP$. Es decir, basta determinar L cuando C es un bloque de Jordan.

Sea $N = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in C$ y supongamos $N \in n \times n$. Definamos:

$$R(N) = N - \frac{N^2}{2} + \frac{N^3}{3} - \dots .$$

R(N) está bien definida pues $N^n = 0$. O sea, R(N) es un polinomio en N. Veamos que

(*) $$e^{R(N)} = I + N.$$

Pero de: $1 + x = e^{\lg(1+x)} = (\text{si } |x| < 1) = 1 + (x - \frac{x^2}{2} + \dots) + $
$+ \frac{1}{2!}(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots)^2 + \dots$ se deduce que al ordenar las series, los coeficientes de x^k, $k \geqslant 2$, son nulos, mientras que el coeficiente de x es uno (el desarrollo de $e^{|\lg(1-|x|)|}$ es una mayorante convergente).

Si en lugar de x ponemos N se obtiene el mismo resultado (recordar que $N^n = 0$) y (*) sigue.

Si $C = \lambda I + H$, $H = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$, $\alpha = \frac{1}{\lambda}$, escribamos

$\tilde{C} = \frac{C}{\lambda} = I + \frac{H}{\lambda} = I + N.$

En consecuencia, $e^{R(N)} = \tilde{C}$, y por lo tanto $C = \lambda\tilde{C} = \lambda e^{R(N)} =$
$= e^{(\lg \lambda)} . e^{R(N)} = e^L$, donde $L = (\lg \lambda) I + R(N)$. Q.E.D.

7. OPERADORES DE HILBERT-SCHMIDT Y OPERADORES COMPACTOS.

Sea $K(x,y) \in L^2((-\infty,+\infty) \times (-\infty,+\infty))$ y definamos

(23) $$g(x) = (Kf)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\, f(y)\, dy \quad , \quad f \in L^2(-\infty,+\infty)$$

Se llama a K *núcleo* de Hilbert-Schmidt y (23) es el *operador integral* de Hilbert-Schmidt generado por ese núcleo. Tenemos entonces:

(24) $$\|g\|^2 \leqslant \|f\|^2 . \iint |K(x,y)|^2\, dx\, dy \quad , \quad \|K\|_{Op.} \leqslant \|K(.,.)\|_2$$

Si $\{\varphi_j\}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2(-\infty,+\infty)$ es fácil ver que $\{\psi_{jk} = \varphi_j(x)\, \bar{\varphi}_k(y)\}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2(R^2)$. Luego

(25) $$a_{jk} = (K\varphi_k, \varphi_j) = (K, \bar{\varphi}_k \varphi_j) = (K, \psi_{jk}) \quad y \quad \sum_{j,k} |a_{jk}|^2 = \|K(.,.)\|_2^2 < \infty.$$

Vale también, si η_j es otro sistema ortonormal completo en $L^2(R)$, que

(26) $$N^2(K) := \sum_{j,k} |(K\varphi_k, \eta_j)|^2 = \sum_k \|K\varphi_k\|_2^2 = \sum_j \|K^* \eta_j\|_2^2 < \infty$$

pues la suma central coincide con $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2$. Si en lugar de un operador integral K tenemos un operador acotado K en un espacio de Hilbert (separable)

H, (26) define N(K), la *norma Hilbert-Schmidt* de K. Este término está bien definido pues como se ve de (26) no depende de los sistemas completos elegidos. Y precisamente

$$N(K) = \sqrt{\sum_{j,k} |(K\varphi_j,\eta_k)|^2} \; .$$

Se puede demostrar que *todo* operador *en* $L^2(R)$ con norma Hilbert-Schmidt finita puede representarse por medio de un operador integral de Hilbert-Schmidt.

Volviendo al caso general, es inmediato que $N(K^*) = N(K) \geqslant \|K\|$: $\|Kf\| =$
$= \|K \sum b_j \varphi_j\| \leqslant \sum |b_j| . \|K\varphi_j\| \leqslant (\sum |b_j|^2)^{1/2} . (\sum_j \|K\varphi_j\|^2)^{1/2} = N(K) . \|f\|$.

Es decir, la norma usual no supera a la norma H-S. Las siguientes propiedades de ésta justifican su nombre:

a) $N(KC) \leqslant \|C\| . N(K) \geqslant N(CK)$ si C es un operador acotado,

b) $N(K+L) \leqslant N(K) + N(L)$.

Veamos b). $N(K+L) = \sqrt{\sum_{j,k} |((K+L)\varphi_j,\varphi_k)|^2} = \sqrt{\sum_{j,k} |(K\varphi_j,\varphi_k)+(L\varphi_j,\varphi_k)|^2} \leqslant$
$\leqslant$ (des. de Cauchy- Schwarz) $\leqslant \sqrt{\sum |(K\varphi_j,\varphi_k)|^2} + \sqrt{\sum |(L\varphi_j,\varphi_k)|^2} = N(K)+N(L)$.

Los operadores con norma H-S finita pertenecen a una clase muy importante de operadores: los completamente continuos.

DEFINICION. A se dice *compacto* o *completamente continuo* (c.c.) si transforma conjuntos acotados en relativamente compactos (:= de toda sucesión puede extraerse una subsucesión convergente en norma).

c.c. implica acotado. En efecto, si A $\in$ c.c. y no fuese acotado entonces existiría una sucesión $\{f_k\}$ tal que $\|f_k\| = 1$ y $\|Af_k\| \longrightarrow \infty$.

Luego, la esfera unitaria no es transformada por A en un conjunto relativamente compacto.

Nosotros nos restringiremos a operadores de H en H. Sin embargo, la definición de c.c. se aplica también a operadores de un espacio de Banach en otro.

TEOREMA 3. i) Si C es un operador acotado y A y B son completamente continuos entonces

$$C\,A \quad , \quad A\,C \quad y \quad aA + bB \quad \text{son c.c.}$$

ii) A es c.c. $\Rightarrow A^*$ es c.c.

iii) Si $\forall$ n existe A_n c.c. tal que $\|A - A_n\| \leqslant 1/n$ entonces A es c.c.

iv) $N(A) < \infty \Rightarrow$ A es c.c.

DEMOSTRACION. i) se deja al lector. ii) Supongamos que $\{f_n\}$ sea una sucesion tal que $\|f_k\| \leqslant 1$. De:

$$\|A(f_n - f_m)\|^2 = (A^*A(f_n - f_m), f_n - f_m) \leqslant 2\ \|A^*A(f_n - f_m)\|$$

sigue que *si* A^*A *es c.c. entonces* A *lo es*. Si A es completamente continuo de i) resulta que AA^* es c.c. y de aquí que $(A^*)^*A^* = AA^*$ es c.c. Luego A^* es c.c.

iii) Sea $\|f_k\| \leqslant 1$. Sea $\{f_{1j}\} \subset \{f_j\}$, $A_1\ f_{1j} \xrightarrow[j\to\infty]{}$ y elijamos

$$f_{n1}, f_{n2}, f_{n3}, \ldots$$

una subsucesión de $\{f_{n-1,j}\}$ tal que $A_n f_{nj} \xrightarrow[j\to\infty]{}$. Consideremos ahora

$\|Af_{nn} - Af_{mm}\|$: $\|A(f_{nn}-f_{mm})\| \leqslant \|(A - A_h)\ f_{nn}\| + \|A_h(f_{nn}-f_{mm})\| + \|(A_h-A)f_{mm}\| \leqslant$

$\leqslant \frac{2}{h} + \|A_h(f_{nn}-f_{mm})\|$.

Eligiendo h grande y después de haberlo fijado, n y m suficientemente grandes, logramos hacer el miembro derecho menor que un número prefijado. O sea, $\{A\ f_{nn}\}$ es una sucesión de Cauchy.

iv) El operador acotado A_M definido por

$$A_M\ f = \sum_{k=1}^{M} (Af, \varphi_k)\ \varphi_k$$

tiene rango de dimensión finita y por lo tanto es completamente continuo. Además tenemos:

$$\|Af - A_M f\|^2 = \sum_{M+1}^{\infty} |(Af, \varphi_k)|^2 = \sum_{M+1}^{\infty} |(f, A^*\varphi_k)|^2 \leqslant \|f\|^2 . \sum_{M+1}^{\infty} \|A^*\varphi_k\|^2 .$$

La última suma tiende a cero cuando M tiende a ∞, como se ve de (26). De iii) sigue ahora que A es completamente continuo. Q.E.D.

EJERCICIOS. 1) Si $\{A_k\}$ es una sucesión de operadores de norma H-S finita y $\sum N(A_k) < \infty$, entonces está bien definida la serie $A = \sum A_k$ y vale $N(A) \leqslant$ $\leqslant \sum N(A_k)$.

2) Sea A la matriz $\infty \times \infty$ tal que $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = (K\ \varphi_j, \varphi_i)$ donde K es un operador acotado de H en H. Si $f = \sum c_j\ \varphi_j$,

$$K\ f = \sum d_j\ \varphi_j \ , \text{ vale: } \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad ; \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < \infty \iff K \in \text{H-S}.$$

Nuestro objetivo es demostrar, entre otros, el siguiente resultado

TEOREMA 4. Sea el operador $A = A^*$, no trivial y completamente continuo. Entonces, A posee una colección finita o numerable de autovectores ortonormales $e_1, e_2, \ldots$ cuyos autovalores se acumulan a lo sumo en 0 y verifican $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots > 0$ y tal que $\{e_i\}$ es completo en R_A = rango del operador A:
$$F = A\,f \;\Rightarrow\; \|F\|^2 = \sum_k |(F,e_k)|^2 .$$

Los autovalores $\lambda_n \neq 0$ son reales y los autoespacios correspondientes de dimensión finita. Si H es un espacio de Hilbert *propio* (i.e. con base infinita numerable) y A no tiene rango finito, entonces $\lambda_n \longrightarrow 0$. Aunque muchas veces no será necesario, mantendremos nuestra adhesión a la hipótesis que H es un espacio de Hilbert *separable* de dimensión infinita.

Obsérvese que si $x \perp R_A$ entonces $(Ax,e_i) = (x,Ae_i) = 0$, es decir, $\overline{R_A}$ reduce al operador y $A(H \ominus \overline{R_A}) = \{0\}$. Completando $\{e_i\}$ obtenemos una base ortonormal $\{\varphi_j\}$. Si reemplazamos A por K^*K con $N(K) < \infty$, tendremos:

$$(27) \quad \infty > \sum_k \|K\,\varphi_k\|^2 = \sum (K\,\varphi_k, K\,\varphi_k) = \sum (K^*K\,\varphi_k,\varphi_k) = \sum_k |(K^*K\,\varphi_k,\varphi_k)| =$$
$$= \sum |(K^*K\,e_j,e_j)| = \sum_j |\lambda_j|\;(e_j,e_j) = \sum_j |\lambda_j| .$$

Si de K exigimos todavía que $\sum_j |\lambda_j|^{1/2} < \infty$, donde $\{\lambda_j\}$ es la familia de autovalores de K^*K, entonces diremos que K es un *operador nuclear*.

DEFINICION. Un operador completamente continuo T se dirá *nuclear* si $\sum \sqrt{|\lambda_j|} < \infty$ donde $\{\lambda_j\}$ es la familia de autovalores de T^*T.

Como $\sum \sqrt{|\lambda_j|} < \infty$ implica $\sum |\lambda_j| < \infty$, vemos de (27) que *todo operador nuclear tiene norma Hilbert-Schmidt finita.*

Puede demostrarse que $\sum_k |(T\,\varphi_k,\varphi_k)| < \infty$ para toda base ortonormal $\{\varphi_k\}$ si T es nuclear y también que T (acotado) es nuclear si *existe* una base ortonormal $\{\psi_j\}$ para la cual $\sum_j (T\,\psi_j,\psi_j)$ converge absolutamente.

Además, $\sum_k (T\,\varphi_k,\varphi_k)$ es un número *independiente* de la base $\{\varphi_j\}$.

NOTAS. 1. Del teorema 4 resulta inmediatamente el siguiente resultado: $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)|$ es alcanzado en por lo menos un elemento de H, que es autovector correspondiente al autovalor λ_1 y vale

$|\lambda_1| = \sup\{|(Ax,x)| : \|x\| = 1\}$.

En efecto, $Af = F = \sum (Af,e_i)e_i = \sum(A \sum_j (f,e_j)e_j, e_i)e_i = \sum \lambda_j (f,e_j)e_j$ y $\sum |(f,e_j)|^2 = 1$ implican $\|A\| \leqslant |\lambda_1|$.

En particular resulta que $A = A^* \neq 0$ y $A \in$ c.c. implican la existencia de autovalores del operador (cf.cap.II, § 5). La observación precedente suministra un método para determinar al menos el módulo de λ_1.

2. iv) del teorema 3 muestra que es posible aproximar en la norma uniforme un operador Hilbert-Schmidt por operadores de rango finito. Esto vale para todo operador T completamente continuo. Un conjunto de aproximantes viene dado por la familia $\{T_n\}$ definida por

$$T_n f = \sum_{i,j=1}^{n} (T\varphi_i,\varphi_j)\ (f,\varphi_i)\varphi_j \quad , \quad \text{donde} \quad \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$$

es una base del espacio H, (cf. § 13 y T.14).

3. La no separabilidad de H no cambia esencialmente la estructura de un operador A completamente continuo *autoadjunto* no trivial, pues en ese caso en el espacio H existe un subespacio separable invariante por A y tal que su complemento ortogonal es transformado por A en $\{0\}$.

De la tesis del teorema 4 sigue también enseguida que A es biunívoco sí y sólo sí $\overline{R(A)} = H$, o sea, sí y sólo sí $\{e_j\}$ es una base del espacio.

4. Otro resultado fácil de demostrar pero que sólo enunciamos dice así: A es simétrico y completamente continuo sí y sólo sí existe una sucesión de números reales $\lambda_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ tales que $\forall\ f \in H$, $Af = \sum \lambda_i (f,e_i)e_i$ donde $\{e_i\}$ es un sistema ortonormal en H.

8. TEORIA ESPECTRAL PARA OPERADORES COMPACTOS. METODO DE F. RIESZ Y TEOREMAS DE FREDHOLM.

El estudio de la teoría espectral para operadores completamente contínuos, también llamados compactos, es la introducción natural a la teoría espectral general. Designaremos con R un preHilbert y con H con su completación. En lo que sigue no siempre será necesario la completitud del espacio y así se hará notar en cada enunciado.

LEMA 1. Sea $\{g_k : k = 0,1,2,\ldots\}$ un sistema ortonormal en R y $Ag_k = \sum_0^k \beta_{kj}\, g_j$. Entonces $\beta_{kk} \longrightarrow 0$ si A es completamente continuo.

DEMOSTRACION. $\|Ag_n - Ag_m\|^2 \geqslant |\beta_{nn}|^2$ si $n > m$. Si A es compacto, para una subsucesión $\{g_{n_j}\}$ cualquiera existe una subsucesión $\{g_{n_{j_k}}\}$ tal que $\{Ag_{n_{jk}}\}$

es de Cauchy. Por lo tanto, $\beta_{n_{jk},n_{jk}} \longrightarrow 0$. De aquí sigue que $\beta_{nn} \to 0$.

Q.E.D.

LEMA 2. Sea $\lambda \neq 0$ y A completamente continuo en R. Si $\{f_0, f_1, \dots\} \subset R$ verifica: $(A-\lambda)\, f_n = f_{n-1}$, $(A-\lambda)\, f_0 = 0$ entonces $f_n = 0 \quad \forall\, n$.

DEMOSTRACION. Los vectores f_j , $j = 0,1,2,\dots$, forman una familia linealmente independiente si $f_0 \neq 0$. En efecto, sea f_n el primero que es combinación lineal de los precedentes: $f_n = \sum\limits_0^{n-1} \alpha_k\, f_k$. Aplicando A a ambos miembros obtenemos:

$$\lambda\, f_n + f_{n-1} = \lambda \sum_0^{n-1} \alpha_k\, f_k + \sum_0^{n-2} \alpha_{h+1}\, f_h .$$

O sea, $f_{n-1} = \sum\limits_0^{n-2} \alpha_{h+1}\, f_h$, contradicción. Ortonormalizando $\{f_n\}$ obtenemos $\{g_n\}$: $g_k = \alpha_{k0}\, f_0 + \alpha_{k1}\, f_1 + \dots + \alpha_{kk}\, f_k$. Pero

$A\, g_k = \alpha_{k1}\, f_0 + \dots + \alpha_{kk}\, f_{k-1} + \lambda g_k = \beta_{k0}\, g_0 + \dots + \beta_{k,k-1}\, g_{k-1} + \lambda g_k$,

$\lambda = \beta_{kk}$. Luego, del lema 1 sigue $\lambda = 0$, contradicción.

TEOREMA 5. a) $\lambda = 0$ es el único punto de acumulación posible para los autovalores de un operador completamente continuo en R.

b) A cada autovalor $\lambda \neq 0$ corresponde un número finito de autovectores linealmente independientes.

c) Cada operador completamente continuo tiene a lo sumo una cantidad numerable de autovectores linealmente independientes correspondientes a autovalores $\lambda \neq 0$.

DEMOSTRACION. Basta ver que $\forall\, \rho > 0$ sólo existe un número finito de autovectores linealmente independientes cuyos autovalores superan ρ.

Sea $A\, f_n = \lambda_n\, f_n$, $|\lambda_n| > \rho > 0$, $n = 1,2,3,\dots$, Ortonormalizando $\{f_n\}$ obtenemos $\{g_n\}$: $g_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_{kj}\, f_j$. Aplicando A a g_k se obtiene $A\, g_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_{kj} \lambda_j f_j$

Luego: $A g_k - \lambda_k\, g_k = \alpha_{k1}(\lambda_1 - \lambda_k) f_1 + \dots + \alpha_{k,k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\, f_{k-1} =$

$= \beta_{k,1}\, g_1 + \dots + \beta_{k,k-1}\, g_{k-1}$. O sea, $A\, g_k = \sum\limits_1^{k-1} \beta_{kh}\, g_h + \lambda_k\, g_k$.

La tesis sigue del lema 1. Q.E.D.

TEOREMA 6. Sea A completamente continuo en R. Si $\lambda \neq 0$ y $(A-\lambda)(R) = R$ entonces existe $(A-\lambda)^{-1}$ con dominio R.

DEMOSTRACION. Si existe f_0 tal que $(A - \lambda)\, f_0 = 0$, $f_0 \neq 0$, entonces definimos f_1 como uno de los elementos tales que $(A - \lambda)\, f_1 = f_0$.

Así seguimos y $A\, f_k - \lambda f_k = f_{k-1}$, $k = 1,2,3,\ldots$, contradiciendo el lema 2.

Q.E.D.

TEOREMA 7. Sea A completamente continuo en R, $\lambda \neq 0$. Existe una constante $M = M(A,\lambda)$ tal que si $(A - \lambda)\, f = h$ es soluble para un h dado, entonces para cierta solución f vale:

$$\|f\| \leqslant M\, \|(A - \lambda)\, f\| = M.\|h\|.$$

DEMOSTRACION. Sea $\{f_1,\ldots,f_k\}$ una base de autovectores de A correspondientes al autovalor λ.

Si λ no es autovalor este conjunto es vacío. Sea $(A - \lambda)\, f^* = h$. Entonces $\{f : (A - \lambda)\, f = h\} = \{f : f = f^* + \sum_1^k \alpha_i\, f_i\} \in$ convexo, cerrado y el $\operatorname{Inf} \|f\|$ se alcanza en cierto elemento $g = g(h)$, para el cual vale $A\, g(h) = \lambda g(h) + h$.

Consideremos $\sup\limits_{h\in R(A-\lambda)} \frac{\|g\|}{\|h\|}$. El teorema se reduce a demostrar que este supremo es finito. Si sup $= \infty$, entonces existe una sucesión $\{h_k\}$ tal que $\frac{\|g(h_k)\|}{\|h_k\|} \longrightarrow \infty$. Supongamos $\|g\| = 1$ para cada h_k. Entonces, para alguna subsucesión de h_k, que seguimos representando con los mismos índices, se tiene:

$$\|g(h_k)\| = 1 \quad , \quad \|h_k\| \longrightarrow 0 \quad , \quad A\, g(h_k) \longrightarrow \quad .$$

Luego, $g(h_k) \longrightarrow g$, y vale $A\, g - \lambda g = 0$. Como $\|g\| = 1$, llegamos a una contradicción de la siguiente manera:

$A(g(h_k)-g) - \lambda(g(h_k)-g) = h_k$ implica para $k \geqslant k_0$, que $\frac{1}{2} > \|g(h_k)-g\| \geqslant$ $\geqslant \inf\{\|f\|: A\, f - \lambda f = h_k\} = \|g(h_k)\| = 1$. Q.E.D.

LEMA 3. $G = R(A - \lambda)$ es cerrado, o sea, es un subespacio, si $\lambda \neq 0$ y A es un operador completamente continuo en H.

DEMOSTRACION. Sea $g_n \in G$ tal que $g_n \longrightarrow g$. Podemos suponer $\|g_n - g_{n+1}\| \leqslant 1/2^n$, $n = 1,2,\ldots$, y $\{h_n\}$ así elegida como para que: $(A - \lambda)h_1 = g_1$, $(A - \lambda)(h_2-h_1) = g_2-g_1$, $\ldots$, $(A - \lambda)(h_{n+1}-h_n) = g_{n+1}-g_n$, $\ldots$, y $\|h_{n+1}-h_n\| \leqslant M.\|g_{n+1}-g_n\|$. En consecuencia, $g_n \longrightarrow g$ implica la existencia de h tal que $h_n \longrightarrow h$. Entonces $(A - \lambda)h = \lim (A - \lambda)h_n = \lim g_n = g$. Q.E.D.

TEOREMA 8. Si $\lambda \neq 0$ es autovalor para A, $\bar{\lambda}$ lo es para A^*, cuando A es completamente continuo en H.

DEMOSTRACION. Resulta de $(R(A-\lambda))^{\perp} = N((A - \lambda)^*)$ y $(A - \lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda} I$.

Recordemos que $R^{\perp} = \{f: (f,r) = 0 \quad \forall\, r \in R\} = \{f: f \perp R\}$.

Sea $f \neq 0$, $f \perp G = R(A - \lambda)$. Entonces $\forall\; h \in H$ se tiene:

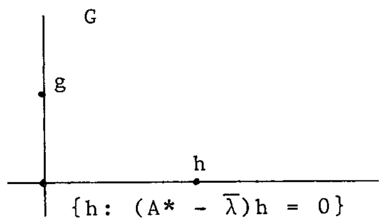
$0 = ((A - \lambda)h,f) = (Ah,f) - (h,\bar{\lambda}f) = (h,A^*f) - (h,\bar{\lambda}f)$. Q.E.D.

TEOREMA 9. Sea A completamente continuo en H, $\lambda \neq 0$. $Af - \lambda f = g$ tiene solución f sí y sólo sí $g \perp$ autoespacio de A^* correspondiente al autovalor $\bar{\lambda}$.

Si $\bar{\lambda}$ no es autovalor de A^*, por autoespacio debe entenderse $\{0\}$. Entonces, $Af - \lambda f = g$ tiene *siempre* solución sí y sólo sí λ *no* es autovalor de A.

Los teoremas 8 y 9 son generalizaciones a operadores compactos de los *dos primeros teoremas de Fredholm* de la teoría de ecuaciones integrales.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 9.



Sigue de la relación conocida: $N(B^*)^{\perp} = \overline{R(B)}$, observando solamente que $R(B) = \overline{R(B)}$ si $B = A - \lambda I$ (Lema 3). Q.E.D.

Se sabe que todo operador completamente continuo en H posee un subespacio invariante, es decir, existe un subespacio $S \neq \{0\}$, $S \neq H$, tal que $AS \subset S$ (J. von Neumann).

Sin embargo se tiene un resultado más preciso en el caso de operadores compactos *autoadjuntos*.

TEOREMA 10. 1) Si $A = A^*$ es completamente continuo, $A \neq 0$, entonces existe $e \in H$, $\|e\| = 1$, tal que para cierto $\lambda \neq 0$, $Ae = \lambda e$.

2) Un operador de tipo Volterra de núcleo acotado *no* tiene autovalores $\neq 0$.

DEMOSTRACION. 1) Sea $\|A\| = \sup\limits_{\|g\|=1} |(Ag,g)| = \sup\limits_{\|g\|=1} \|Ag\|$; $\|A\| = \lim\limits_{n\to\infty} |(Ag_n,g_n)|$ para cierta sucesión normalizada $\{g_n\}$ y $\lambda = \lim (Ag_n,g_n)$, con $\lambda = \|A\|$ ó $\lambda = -\|A\|$. Siempre podemos elegir $\{g_n\}$ de manera que $Ag_n \longrightarrow h$.

Luègo, $0 \leqslant \lim\|Ag_n - \lambda g_n\|^2 = \|h\|^2 + \lambda^2 - \lim 2\lambda(Ag_n,g_n) = \|h\|^2 - \lambda^2$.

Pero $\lim \|Ag_n - \lambda g_n\| = 0$ pues el último miembro es nulo: $\|h\|^2 = \lim \|Ag_n\|^2 \leqslant$ $\leqslant \lambda^2 . \|g_n\|^2 = \lambda^2$.

O sea, $Ag_n - \lambda g_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Por lo tanto, $g_n \longrightarrow \frac{h}{\lambda} \neq 0$ y vale $A(h/\lambda) = h$. Para $e = \frac{h}{\|h\|}$ se tiene $Ae = \lambda e$.

2) Sea $K\,y(x) = \int_0^x K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi$, $0 \leqslant x, \xi \leqslant 1$, K acotado por M y continua salvo para $x = \xi$, $y \not\equiv 0$.

Luego $K\,y(x)$ es continua si $y \in L^2$. Si esperamos que $\mu.Ky = y$, $\mu = \frac{1}{\lambda}$, entonces debe ser $y \in C([0,1])$, $|y(x)| \leqslant |\mu|.M.B.x$, donde $B = \sup |y(x)|$.
Aplicando repetidamente el operador $\mu.K$, obtenemos:

$$|y(x)| \leqslant |\mu|^k M^k B / k! \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

O sea, $y \equiv 0$. Es decir, cualquiera sea $\lambda \neq 0$, $Ky = \lambda y$ implica $y \equiv 0$. Q.E.D.

NB. Si $\lambda = 0$ y $K \equiv 1$, $\int_0^x y(\xi)\,d\xi = 0$ entonces $y = 0$ c.d., y por lo tanto este operador *no* tiene autovalores.

Sea otra vez $\lambda \neq 0$ y denotemos con $K_\lambda = \{g: (A - \lambda I)^n x = g \text{ es soluble } \forall n\}$, y $N_\lambda = \{f: \text{existe } n \,/\, (A - \lambda I)^n f = 0\}$.

$K^*_{\bar\lambda}$ y $N^*_{\bar\lambda}$ sean los correspondientes conjuntos asociados con A^* y $\bar\lambda$. Si $\lambda \neq$ autovalor, entonces $N_\lambda = \{0\}$, $K_\lambda = H$, por lo que sólo interesará estudiar estos conjuntos para el caso de λ autovalor. Obsérvese que los autovectores pertenecen a N_λ. Más aún, N_λ coincide con el autoespacio correspondiente si A es autoadjunto o normal (cf. § 5).

TEOREMA 11. Sea $\lambda \neq 0$, autovalor de A completamente continuo definido en un espacio de Hilbert H. Vale entonces:

1) K_λ es un subespacio de H,

2) N_λ es un subespacio de H,

3) $K_\lambda + N_\lambda = H$, $K_\lambda \cap N_\lambda = \{0\}$,

4) $0 < \dim N_\lambda < \infty$,

5) $K_\lambda \oplus N^*_{\bar\lambda} = H$,

6) $\dim N_\lambda = \dim N^*_{\bar\lambda}$

DEMOSTRACION. 1) $K_\lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ donde $G_n = (A - \lambda I)^n(H)$, $G_n \subset G_{n-1}$. $G_1 = \overline{G_1}$ por lema 3, o sea, G_1 es un subespacio.

Si se aplica $A - \lambda I$ a G_1 se obtiene $G_2 = (A^2 - 2\lambda A + \lambda^2 I)(H)$. Como $A^2 - 2\lambda A$ es también completamente continuo, $G_2 = \overline{G_2}$. Así tenemos que para todo n, G_n

es un subespacio. Supongamos $G_{n+1} \neq G_n \quad \forall\, n$. Existe entonces una sucesión ortonormal $\{g_n\}$ tal que $g_n \perp G_{n+1}$, $g_n \in G_n$. Luego, $((A - \lambda)g_{n+p}, g_n) = 0$ si $p \geqslant 0$ y también $(A\, g_{n+p}, g_n) = 0$, si $p > 0$. En este caso:

$\|A\, g_n - A\, g_{n+p}\|^2 = \|\lambda g_n + (A - \lambda)\, g_n - A\, g_{n+p}\|^2 =$

$= |\lambda|^2 + \|(A - \lambda)\, g_n - A\, g_{n+p}\|^2 \geqslant |\lambda|^2 > 0$.

O sea $\{A\, g_n\}$ no es relativamente compacta, contradicción. Es decir, existe k tal que $G_1 \supsetneqq G_2 \supsetneqq \dots \supsetneqq G_k = G_{k+1} = \dots = K_\lambda$.

2) y 4). $N_\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, $M_n = \{f\colon (A - \lambda I)^n f = 0\} \supset M_{n-1}$. Sea $m > k$ y $(A - \lambda I)^m f = 0$; si $g = (A - \lambda I)^{m-1} f$, entonces $g \in K_\lambda = G_k$ y $(A - \lambda)g = 0$. Luego, $g \in K_\lambda = G_{k+1}$ implica la existencia de $g_1 \in G_k = K_\lambda$ tal que $g = (A - \lambda I)\, g_1$.

Análogamente, $g_1 = (A - \lambda I)g_2$, $g_2 \in K_\lambda$, etc... Del lema 2 sigue que $g = 0$. O sea, ya $(A - \lambda I)^{m-1} f = 0$, y de aquí obtenemos: $(A - \lambda I)^k f = 0$. En general no se puede disminuir el exponente. Sea h tal que

$$(A - \lambda I)^{k-1}\, h \notin K_\lambda .$$

Entonces, $(A - \lambda)^{k-1} h \neq 0$ y queda demostrado que

$$\{0\} \subsetneqq M_1 \subsetneqq M_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq M_k = M_{k+1} = \dots = N_\lambda .$$

Cada vector $f \in N_\lambda$, $f \neq 0$, satisface la ecuación:

$(B - (-1)^{k-1}\ \lambda^k I)\ f = 0 \quad , \quad B = A^k - \lambda \binom{k}{1} A^{k-1} + \dots + (-\lambda)^{k-1} \binom{k}{k-1} A.$

Luego, $f \in$ autoespacio de B correspondiente al autovalor $\lambda^k\, (-1)^{k-1}$ lo cual implica que $\dim N_\lambda < \infty$ y por lo tanto que $N_\lambda = \overline{N_\lambda}$.

3) Aquí se usará la propiedad recién demostrada:

$$g \in K_\lambda\ ,\quad (A - \lambda)\ g = 0 \ \Rightarrow\ g = 0 .$$

Sea $h \in H$ y $h_1 = (A - \lambda I)^k h \in K_\lambda = G_{2k}$. Luego existe $g \in K_\lambda$ tal que $h_1 = (A - \lambda I)^k g$. Poniendo $f = h - g$ resulta $(A - \lambda I)^k f = 0$, es decir, $f \in N_\lambda$. Lo que prueba que $h = f + g$, $f \in N_\lambda$, $g \in K_\lambda$. Si la descomposición no fuera única existiría $f \neq 0$, $f \in K_\lambda \cap N_\lambda$. Así que, por un lado $0 = (A - \lambda I)^s f$, $s \leqslant k$ con $g = (A - \lambda)^{s-1} f \neq 0$. Por otra parte, esto dice que $(A - \lambda)g = 0$, $g \neq 0$, contradicción, pues g necesariamente $\in K_\lambda$. 3) queda así demostrada.

5) Sea $F \in H$, $F \perp K_\lambda$. Entonces $(F, (A - \lambda I)^k h) = ((A^* - \overline{\lambda} I)^k F, h) = 0 \ \forall\, h \in H$,

lo cual implica $(A^* - \overline{\lambda}I)^k F = 0$ y $F \in N^*_{\overline{\lambda}}$. O sea, $H \ominus K_\lambda \subseteq N^*_{\overline{\lambda}}$. Sea ahora $F \in N^*_{\overline{\lambda}}$. Entonces existe m tal que $(A^* - \overline{\lambda}I)^m F = 0$, de donde sigue $\forall\ h \in H$, $(F,(A - \lambda I)^m h) = 0$, o sea, $F \perp G_m \supseteq K_\lambda$.

6) Se deja al lector. Q.E.D.

El proceso descripto y los resultados obtenidos forman parte del llamado *método de F. Riesz.*

Concluímos esta sección con una generalización del *tercer teorema de Fredholm.*

TEOREMA 12. Si A es completamente continuo en H y $\lambda \neq 0$ es un autovalor entonces la dimensión del autoespacio correspondiente a λ es igual a la del autoespacio de A^* correspondiente al autovalor $\overline{\lambda}$.

DEMOSTRACION. Sea $e = \sum_1^n a_i f_i$, $\{f_i\}$ una base de N_λ.
Consideremos $h = (A - \lambda I)e \in N_\lambda$. $h = k + \varphi$, $k \in K^*_{\overline{\lambda}}$, $\varphi \in N^*_{\overline{\lambda}}$.
Como $N_\lambda \perp K^*_{\overline{\lambda}}$, $(h,k) = 0$. Luego $h = 0$ si y sólo si $(h, \varphi + k) = 0$ si y sólo si $(h,\varphi) = 0$. Luego es necesario y suficiente ver que $h \perp N^*_{\overline{\lambda}}$ para asegurar que e es un autovector correspondiente al autovalor λ.
Sea $\{f^*_i\}$, $i = 1,\dots,n$, una base de $N^*_{\overline{\lambda}}$. El sistema $(h,f^*_i) = 0$, $i = 1,\dots,n$, determinará los coeficientes $a_i = a_i(e)$ de los autovectores e:

$$(31)\quad a_1(Af_1-\lambda f_1,f^*_i)+a_2(Af_2-\lambda f_2,f^*_i)+\dots+a_n(Af_n-\lambda f_n,f^*_i) = 0.$$

En la determinación de los autovectores $e^* = \sum_1^n b_i f^*_i$ de A^* correspondientes al autovalor $\overline{\lambda}$ se llega a un sistema semejante:
$b_1.(A^*f^*_1-\overline{\lambda}f^*_1,f_i) + \dots + b_n.(A^*f^*_n-\overline{\lambda}f^*_n,f_i) = 0$, el cual puede escribirse en la forma:

$$(32)\qquad b_1.\overline{(Af_i - \lambda f_i,f^*_1)} + \dots + b_n.\overline{(Af_i - \lambda f_i,f^*_n)} = 0$$

La matriz del sistema (31) es la traspuesta conjugada de la del sistema (32), lo cual implica que tienen el mismo rango y por lo tanto la multiplicidad de λ para A es la misma que la de $\overline{\lambda}$ para A^*.
En efecto, multiplicidad = n - rango. Q.E.D.

9. EL TEOREMA ESPECTRAL PARA UN OPERADOR COMPLETAMENTE CONTINUO AUTOADJUNTO.

El objetivo de esta sección es demostrar para $A = A^*$ completamente continuo (no trivial) la conclusión del teorema 4. A puede estar definido solamente en un preHilbert R sin alterar el resultado final.

Sabemos que existe $e_1 \neq 0$ tal que $A\,e_1 = \lambda_1\,e_1$, $\lambda_1 = \pm \sup\limits_{\|g\|=1} |(Ag,g)|$. Si $[e_1]$ designa el subespacio generado por el autovector e_1, $R_2 = R_1 \ominus [e_1]$, $R_1 = R$, es invariante por A, y por lo tanto contendrá un $e_2 \neq 0$ tal que $A\,e_2 = \lambda_2\,e_2$, $0 \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$.

Siguiendo así, si el proceso no se detiene luego de un número finito de pasos, se construye una sucesión ortonormal $\{e_j\}$ tal que $A\,e_j = \lambda_j . e_j$, $\lambda_j \longrightarrow 0$ (Teor. 5). Sea ahora $f = A\,h$ y escribamos h como $h = g + \sum_1^m a_k\,e_k$, $a_k = (h,e_k)$. Entonces, $g \in R \ominus [e_1,\dots,e_m]$ y $\|A\,h - \sum_1^m a_k . A\,e_k\|^2 =$
$= \|A\,g\|^2 \leqslant |\lambda_{m+1}|^2 . \|g\|^2$.

También, $a_k . A\,e_k = a_k . \lambda_k\,e_k = (h,\lambda_k\,e_k)\,e_k = (h, A\,e_k)\,e_k = (A\,h, e_k)\,e_k$.
Luego, de $\|h\| \geqslant \|g\|$, sigue: $\|f - \sum_1^m (f,e_k)\,e_k\|^2 \leqslant |\lambda_{m+1}|^2 . \|h\|^2$.

Si $\{e_k\}$ es finita, $|\lambda_r| = 0$ desde un momento en adelante y si no lo es, sabemos que $|\lambda_j| \longrightarrow 0$ cuando $j \longrightarrow \infty$. Así,

$$\|f - \sum_1^m (f,e_k)e_k\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

10. Un resultado semejante vale para operadores normales. Un operador S se dice *normal* si $S^*S = SS^*$. Vale:

TEOREMA 13. Sea S definido en H, completamente continuo y normal, $\neq 0$, $S^*S = A$. Existe un sistema ortonormal $\{e_k\}$ de vectores y una colección de números $\neq 0$, $\{\lambda_k\}$, tales que: $S\,e_k = \lambda_k\,e_k$, $S^*e_k = \overline{\lambda}_k\,e_k$, $k = 1,2,3,\dots$; $\{|\lambda_k|^2\}$ es la familia de autovalores (no nulos) del operador completamente continuo y autoadjunto A. Cada f de la forma $S\,h$ ó S^*h puede representarse en la forma: $f = \sum_k (f,e_k)\,e_k$.

No demostraremos este teorema.

En el caso de un operador completamente continuo general podemos todavía afirmar lo siguiente:

TEOREMA 14. i) Sea T un operador completamente continuo definido en H, no trivial, y H_0 sea su espacio nulo: $T^{-1}(0) = H_0$. Existen dos sistemas ortonormales $\{e_k\}$, $\{g_k\}$ y una sucesión decreciente de números positivos $\{\tilde{\mu}_k\}$, $\tilde{\mu}_k \longrightarrow 0$ si es infinita, con la siguiente propiedad: $\forall\ h \in H$,

$h = h_0 + (h,e_1)e_1 + (h,e_2)e_2 + \dots$, $\quad h_0 \in H_0$, $\quad H_0 = H \ominus [e_1,\dots]$,

$T\,h = \tilde{\mu}_1(h,e_1)\,g_1 + \tilde{\mu}_2(h,e_2)\,g_2 + \dots$.

ii) T es completamente continuo sí y sólo sí $\forall\ \varepsilon > 0$ existe T_ε operador lineal de rango finito (*), tal que

$$\|T - T_\varepsilon\| < \varepsilon\ .$$

DEMOSTRACION. i) Si $T = A = A^*$ sabemos que $A\,h = \sum (A\,h,e_k)\,e_k$ donde $\{e_k\}$ es el sistema de autovectores de A. Luego

$A\,h = \sum(h,Ae_k)\,e_k = \sum \lambda_k(h,e_k)\,e_k = \sum |\lambda_k|(h,e_k)(\mathrm{sgn}\,\lambda_k)\cdot e_k = \sum \tilde{\mu}_k(h,e_k)g_k$;

$h = \sum (h,e_k)\,e_k + h_0$ donde $h_0 \in H \ominus [\overline{e_1,e_2,\dots}]$.

Se ve fácilmente que este espacio es $H_0 = A^{-1}(0)$.

Supongamos ahora que T es un operador compacto cualquiera.

Sea $A = T^*T$. A es completamente continuo y autoadjunto y sus autovalores $\neq 0$ verifican:

$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots > 0$, $A\,e_k = \mu_k\,e_k$. De $(Tf,Tg) = (A\,f,\,g)$ sigue que $T^{-1}(0) = A^{-1}(0)$. Sea $h = h_0 + \sum_1^\infty (h,e_k)e_k$. Entonces $T\,h = \sum(h,e_k)\,T\,e_k$. Escribamos $T\,e_k = \sqrt{\mu_k}\,g_k$. Resulta: $T\,h = \sum \sqrt{\mu_k}\,(h,e_k)\,g_k$; $\quad (g_k,g_j) = (\mu_k\cdot\mu_j)^{-1/2}(T^*\,T\,e_k,\,e_j) = \delta_{jk}$; $\tilde{\mu}_k = \sqrt{\mu_k}$.

ii) Si T es completamente continuo y $T_\varepsilon f = \tilde{\mu}_1(f,e_1)g_1+\dots+\tilde{\mu}_n(f,e_n)g_n$ entonces $\|T\,f - T_\varepsilon f\|^2 \leqslant \mu_{n+1}\{|(f,e_{n+1})|^2 + \dots\} \leqslant \mu_{n+1}\ \|f\|^2 \leqslant \varepsilon^2\ \|f\|^2$ si n es suficientemente grande. La recíproca resulta de que todo operador de rango finito es completamente continuo. Q.E.D.

(*) Por definición, K de rango finito si puede ser representado en la forma $K\,f = \sum_{i=1}^{n} (f,\psi_i)\varphi_i$; n fijo; $\varphi_i,\psi_i \in H$.

11. METODOS PARA HALLAR LA SOLUCION.

i) Consideremos la ecuación:

$$f(x) - \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy = g(x) \ ,$$

y para comenzar supongamos $K(x,y)$ continua en $[a,b] \times [a,b]$ salvo eventualmente en $y = x$ y acotada en módulo por M.

Entonces $K: L^1 \longrightarrow C$ y la ecuación puede escribirse como:

$$f = g + K\, f. \tag{33}$$

Si ensayamos resolverla por el método de aproximaciones sucesivas comenzando por la aproximación de f, $f_0 = 0$, obtenemos:

$f_1 = g \ , \ f_2 = g + Kf_1 \ , \ f_3 = g + Kf_2 \ , \ \ldots \ , \ f_{n+1} = g + Kf_n \ , \ \ldots$

Esto nos conduce a la *serie de Neumann*,

$g + K\, g + K^2 g + K^3 g + \ldots = \lim_{n\to\infty} f_n .$

Si la serie converge *uniformemente* su suma será una solución f de (33). Una condición *suficiente* para tal convergencia es $M < 1/(b-a)$ y

$A = \int_a^b |g|\, dx < \infty .$

En este caso la serie $K\, g + K^2 g + \ldots$ admite la siguiente mayorante:

$$A\, M(1 + M(b-a) + (M(b-a))^2 + \ldots) .$$

ii) Los núcleos de Volterra se caracterizan por la condición $K(x,y) = 0$ si $a \leqslant x < y \leqslant b$. Si $K(x,y)$ es medible y acotada en módulo por M y otra vez $\infty > A = \int_a^b |g(x)|\, dx$, se ve enseguida que $K^n g(x)$ es medible y:

$$|K^n\, g(x)| \leqslant A\, M^n\, \frac{(x - a)^{n-1}}{(n - 1)!} \quad , \quad n = 1,2,\ldots$$

Así la serie de Neumann a partir de su segundo término admite la mayorante: $A\, M \sum_0^\infty \frac{(M(b-a))^n}{n!}$, y por lo tanto para un núcleo de Volterra la serie de Neumann es siempre *uniformemente* convergente y suministra una solución de la ecuación.

iii) Supongamos ahora que K es un núcleo Hilbert-Schmidt tal que $N(K) = \|K(.,.)\|_2 < 1$. Entonces $K: L^2(R) \longrightarrow L^2(R)$.

Supongamos $g \in L^2(R)$. Sabemos que $\|K\, f\|_2 \leqslant N(K).\|f\|_2$ y por lo tanto la serie de Neumann *converge en media* pues

$\|K^m g + \ldots + K^{m+p} g\| \leq N(K)^m.[1 + \ldots + N(K)^p].\|g\|$

tiende a cero cuando m y p $\longrightarrow \infty$. En consecuencia:

$$\|f\| \leq (\sum_0^{\infty} N(K)^j).\|g\|_2 = \frac{\|g\|}{1 - N(K)} .$$

Aplicando K a la serie de Neumann

$$f = g + K g + K^2 g + \ldots$$

se obtiene: $K f = f - g$, y nuevamente aquella define una solución del problema. Además

$$|K^n g(x)| = |\int K(x,y).K^{n-1}g(y)\, dy| \leq (\int |K(x,y)|^2\, dy)^{\frac{1}{2}} .(\int |K^{n-1}g|^2\, dy)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\int |K(x,y)|^2\, dy} \, . \, N(K)^{n-1}\|g\|_2$$

implica la convergencia de la serie de Neumann *en casi todo punto* a la solución f(x).

La solución es *única*. En efecto, 1 no es autovalor para K. Directamente, si hubiera dos soluciones distintas f_1 y f_2, su diferencia Δf satisfaría

$K(\Delta f) = \Delta f$, $\|\Delta f\| > 0$ lo cual implicaría $\|\Delta f\| = \|K(\Delta f)\| \leq N(K).\|\Delta f\| < \|\Delta f\|$.

iv) Supongamos ahora que estamos bajo las hipótesis del teorema 4, $0 \neq A = A^*$ c.c., y veamos como se puede resolver la ecuación:

$$f - \lambda A f = g ,$$

suponiendo conocidos los autovalores y los correspondientes autovectores.

Si para cada g dado existiera una solución f, haciendo uso de la tesis del teorema 4, tendríamos:

$$f = g + \lambda A f = g + \lambda \sum_i \lambda_i (f,e_i)e_i .$$

De aquí sigue que

$$(1 - \lambda\cdot\lambda_k)(f,e_k) = (g,e_k) \quad , \quad k = 1,2,\ldots$$

Si $\lambda \neq 1/\lambda_k$ entonces $\forall$ k, $(f,e_k) = \dfrac{(g,e_k)}{1 - \lambda\lambda_k}$. Y si $\lambda_k = 1/\lambda$, para $k = j+1, j+2, \ldots , j+r$, entonces necesariamente tendremos:

(34) $$(g,e_{j+h}) = 0 \quad , \quad h = 1,2,\ldots,r \quad , \quad y$$

(f,e_k) es *indeterminada* para esos valores de k. Entonces,

(35) $$f = g + \sum c_k e_k ,$$

donde el factor c_k de e_k es arbitrario si $k = j+1,\ldots,j+r$, e igual a

$[\lambda\lambda_k/(1 - \lambda\lambda_k)]\ (g,e_k)$ en todo otro caso.

Supongamos, recíprocamente, que g satisfaga (34) si $\lambda\lambda_k = 1$ y que en (35), c_{j+h} sea indeterminada cuando e_{j+h} es un autovector correspondiente al autovalor λ^{-1}, y $c_k = \frac{\lambda\lambda_k}{1 - \lambda\lambda_k}(g,e_k)$ en todo otro caso. Entonces,

$$A\, f = A\, g + \sum_k{}' \frac{\lambda\lambda_k^2}{1 - \lambda\lambda_k}(g,e_k)\, e_k + \sum_{h=1}^{r} c_{j+h}\, \lambda_{j+h}\, e_{j+h} =$$

$$= \sum{}' \lambda_k\, (g,e_k)e_k + \sum{}' \frac{\lambda\lambda_k^2}{1 - \lambda\lambda_k}\, (g,e_k)e_k + \sum_{h=1}^{r} c_{j+h}\, \lambda_{j+h}\, e_{j+h} =$$

$$= \sum{}' \frac{\lambda_k(g,e_k)}{1 - \lambda\lambda_k}\, e_k + \sum_{h=1}^{r} c_{j+h}\, \lambda^{-1}\, e_{j+h} \Rightarrow \lambda A f = \sum c_k\, e_k = f - g.$$

Es decir, (35) define — con las precauciones del caso — una solución de la ecuación planteada.

12. Enunciaremos a continuación algunos resultados relacionados con el núcleo K(x,y) de un operador integral Hilbert-Schmidt.

Supongamos $0 \neq K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, es decir, K hermítico y no trivial.

Entonces sabemos que

(36) $K(f)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f,e_i) e_i(x)$, $\forall\ f \in L^2(R)$, donde λ_j es real y

$|\lambda_j| \geqslant |\lambda_{j+1}|$.

Un resultado debido a E.Schmidt dice que entre todos los núcleos hermíticos A_N que dan lugar a operadores de rango de dimensión finita N, $S_N(x,y) = \sum_{1}^{N} \lambda_i\, e_i(x)\, \overline{e_i(y)}$, es el que da *mejor aproximación* a K(x,y) en la norma 2:

(37) $$\|K - A_N\|_2 \geqslant \|K - S_N\|_2 .$$

Esto ya prueba que K(x,y) es *desarrollable* en $L^2(R \times R)$ en el sistema ortonormal $\{e_i(x).\overline{e_i}(y)\}$. Precisamente:

(38) $$K(x,y) = \sum \lambda_i\, e_i(x)\, \overline{e_i}(y) \quad (L^2).$$

Si en lugar de R consideramos el intervalo [0,1] y suponemos que K(x,y) está definida en [0,1] x [0,1] y es *continua* allí, entonces vale el *teorema de Mercer* $(K\colon L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1))$:

(39) $$K(x,y) \doteq \sum \lambda_i\, e_i(x)\, \overline{e_i}(y) \quad , \quad 0 \leqslant x,y \leqslant 1 ,$$

supuesto que $(Kf,f) \geqslant 0 \quad \forall\ f \in L^2$.

La convergencia *uniforme* también puede presentarse en (36) bajo ciertas condiciones. Precisamente, si vale

(40) $$\int |K(x,y)|^2\, dy \leqslant C^2 < \infty \ , \ \forall\ x$$

el desarrollo (36) converge para cada x absolutamente, y uniformemente en x, cualquiera sea la función $f \in L^2$ (E.Schmidt).

13. Sea $a \leqslant x,\ t \leqslant b$ y $K(x,t)$ un núcleo *degenerado:*

$K(x,t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\ b_j(t) \ , \quad a_j, b_j \in L^2([a,b])$. La ecuación

$\varphi - \lambda\ K(\varphi) = f$, donde $K(\varphi) = \int_a^b K(x,t)\ \varphi(t)\ dt = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_a^b b_j\ \varphi\ dt =$

$= \sum_{j=1}^{n} C_j\ a_j(x)$, puede escribirse como:

(41) $$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j\ a_j(x).$$

Aquí se presentan varias incógnitas: $\varphi(x)$ y las constantes C_j que dependen de φ. Reemplazando (41) en la ecuación se obtiene:

(42) $$\sum_{m=1}^{n} [C_m - \int_a^b b_m(t).\{f(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j\ a_j(t)\}\ dt] \cdot a_m(x) = 0 \cdot$$

Supongamos ahora que $\{a_m(x)\}$es *un sistema linealmente independiente*. Entonces los corchetes en (42) se anularán y si escribimos

$a_{mk} = \int_a^b a_k\ b_m\ dt \quad , \quad f_j = \int_a^b b_j\ f\ dt$ tendremos:

(43) $$C_m - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\ C_j = f_m \ , \quad m = 1,2,\ldots,n.$$

Sea $A = (a_{mj})$. La matriz del sistema (43) tiene la forma $I - \lambda A$ cuyo determinante denotaremos con $\Delta(\lambda)$. Si $\Delta(\lambda) \neq 0$ existe solución única $\{C_j\}$. Reemplazando en (41) obtenemos una función φ. Se ve fácilmente, haciendo uso de (43), que la función φ así hallada satisface la ecuación integral de Fredholm de segunda especie: $(I - \lambda K)(\varphi) = f$. La importancia de los núcleos degenerados se pone de manifiesto en el estudio de los *métodos aproximados* de resolución de ecuaciones integrales.

Además, si $\{a_j(x)\}$ es una base del espacio H y T es c.c., ya observamos que los operadores con núcleos:

$K_n(x,t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \left(\sum_{i=1}^{n} (T a_i, a_j) \overline{a_i}(t) \right)$, aproximan a T en norma, (cf.T.14).

14. Sea K un operador lineal acotado del espacio de Banach X en el espacio de Banach Y, y sea Σ la esfera unitaria de X. K se dice *compacto* (o completamente continuo) si $\overline{K(\Sigma)}$ es un conjunto compacto en Y. Vale el siguiente:

TEOREMA. i) Combinaciones lineales de compactos es compacto y el producto de un operador lineal acotado con otro compacto es compacto.

ii) K es compacto sí y sólo sí K^* lo es (Schauder).

iii) El conjunto de los operadores compactos es cerrado en la topología uniforme de operadores.

Supongamos ahora X = Y.

iv) El rango de $\lambda I + K$ es cerrado si este operador es biunívoco.

v) El espectro de K es a lo sumo numerable y no tiene puntos de acumulación en el plano complejo, excepto posiblemente por $\lambda = 0$.

vi) La proposición precedente y la viii) valen aún si y sólo si se supone que K^n es compacto para algún n entero positivo.

vii) K tiene siempre un subespacio no trivial propio invariante aún cuando $\sigma(K) \setminus \{0\} = \emptyset$ (Aronszajn y Smith).

viii) $\sigma(K) \setminus \{0\}$ está constituído por autovalores si no es vacío.

No demostraremos estos resultados. Varios de ellos fueron ya probados para el caso X = Y = H, H un espacio de Hilbert.

CAPITULO IV.

OPERADORES DE FREDHOLM.

1. Sea X un espacio de *Banach* y A un operador lineal *acotado* de X en X. Sea $N(A) = \{x: Ax = 0\}$, $R(A) = \{y: Ax = y\}$, $\alpha(A) = \dim N(A)$, $\beta(A) = \alpha(A^*) = \dim N(A^*)$.

Si K es un operador *completamente continuo* (c.c.) de X en sí mismo sabemos que $A = I - K$ verifica:

(1) $\alpha(A) < \infty$,

(2) $R(A) = \overline{R(A)}$,

(3) $\beta(A) < \infty$.

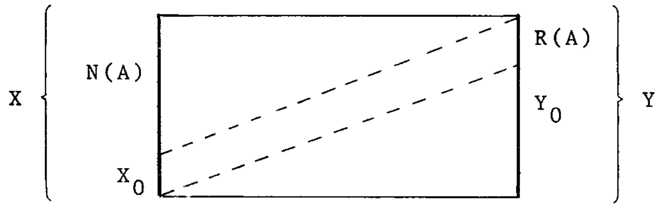


Fig.1

Además $\alpha(A) = \beta(A)$. (Sabemos también que vale la *alternativa de Fredholm:* $R(A) = X$ y $N(A) = \{0\}$, o bien $R(A) \neq X$ y $N(A) \neq \{0\}$).

Todos los resultados sobre operadores de un espacio de Banach X en otro Y completamente continuos (compactos) utilizados en este capítulo fueron ya demostrados para los mismos actuando en espacios de Hilbert. Estas demostraciones se adaptan fácilmente a la nueva situación.

Con $\Phi(X,Y)$ denotaremos la clase de los operadores de X en Y llamados *de Fredholm*, es decir, operadores lineales acotados para los cuales valen las propiedades (1), (2), (3). El *índice de Fredholm* de $A \in \Phi$ es

$$i(A) = \alpha(A) - \beta(A).$$

Si V y W son subespacios de X tales que $V \cap W = \emptyset$ entonces designaremos con $V \oplus W$ a su *suma directa:* $\{z: z = x+y,\ x \in V,\ y \in W\}$. Dado z en $V \oplus W$ éste puede escribirse en forma única como suma de un elemento de V y otro de W. Sabemos que dada una subvariedad lineal N de dimensión finita de X necesariamente $N = \overline{N}$ y demostraremos que *existe* un subespacio M tal que $X = M \oplus N$. Subespacio significa aquí variedad lineal (que pasa por el origen) *cerrada*. Que en este caso $M \oplus N$ sea cerrado no es accidental. Siempre la suma directa de un subespacio y otro de dimensión finita es un subespacio.

Otro resultado útil al cual recurriremos enseguida es el que afirma que si V es un *subespacio* de X tal que $V^\circ = \{x^* \in X^*: x^*(V) = 0\}$ es de *dimensión finita* n entonces existe $M \subset X$ subespacio de *dimensión* n tal que $X = V \oplus M$.

Antes de demostrar la última proposición recordemos algunas propiedades de los *anuladores*. Dado $S \subset X$, S° denotará al conjunto de los anuladores de S, $\{x^* \in X^*: x^*(s) = 0\ \forall s \in S\}$. Si $T \subset X^*$, ${}^\circ T$ denotará al conjunto de anuladores de T en X, $\{x \in X: t(x) = 0\ \forall t \in T\}$. Vale que S° y ${}^\circ T$ son subespacios y que si M es un subespacio: ${}^{\circ}(M^{\circ}) = M$. *Si* A *es un operador en* $B(X,Y)$, $R(A)^{\circ} = N(A^*)$ *y* $R(A)$ *es cerrado en* Y *si y sólo si* $R(A) = {}^{\circ}N(A^*)$.

Dado un conjunto linealmente independiente en $X^*, x_1^*, \ldots, x_n^*$, el subespacio generado por ellos, M^*, es de dimensión n y existen $x_1, \ldots, x_n$ tales que $x_i \in X$, $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$.

En efecto, supongamos esto cierto para toda familia de n-1 elementos, $x_1^*, \ldots x_{n-1}^*$, y sea x_n^* linealmente independiente de ellos. Para todo $x \in X$, $x - \sum_1^{n-1} x_j^*(x)x_j$ pertenece a ${}^{\circ}[x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*]$. Si x_n^* se anulara sobre todos estos elementos tendríamos en particular:

$$x_n^*(x) = \sum_1^{n-1} x_n^*(x_j)x_j^*(x) \quad \forall \quad x \in X.$$

O sea, $x_n^* = \sum_1^{n-1} x_n^*(x_j)x_j^*$, contradicción. Entonces existe x_n en ${}^{\circ}[x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*]$ tal que $x_n^*(x_n) = 1$. O sea, $x_1^*, \ldots, x_n^*$ restringidas a $[x_1, \ldots, x_n]$ forman un conjunto de n funcionales lineales linealmente independientes. Por lo tanto $[x_1, \ldots, x_n]$ es necesariamente de dimensión n, y sigue a) de la siguiente proposición.

PROPOSICION 1. a) Dados $x_1^*, \ldots, x_n^*$ linealmente independientes en X^* existen $x_1, \ldots, x_n$, elementos de X, tales que $x_j^*(x_i) = \delta_{ij}$.

b) Si V es un subespacio de X y V° es de dimensión finita n entonces existe $M \subset X$ de dimensión n tal que $X = V \oplus M$.

DEMOSTRACION DE b). Sea $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ una base de V° y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto linealmente independiente cuya existencia se prueba en a).

Sea M el subespacio generado por estos elementos. $w = \sum_1^n x_k^*(x)x_k \in M$ y $x_j^*(x-w) = 0 \; \forall \; j$. Entonces $x - w \in {}^{\circ}(V^{\circ}) = V$ y todo elemento de X pertenece a $V + M$. Sea $y \in V \cap M$. Por estar en M: $y = \sum_1^n a_k x_k$ y por pertenecer a V: $x_j^*(y) = 0 \; \forall \; j$. O sea, $a_j = 0 \; \forall \; j$ y $V \cap M = \{0\}$. Q.E.D.

EJERCICIO 1. Dado un subespacio N_0 de X de dimensión n ($< \infty$) existe un subespacio M tal que $M \oplus N_0 = X$.

(Sugerencia: Sea N_2 la imagen canónica de N_0 en X^{**} y N_1 el subespacio de X^* cuya existencia es asegurada en a) prop.1. Sea $W = N_1^{\circ}$; entonces $W \oplus N_2 = X^{**}$. Definamos $M = W \cap X$).

NOTA. Obsérvese que si $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ y son linealmente independientes el teorema de Hahn-Banach asegura la existencia de una base dual $x_1^{**},\dots,x_n^{**}$ en **. a) afirma que una tal base puede encontrarse en X ($\subset X^{**}$).

TEOREMA 1. Sea $A \in \Phi(X,Y)$. Existe un subespacio $X_0 \subset X$ tal que $X = X_0 \oplus N(A)$ y un subespacio $Y_0 \subset Y$ tal que $Y = R(A) \oplus Y_0$, $\dim Y_0 = \beta(A)$. Existe además un operador $A_0 \in B(Y,X)$ tal que:

(a) $N(A_0) = Y_0$,

(b) $R(A_0) = X_0$,

(c) $A_0A = I$ sobre X_0,

(d) $AA_0 = I$ sobre $R(A)$,

(e) $A_0A = I-F_1$ sobre X, $F_1 \in B(X)$, $R(F_1) = N(A)$,

(f) $AA_0 = I-F_2$ sobre Y, $F_2 \in B(Y)$, $R(F_2) = Y_0$.

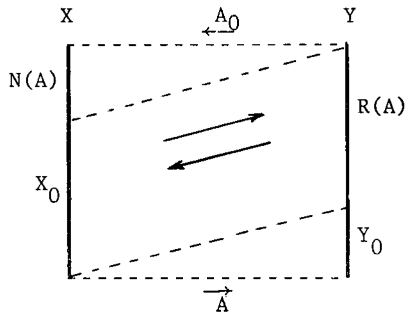


Fig.1

DEMOSTRACION. Dado N(A) con $\dim N(A) = \alpha(A) < \infty$ existe X_0 subespacio que safisface $X_0 \oplus N(A) = X$. A es biunívoco sobre X_0. Si $\hat{A}$ es la restricción de A a X_0 ésta es acotada como operador de X_0 sobre R(A). Luego existe $\hat{A}^{-1}$ acotado, de R(A) sobre X_0. Sea Y_0 un complemento de R(A) en Y y sea P la proyección de Y sobre Y_0 según R(A): Si $r \in R(A)$ y $z \in Y_0$ entonces $P(r+z) = z$. Definamos Q como la proyección según Y_0 de Y sobre R(A): $Q = I-P$. P es un operador acotado y por lo tanto Q también lo es. Definimos $A_0 = \hat{A}^{-1}.Q$. A_0 es entonces un operador de B(Y,X) cuya restricción a R(A) coincide con $\hat{A}^{-1}$. Hemos probado así (a), (b), (c) y (d). Veamos (f). Sea $F_2 = I - AA_0$. Entonces $F_2 = 0$ sobre R(A), $F_2 = I$ sobre Y_0.Luego $F_2 = P$. Análogamente $F_1 = I - A_0A$ es igual a I sobre N(A) y 0 sobre X_0. Entonces F_1 es una proyección en B(X) y su rango es de dimensión finita. Q.E.D.

El teorema 1 muestra que dado A *existen operadores acotados* A_1 y A_2 y *operadores completamente continuos* K_1 y K_2 de manera que:

(1) $A_1A = I - K_1$ en X,

(2) $AA_2 = I - K_2$ en Y.

Recíprocamente, si un operador $A \in B(X,Y)$ satisface (1) y (2) entonces $A \in \Phi(X,Y)$. En efecto, $N(A) \subset N(A_1A)$ implica $\alpha(A) \leq \alpha(I-K_1) < \infty$. $R(A) \supset R(AA_2) = R(I-K_2)$. Como $R(I-K_2)$ es un subespacio que admite un complemento de dimensión finita sigue que R(A) es cerrado.

Además $N(A^*) \subset N(I-K_2^*)$ implica $\beta(A) \leqslant \alpha(I-K_2^*) < \infty$, pues K_2^* es compacto. Aplicado este criterio al operador A_0 que aparece en (e) y (f) del teorema 1 resulta que $A_0 \in \Phi(Y,X)$.

TEOREMA 2. Sean $\Phi(X,Y) \ni A$, $B \in \Phi(Y,Z)$. Entonces $BA \in \Phi(X,Z)$ y $i(BA) = i(A) + i(B)$.

DEMOSTRACION. Observando el gráfico siguiente se obtienen las siguientes relaciones: $Y_1 + Y_2 = R(A)$, $Y_1 + Y_3 = N(B)$, $Y_2 + Y_4 = Y_0$;

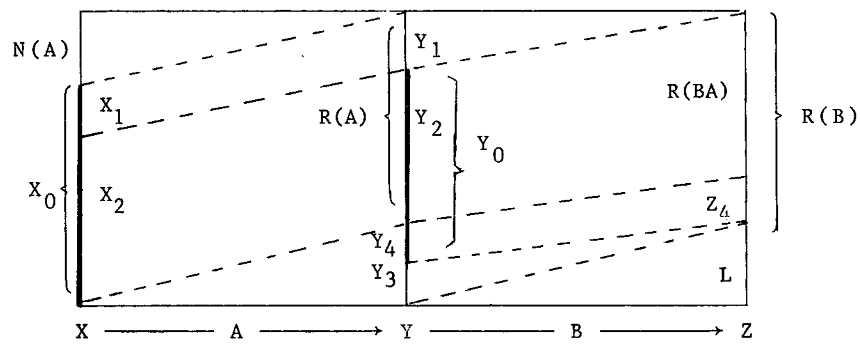


Fig.2

$R(A)$ e Y_0 son cerrados y por lo tanto Y_2 es un subespacio; $\dim X_1 = \dim Y_1 = d_1 < \infty$; $\dim Y_3 = d_3 < \infty$. Por otra parte sabemos que existen operadores acotados A_0, B_0, y completamente continuos K_i, $i = 1,2,3,4$, tales que $A_0A = I-K_1$, $AA_0 = I-K_2$, $B_0B = I-K_3$, $BB_0 = I-K_4$. Luego, $(A_0B_0)BA = A_0(I-K_3)A = I-(K_1+A_0K_3A) = I-K_5$, $BA(A_0B_0) = B(I-K_2)B_0 = I-(K_4+BK_2B_0) = I-K_6$, donde K_j, $j = 5,6$, son completamente continuos, y $A_0B_0 \in B(Z,X)$. Entonces $BA \in \Phi(X,Z)$ y $Z_4 \oplus L$ es de dimensión finita. Luego $\dim Z_4 = \dim Y_4 = d_4 < \infty$. Hemos hecho uso de la siguiente

PROPOSICION. Si $R \subset Y$ es un subespacio de codimensión finita m y si S es un subespacio de Y tal que $R \cap S = \{0\}$ entonces $\sigma = \dim S \leqslant m$. Si $\sigma < m$ existe T de dimensión $\tau = n-\sigma$ tal que $R \oplus S \oplus T = Y$.

Finalmente observemos que:

$X_1 \oplus X_2 = X_0$; $X_0 \oplus N(A) = X$; $Y_2 \oplus Y_4 = Y_0$; $Y_1 \oplus Y_3 = N(B)$; $(Z_4 \oplus L) \oplus R(BA) = R(B) \oplus L = Z$. Además: $\beta(B) = \dim L$ implica $\alpha(BA) - \beta(BA) = (\alpha(A)+d_1) - (\beta(B)+d_4)$. Entonces de $\alpha(B) = d_1+d_3$, $\beta(A) = d_3+d_4$ sigue que $i(BA) = (\alpha(A) - d_3 + \alpha(B)) - (\beta(B) + \beta(A) - d_3) = i(A) + i(B)$. Q.E.D.

Hemos visto que A_0, el operador que se indica en (e) y (f) del teorema 1, pertenece a $\Phi(Y,X)$. Haciendo uso del teorema 2 y del hecho que $\alpha(I-F_1) = \beta(I-F_1)$ resulta que $i(A_0) = -i(A)$.

EJERCICIO 2. Sea K completamente continuo de X en Y, $A \in \Phi(X,Y)$. Entonces $A+K$ es un operador de Fredholm tal que $i(A+K) = i(A)$.

(Sug. Usar que la composición de un operador completamente continuo y otro acotado es completamente continuo, el teorema 2 y la observación que procede al ejercicio).

EJERCICIO 3. $N(A)^\circ = R(A^*)$.

(Sug. $N(A)^\circ \supset R(A^*)$, $N(A) = {}^\circ(N(A)^\circ) \subset {}^\circ R(A^*)$).

2. TEOREMA 3. Sea $A \in \Phi(X,Y)$. Entonces $A^* \in \Phi(Y^*,X^*)$, $-i(A^*) = i(A)$.

DEMOSTRACION. La primera parte sigue del teorema 1: $A^*A_0^* = I-F_1^*$, $A_0^*A^* = I-F_2^*$. Debemos calcular ahora $\alpha(A^*) - \beta(A^*)$. Sabemos que $\alpha(A^*) = \dim N(A^*) = \beta(A)$. Basta ver entonces que $\beta(A^*) = \alpha(A)$. Como $\beta(A^*) = \alpha(A^{**}) = \alpha(A)$ resulta la tesis. Veamos esto último. $A^{**} = (A^*)^*: X^{**} \longrightarrow Y^{**}$. $N(A^{**}) = R(A^*)^\circ$ implica que existe un subespacio W de dimensión $\alpha(A^{**})$ contenido en X^* tal que $X^* = R(A^*) \oplus W$, pues ya sabemos que $A^{**} \in \Phi(X^{**},Y^{**})$. Sea Z el subespacio de X^* generado por funcionales x_j^* tales que $x_j^*(x_k) = \delta_{jk}$, $j,k = 1,2,...,n$, donde $\{x_1,...,x_n\}$ es una base de $N(A)$. Si $z \in Z \cap R(A^*) = Z \cap N(A)^\circ$ entonces $z=0$. O sea, $Z \cap R(A^*) = \{0\}$. Sea ahora $x^* \in X^*$ y escribamos $u^* = x^* - \sum_1^n x^*(x_j)x_j^*$. Entonces $u^* \in N(A)^\circ = R(A^*)$. Como $x^* - u^* \in Z$ tenemos $X^* = R(A^*) \oplus Z$. Es decir: $\alpha(A) = \dim Z = \dim W = \alpha(A^{**}) = \beta(A^*)$. Q.E.D.

Obsérvese que en todo caso $\alpha(A^{**}) \geqslant \alpha(A)$ pues A^{**} es una extensión de A de X a X^{**}. Pero si $A \in \Phi(X,Y)$ entonces $\alpha(A) = \alpha(A^{**})$.

Hemos visto en el Ej.2 que un operador de Fredholm puede ser perturbado por un operador c.c. sin que deje de ser de Fredholm. Ni siquiera cambia su índice. Un resultado semejante sigue a continuación.

TEOREMA 4. Sea $A \in \Phi(X,Y)$. Existe $\eta > 0$ tal que $\forall\ T \in B(X,Y)$ con $\|T\| < \eta$ $A+T \in \Phi(X,Y)$, $i(A+T) = i(A)$ y $\alpha(A+T) \leqslant \alpha(A)$.

DEMOSTRACION. Sea $\eta = \|A_0\|^{-1}$ y $\|T\| < \eta$. Entonces: $\{(I+A_0T)^{-1}A_0\}.(A+T) = I - (I+A_0T)^{-1}F_1$ en X, $(A+T).\{A_0(I+TA_0)^{-1}\} = I - F_2(I+TA_0)^{-1}$ en Y. O sea,

$A+T \in \Phi(X,Y)$, lo mismo que A_0. Todo operador invertible pertenece a Φ y es de índice 0, que son entonces propiedades que goza $(I+A_0T)^{-1}$.
Luego: $i((I+A_0T)^{-1}) + i(A_0) + i(A+T) = 0$ implica $i(A_0) = -i(A) = -i(A+T)$.
Por otra parte sobre X_0: $A_0(A+T) = I+A_0T$ es un operador injectivo sobre este subespacio. En consecuencia $N(A+T) \cap X_0 = \{0\}$ y por lo tanto $\dim N(A+T) \leqslant \dim N(A)$. Q.E.D.

TEOREMA 5. Sea $A \in B(X,Y)$, $B \in B(Y,Z)$; entonces, si $BA \in \Phi(X,Z)$:

(i) $A \in \Phi(X,Y) \equiv B \in \Phi(Y,Z)$,

(ii) $\alpha(B) < \infty \Rightarrow B \in \Phi(Y,Z)$,

(iii) $\beta(A) < \infty \Rightarrow B \in \Phi(Y,Z)$.

DEMOSTRACION. (i) Supongamos $A \in \Phi(X,Y)$. Entonces $B.AA_0 = B.(I-F_2)$ en Y. Como $BA \in \Phi(X,Z)$ y $A_0 \in \Phi(Y,X)$, $BAA_0 \in \Phi(Y,Z)$. Por otra parte $BF_2 \in$ c.c. de Y en Z resulta que $B \in \Phi(Y,Z)$. Supongamos ahora esta última relación. Entonces: $B_0BA = A-F_3\cdot A$ en X. Pero $BA \in \Phi(X,Z)$ y $B_0 \in \Phi(Z,Y)$ implican $B_0BA \in \Phi(X,Y)$ lo mismo que la perturbación de A por el operador c.c. F_3A de X en Y.

(ii) $R(B) \supset R(BA)$ y $BA \in \Phi \Rightarrow R(B)$ cerrado y $\beta(B) \leqslant \beta(BA)$.

(iii) Sabemos que $A^*B^* = (BA)^* \in \Phi(Z^*,X^*)$. Además $\alpha(A^*) = \beta(A) < \infty$. Aplicando (ii) e (i) resulta que $A^* \in \Phi(Y^*,Z^*)$ y $B^* \in \Phi(Z^*,Y^*)$. En particular: $\alpha(B^{**}) = \beta(B^*) < \infty$. Entonces de $\alpha(B) \leqslant \alpha(B^{**}) < \infty$, usando nuevamente (ii) obtenemos $B \in \Phi(Y,Z)$. Q.E.D.

3. Veamos a continuación algunos ejemplos.

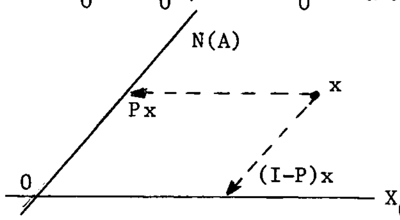
(a) Sea $x = (x_1,x_2,x_3,\ldots) \in l^2$ y $Lx = (x_2,x_3,\ldots)$. $N(L) = \{x\colon x_2=x_3=\ldots=0\}$. Si $X_0 = \{x\colon x_1 = 0\}$ entonces $N(L) \oplus X_0 = l^2$. Como $R(L) = l^2$, $i(L) = 1$.

(b) $Mx = (0,x_1,x_2,\ldots)$ si $x = (x_1,x_2,\ldots)$. Entonces $N(M) = \{0\}$ y $R(M) = X_0$. Luego $i(M) = -1$.

(c) $L'((x_1,x_2,x_3,\ldots)) = (0,x_3,x_2,x_5,x_4,\ldots)$. Entonces $N(L') = N(L)$ y $\alpha(L') = \alpha(L) = 1$. $R(L') = X_0$ implica $\beta(L') = 1$ y por lo tanto $i(L') = 0$.

4. Un operador $A \in B(X,Y)$ se dirá *semi Fredholm* si $R(A)$ es un subespacio y $\alpha(A)$ es finito. La clase de operadores semi Fredholm la denotaremos con $\Phi^+(X,Y)$. Entonces $X = X_0 \oplus N(A)$ y si P es la proyección según X_0 sobre $N(A)$ tenemos:

PROPOSICION 2. Sea $A \in B(X,Y)$ y $\alpha(A) < \infty$. Supongamos $X_0 = \overline{X_0}$ y $X = X_0 \oplus N(A)$. $R(A) = \overline{R(A)}$ sii



(4) $\quad \|(I-P)x\| \leqslant C.\|Ax\|, \quad \forall\, x \in X.$

En efecto, $R(A)$ cerrado implica $\|x\| \leqslant C.\|Ax\|$ sobre X_0. Pero x en X implica $(I-P)x \in X_0$, $A(I-P)x = Ax$, y sigue (4).

Recíprocamente, supongamos (4). Si $\{Ax_n\}$ es de Cauchy, también lo es $\{(I-P)x_n\}$ y esta última converge, digamos a x. Entonces $A(I-P)x_n \longrightarrow Ax = \lim Ax_n$, y $R(A)$ es cerrado. Q.E.D.

Hemos visto que $A \in \Phi(X,Y)$ implica $A^* \in \Phi(Y^*,X^*)$. Luego si $A \in \Phi(X,Y)$, tanto A como A^* son operadores semi Fredholm. Veamos que esto vincula a los operadores Fredholm con los semi Fredholm y *los caracteriza*. Sean $A \in \Phi^+$ y $A^* \in \Phi^+$. Luego $R(A) = \overline{R(A)}$ y $\alpha(A) < \infty$, $\alpha(A^*) < \infty$. Pero $\alpha(A^*) = \beta(A)$. Q.E.D.

Denotamos con $|.|$ la seminorma en X definida por:

$$|x| = \|Px\|.$$

Como $\dim N(A) = \alpha(A) < \infty$, $|.|$ es una seminorma *compacta*, relativa a la norma de X, i.e., acotados en $\|.\|$ son relativamente compactos respecto $|.|$.
De (4) sigue entonces:

(5) $$\|x\| \leqslant C.\|Ax\| + |x| \ , \quad \forall\, x \in X.$$

TEOREMA 6. Sea $A \in B(X,Y)$. $A \in \Phi^+(X,Y)$ sii hay una seminorma compacta $|.|$ relativa a la norma de X tal que (5) vale para todo $x \in X$.

DEMOSTRACION. Supongamos (5). Sobre $N(A)$ vale que $\|x\| \leqslant |x|$, lo cual implica que la esfera unitaria de $N(A)$ es relativamente compacta respecto $\|.\|$, y por lo tanto, que $N(A)$ es de dimensión finita. Sea P definida como la proyección según X_0 de $X = X_0 \oplus N(A)$, $X_0 = \overline{X_0}$. Si existiera una sucesión $z_n = (I-P)x_n$ con $\|z_n\| = 1$, $Ax_n \longrightarrow 0$, también existiría una subsucesión de z_n, $\{z_{n_j}\}$, de Cauchy respecto la seminorma con $Ax_{n_j} \longrightarrow 0$. En consecuencia:

$$\|z_{n_j} - z_{n_k}\| \leqslant C\, \|A(z_{n_j} - z_{n_k})\| + |z_{n_j} - z_{n_k}| \xrightarrow[j,k\to\infty]{} 0 \ ,$$

y existirá $z_0 \in X_0$ tal que $z_{n_j} \longrightarrow z_0$. Necesariamente $Az_{n_j} \longrightarrow Az_0 = 0$. Luego, $z_0 \in N(A) \cap X_0$, o sea $z_0 = 0$, en contradicción con $\|z_{n_j}\| = 1$. De lo visto sigue que $\|(I-P)x\| \leqslant C\|Ax\| \quad \forall\ x \in X$, y de la Proposición 2, que $R(A)$ es cerrado. Q.E.D.

Enunciaremos a continuación algunos resultados semejantes a los demostrados para operadores de Fredholm.

TEOREMA 7. (a) Si $A \in \Phi^+(X,Y)$ y K es compacto de X en Y entonces $A+K \in \Phi^+(X,Y)$,

(b) Dado $A \in \Phi^+(X,Y)$ existe un $\eta = \eta(A) > 0$ tal que si $T \in B(X,Y)$ y $\|T\| < \eta$ entonces $A+T \in \Phi^+(X,Y)$ y $\alpha(A+T) \leqslant \alpha(A)$,

(c) $A \in \Phi^+(X,Y)$, $B \in \Phi^+(Y,Z)$ implican $BA \in \Phi^+(X,Z)$,

(d) $A \in \Phi(X,Y)$ sii $A \in \Phi^+(X,Y)$ y $A^* \in \Phi^+(Y^*,X^*)$.

CAPITULO V.

ALGUNAS NOCIONES SOBRE ANALISIS NO LINEAL.

1. Denotaremos con $M(X,Y)$ a la familia de aplicaciones de un espacio de Banach X en otro Y, con $C(X,Y)$ a la subfamilia de las aplicaciones continuas. $L(X,Y)$ denotará al conjunto de aplicaciones lineales y continuas de X en Y, y $B(X,Y)$ a las aplicaciones acotadas, es decir que transforman acotados en acotados. Si $f \in M$ es lineal entonces es acotada si y sólo si es continua. Si X es de dimensión finita y f es continua, entonces f es acotada. Sin embargo, en general, los conceptos de continuidad y acotación no son equivalentes.

Una aplicación f se dice *uniformemente continua* si $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon$.

Uniforme continuidad implica continuidad. Y también acotación.

En efecto, dos puntos cualesquiera x,y de una esfera de radio uno pueden, dado ε, unirse por un segmento donde hay n puntos cuyas distancias consecutivas es menor que $\delta(\varepsilon)$ y con $n = [2/\delta] + 1$. Entonces $\|f(x) - f(y)\| \leqslant (n-1).\varepsilon$.

PROPOSICION 1. Sea X reflexivo y $f \in M(X,Y)$. Si f transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones débilmente convergentes, entonces f es acotada.

DEMOSTRACION. Si existiera una sucesión acotada $\{x_n\} \subset X$ tal que $\|f(x_n)\| \longrightarrow \infty$ entonces existiría una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ débilmente convergente ($X = X^{**}$) para la cual necesariamente $\{f(x_{n_j})\}$ es débilmente convergente y por lo tanto acotada en norma. Contradicción. Q.E.D.

Hemos usado los siguientes resultados sobre convergencia débil:

a) Si X es de Banach y reflexivo, entonces su esfera unitaria es débilmente secuencialmente compacta.

b) Si $x_n \longrightarrow x$ débilmente entonces $\{\|x_{n_j}\|\}$ es acotada (y $\|x\| \leqslant \underline{\lim}\ \|x_n\|$) cualquiera sea X de Banach.

2. Trataremos ahora el cálculo elemental para aplicaciones de $M(X,Y)$.

DEFINICION 1. Se dice que $f \in M(X,Y)$ es *diferenciable Fréchet* en x_0, o que es F-*diferenciable* en x_0, si existe $A \in L(X,Y)$ tal que en un entorno U de x_0:

(1) $$\|f(x) - f(x_0) - A(x-x_0)\| = o(\|x-x_0\|).$$

Escribiremos $f'(x_0)$ en lugar de A, la derivada Fréchet de f en x_0.

Si $X = R^m$ e $Y = R^n$ tienen respectivamente las bases $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ y $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ entonces $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i f_i$. Si $y = f(x)$, (1) se escribe: $\Delta f = Ah + o(\|h\|)$, $h = x-x_0$.

A es una aplicación lineal definida por una matriz $\{a_{ij}\}$. Se ve fácilmente que: $a_{ij} = \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$, así que

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_3} & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$$

O sea, f(x) *es diferenciable Fréchet si y sólo si cada componente es diferenciable. La derivada Fréchet coincide con la matriz Jacobiana.*

Observemos que si f es diferenciable Fréchet en x, vale que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(A(th) + o(\|th\|))}{t} = A(h) + \lim_{t\to 0} \left(\frac{o(\|th\|)}{\|th\|} \cdot (\operatorname{sgn} t)\|h\|\right) =$$
$$= A(h).$$

Consideremos ahora la función $f: R^2 \longrightarrow R^1$ definida por

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dfrac{x_1^3 . x_2}{x_1^4 + x_2^2} & \text{si } |x_1| + |x_2| \neq 0 , \\ 0 \text{ si } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

Considerando separadamente los casos $x_2 \leqslant x_1^2$ y $x_2 > x_1^2$ donde $x_1, x_2 > 0$ y $x_1 \vee x_2 < \varepsilon$, se ve que f es continua en (0,0) y por lo tanto que: $f \in C(R^2,R)$. Además vale que $\forall$ h:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+th) - f(0)}{t} = h_1 + h_2.$$

Sin embargo, $f(0+h) - f(0) - (h_1+h_2) = \dfrac{h_1^3 . h_2}{h_1^4+h_2^2}$, y f no es F-diferenciable (tomar $h_2 = h_1^2$).

Queda así demostrado que hay lugar para el siguiente concepto:

DEFINICION 2. $f \in M(X,Y)$ es *diferenciable Gateaux, o* G-*diferenciable* en x_0, si existe un operador $Df(x_0,h) \in M(X,Y)$ tal que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0) - t\,Df(x_0,h)}{t} = 0$$ para x_0+th perteneciente a un entorno esférico de x_0.

Sigue fácilmente que las derivadas de Fréchet y Gateaux son únicas, y que para todo escalar β: $Df(x_0,\beta h) = \beta\, Df(x_0,h)$. Además la diferenciabilidad Fréchet y su derivada quedan establecidas independientemente de normas equivalentes en X e Y.

Si $Df(x_0,h)$ es *lineal* en h escribiremos $f'_g(x_0).h$ en lugar de $Df(x_0,h)$. Si f es diferenciable Fréchet en x_0, como ya vimos lo es Gateaux, y $f'(x_0) = f'_g(x_0)$.

Si $f(x) \equiv y_0$ se tiene $f'(x) \equiv 0$, y si f es una aplicación lineal continua tenemos que $f'(x) = f \quad \forall\, x \in X$, pues $f(x+h) - f(x) = f(h)$.

Vale también que $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ y que $(a.f)'(x_0) = a.f'(x_0)$.

Veamos ahora la *regla de diferenciación de una función compuesta*. Supongamos que X,Y,Z son espacios de Banach, $f \in M(X,Y)$, $g \in M(Y,Z)$. Entonces, si f es F-diferenciable en x, y g lo es en f(x), g.f es F-diferenciable en x y vale:

$$(g.f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)\,.$$

En efecto, $(g.f)(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)+f'(x).y+o\,(\|y\|)) =$
$= g(f(x))+g'(f(x)).[f'(x).y+o\,(\|y\|)] + o\,(\|y\|) = (g.f)(x) +$
$+ (g'(f(x))).(f'(x).y) + o\,(\|y\|)$.

REGLA DEL PRODUCTO. Si f y g son F-diferenciables en x y $f \in M(X,R)$, $g \in M(X,Y)$, entonces $h(x) = f(x).g(x)$ es F-diferenciable en x y vale:

$$h'(x).y = f'(x)y.g(x) + f(x).g'(x)y.$$

En efecto: $f(x+y)g(x+y) = f(x)g(x) + [f'(x)y].g(x) + [f(x)].g'(x)y + o(\|y\|)$.

TEOREMA 1. Si la derivada Gateaux $f'_g(x)$ de f existe en un entorno V de x_0, es una aplicación acotada y es continua en x_0 como función de $V \subset X$ en

$L(X,Y)$, entonces f es F-diferenciable en x_0. Y en consecuencia $f'(x_0) = f'_g(x_0)$.
Para demostrar este Teorema recurriremos a *la fórmula del incremento finito* (Teorema del Valor Medio). Supongamos que en el segmento $[x_0,x]$, $f \in M(X,Y)$ tiene una derivada Gateaux $f'_g(x)$. Sean $\varphi \in Y^*$, $\Phi(t) = \varphi(f(x_0+t\,\Delta x))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\Delta x = x-x_0$. Entonces:

(2) $\Phi'(t) = \varphi(f'_g(x_0+ t\,\Delta x)\ (\Delta x))$, y $\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta)$, con $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Luego, $|\Phi(1) - \Phi(0)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))| = |\varphi(f(x) - f(x_0))| \leqslant$

$$\leqslant \|\varphi\|.\ \sup_{0\leq\theta\leq 1} \|f'_g(x_0+\theta\Delta x)\|.\|\Delta x\|.$$

Como esto vale $\forall\ \varphi \in Y^*$ sigue que:

(3) $\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant \|\Delta x\|.\ \sup\limits_{0\leq\theta\leq 1} \|f'_g(x_0+\theta\Delta x)\|.$

Aplicando (3) a $x \longrightarrow f(x) - f'_g(x_0)(\Delta x)$ obtenemos:

(4) $\|f(x) - f(x_0) - f'_g(x_0)(\Delta x)\| \leqslant \|\Delta x\|\ .\ \sup\limits_{0<\theta\leq 1} \|f'_g(x_0+\theta\Delta x)-f'_g(x_0)\|$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1. Elijamos h de manera que $x_0+h \in V$ y consideremos la expresión:

$$\omega = \omega(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'_g(x_0).h.$$

Entonces de (4)

$$\|\omega\| \leqslant \|h\|.\ \sup_{0\leq\theta\leq 1} \|f'_g(x_0+\theta h) - f'_g(x_0)\|$$

La continuidad de f'_g en x_0 implica que

$$\|\omega\| = \|h\|.o(1) = o(\|h\|). \qquad \text{Q.E.D.}$$

EJERCICIOS. 1. Sea $f(x) = \|x\|^2$, $x \in H$ espacio de Hilbert real. Entonces $f'(x)$ es la funcional lineal definida por el elemento $2x$.

2. Sea $f(x) = \|x\|$. Entonces $f'(x)$ no existe en $x=0$ y para $x\neq 0$ es igual a $\dfrac{x}{\|x\|}$.

3. Si $f \in M(X,R^1)$ entonces $f'(x)$, si existe, es un elemento de X^*.

4. Sea $f \in M(R^1,Y)$. Si $f'(x)$ existe es representable por un elemento de Y. Además la derivada Gateaux es siempre igual a la derivada Fréchet.

3. Si la función $f(x) \in M(X,Y)$ que queremos derivar en x_0 es *continua* en un entorno V de x_0 entonces vale la siguiente *proposición:* si existe una a-

plicación lineal $u \in M(X,Y)$ tal que

$$f(x) - f(x_0) - u(x - x_0) = o(\|x - x_0\|) ,$$

entonces $u \in L(X,Y)$ y $u = f'(x_0)$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe δ tal que si $\|h\| \leqslant \delta$ entonces $\|f(x_0+h)-f(x_0)\| \leqslant \varepsilon$. Podemos elegir el δ menor que uno y tan pequeño como para que también:

$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - u(h)\| \leqslant \varepsilon.\|h\|.$$

De estas desigualdades sigue que

$$\|u(h)\| \leqslant \varepsilon+\varepsilon\|h\| \leqslant 2\varepsilon \ , \ \forall \ h \text{ con } \|h\| \leqslant \delta.$$

La linealidad de u implica ahora la continuidad.

Esta proposición es sumamente útil pues en el caso de aplicaciones continuas sólo se debe buscar una aplicación lineal que haga

$$\lim_{\|h\|\to\infty} \frac{\|f(x+h) - f(x) - u(h)\|}{\|h\|} = 0$$

para poder afirmar que u es la derivada Fréchet de f en x.

EJERCICIOS. 1) Sean E,F y G tres espacios de Banach, $b(x,y)$ una aplicación bilineal (es decir, separadamente lineal) continua de ExF en G. Demostrar que la derivada es la aplicación lineal $(s,t) \longrightarrow b(x,t) + b(s,y)$.

(Sugerencia: usar que $b(x,y)$ continua equivale a

$$\|b(x,y)\| \leqslant K.\|x\|.\|y\| \ , \text{ recordando que}$$

$$\|(x,y)\| = \|x\| \vee \|y\|.)$$

2) Sea f una aplicación continua de E en $F = F_1 \times F_2$ (O simplemente de un abierto de E en F). f es diferenciable en x_0 sí y sólo sí sus componentes f_1 y f_2 lo son. Además vale:

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0) \ , \ f_2'(x_0))$$

si se entiende que $L(E,F)$ ha sido identificado al producto $L(E,F_1) \times L(E,F_2)$.

Otros resultados útiles que no demostraremos aquí son los siguientes:

A) Sea f un homeomorfismo de $A = \mathring{A} \subset X$ en $B = \mathring{B} \subset Y$. Sea $g = f^{-1}$. Si $f'(x_0)$ existe, $x_0 \in A$, y si $f'(x_0)$ es un homeomorfismo (lineal) de X sobre Y entonces g es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$, y además, $g'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$, o sea, $(f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}$.

B) (TEOREMA DEL VALOR MEDIO). Sea $I = [a,b]$, $f: I \longrightarrow Y$ continua, $\varphi: I \longrightarrow R$ continua. Supongamos que existe un conjunto D numerable tal que si $x \in I \setminus D$, f y φ tienen derivadas en x tales que $\|f'(x)\| \leqslant \varphi'(x)$. Entonces

$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \varphi(b) - \varphi(a)$.

En particular resulta que si en I, exceptuado a lo sumo un subconjunto numerable, existe $f'(x)$ y vale $\|f'(x)\| \leqslant M$, entonces $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b-a)$.

4. Un operador $f \in M(X,Y)$, $X = \prod_1^n X_i$, se dice *multilineal* si para todo k es lineal en x_k cuando se mantienen fijas todas las otras variables.

Obsérvese que cualquier aplicación lineal $f\colon X \longrightarrow Y$ es diferenciable Gateaux y $Df(x_0,h) = f(h)$. Análogamente cualquier aplicación multilineal es diferenciable Gateaux y $Df((x_1,x_2,\dots,x_n)\ ,\ (h_1,h_2,\dots,h_n)) =$
$= f(h_1,x_2,x_3,\dots,x_n) + f(x_1,h_2,x_3,\dots,x_n) + \dots + f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},h_n)$.
Sin embargo no es necesariamente diferenciable Fréchet.

Denotaremos con $L(X_1,X_2,\dots,X_n;Y)$ al conjunto de los operadores continuos multilineales de $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n$ en Y munido de la norma:

$$|||f||| = \sup \{\|f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)\| / \|x_1\|.\|x_2\|.\|x_3\|\dots\|x_n\|\} \quad \text{con} \quad x_i \neq 0.$$

$L(X_1,X_2,X_3,\dots,X_N;Y)$ es un espacio de Banach. Si $X_1 = X_2 = X_3 = \dots = X_N$ escribiremos $L(X^N;Y)$ para ese espacio.

LEMA 1. Los espacios $L(X_1,X_2;Y)$ y $L(X_1,L(X_2,Y))$ son isométricos.

DEMOSTRACION. Sea $\alpha\colon L(X_1,X_2;Y) \longrightarrow L(X_1,L(X_2,Y))$ definida por $\alpha(f) = g$ donde g es la aplicación que a cada x_1 le hace corresponder $f(x_1,y) \in L(X_2,Y)$.

$\|\alpha(f)\| = \|g\| = \sup\limits_{\|x_1\|=1} \sup\limits_{\|y\|=1} (\|f(x_1,y)\|) = |||f|||$ muestra que α es una isometría.

Veamos que es suryectiva. Sea $g \in L(X_1,L(X_2,Y))$.

Definamos:

$$f(x_1,x_2) = g(x_1)x_2.$$

Obviamente:

$\|f(x_1,x_2)\| = \|g(x_1)x_2\| \leqslant \|g(x_1)\|.\|x_2\| \leqslant \|g\|.\|x_1\|.\|x_2\|$ y $f \in L(X_1,X_2;Y)$. Además $\alpha(f) = g$. Q.E.D.

TEOREMA 2. Si $f \in M(X_1 x X_2 x X_3 x \dots x X_N, Y)$ es multilineal, las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) f es continua en todo punto $x \in X = \prod_{i=1}^N X_i$,

(ii) f es continua en 0 ,

(iii) $f \in L(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N; Y)$: $\|f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)\| \leqslant K.\|x_1\|.\|x_2\|\ldots\|x_N\|$ para cierto $K < \infty$,

(iv) f es diferenciable Fréchet (en todo $x \in X$).

DEMOSTRACION. (i) $\Rightarrow$ (ii) y (iv) $\Rightarrow$ (i) son inmediatas.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Si f(x) es continua en 0 entonces es acotada en una esfera con centro en ese punto, y como $f(k.x) = k^N.f(x)$, lo es en toda esfera. Pongamos $\langle f\rangle = \sup\{\|f(x)\| : x \in$ esfera unitaria$\}$.

Aquí $\|x\| = \sup \|x_i\|$. Entonces si algún $x_i = 0$, $f(x) = 0$. En caso contrario $\langle f\rangle = \sup (\|f(x)\| / \|x_1\|.\|x_2\|.\|x_3\|. \ldots .\|x_N\|) = |\!|\!|f|\!|\!|$. O sea $f \in L(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N; Y)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Hemos visto que $Df(x,h) = \sum_j f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \ldots, x_N)$. $Df(x,h)$ es lineal en h. Además:

$$\|Df(x,h)\| \leqslant \sum_j \|f(x_1, x_2, x_3, \ldots, h_j, \ldots, x_N)\| \leqslant C. \sum \|h_j\| \leqslant C'.\|h\|.$$

Definamos el operador A(x) por $Df(x,h) = A(x)h$. A es lineal y continuo. Además:

$$\|A(x)-A(y)\| = \sup_{\|h\|=1} \|(A(x)-A(y))h\| = \sup_{\|h\|=1} \|Df(x,h)-Df(y,h)\|.$$

Pero $\|Df(x,h)-Df(y,h)\|$, si $\|h\| = 1$, es menor o igual que:

$$\|f(h_1, x_2, x_3, \ldots, x_N) - f(h_1, y_2, y_3, \ldots, y_N)\| + \ldots . \leqslant$$

$$\leqslant \|f(h_1, x_2, x_3, \ldots, x_N) \pm f(h_1, y_2, x_3, \ldots, x_N) \pm f(h_1, y_2, y_3, x_4, \ldots, x_N) \pm$$

$$\pm f(h_1, y_2, y_3, y_4, x_5, \ldots, x_N) \pm \ldots - f(h_1, y_2, y_3, \ldots, y_N)\| +$$

$$+ \ldots \leqslant |\!|\!|f|\!|\!|.\|h_1\|.(\|x_2-y_2\|.\|x_3\|.\|x_4\|. \ldots + \|y_2\|.\|x_3-y_3\|.\|x_4\| \ldots +$$

$$+ \|y_2\| \ldots . \|x_N-y_N\|) + |\!|\!|f|\!|\!|.\|h_2\|(\ldots\ldots) + \ldots\ldots \leqslant C_{x,y}.\|x-y\| ,$$

donde $C_{x,y}$ se mantiene acotada si x e y lo están. Entonces A(x) verifica $\|A(x)-A(y)\| \leqslant M.\|x-y\|$ si x e y están en una esfera de radio r (aquí $M=M(r)$), y por lo tanto A(x) es continua en x, lo que implica que es la derivada Fréchet de f (cf.T.1). Q.E.D.

5. Sea f una aplicación diferenciable Fréchet de un subconjunto A abierto de X en Y con derivada Df. f se dice *continuamente* diferenciable en A si Df es continua en A. Supongamos ahora que

$$X = E_1 \times E_2.$$

La aplicación $x_1 \longrightarrow f(x_1, a_2)$ puede ser diferenciable en $x_1 = a_1$. En este caso diremos que f es diferenciable respecto a la primera variable en

(a_1,a_2) y a la derivada *parcial* la denotaremos con $D_1f(a_1,a_2)$.

Esta pertenece a $L(E_1,Y)$.

TEOREMA 3. Sea f continua de un abierto $A \subset X = E_1 \times E_2$ en Y. Para que f sea continuamente diferenciable en A es necesario y suficiente que f sea diferenciable en cada punto respecto a la primera y segunda variables, y que las aplicaciones $(x_1,x_2) \longrightarrow D_if(x_1,x_2)$ para $i = 1,2$, sean continuas en A. Entonces, en cada punto $(x_1,x_2) \in A$,

$$Df(x_1,x_2).(t_1,t_2) = D_1f(x_1,x_2).t_1 + D_2f(x_1,x_2).t_2.$$

DEMOSTRACION. Veamos la necesidad. Sea $i_1(x_1)$ la inyección natural de E_1 en $E_1 \times E_2$ definida por $i_1(x_1) = (x_1,0)$. La aplicación α: $x_1 \longrightarrow (x_1,a_2)$ tiene por derivada a i_1. Como $f(x_1,a_2) = (f.\alpha)(x_1)$, entonces

$$(D_1f)(a_1,a_2) = D(f.\alpha)(a_1) = (Df)(a_1,a_2).i_1.$$

Observando que

$$i_1(t_1) + i_2(t_2) = (t_1,t_2)$$

resulta:

$$(Df)(a_1,a_2).(t_1,t_2) = (D_1f)(a_1,a_2).t_1 + (D_2f)(a_1,a_2).t_2.$$

Veamos ahora la suficiencia. Sabemos que:

$$\|f(a_1+t_1,a_2) - f(a_1,a_2) - D_1f(a_1,a_2).t_1\| \leqslant \varepsilon.\|t_1\| ,$$

$$\|f(a_1+t_1,a_2+t_2) - f(a_1+t_1,a_2) - D_2f(a_1+t_1,a_2).t_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \|t_2\|. \sup_{\|z\|\leq\|t_2\|} \|D_2f(a_1+t_1,a_2+z) - D_2f(a_1+t_1,a_2)\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon.\|t_2\| \quad \text{si} \quad \|t_1\| \leqslant \delta_1 , \quad \|t_2\| \leqslant \delta_2.$$

Entonces,

$$\|f(a_1+t_1,a_2+t_2) - f(a_1,a_2) - D_1f(a_1,a_2).t_1 - D_2f(a_1,a_2).t_2 \| \leqslant$$

$$\leqslant \|f(a_1+t_1,a_2+t_2) - f(a_1+t_1,a_2) - D_2f(a_1+t_1,a_2).t_2\| + \varepsilon.\|t_2\| +$$

$$+ \|f(a_1+t_1,a_2) - f(a_1,a_2) - D_1f(a_1,a_2).t_1\| \leqslant 2\varepsilon(\|t_1\| + \|t_2\|).$$ Q.E.D.

6. Sea f una aplicación continuamente diferenciable de un abierto $A \subset X$ en Y. $f'(x) = Df(x)$ es entonces una aplicación continua de A en $L(X,Y)$. Si en un punto x_0, Df es a su vez diferenciable, a

$$(D^2f)(x_0) = f''(x_0) = D(Df)(x_0)$$

la llamaremos la *derivada segunda* de f en x_0, $f''(x_0) \in L(X,L(X,Y))$.

Hemos visto que $L(X,L(X,Y))$ es identificable a $L(X^2;Y)$, y de manera que

$\psi \in L(X,L(X,Y))$ está en correspondencia con la funcional bilineal φ dada por:

$$\varphi(s,t) = (\psi(s))(t) \ , \ y \ \|\varphi\| = \|\psi\|.$$

Consideremos las aplicaciones:

$$X \xrightarrow{Df(x)} L(X,Y) \xrightarrow{u.t} Y$$

donde $t \in X$ es un elemento fijo. Su composición da $\varphi_0(x) = Df(x).t$.
La segunda aplicación mencionada es lineal de $L(X,Y)$ en Y, por lo que su derivada es ella misma, es decir, aquella que a cada elemento $u \in L(X,Y)$ le asigna su imágen $u(t)$ en Y, (t fijo). Luego $D\varphi_0(x) \in L(X,Y)$ y

$$D\varphi_0(x).s = (D^2f(x).s).t = (D^2f(x)).(s,t).$$

TEOREMA 4. Si f es dos veces diferenciable en x_0, entonces la aplicación bilineal $(s,t) \longrightarrow D^2f(x_0).(s,t)$ es simétrica.

DEMOSTRACION. Sea $g(\xi) = f(x_0+\xi s+t) - f(x_0+\xi s)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Entonces

$g'(\xi)(\alpha) = (f'(x_0+\xi s+t) - f'(x_0+\xi s))(\alpha s)$ y por lo tanto,

$g'(\xi) = [f'(x_0+\xi s+t) - f'(x_0+\xi s)].s$.

Además: $\|f'(x_0+\xi s+t) - f'(x_0) - f''(x_0).(\xi s+t)\| \leqslant \varepsilon.(\|s\| + \|t\|)$,

si s y t son suficientemente pequeños. Por otra parte:

$\|f'(x_0+\xi s) - f'(x_0) - f''(x_0).(\xi s)\| \leqslant \varepsilon.\|s\|$.

Entonces: $\|g'(\xi) - ((f''(x_0).t).s)\| = \|[(f'(x_0+\xi s+t) - f'(x_0)) -$

$- (f'(x_0+\xi s) - f'(x_0))].s - ((f''(x_0).t).s \pm (f''(x_0).\xi s).s) \leqslant$

$\leqslant 2\varepsilon\|s\|(\|s\| + \|t\|)$, cualquiera sea $\xi \in [0,1]$.

De la fórmula de incrementos finitos sigue que

$$\|g(1) - g(0) - g'(0)\| \leqslant \sup_{0\leq\xi\leq 1} \|g'(\xi) - g'(0)\|.$$

Por lo tanto,

$\|g(1) - g(0) - (f''(x_0).t).s\| \leqslant \|g(1) - g(0) - g'(0)\| +$

$+ \|g'(0) - (f''(x_0).t).s\| \leqslant \sup_{\xi} \|g'(\xi) - g'(0)\| + \|g'(0) - (f''(x_0).t).s\| \leqslant$

$\leqslant \sup_{\xi} \|g'(\xi) - (f''(x_0).t).s\| + 2.\|g'(0) - (f''(x_0).t).s\| \leqslant 6.\varepsilon\|s\|(\|s\| + \|t\|)$.

Pero $g(1) - g(0) = f(x_0+s+t) - f(x_0+t) - f(x_0+s) - f(x_0)$ es simétrica en s y t. Luego:

$$\|(f''(x_0).t).s - (f''(x_0).s).t\| \leqslant 6.\varepsilon.(\|s\| + \|t\|)^2.$$

La linealidad asegura ahora que esta desigualdad, originalmente demostrada para $\|s\| = \|t\|$ pequeño, vale ahora para $\|s\| = \|t\| = 1$.

En este caso:

$$\|(f''(x_0).t).s - (f''(x_0).s).t\| \leqslant 24.\varepsilon =$$

$= 24.\varepsilon.1 = 24.\varepsilon.\|s\|.\|t\|$.

De aquí sigue que el primer miembro es $\leqslant 24.\varepsilon.\|s\|.\|t\|$ cualesquiera sean s y t. Como ε es arbitrariamente pequeño,

$$(f''(x_0).t).s = (f''(x_0).s).t \quad , \quad \forall\ (s,t) \in X\times X. \qquad \text{Q.E.D.}$$

*7. PROBLEMAS NO LINEALES: EJEMPLOS Y CARACTERISTICAS.

Hay varias fuentes clásicas de problemas no lineales. Tenemos problemas originados en la geometría diferencial, problemas de la física, problemas del cálculo de variaciones, etc.

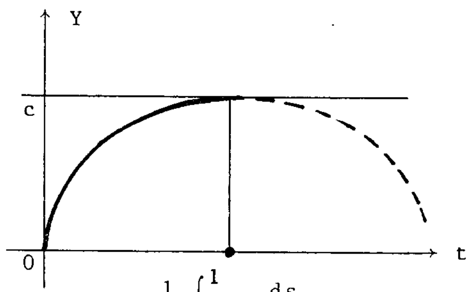
Nuevas se agregan a estas: la genética, la biología, la economía, etc., van agregando problemas cuya formulación es no lineal. Las dificultades que se presentan al estudiar un problema no lineal son, a veces, muy interesantes. Ejemplificaremos tres de estas inherentes a la no linealidad: a) no unicidad, b) existencia de singularidades, c) dependencia crítica de parámetros.

a) Consideremos el problema de contorno: $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y^3 = 0$, $y(0) = y(b) = 0$.

Multiplicando por $\dfrac{dy}{dt}$ obtenemos:

$$\dot{y}.\ddot{y} + \dot{y}.2y^3 = \frac{d}{dt}\,\frac{(\dot{y}^2 + y^4)}{2} = 0.$$

$\dot{y}^2 + y^4 = c^4$ implica $\displaystyle\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{c^4-x^4}} = t$ (obsérvese que si $y \not\equiv 0$ entonces $c \neq 0$ y $(c^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}} \in L^1$).



$$\gamma = \frac{1}{c}.\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$$

Se ve entonces que puede construirse una solución $y(t)$, función periódica de período

$$T = 4\gamma = \frac{2}{c}\int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} ,$$

que *depende de la constante* c.

Para que $y(b) = 0$ basta que $T = T(c) = \frac{b}{n}$, $n = 1,2,3,\ldots.$ O sea, hay *infinitas* soluciones al problema de contorno propuesto.

b) Consideremos ahora el problema: $\ddot{y}+y.\dot{y} = 0$, $y(0) = y(b) = 0$.

O sea, $\frac{d}{dt}(\dot{y} + \frac{y^2}{2}) = 0$, $y(0) = y(b) = 0$. Solución de la ecuación $\dot{y} + \frac{y^2}{2} = k$ es $y(t) = \beta \operatorname{tgh} \frac{\beta t}{2}$ donde $\beta^2 = 2k$. Si $\operatorname{tgh} \frac{\beta b}{2} = 0$ entonces $\operatorname{sh} \beta\frac{b}{2} = 0$, y si $i\gamma = \beta$, $\operatorname{sen} \gamma\frac{b}{2} = 0$. Luego $\gamma = \frac{2}{b}\pi$.

Entonces dado un tal γ que corresponde a cierto k, $y(t) = i.\operatorname{tg} \frac{\gamma t}{2}$ se anula en $t = 0, \pm \frac{2}{\gamma}\pi, \pm \frac{4}{\gamma}\pi, \ldots$. Entonces $y(t)$ tiene una singularidad en $x = \frac{b}{2} = \frac{\pi}{\gamma}$. Es decir, *no hay* "solución" de nuestro problema que *no* tenga singularidades en $(0,b)$.

c) Consideremos ahora el sistema:

$$\ddot{y} + \frac{\lambda}{2} e^y = 0 \quad , \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Demostraremos que este problema *no* tiene solución (regular) si $\lambda > \beta$ donde β es un número real positivo, tiene exactamente *una* solución regular si $\lambda = \beta$, y tiene *dos* soluciones cuando $0 < \lambda < \beta$.

La ecuación es

$$\frac{d}{dt}(\frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\lambda}{2} e^y) = 0 \text{ y por lo tanto, si } \lambda > 0$$

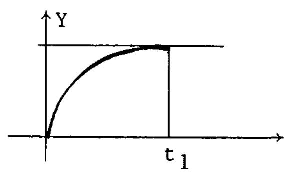
se reduce a

$$\dot{y} = \pm\sqrt{\lambda} \, . \, \sqrt{c-e^y} \, .$$

Supongamos $y(0) = 0$. Entonces, fijado λ, para $c = 1 + \frac{\dot{y}^2(0)}{\lambda}$, tenemos cerca del origen:

$$t = \lambda^{-\frac{1}{2}} . \int_0^y (c-e^s)^{-\frac{1}{2}} ds.$$

y y t crecen simultáneamente hasta $y(t_1) = \lg c$. La función $y(t)$ así definida en $[0,t_1]$, y por simetría en $[t_1,2t_1]$, es solución de la ecuación. Si exigimos: $1 = 2t_1$, tendremos:



$$\frac{1}{2} = t_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\lg c} \frac{ds}{\sqrt{c-e^s}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_1^c \frac{dn}{n\sqrt{c-n}}$$

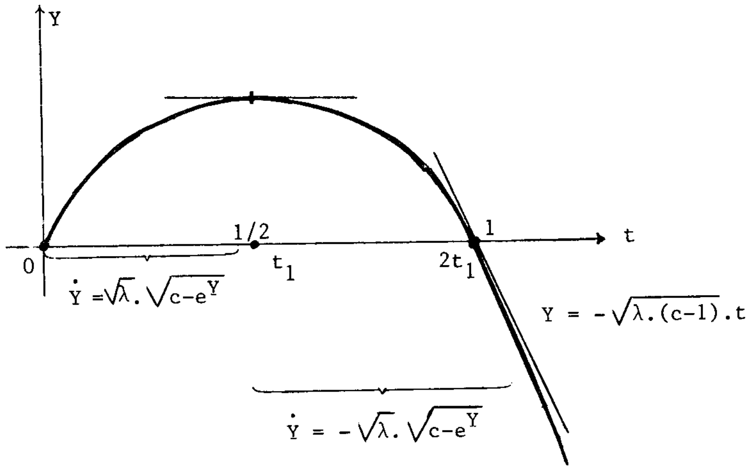
Haciendo $n = cx^2$, logramos

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{2} = \int_1^c \frac{dn}{n.\sqrt{c-n}} = \int_{1/\sqrt{c}}^1 \frac{2dx}{\sqrt{c}.x.\sqrt{1-x^2}}$$

y entonces

$$\frac{\sqrt{\lambda c}}{4} = \int_{1/\sqrt{c}}^1 \frac{dx}{x.\sqrt{1-x^2}} = -\int_{1/\sqrt{c}}^1 d(\text{arc ch } \tfrac{1}{x}).$$

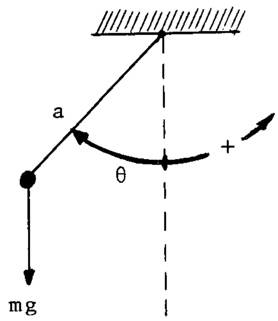
De aquí sigue que $\sqrt{c} = \cosh[\sqrt{\frac{\lambda}{16}}.\sqrt{c}]$, y resolviendo esta ecuación trascendente sigue la proposición a demostrar. El gráfico de la solución y(t) es como sigue



*8. Presentaremos en esta sección y la siguiente algunos *modelos no lineales:* a) el asociado al movimiento pendular, b) al movimiento de los planetas, c) al crecimiento de dos poblaciones de animales donde una es presa de la otra, o compiten por su sustento.

a) La ecuación de movimiento del *péndulo simple* es:

(1) $\quad ma^2\ddot{\theta} + mag.\text{sen}\theta = 0.$



que se reduce a:

$$a\dot{\theta}\,\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} + g.\text{sen}\theta = 0.$$

O sea,

$$-C + \int \dot{\theta}\, d\dot{\theta} + \frac{g}{a}\int \text{sen}\theta\, d\theta = 0.$$

Y por lo tanto: $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - (g/a)\cos\theta = C.$

Esta ecuación expresa la conservación de la energía del péndulo, pero es todavía una ecuación no lineal de θ en función de t, la cual *no puede resolverse en términos de funciones elementales.*

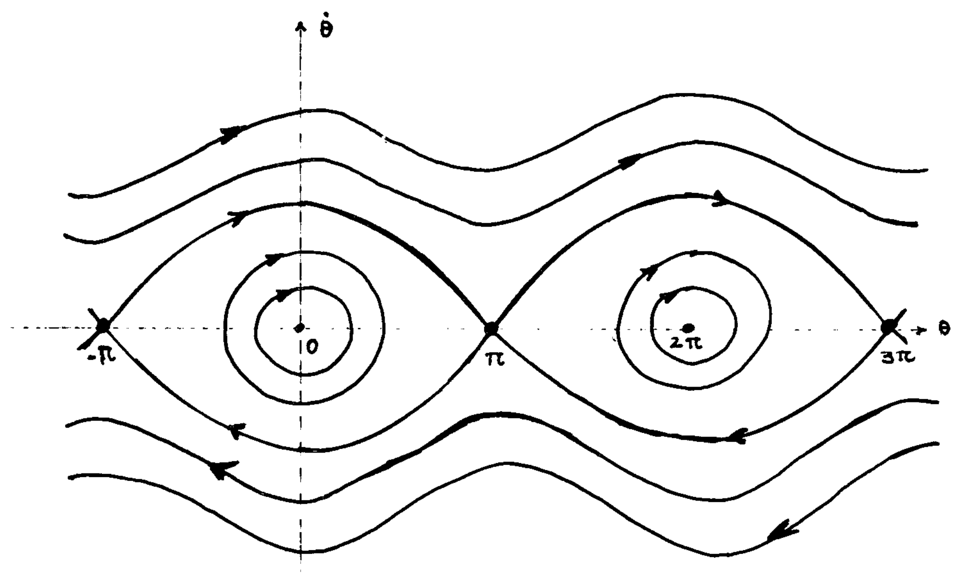
Una función *elemental* es un miembro de la clase de funciones que comprende:

a) las funciones racionales; b) las funciones algebraicas (y(x) es una función algebraica si satisface

$$P_0.y^n + P_1.y^{n-1} + P_2.y^{n-2} + \ldots + P_n = 0,$$

$P_i(x)$ = polinomio en x); c) la función e^x; d) lg x; e) todas las funciones definibles usando cualquier combinación finita de símbolos de funciones de las cuatro clases precedentes. Ejemplos: funciones trascendentes elementales, funciones trigonométricas o hiperbólicas, xe^{-x^2}, e^{e^x}, etc.

Sin embargo el sistema puede suponerse conocido si en un instante dado t conocemos su estado, es decir el par $(\theta(t),\dot\theta(t))$, y su evolución en el tiempo, aunque no tengamos una representación simple de la desviación θ como función del tiempo. El conjunto de estos estados, y su evolución, pueden representarse en el *diagrama de fases* formado por las *trayectorias* (y su *dirección*).



Si aproximamos senθ por θ obtenemos la ecuación $\ddot\theta + p^2\theta = 0$, la llamada *ecuación del oscilador armónico simple* cuya solución general es

$$\theta(t) = A.\cos pt + B.\text{sen } pt = \alpha.\cos(pt+\beta).$$

b) Sea $x = (x_1,x_2,x_3) \in R^3$. La ecuación de Newton del movimiento de un planeta de masa m - luego de un cambio adecuado de unidades - es:

(2) $$m\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3} .$$

Se demuestra que la órbita descripta por una partícula que se mueve bajo la influencia de una fuerza gravitacional newtoniana, y por lo tanto según la ecuación (2), es una cónica. Precisamente una elipse en el caso de los planetas de nuestro Sistema Solar.

Obsérvese que en esta formulación se ignora la influencia mutua de los componentes del Sistema.

*9. Consideremos dos poblaciones de animales, la especia *cazadora* y, y su *presa* x. Supongamos que cohabitan en un determinado ambiente y que la especie presa es la única fuente de alimentación de la especie cazadora. La cantidad total de comida consumida por unidad de tiempo por los cazadores es proporcional al número de encuentros de miembros de ambas poblaciones, o sea proporcional a xy. Por otra parte la especie cazadora tendrá una tasa de crecimiento (por definición, el cambio neto de la población por unidad de tiempo dividido por la población total al comienzo del período) proporcional a la cantidad de comida per cápita σ menos la cantidad de comida mínima τ para la supervivencia del individuo:

(3) $$\frac{\Delta y}{y.\Delta t} \sim a(\sigma-\tau) \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \tau > 0.$$

O sea, $\frac{dy}{dt} = a(\sigma-\tau)y(t)$. Como $\sigma = b.x$ resultará

(4) $$y' = (Cx - D)y \quad , \quad C,D > 0.$$

En cada período Δt, $f(x,y).\Delta t$ miembros de la especie presa son comidos. Razonablemente $f(x,y)$ es proporcional a y, y bajo ciertas condiciones puede suponerse también proporcional a x. Esta es la hipótesis hecha más arriba sobre el consumo de los cazadores y de la cual resultó σ proporcional a x. O sea,

$$\Delta x = -Bxy.\Delta t \quad , \quad B > 0.$$

Supongamos ahora que la alimentación de la especie presa es constante per cápita y suficiente como para hacer crecer la población en ausencia de cazadores, o sea, $\frac{\Delta x}{x.\Delta t} \sim A$, $A > 0$, (cf.(3)).

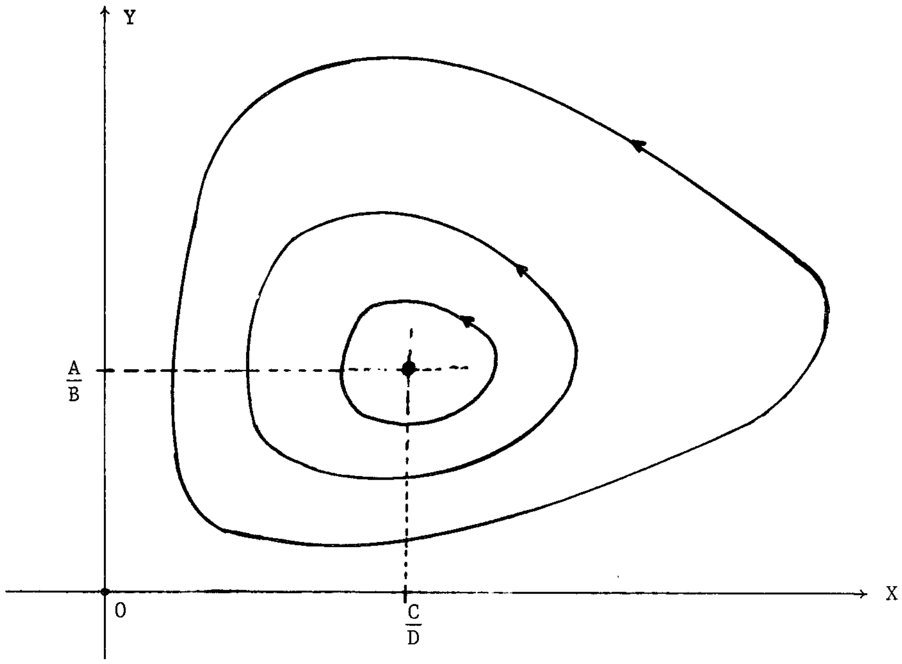
Entonces $\frac{\Delta x}{\Delta t} \sim Ax-Byx$, y obtenemos:

(5) $$x' = (A - By)x \quad , \quad A,B > 0.$$

(4) y (5) constituyen *las ecuaciones de Volterra-Lotka*. El estudio original de Volterra fue inspirado por observaciones de dos poblaciones de peces del

Mar Adriático.

$(\frac{D}{C},\frac{A}{B})$ es el *punto de equilibrio* del sistema y se demuestra que *toda trayectoria de las ecuaciones de Volterra-Lotka es cerrada* con excepción del punto de equilibrio y de los ejes coordenados.



Si consideramos dos especies x, y que *compiten por su sustento*, es decir, viven en un mismo ambiente y tienen la misma fuente de alimentación, se puede demostrar bajo hipótesis razonables que las poblaciones tienden a alcanzar un punto de equilibrio, al contrario de lo que ocurría en el caso de especies en relación cazador - presa cuyo número oscilaba alrededor de un cierto punto.

Hay evidencia experimental que confirma ambos comportamientos.

10. TEOREMA DE L.E.J. BROUWER. Importantes aplicaciones a problemas no lineales (y lineales) tiene la teoría de puntos fijos de funciones continuas de un espacio topológico en si mismo.

El capítulo VII será dedicado a teoremas de punto fijo del análisis funcional. Esta sección tratará de un resultado básico en espacios euclídeos debido a Brouwer (1910).

DEFINICION 3. Un espacio topológico T tiene la propiedad de punto fijo si toda aplicación continua de T en T tiene un punto fijo.

El intervalo $I = [0,1]$ tiene la propiedad de punto fijo (p.p.f.) pues si $f: I \longrightarrow I$ es una función continua tal que $f(x) - x$ no se anula ni en 0 ni en 1 entonces necesariamente toma valores de distinto signo en esos puntos y se anula en algún $x_0 \in (0,1)$. Obviamente el eje real y la circunferencia unitaria no tienen la propiedad de punto fijo. Como veremos, la esfera cerrada unitaria de cualquier espacio euclídeo sí la tiene. Es inmediato que si T y S son homeomorfos simultáneamente poseen la propiedad de punto fijo o no la poseen.

DEFINICION 4. T es un *retracto* de S si $T \subset S$ y existe $r(x)$ aplicación continua de S en T tal que en T coincide con la aplicación identidad.

Un conjunto convexo cerrado (no vacío) C de R^n con la norma euclídea o de un espacio de Hilbert tiene la propiedad de que si $x \notin C$ existe $p(x) \in C$ tal que $p(x)$ es el único punto del convexo que realiza la mínima distancia de x a C. De aquí sigue que un convexo cerrado de un espacio de Hilbert es un retracto de cualquier subconjunto que lo contenga, pues basta tomar $r(x) = p(x)$ y observar que r es continua. (El resultado final es cierto aún para espacios de Banach).

La propiedad de punto fijo de un espacio topológico es heredada por todo retracto del mismo. En efecto, si T es una aplicación continua del retracto en sí mismo, $T \circ r$ lo es de todo el espacio en sí, y por lo tanto $T \circ r$ tiene un punto fijo y. Como $T(r(y)) = y$ debe pertenecer al retracto tenemos $r(y) = y$, $Ty = y$.

TEOREMA 5. Todo conjunto C convexo compacto no vacío de R^n tiene la propiedad de punto fijo.

DEMOSTRACION. Basta demostrar el teorema de Brouwer que dice que $B^n = \{x: \sum_1^n |x_i|^2 \leqslant 1\}$ tiene esa propiedad. En efecto, si $B^n \in$ ppf también $k.B^n \in$ ppf. Supongamos que $k.B^n \supset C$. Entonces C es un retracto de $k.B^n$ y por lo ya dicho hereda la ppf.

Veamos entonces el teorema de Brouwer. Un espacio topológico T se dice *contraíble* (a un punto x_0) si existe una homotopía que deforma la aplicación identidad en la aplicación constantemente igual a x_0, i.e., existe $f: T \times [0,1] \longrightarrow T$, continua, tal que $f(x,0) \equiv x$, $f(x,1) \equiv x_0$.

Sea $\Sigma^m = \{x \in R^{m+1}: \sum_1^{m+1} |x_i|^2 = 1\}$. Obviamente Σ^0 no es contraíble. Más aún, vale el siguiente:

TEOREMA 6. Σ^m no es contraíble $\forall\ m \geqslant 0$.

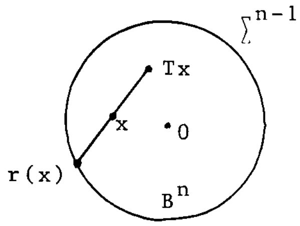
El teorema 6 sigue, por ejemplo, del teorema de las antípodas de Borsuk, o de propiedades de n-ésimo grupo de homología de Σ^m , etc. (cf. la sección siguiente).

Observemos ahora que: si T es contraíble también lo es cualquier retracto R de T. En efecto, si r retracta T sobre R y f(x,t) contrae T a un punto $x_0 \in T$, entonces $r \circ f$ contrae R a $r(x_0)$.

TEOREMA 7. Σ^{n-1} no es un retracto de B^n si $n \geq 1$.

(En efecto, B^n es contraíble (a x=0), y Σ^{n-1} no lo es).

Supongamos ahora que exista T: $B^n \longrightarrow B^n$ continua y sin puntos fijos. Esta T nos permite construir una retracción de B^n en Σ^{n-1}: dado $x \in B^n$ sea r(x) la intersección de Σ^{n-1} con la semirrecta de origen Tx que pasa por x. Esto contradice al Teorema 7. ¡Q.E.D.



11. El teorema 6 es un caso particular del siguiente teorema debido a Borsuk:

TEOREMA 8. Sea f una aplicación continua de Σ^n en Σ^n impar, es decir, $\forall\, x \in \Sigma^n$, $-f(x) = f(-x)$. Entonces f no es homotópica a una aplicación constante.

Este teorema se llama también "de las antípodas" pues la f que interviene transforma antípodas en antípodas. El teorema 6 se obtiene usando f(x) = x.

No demostraremos el Teorema 8 y damos por concluída la demostración del teorema de punto fijo de Brouwer.

Sobre la circunferencia unitaria (Σ^1) es fácil dar ejemplos de transformaciones continuas de ese espacio en sí mismo sin puntos fijos, como ya observamos. Sin embargo la propiedad de punto fijo vale todavía si restringimos la clase de aplicaciones continuas. Brouwer demostró el siguiente resultado: Sea f continua y biunívoca de Σ^n sobre Σ^n. Si n es par y f preserva orientación entonces f tiene un punto fijo; si n es impar y f cambia la orientación entonces f tiene un punto fijo.

CAPITULO VI

BASES EN ESPACIOS DE BANACH.

1. Una serie $\sum_1^\infty x_i$, $x_i \in B$ espacio de Banach, se dice *absolutamente convergente* si $\sum_1^\infty \|x_i\| < \infty$.

Como $\|\sum_n^m x_i\| \leq \sum_n^m \|x_i\|$, la convergencia absoluta de la serie implica su convergencia a un elemento de B. La serie $\sum_i x_i$ se dirá *incondicionalmente convergente* si para toda permutación p de los enteros $\sum_i x_{p(i)}$ converge en B. Obviamente la convergencia absoluta implica la convergencia incondicional.

TEOREMA DE RIEMANN. Sea X de Banach y de dimensión finita. En X la convergencia incondicional implica la convergencia absoluta.

DEMOSTRACION. X es topológicamente isomorfo a R^n o a C^n según que el cuerpo utilizado para definir X sea R o C. Supongamos para fijar ideas que $X \sim R^n$. Podemos suponer entonces $X = R^n$ con norma $\|x\| = \sum_1^n |x_i|$. Sea entonces $\sum_1^\infty a_i$ la serie incondicionalmente convergente, a_i = vector columna $[a_i^1, a_i^2, a_i^3, \ldots, a_i^n]$. La convergencia incondicional de $\sum_1^\infty a_i$ implica la de $\sum_1^\infty a_i^k$, para todo $k = 1,2,3,\ldots,n$. Luego, por el teorema de Riemann numérico, la convergencia absoluta de cada una de estas series. Entonces $\sum_i \|a_i\| =$ $= \sum_i (\sum_k |a_i^k|) = \sum_k \sum_i |a_i^k| < \infty$. Q.E.D.

Este resultado es óptimo pues el *teorema de Dvoretzky-Rogers* asegura que en todo espacio de Banach de dimensión infinita hay una serie incondicionalmente convergente que no es absolutamente convergente. Ambos resultados pueden resumirse entonces en la siguiente proposición:

TEOREMA 1. La familia de series incondicionalmente convergentes de un espacio de Banach B coincide con la familia de series absolutamente convergentes si y sólo si $\dim B < \infty$.

2. Diremos que $\sum_{i=1}^\infty x_i$, $x_i \in B$ es *desordenadamente convergente*, o convergente según el filtro de partes finitas, si existe $x \in B$ tal que

$$\lim_{\sigma\in\Sigma} \sum_{i\in\sigma} x_i = x$$

donde Σ = conjunto de subconjuntos finitos de la familia de enteros positivos N dirigido por inclusión. O sea, dado $\varepsilon > 0$, existe $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que si $\sigma \supseteq \sigma_0$ entonces $\|\sum_{i\varepsilon\sigma} x_i - x\| < \varepsilon$.

PROPOSICION 1. La convergencia incondicional es equivalente a la convergencia desordenada.

DEMOSTRACION. c.i. $\Rightarrow$ c.d.: supongamos $\sum_{i\varepsilon\sigma} x_i$ no converge, y que $\sum_1^\infty x_i$ sí lo hace a x. Entonces, dado ε existe n_0 tal que $n \geqslant n_0$ implica $\|\sum_1^n x_i - x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, y cualquiera sea σ existe un $\sigma' = \sigma'(\sigma) \supseteq \sigma$ tal que $\|\sum_{\sigma'} x_i - x\| \geqslant \varepsilon$. Sea $\sigma_0 = \{1,2,3,\ldots,n_0\}$, $\sigma_0' = \sigma'(\sigma_0)$, σ' = la menor sección de N que contiene a σ_0', $\sigma_1' = \sigma'(\sigma_1)$, etc. Entonces, $\{\sigma_0, \sigma_0', \sigma_1, \sigma_1', \ldots\}$ define un reordenamiento de N tal que:

$$\|\sum_{\sigma_j} x_i - \sum_{\sigma_j'} x_i\| \geqslant \left| \|x - \sum_{\sigma_j} x_i\| - \|x - \sum_{\sigma_j'} x_i\| \right| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} .$$

Luego $\sum x_i$ no es incondicionalmente convergente.

c.d. $\Rightarrow$ c.i.: sea σ_ε tal que $\sigma \supseteq \sigma_\varepsilon \Rightarrow \|x - \sum_\sigma x_i\| \leqslant \varepsilon$. Sea p una permutación de N. Dado ε hay un n_0 tal que $\sigma_\varepsilon \subseteq \{p(1),p(2),\ldots,p(n_0)\}$. Entonces si $n \geqslant n_0$, $\|\sum_{i=1}^n x_{p(i)} - x\| \leqslant \varepsilon$, y por lo tanto $\sum_1^\infty x_{p(i)} = x$. Q.E.D.

COROLARIO. Todos los reordenamientos de una serie incondicionalmente convergente convergen al mismo elemento de B.

3. Una serie $\sum_i x_i$ se dice *subconvergente* si para toda sucesión creciente $\{n_i\}$ de enteros positivos, la serie $\sum_i x_{n_i}$ converge a algún elemento de X.

PROPOSICION 2. Condición suficiente para la convergencia desordenada de $\sum x_i$ es que esta serie sea subconvergente.

DEMOSTRACION. Supongamos que $\lim_{\sigma\varepsilon\Sigma} \sum_{i\varepsilon\sigma} x_i$ no existe. Entonces hay un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\sigma_0 \in \Sigma$ existen σ_1 y σ_2, $\supseteq \sigma_0$, tales que $2\varepsilon \leqslant \|\sum_{\sigma_1} x_i - \sum_{\sigma_2} x_i\| = \|\sum_{\sigma_1\setminus\sigma_0} x_i - \sum_{\sigma_2\setminus\sigma_0} x_i\|$. En consecuencia, existe un $\varepsilon > 0$ y sucesiones de conjuntos de Σ, $\{\sigma_k\}$, $\{\tau_k\}$, $\sigma_k \cap \tau_\ell = \emptyset$ para todo k,ℓ, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset = \tau_i \cap \tau_j$ si $i \neq j$, tales que $\|\sum_{i\varepsilon\sigma_k} x_i - \sum_{i\varepsilon\tau_k} x_i\| \geqslant 2\varepsilon$. Por lo tanto:

$$\|\sum_{\sigma_k} x_i\| + \|\sum_{\tau_k} x_i\| \geqslant 2\varepsilon.$$

Existe entonces una sucesión $\{\eta_k\}$, $\eta_k \in \Sigma$, $\eta_k \cap \eta_l = \emptyset$ si $k \neq l$, tal que $\eta_k = \sigma_k$ o $\eta_k = \tau_k$ y $\|\sum_{i \in \eta_k} x_i\| \geqslant \varepsilon$. Podemos suponer que $\{\eta_k\}$ verifica: $\sup \{i \in \eta_k\} < \inf \{i \in \eta_{k+1}\}$. Obviamente la subserie $\sum_k \sum_{i \in \eta_k} x_i$ no satisface la condición de Cauchy, y por lo tanto no es convergente. Q.E.D.

EJERCICIO 1. a) Demostrar que la convergencia desordenada es suficiente para la subconvergencia.

b) Una serie se dice *convergente por multiplicadores acotados* si para toda sucesión numérica acotada $\{\alpha_i\}$, $\sum \alpha_i x_i$ converge. Demostrar que si $\sum x_i$ es convergente por multiplicadores acotados es subconvergente.

NOTAS. 1) La recíproca de b), Ejercicio 1, también es verdadera.

2) Hasta ahora sólo hemos considerado convergencia fuerte, es decir, respecto a la norma de X. Un famoso resultado, el *teorema de Orlicz-Pettis*, asegura que si una serie es subconvergente débilmente (en la topología X* de X) entonces es subconvergente en la topología fuerte.

4. Sea nuevamente X un espacio de Banach (real o complejo) y X* su dual.

DEFINICION 1. Una *base* para el espacio de Banach X respecto a una topología dada τ es una sucesión $\{x_i\} \subset X$ tal que a cada elemento $x \in X$ le corresponde una sucesión numérica $\{\alpha_i\}$ para la cual

$$x = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

(donde la convergencia se verifica en la topología en consideración) y de manera que si $\lim_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ entonces $\alpha_i = 0$ para todo i.
$\alpha_i = \alpha_i(x)$ es una función lineal de x y se denomina *i-ésimo coeficiente funcional* de la base $\{x_i\}$.

EJERCICIO 2. Toda sucesión $\{x_i : i = 1,2,3,\ldots,n\}$ de una base es linealmente independiente, y por lo tanto ningún x_i es nulo.

DEFINICION 2. Una base en X respecto de τ se dice de Schauder si $\alpha_i = \alpha_i(x)$ es continua en la topología τ para $i = 1,2,3,\ldots$.

TEOREMA 1. a) En un espacio de Banach X toda base fuerte $\{x_i\}$ es una base de Schauder,

b) Toda base débil $\{x_i\}$ para X, (τ = X*-topología), es una base débil de Schauder.

DEMOSTRACION. a) Sea Y el espacio normado definido por:

$$Y = \{\{\alpha_i\}: \lim_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \text{ existe}\} \; ; \; \|y\| = \|\{\alpha_i\}\| := \sup_n \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\|.$$

Sea T: Y $\longrightarrow$ X la aplicación lineal suryectiva definida de la siguiente manera:

$$x = T(y) = T(\{\alpha_i\}) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

T es acotada pues $\|x\| = \|T(y)\| \leqslant \|y\|$. Veamos a continuación que T es un homeomorfismo entre X e Y demostrando que Y es completo, y por lo tanto un espacio de Banach.

Sea $\{y_p\}$ una sucesión de Cauchy en Y. $\|y_p - y_q\| \geqslant \|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{p,i} - \alpha_{q,i}) x_i\|$ implica que $\{\sum_1^n \alpha_{p,i} x_i : p = 1,2,3,\dots,n\}$ es de Cauchy en el espacio de dimensión finita generado por $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Luego existe α_i tal que $\alpha_{p,i} \xrightarrow[p\to\infty]{} \alpha_i$ para todo i.

Sea $r = r(\varepsilon)$ tal que $\|y_p - y_r\| \leqslant \varepsilon/2$ para todo $p \geqslant r$. Luego de $\|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{p,i} - \alpha_{r,i}) x_i\| \leqslant \varepsilon/2$, para todo $p \geqslant r$ y todo n, sigue que:

$$\|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{r,i} - \alpha_i) x_i\| \leqslant \varepsilon/2, \text{ para todo n.}$$

Entonces: $\|\sum_{i=n}^{m} \alpha_i x_i\| \leqslant \|\sum_{i=n}^{m} (\alpha_i - \alpha_{r,i}) x_i\| + \|\sum_{i=n}^{m} \alpha_{r,i} x_i\| \leqslant \frac{3\varepsilon}{2}$ si m,n son bastante grandes, pues $\sum_1^k \alpha_{r,i} x_i$ converge en X. Luego, $\sum_1^k \alpha_i x_i$ es de Cauchy en X lo que prueba que $y = \{\alpha_i\} \in Y$. Además: $\|y - y_r\| = \sup_n \|\sum_1^n (\alpha_i - \alpha_{r,i}) x_i\| \leqslant \varepsilon/2$ implica que $\|y - y_p\| \leqslant \varepsilon$, para todo $p \geqslant r$, o sea $y_p \longrightarrow y$. Luego Y es un espacio de Banach isomorfo a X.

De la desigualdad: $|\alpha_n| . \|x_n\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i\| \leqslant 2.\|y\| \leqslant 2.\|T^{-1}\|.\|x\|$ sigue que $\alpha_n = \alpha_n(x)$ es acotada.

b) Definimos Y como en a) pero donde $\sum_1^\infty \alpha_i x_i = x$ debe entenderse como $\lim \sum_1^n \alpha_i x_i = x$ en la X*-topología de X. Veremos a continuación que nuevamente este espacio es de Banach. T: Y $\longrightarrow$ X, definida por $\{\alpha_i\} = y \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \alpha_i x_i =$ $= x$ (en la topología débil) define nuevamente un isomorfismo topológico entre Y y X. En consecuencia $\alpha_n(x)$ es una funcional lineal *continua en* X, (y por lo tanto es débilmente continua).

Sea $\{y_p\}$ de Cauchy en Y. Nuevamente $\alpha_{pi} \xrightarrow[p\to\infty]{} \alpha_i$. Además, si $y \in Y$, $\|Ty\| =$
$= \|\lim \sum_1^n \alpha_i x_i\| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |\lim x^*(\sum_1^n \alpha_i x_i)| \leqslant \sup_{\|x^*\|=1} \sup_n |x^*(\sum_1^n \alpha_i x_i)| =$
$= \sup_n \|\sum_1^n \alpha_i x_i\| = \|y\|$, y por lo tanto $\{Ty_p\}$ es de Cauchy en X, y converge a un elemento x.

Sea $r = r(\varepsilon)$ tal que si $s,t \geqslant r$ entonces $\|y_s - y_t\| \leqslant \varepsilon/3$. O sea, para todo n, $\|\sum_{i=1}^n (\alpha_{ti} - \alpha_{si})x_i\| \leqslant \varepsilon/3$. Sea $q \geqslant r$ elegido de manera que $\|Ty_q - x\| \leqslant \varepsilon/3$. Dada $x^* \in X^*$ se puede encontrar un $n_0 = n_0(\varepsilon, x^*)$ tal que si $n \geqslant n_0(\varepsilon, x^*)$ entonces

$$|x^*(\sum_{i=1}^n \alpha_{qi} x_i - Ty_q)| \leqslant \varepsilon/3.$$

Entonces, para todo $n \geqslant n_0(\varepsilon, x^*)$, si $\|x^*\| = 1$, $|x^*(\sum_{i\leqslant n} \alpha_i x_i - x)| \leqslant$
$\leqslant \|\sum_{i\leqslant n} (\alpha_i - \alpha_{q,i})x_i\| + |x^*(\sum_{i\leqslant n} \alpha_{q,i} x_i - Ty_q)| + \|Ty_q - x\| \leqslant \varepsilon$.
En consecuencia, $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \longrightarrow x$ en la X^*-topología, e $y = \{\alpha_i\} \in Y$.
Además: $\|\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{s,i})x_i\| \leqslant \varepsilon/3$ para $s \geqslant r$ y todo n implica que $\|y - y_s\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ si $s \geqslant r$. Es decir, Y es completo. Q.E.D.

5. DEFINICION 3. Un sistema $\{x_i\} \subset X$, $i = 1,2,3,\ldots$, se dirá *biortogonal* si existe $\{x_i^*\} \subset X^*$, $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. Las aplicaciones inyectivas U_n definidas por $U_n(x) = \sum_{i\leqslant n} x_i^*(x)x_i : X \longrightarrow X$, se llamarán *operadores de sumas parciales*.

EJERCICIO 3. a) $U_m U_n = U_{m\wedge n}$,

b) $\sum_{i\leqslant n} \alpha_i x_i \xrightarrow[n\to\infty]{} z \Rightarrow \alpha_i = x_i^*(z)$.

Denotaremos con $[A]$ a la variedad lineal generada por el subconjunto A del espacio de Banach X. $\overline{[A]} = [A]^-$ denotará al subespacio generado por A.

TEOREMA 2. Sea $\{x_i, x_i^*\}$ un sistema biortogonal tal que $\sup_n |x^*(U_n x)| < \infty$ para todo $x \in Y = \overline{[\{x_i\}]}$, para todo $x^* \in X^*$. Entonces $\{x_i\}$ es una base para Y. Si Y=X entonces $\{x_i^*\}$ es una base para $Z = \overline{[\{x_i^*\}]}$.

DEMOSTRACION. De la hipótesis surge que si $\|U_n\|$ designa la norma de U_n como operador de Y en Y entonces $\sup_n \|U_n\| = M < \infty$. Dado $x \in Y$ y $\varepsilon > 0$ existe $y_j \in [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_j]$ tal que $\|x - y_j\| < \varepsilon$. Como $U_n\, y_j = y_j$ para todo $n \geqslant j$,

tenemos: $\|x-U_nx\| \leqslant \|x-y_j\| + \|y_j-U_ny_j\| + \|U_ny_j-U_nx\| \leqslant (1+M)\varepsilon$.
Luego, $x = \lim_{n\to\infty} U_nx$, y $\{x_i\}$ es una base para Y.
Sea ahora $x^* \in Z$, y $U_n^*(x^*) = \sum_{i\leq n} x_i(x^*)x_i^*$. Entonces, si $x \in X$:
$(U_n^*x^*)(x) = \sum_{i\leq n} x_i(x^*)x_i^*(x) = x^*(U_nx)$ implica que en Z se verifica: $\|U_n^*\| \leqslant M$.
Puede repetirse ahora la demostración precedente. Q.E.D.

NOTA. Obsérvese que si Y=X y X es reflexivo entonces $Z=X^*$.

TEOREMA 3. $\{x_i\}$ es una base para X si y sólo si existe una sucesión $\{x_i^*\} \subset X^*$ de manera que $\{x_i, x_i^*\}$ es un sistema biortogonal para X tal que para todo $x \in X$, $U_nx \longrightarrow x$ en norma.

DEMOSTRACION. Si $\{x_i, x_i^*\}$ es un sistema biortogonal tal que U_nx converge fuertemente a x para todo $x \in X$ entonces $\{x_i\}$ es una base para X.
Supongamos ahora que esto último ocurre. Para todo $x \in X$, es $x = \sum \alpha_i x_i$ donde $\alpha_i = \alpha_i(x)$ es una funcional lineal continua. Luego existe $x_i^* \in X^*$ tal que $x_i^*(x) = \alpha_i(x)$ para todo $x \in X$. La unicidad del desarrollo implica también que $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. Q.E.D.

TEOREMA 4. (Teorema de la base débil de Banach). $\{x_i\}$ es una base para X si y sólo si es una base débil para X.

DEMOSTRACION. Como convergencia fuerte implica convergencia débil, resulta que "base fuerte implica base débil". Sea $\{x_i\}$ una base débil para X. Entonces $x^*(\sum_{i\leq n} \alpha_i(x)x_i) \longrightarrow x^*(x)$ para todo $x^* \in X^*$, para todo $x \in X$, donde $\alpha_i(x)$ es una funcional lineal continua, (cf.b), Teorema 1). La unicidad de los coeficientes asegura que α_i - que es identificable a un elemento $x_i^* \in X^*$- verifica $\alpha_i(x_j) = \delta_{ij}$. O sea, $\{x_i, x_i^*\}$ es un sistema biortogonal para el cual U_nx converge débilmente a x. Luego,

$$\sup_n |x^*(U_nx)| < \infty \quad \text{para todo } x \in X, \text{ para todo } x^* \in X^*.$$

Del teorema 2 se deduce que $\{x_i\}$ es una base para X. Q.E.D.

EJERCICIO 4. a) Mostrar que ningún elemento de una base está en la clausura del conjunto consistente de los otros elementos de la base.
b) Si X posee una base, entonces X es separable.

NOTA. P. Enflo demostró en 1973 que la recíproca de b) es falsa: existe un espacio de Banach separable sin una base.

6. BASES DE RIESZ.

DEFINICION 4. Sea X un espacio de Banach. Dos bases $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, en X se dirán *equivalentes* si existe un operador T acotado e inversible de X sobre X tal que $Tx_n = y_n$ para todo n.

DEFINICION 5. Sea H un espacio de Hilbert. $\{f_n\}$ es una *base de Riesz* en H si es equivalente a una base ortonormal $\{e_n\}$.

Como $Tf_n = e_n$, $T^{-1}e_n = f_n$ para todo n, resulta que para todo n:

(*) $\qquad 0 < C \leqslant \|f_n\| \leqslant D < \infty \quad , \quad C = \|T\|^{-1} \quad , \quad D = \|T^{-1}\|.$

Definiendo $S\, e_n = \|f_n\|.e_n$ tenemos: $(ST)(f_n/\|f_n\|) = e_n$ y por lo tanto $\{f_n/\|f_n\|\}$ *es también una base de Riesz.*

TEOREMA 5. Sea H un espacio de Hilbert. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) $\{f_n\}$ es una base de Riesz,

(ii) existe una norma de espacio de Hilbert sobre H, $\|\cdot\|_1$, equivalente a la dada originalmente, respecto a la cual $\{f_n\}$ es una base ortonormal,

(iii) $\{f_n\}$ es completa en H y existen constantes positivas A y B tales que:

$$A.\sum_1^n |c_i|^2 \leqslant \|\sum_1^n c_i f_i\|^2 \leqslant B.\sum_1^n |c_i|^2 .$$

para todo n y todo conjunto de escalares $c_1,\dots,c_n$.

DEMOSTRACION. (i) $\Rightarrow$ (ii). Definamos $(f,g)_1 = (Tf,Tg)$. Entonces: $\|f\| \,/\, \|T^{-1}\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant \|T\|.\|f\|$, o sea: $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$. Además: $(f_i,f_j)_1 = (Tf_i,Tf_j) = (e_i,e_j) = \delta_{ij}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Existe $K > 0$ tal que $\frac{1}{K}\|f\|_1 \leqslant \|f\| \leqslant K\,\|f\|_1$. Luego:

$$\frac{1}{K^2}.\sum_1^n |c_i|^2 \leqslant \|\sum_1^n c_i f_i\|^2 \leqslant K^2.\sum_1^n |c_i|^2 .$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal arbitraria de H. El operador lineal definido por $Te_n = f_n$ es acotado lo mismo que el definido por $Sf_n = e_n$. Además $ST = I$. Como $\{f_n\}$ es completa en H, $TS = I$. O sea, $S = T^{-1}$, y $\{f_n\}$ es una base de Riesz para H. Q.E.D.

NOTA. La sucesión $\{|t|^{1/4}.e^{int};\ n = \ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ es una base para $L^2(-\pi,\pi)$ que verifica la desigualdad en (*). No es una base de Riesz (Babenko, (1948)).

7. FAMILIAS COMPLETAS, CERRADAS, APROXIMACION Y EJEMPLOS.

a) TEOREMA DE WEIERSTRASS (1885). Sea f continua en $[0,1]$ y $\varepsilon > 0$. Existe n y un polinomio $P_n(t)$ de grado n tal que $|f(t)-P_n(t)| < \varepsilon$ en $[0,1]$.

DEMOSTRACION. Sea X una variable aleatoria que toma el valor 1 con probabilidad t y el valor 0 con probabilidad 1-t. Sea $S_n = X_1 + X_2 + X_3 +\ldots+ X_n$ con $X_1,X_2,X_3,\ldots,X_n$ copias independientes de X. Entonces:

$$P(S_n = p) = \binom{n}{p} t^p (1-t)^{n-p} = r_p\ ,\ \sum_{p=0}^{n} r_p = 1.$$

La esperanza matemática de S_n es igual a

$$E(S_n) = \sum_1^n E(X_i) = n.t = \sum_{p=1}^{n} p.P(S_n = p).$$

La varianza es:

$$\mathrm{Var}\ S_n = E(S_n - ES_n)^2 = \sum_{p=0}^{n} P(S_n = p).(p-nt)^2 = \sum_{p=0}^{n} (p-nt)^2.r_p =$$

$$= E(S_n^2) - (ES_n)^2 = E(\sum_1^n X_i.\sum_1^n X_j) - (nt)^2 = E(\sum_1^n X_i^2) + \sum_{i\neq j} E(X_i)E(X_j) - (nt)^2 =$$

$$= \sum_1^n E(X_i^2) + n(n-1)t^2 - (nt)^2 = nt-nt^2 = nt(1-t).$$

Entonces, si elegimos n bastante grande $|f(\frac{p}{n}) - f(t)| \leqslant \varepsilon$ si $|\frac{p}{n} - t| \leqslant \delta$ y tendremos:

$$|f(t) - \sum_{p=0}^{n} f(\tfrac{p}{n}).r_p(t)| \leqslant \sum_{|p-nt|\leq\delta n} |f(t) - f(\tfrac{p}{n})|.r_p + \sum_{|p-nt|>\delta n} \{|f(t)| + |f(\tfrac{p}{n})|\}r_p$$

$$\leqslant \sum_0^n \varepsilon.r_p + 2.\|f\|_\infty.\sum_{|p-nt|>\delta n} r_p \leqslant \varepsilon + 2.\|f\|_\infty.P(|S_n-nt| > n.\delta) \leqslant \text{(Usando la de-}$$

$$\text{sigualdad de Tchebyscheff)} \leqslant \varepsilon + 2.\|f\|_\infty.\frac{\mathrm{Var}\ S_n}{(n.\delta)^2} \leqslant \left(\text{si } n > \frac{2.\|f\|_\infty}{\varepsilon\delta^2}\right) \leqslant$$

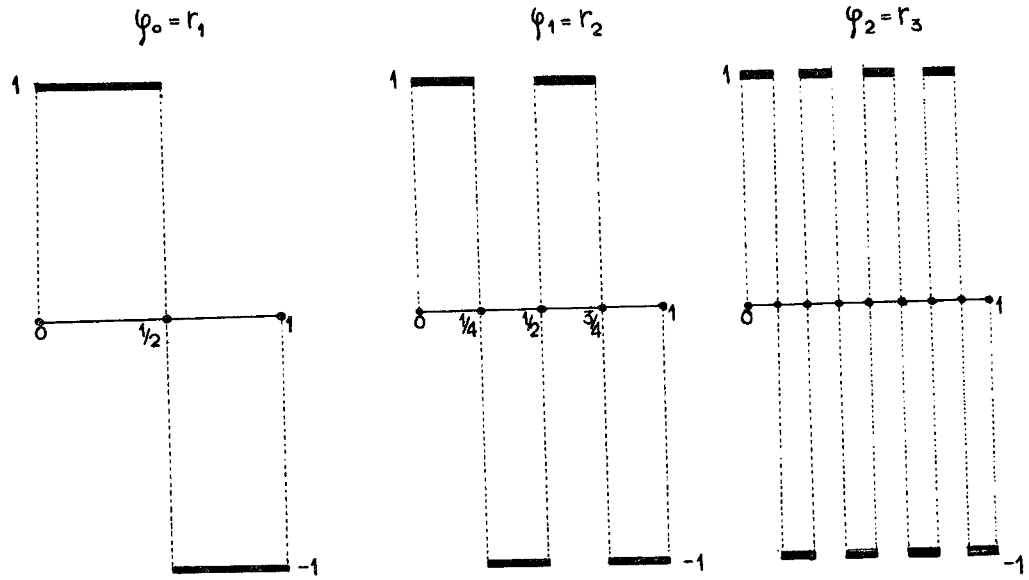
$$\leqslant \varepsilon + \frac{n^2t(1-t)}{n}.\varepsilon \leqslant 2\varepsilon. \qquad \text{Q.E.D.}$$

b) ALGUNOS SISTEMAS ORTOGONALES EN L^2.

i) La sucesión 1, cos t, sen t, cos 2t, sen 2t,... , es ortogonal en $L^2(0,2\pi)$.

ii) Los sistemas $\{\cos it:\ i = 0,1,2,3,\ldots\}$ y $\{\mathrm{sen}\ jt:\ j = 1,2,3,\ldots\}$ son ortogonales en $L^2(0,\pi)$.

iii) *El sistema de Rademacher:* $r_k(t)$, $k = 1,2,3,\dots$ es la función definida de la siguiente manera: Si t es un racional diádico de $[0,1]$, $r_k(t) = 0$; si t no lo es, entonces $r_k(t) = 1$ si la k-ésima cifra del desarrollo diádico de t es 0, y $r_k(t) = -1$ si esa cifra es 1.



Se ve fácilmente que $\int_0^1 r_m . r_n \, dt = \delta_{mn}$. Otra manera de definir $r_k(t)$ es por medio de la función seno:

$$\varphi_{k-1} = r_k(t) = \text{sign } (\text{sen } 2^k.\pi.t) \;,\; k = 1,2,3,\dots$$

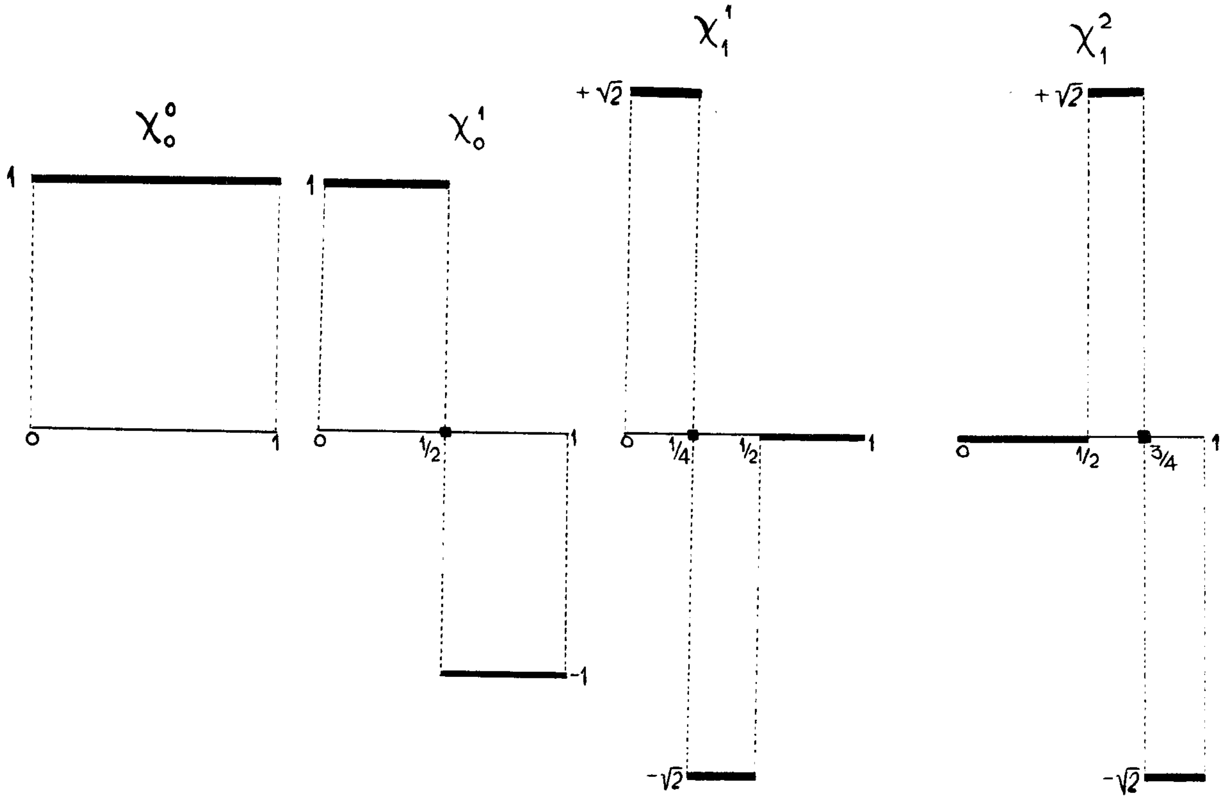
iv) *El sistema de Haar:* χ_0^0; χ_0^1; χ_1^1; χ_1^2; χ_2^2; χ_2^3; χ_2^4; ... donde:

$\chi_0^0 = +1$ en $[0,1]$,

$\chi_0^1(t) = +1$ en $[0,\frac{1}{2})$, $= -1$ en $(\frac{1}{2},1]$, 0 en otros puntos,

$\chi_1^1(t) = +\sqrt{2}$ en $[0,\frac{1}{4})$, $= -\sqrt{2}$ en $(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, 0 en otros puntos,

$\chi_1^2(t) = +\sqrt{2}$ en $[\frac{1}{2},\frac{3}{4})$, $-\sqrt{2}$ en $(\frac{3}{4},1]$, 0 en otros puntos, etcétera.



Entonces, cada una de las funciones χ_n^1; χ_n^2; ... ; $\chi_n^{2^n}$ toma los valores $\pm\sqrt{2^n}$ en sendos intervalos semiabiertos de longitud $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$ y fuera de ellos vale 0. Además $\int_0^1 |\chi_n^k|^2\, dt = 1$. Se ve fácilmente $\int_0^1 \chi_n^k(t).\chi_m^j(t)\, dt = 0$ si $m > n$, o si $m=n$ y $k\neq j$. O sea, el sistema de Haar es ortonormal.

Un conjunto $\{\varphi_\alpha\}$ de elementos de B,espacio de Banach, se dice *completo* si toda funcional F de B* que verifica $F(\varphi_\alpha) = 0$ para todo α,es idénticamente nula: F=0. Usando el teorema de Weierstrass se ve enseguida que la familia $\{1,t,t^2,...\}$ de $C([0,1])$ es completa.

En efecto, esto resulta del hecho general que si una funcional continua se anula en un conjunto *denso* se anula en todo el espacio.

Otro conjunto denso en $C([0,1])$ viene dado por la familia de polinomios trigonométricos.

2° TEOREMA DE WEIERSTRASS. Si F(t) es una función continua de período 2π entonces es aproximable uniformemente por polinomios trigonométricos: para todo $\varepsilon > 0$, existe $S_n(t) = a_0 + \sum_1^n (a_k.\cos kt + b_k.\text{sen } kt)$, $n = n(\varepsilon)$, tal que $|F(t) - S_n(t)| \leq \varepsilon$.

DEMOSTRACION. Sean $\varphi(t) = \frac{F(t)+F(-t)}{2}$, $\psi(t) = \frac{F(t)-F(-t)}{2}$ .sen t.

Pongamos $x = \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Entonces $-1 \leqslant x \leqslant 1$. $\varphi(t) = f(x)$ y $\psi(t) = g(x)$ se obtienen reemplazando t por arc cos x, y por lo tanto son funciones continuas en $[-1,1]$. Del (primer) teorema de Weierstrass sigue que existen polinomios P(x) y Q(x) que verifican:

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\ ,\ |g(x) - Q(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{en} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

En consecuencia, en $0 \leqslant t \leqslant \pi$:

$$(2) \qquad |\varphi(t) - P(\cos t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\ , \quad |\psi(t) - Q(\cos t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\ .$$

Pero $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son pares en t lo mismo que P(cos t) y Q(cos t), luego (2) vale aún en $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Por otra parte $F(t).\text{sen } t = \varphi(t)\text{sen } t + \psi(t)$. Si utilizamos (2) y definimos $U(t) = Q(\cos t) + P(\cos t).\ \text{sen } t$, obtenemos:

$$(3) \qquad |F(t).\text{sen } t - U(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{, para todo t.}$$

Aplicando el mismo argumento a $F(\frac{\pi}{2} - t)$ encontramos

$V(t) = Q_1(\cos t) + P_1(\cos t).\text{sen } t$, tal que:

$$(4) \qquad |F(\tfrac{\pi}{2} - t).\text{sen } t - V(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ , para todo t.}$$

O sea,

$$(5) \qquad |F(z).\cos z - V(\tfrac{\pi}{2} - z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ , para todo z.}$$

De (3) y (5) obtenemos:

$$|F(t).\text{sen}^2 t - U(t).\text{sen } t| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y}$$

$|F(t).\cos^2 t - V(\frac{\pi}{2} - t).\cos t| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, y por lo tanto:

$|F(t) - U(t).\text{sen } t - V(\frac{\pi}{2} - t).\cos t| \leqslant \varepsilon$.

Basta observar ahora que U(t).sen t y $V(\frac{\pi}{2} - t).\cos t$ son polinomios trigonométricos. Q.E.D.

EJERCICIO. Demostrar la última proposición.

Queremos ahora demostrar que el sistema trigonométrico es *completo respecto de* $L^1(0,2\pi)$. Por esto entendemos que si $f \in L^1(\subset (L^\infty)^*)$ verifica:

$$\int_0^{2\pi} f(t) \begin{matrix}\cos nt\\ \text{sen } nt\end{matrix}\ dt = 0 \ , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

entonces f=0 c.d. (El sistema trigonométrico (normalizado) como subconjunto de L^2 es completo: esto sigue de la relación $\|f - S_n\|_2^2 = \sum_{n+1}^{\infty} c_k^2$, donde S_n es la n-ésima suma parcial del desarrollo de Fourier de f).

Sea $F(t) = \int_0^t f(u)\, du$. Entonces $F(2\pi) = 0 = F(0)$ y vale:

$$0 = -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(t).\text{sen } nt.dt = \int_0^{2\pi} F(t).\cos nt.dt \quad ,$$

$$0 = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(t).\cos nt.dt = \int_0^{2\pi} F(t).\text{sen } nt.dt \quad ,$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t).dt.$$

En consecuencia, si llamamos $g(t) \equiv F(t) - \alpha$, tenemos:

$$(3) \qquad \int_0^{2\pi} g(t) \begin{matrix} \cos nt \\ \text{sen } nt \end{matrix} \; dt = 0 \ , \quad n = 0,1,2,\ldots \ .$$

Basta demostrar que $g(t) \equiv F(t) - \alpha = 0$. En ese caso $F(0) = 0$ implica $\alpha = 0$ y por lo tanto $F(t) \equiv 0$. De aquí sigue $f(t) = 0$ c.d.

Esto significa que hemos reducido el problema original a sí mismo pero donde f es reemplazada por una función continua g.

Usando el 2° teorema de Weierstrass encontramos una sucesión en $[0,2\pi]$ de polinomios trigonométricos $T_n(t)$ tales que:

$$T_n(t) \xrightarrow{\cdot} g \ .$$

Luego de (3):

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \, dt = 0 \quad ,$$

y por lo tanto $g(t) \equiv 0$. Q.E.D.

Obviamente el sistema de Rademacher no es completo ni en $C([0,1])$ ni en $L^2(0,1)$. (Demostrarlo).

Veamos que *el sistema de Haar es completo respecto de* $L^1(0,1)$. Supongamos que $f \in L^1(0,1)$ y que $F(t) = \int_0^t f(x)\, dx$. La hipótesis:

$$\int_0^1 f(t)\, \chi_n^k(t)\, dt = 0 \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots \ , \ k = 1,2,\ldots,2^n$$

implica:

$$F\left(\frac{2k}{2^{n-1}}\right) - 2F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) + F\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\right) = 0.$$

De aquí sigue que (n=0, k=1) los puntos del gráfico de F con coordenadas $x = 0$, $x = 1/2$ y $x = 1$ son colineales, y si n=1, k=1, que los de coordenadas x=0, 1/4 y 1/2 también lo son, lo mismo que los de coordenadas $x = 1/2$, 3/4 y 1 (k=2), etc. La continuidad de F implica ahora que $F(t) \equiv c.t+d$. Pero $0 = \int_0^1 f(t)\, X_0^0(t)\, dt = F(1) - F(0) \Rightarrow F(t) \equiv d$. Luego $f(t) = 0$ c.d. Q.E.D.

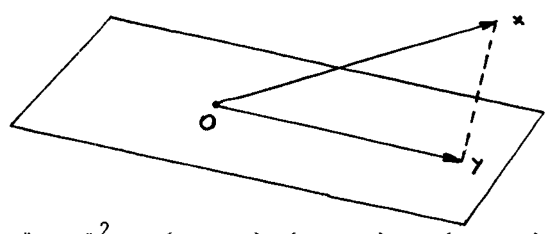
Una familia de elementos de B se dice *cerrada* si el conjunto de sus combinaciones lineales es denso en B. $A \subseteq B$ se dice *total* si $[A]^- = B$, o más precisamente: *A es total en* B. Por el momento entonces decir que la familia A ($\subset$ B) es cerrada es lo mismo que decir que A es total. Por ejemplo, $\{1,t,t^2,\ldots\}$ es total en $C([0,1])$ (y en $L^1([0,1])$). Sabemos que en $L^2([0,1])$ un sistema $\{\varphi_i\}$ *es cerrado si y sólo si es completo*; y que si el sistema es además ortonormal entonces *la mejor aproximación* a $f \in L^2$ obtenida entre las combinaciones lineales de $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m$ es la dada por $\sum_1^m c_i\varphi_i$ con $\{c_i\}$ la familia de coeficientes de Fourier de f respecto a $\{\varphi_i\}$: $c_j = \int_0^1 f(x).\varphi_j(x)\, dx$.

Sea $\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}$ un conjunto de L^2 que genera el subespacio G. El *gramiano o determinante de Gram* viene dado:

$$G(g_1,g_2,\ldots,g_n) = \begin{vmatrix} (g_1,g_1) & (g_2,g_1) & \ldots\ldots & (g_n,g_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ (g_1,g_n) & (g_2,g_n) & \ldots\ldots & (g_n,g_n) \end{vmatrix}$$

Es distinto de cero si y sólo si el sistema es linealmente independiente. En este caso, si $y = \lambda_1.g_1 + \lambda_2.g_2 + \ldots + \lambda_n.g_n$ es el vector en G más próximo a x, se verifica:

$$(4)\quad \|x - y\|^2 = \frac{G(x,g_1,g_2,\ldots,g_n)}{G(g_1,g_2,\ldots,g_n)} = \min_{\{a_k\}} \|x-a_1g_1-a_2g_2-\ldots-a_ng_n\|^2$$



En efecto, $d^2 = \|x-y\|^2 = (x-y,x)-(x-y,y) = (x-y,x) = (x,x)-(y,x)$ y la hipótesis sobre y implican:

$$\begin{cases} \lambda_1(g_1,g_1) + \lambda_2(g_2,g_1) + \dots + \lambda_n(g_n,g_1) = (x,g_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1(g_1,g_n) + \dots\dots\dots\dots + \lambda_n(g_n,g_n) = (x,g_n) \\ \lambda_1(g_1,x) + \dots\dots\dots\dots + \lambda_n(g_n,x) = \|x\|^2 - d^2. \end{cases}$$

Luego: $\begin{vmatrix} (g_1,g_1) & \dots\dots & (x,g_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (g_1,g_n) & \dots\dots & (x,g_n) \\ (g_1,x) & \dots\dots & (x,x)-d^2 \end{vmatrix} = 0$, de donde resulta (4).

De aquí se deduce que siempre $G(g_1,g_2,\dots,g_n) \geqslant 0$. Además si $g_0,g_1,g_2,\dots,g_n$ son *linealmente independientes* y $m < n$:

(5) $\quad G(g_0,g_1,g_2,\dots,g_n) \leqslant G(g_0,g_1,g_2,\dots,g_m).G(g_{m+1},\dots,g_n).$

En efecto, $\min\limits_{\alpha} \|g_k - \alpha_{k+1}\cdot g_{k+1} - \alpha_{k+2}\cdot g_{k+2} - \dots - \alpha_n\cdot g_n\| \leqslant$

$\leqslant \min\limits_{\beta} \|g_k - \beta_{k+1}\cdot g_{k+1} - \beta_{k+2}\cdot g_{k+2} - \dots - \beta_m\cdot g_m\|$, y

$\min\limits_{\gamma} \|g_m - \gamma_{m+1}\cdot g_{m+1} - \gamma_{m+2}\cdot g_{m+2} - \dots - \gamma_n\cdot g_n\| \leqslant \|g_m\|$, implican:

$$\frac{G(g_k,g_{k+1},\dots,g_n)}{G(g_{k+1},g_{k+2},\dots,g_n)} \leqslant \frac{G(g_k,g_{k+1},\dots,g_m)}{G(g_{k+1},g_{k+2},\dots,g_m)} \quad ;$$

$$\frac{G(g_m,g_{m+1},\dots,g_n)}{G(g_m)} \leqslant G(g_{m+1},g_{m+2},\dots,g_n).$$

Tomando $k = 0$, obtenemos (5). En efecto:

$$(6) \qquad \frac{G(g_0,g_1,g_2,\dots,g_n)}{G(g_0,g_1,g_2,\dots,g_m)} \leqslant \frac{G(g_1,g_2,\dots,g_n)}{G(g_1,g_2,\dots,g_m)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{G(g_2,g_3,g_4,\dots,g_n)}{G(g_2,g_3,g_4,\dots,g_m)} \leqslant \frac{G(g_3,g_4,g_5,\dots,g_n)}{G(g_3,g_4,g_5,\dots,g_m)} \quad \dots\dots$$

$$\dots\dots \leqslant \frac{G(g_m,g_{m+1},\dots,g_n)}{G(g_m)} \leqslant G(g_{m+1},g_{m+2},\dots,g_n).$$

El signo de igualdad se presentará en (5) exactamente cuando para $k = 0,1,2,\dots,m-1$:

$\min\limits_{\alpha} \|g_k - \alpha_{k+1}\cdot g_{k+1} - \alpha_{k+2}\cdot g_{k+2} - \dots - \alpha_n\cdot g_n\| =$

$$= \min_{\beta} \|g_k - \beta_{k+1}\cdot g_{k+1} - \beta_{k+2}\cdot g_{k+2} - \dots - \beta_m\cdot g_m\| \quad , \quad y$$

$$\min_{\gamma} \|g_m - \gamma_{m+1}\cdot g_{m+1} - \gamma_{m+2}\cdot g_{m+2} - \dots - \gamma_n\cdot g_n\| = \|g_m\|.$$

Esta última es posible exactamente cuando $(g_m,g_i) = 0$, con $i = m+1,m+2,m+3,\dots,n$.

Considerando sucesivamente $k = m-1,m-2,m-3,\dots,0$, obtenemos:

$$(g_k,g_i) = 0 \text{ con } i = m+1,m+2,m+3,\dots,n \quad \text{y} \quad k = 0,1,2,\dots,m,$$

como condición necesaria y suficiente para la presentación de signos igual en (6). (Demostrarlo). En consecuencia, en (5) vale el signo *igual* si y sólo si $\{g_0,g_1,g_2,\dots,g_m\}$ es un sistema *ortogonal* a $\{g_{m+1},g_{m+2},g_{m+3},\dots,g_n\}$.

8. EL TEOREMA DE MÜNTZ.

Una consecuencia del primer teorema de Weierstrass es que si $f \in C([0,1])$ y $\int_0^1 f(x).x^n\,dx = 0$, $n = 0,1,2,\dots$, entonces $f(x) \equiv 0$ (Teorema de Lerch) (De esto sigue también que t^n: $n = 0,1,2,\dots$ es completo en $L^1(0,1)$). Sin embargo a la misma conclusión se llega con otras sucesiones de exponentes.

PROBLEMA. ¿Cómo debe ser $\{p\} = \{p_\alpha,p_\beta,p_\gamma,\dots\}$ para que la familia $\{t^{p_\alpha},t^{p_\beta},t^{p_\gamma},\dots\}$ sea cerrada en $L^2(0,1)$?.

Supondremos: $\alpha \neq \beta \Rightarrow p_\alpha \neq p_\beta$. Entonces necesariamente: $p_\alpha,p_\beta,p_\gamma,\dots > -\frac{1}{2}$.

TEOREMA (Müntz). Sea $T = \{t^p\}$, $p > -\frac{1}{2}$. El sistema T de $L^2(0,1)$ es cerrado si y sólo si una de las siguientes tres condiciones se verifica:

α) $\{p\}$ tiene un punto de acumulación p_∞, $\infty > p_\infty > -\frac{1}{2}$,

β) existe una subsucesión $\{p_i\}$ de $\{p\}$ tal que:

$$\lim_i p_i = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sum_1^\infty |p_i + \tfrac{1}{2}| = \infty,$$

γ) existe una subsucesión $\{p_i\}$ de $\{p\}$ tal que $(p_i \neq 0)$:

$$\lim_i p_i = \infty \quad , \quad \sum_1^\infty \frac{1}{p_i} = \infty.$$

Antes de pasar a la demostración del teorema veamos un *resultado debido a Cauchy sobre determinantes:*

$$D_m = \det \left(\frac{1}{a_i+b_k}\right)_{i,k=1,2,\dots,m} = \frac{\prod_{i>k} (a_i-a_k).(b_i-b_k)}{\prod_{i,k=1}^{m,n} (a_i+b_k)} = \frac{A_m.B_m}{C_m} \quad \text{donde}$$

$$A_m = \prod_{i>k} (a_i-a_k) \quad , \quad B_m = \prod_{i>k} (b_i-b_k) \quad , \quad C_m = \prod_1^m \prod_1^m (a_i+b_k).$$

D_m es una función racional de grado $-m$ en a_i, b_k. C_m es el común denominador de los sumandos de la función racional D_m y tiene grado m^2 por lo que el numerador debe ser de grado m^2-m. Como $a_i = a_k$ $(i \neq k)$ o $b_i = b_k$ $(i \neq k)$ implican $D_m = 0$, necesariamente el numerador debe anularse también en esa situación. O sea, el numerador es divisible por a_i-b_k, b_i-b_k, $i > k$. Como el número de estos es m^2-m, sólo queda por determinar una constante para conocer D_m:

$$D_m = \beta_m \prod_{k<j} (a_j-a_k).\prod_{k<j} (b_j-b_k) / \prod_1^m \prod_1^m (a_\lambda+b_\mu).$$

Obviamente $\beta_1 = 1$. Multiplicando la última fila de D_m por a_m y haciendo $a_m \longrightarrow \infty$ y luego $b_m \longrightarrow \infty$ obtenemos $a_m.D_m \longrightarrow D_{m-1}$.

Pero igualmente $\dfrac{a_m.A_m.B_m}{C_m} \longrightarrow \dfrac{A_{m-1}.B_{m-1}}{C_{m-1}}$. De aquí sigue que $\beta_m = \beta_{m-1}$, y por lo tanto $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_m$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA. Observemos que:

$$\int_0^1 t^{q+p}\, dt = \int_0^1 t^q.t^p\, dt = \frac{1}{p+q+1}$$

Si designamos con T_n a $\{t^{p_1}, t^{p_2}, t^{p_3}, \dots, t^{p_n}\}$, y con $W_n(t)$ a la mejor aproximación a t^q en $[T_n]$ (en norma 2) entonces:

$$\|W_n(t) - t^q\|_2^2 = G(t^q, t^{p_1}, t^{p_2}, \dots, t^{p_n}) \;/\; G(t^{p_1}, t^{p_2}, \dots, t^{p_n}).$$

El numerador es igual a

$$G(t^q, t^{p_1}, t^{p_2}, \dots, t^{p_n}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{q+q+1} & \frac{1}{q+p_1+1} & \dots\dots & \frac{1}{q+p_n+1} \\ \frac{1}{p_1+q+1} & \frac{1}{p_1+p_1+1} & \dots\dots & \frac{1}{p_1+p_n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{p_n+q+1} & \frac{1}{p_n+p_1+1} & \dots\dots & \frac{1}{p_n+p_n+1} \end{vmatrix}$$

donde el gramiano $G(t^{p_1},t^{p_2},\dots,t^{p_n})$ aparece como subdeterminante.

Usando el resultado de Cauchy con $a_i = p_i + \frac{1}{2}$, $b_i = p_i + \frac{1}{2}$ obtenemos:

$$G(t^{p_1},t^{p_2},\dots,t^{p_n}) = \frac{\prod_{i>k} (p_i - p_k)^2}{\prod_1^m \prod_1^m (p_i+p_k+1)} \text{. Análogamente:}$$

$$G(t^q,t^{p_1},t^{p_2},\dots,t^{p_n}) = G(t^{p_1},t^{p_2},\dots,t^{p_n}) . \frac{\prod_1^n (p_i-q)^2}{\prod_1^n (p_i+q+1)^2 . (2q+1)} .$$

Luego:

$$\| t^q - W_n(t) \|^2 = \frac{1}{(2q+1)} . \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i-q}{p_i+q+1}\right)^2 .$$

Condición suficiente para que $\{t^{p_i}\}$ sea cerrada en L^2 es que para todo $q > 0$, $\| t^q - W_n(t) \|$ tienda a cero cuando $n \longrightarrow \infty$. Esto equivale a:

$$\text{(6)} \qquad \lim \prod_1^n \left(\frac{p_i-q}{p_i+q+1}\right)^2 := \prod_1^\infty \left(\frac{p_i-q}{p_i+q+1}\right)^2 = 0.$$

α) Sea $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$, y tal que $\lim p_j = p_\infty$, $-\frac{1}{2} < p_\infty < \infty$.

Entonces $\frac{p_i-q}{p_i+q+1} \longrightarrow \frac{p_\infty-q}{p_\infty+q+1}$ y como $q > 0$, $\left|\frac{p_\infty-q}{p_\infty+q+1}\right| < 1$. De aquí sigue(6).

Sea ahora $-\frac{1}{2}$ punto límite de $\{p_i\}$. El producto finito en (6) se escribe entonces así:

$$\text{(7)} \qquad \prod_1^n \left(\frac{p_i-q}{p_i+q+1}\right)^2 = \frac{\prod_1^n \left(1 - \frac{p_i+1/2}{q+1/2}\right)^2}{\prod_1^n \left(1 + \frac{p_i+1/2}{q+1/2}\right)^2} .$$

β) Supongamos $\sum_{i=1}^\infty |p_i + \frac{1}{2}| < \infty$. En este caso (7) diverge a 0 cuando $n \longrightarrow \infty$ si y sólo si un factor se anula, o sea exactamente cuando $q = p_i$ para algún i. Es decir para $q \neq p_i$ para todo i, t^q no es aproximable por combinaciones finitas de potencias t^{p_i}.

Si $\sum |p_i + \frac{1}{2}| = \infty$, como $0 < \frac{p_i + 1/2}{q + 1/2} < 1$, $i \geqslant i_0$,

entonces: $\prod_{i_0}^n \left(1 - \frac{p_i+1/2}{q+1/2}\right) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} 0$ y $\| W_n(t) - t^q \| \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$.

γ) Sea $p_i \longrightarrow +\infty$, $q \neq p_i$, para todo i. Entonces:

$$\prod_1^n \left(\frac{p_i-q}{p_i+q+1}\right)^2 = \left(\frac{\prod_1^n (1 - \frac{q}{p_i})}{\prod_1^n (1 + \frac{1+q}{p_i})}\right)^2 .$$

Supongamos $\sum \frac{1}{p_i} < \infty$. Entonces tanto el numerador como el denominador de la última fracción convergen a números distintos de cero y t^q no es aproximable. Si $\sum \frac{1}{p_i} = +\infty$ entonces el numerador diverge a 0 y el denominador diverge a $+\infty$.

Queda probada así la suficiencia de las condiciones enunciadas en el teorema. Veamos ahora la necesidad.

Supongamos ahora T cerrada. Necesariamente $\{p\}$ es infinita. Si no se verifica α), $\{p\}$ tiene sólo dos puntos de acumulación posibles: $p_\infty = -1/2$ y $p_\infty = +\infty$. Si el único punto de acumulación es $+\infty$ toda la sucesión converge a $+\infty$. De γ) sigue que necesariamente $\sum \frac{1}{p_i} = \infty$.

En cambio, si el único punto de acumulación es $-\frac{1}{2}$, la sucesión $\{p\}$ converge a $-\frac{1}{2}$ y de β) concluímos que: $\sum |p_i + \frac{1}{2}| = +\infty$.

Si hay exactamente dos puntos de acumulación entonces $\{p\}$ contiene dos subsucesiones: $\{p_i\},\{p_i'\}$, tales que $\{p\} = \{p_i\} \cup \{p_i'\}$, y además $p_i \longrightarrow +\infty$, $p_i' \longrightarrow -\frac{1}{2}$. Si fuera $\sum \frac{1}{p_i} < \infty$ y además $\sum |p_i' + \frac{1}{2}| < \infty$, de β) y γ) seguiría que t^q, $q \notin \{p\}$, no sería aproximable en L^2. En efecto, necesariamente:

$$\prod_1^\infty \left(\frac{p_i-q}{p_i+q+1}\right)^2 = a > 0 \ , \ \prod_1^\infty \left(\frac{p_i'-q}{p_i'+q+1}\right)^2 = b > 0. \text{ Luego } C = \frac{a.b}{2q+1} > 0 \ ,$$

$\|t^q - W_{2n}(t)\|^2 = \{\prod_{i=1}^n \frac{(p_i-q)^2(p_i'-q)^2}{(p_i+q+1)^2(p_i'+q+1)^2}\} / (2q+1) \longrightarrow C$ si $W_{2n}(t)$ es la mejor aproximación en $[t^{p_1},t^{p_1'},t^{p_2},t^{p_2'},\dots,t^{p_n},t^{p_n'}]$. Q.E.D.

TEOREMA DE EULER. Si p_j designa al j-ésimo primo entonces $\sum_{j=1}^\infty p_j^{-1} = \infty$.

DEMOSTRACION. Sean $2,3,5,\dots,p_j$ los primeros j primos y $N(x) = \#\{n: n \leq x, p \nmid n \text{ si } p > p_j\}$. Escribamos $n = n_1^2.m$, m no divisible por el cuadrado de un primo; entonces

$$m = 2^{b_1}.3^{b_2}. \dots .p_j^{b_j} \ , \ b_i = 0 \text{ ó } 1.$$

Hay exactamente 2^j elecciones de exponentes y por lo tanto 2^j diferentes valores de m a lo sumo. Además $n_1 \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{x}$ y n_1 toma un valor entre a lo sumo $\sqrt{x}$ de ellos.

En consecuencia: $N(x) \leq 2^j.\sqrt{x}$. Si $\sum \frac{1}{p_1} < \infty$ elijamos el primer j tal que:

$$\frac{1}{p_{j+1}} + \frac{1}{p_{j+2}} + \frac{1}{p_{j+3}} + \ldots < \frac{1}{2} .$$

El número de $n \leq x$ divisibles por p es a lo sumo $\frac{x}{p}$. Luego,

$x - N(x) = \# \{n \leq x: \text{ n es divisible por algún } p_i, \ i > j\} \leq$

$\leq \frac{x}{p_{j+1}} + \frac{x}{p_{j+2}} + \ldots < \frac{x}{2}$. Luego

$\frac{x}{2} \leq N(x) \leq 2^j.\sqrt{x}$ y por lo tanto $x < 2^{2j+2}$, contradicción.

Luego, $\sum_j \frac{1}{p_j} = +\infty$, (Euler, 1737; Erdös, 1938).

APLICACIONES. 1) El teorema de Euler asegura que si p_n es el n-ésimo primo entonces $\{t^{p_n}: p_n \text{ primo}\}$ es un sistema cerrado en $L^2(0,1)$.

2) Idem $\{t^{n/(n+1)}\}$ y $\{t^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\}$, pero no $\{t^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}}\}$.

3) Si $f \in L^1$ y $\int_0^1 f(t).t^{p_i}\, dt = 0$ donde $p_i > 0$, $p_i \longrightarrow +\infty$, $\sum \frac{1}{p_i} = \infty$, entonces $f(t) = 0$ c.d.

(Sugerencia: $\int_0^1 f(t).t^{p_i}\, dt = p_i \int_0^1 F(t).t^{p_i-1}\, dt$, $F(t) = \int_t^1 f(x)\, dx$).

4) Sea $p_i > \frac{1}{2}$ y tal que $\lim p_i = \infty$ cuando $i \longrightarrow \infty$, $\sum \frac{1}{p_i} = \infty$. Entonces el sistema $\{1,t^{p_1},t^{p_2},t^{p_3},\ldots\}$ es cerrado en $C([0,1])$. En efecto, sea n entero positivo:

$$|t^n - \sum_{i=1}^m \lambda_i.t^{p_i}| = n.\left|\int_0^t (x^{n-1} - \sum_1^m \mu_i.x^{p_i-1})\, dx\right| \leq$$

$$\leq n.\int_0^1 |x^{n-1} - \sum_1^m \mu_i.x^{p_i-1}|\, dx \leq n.\left(\int_0^1 |x^{n-1} - \sum_1^m \mu_i.x_i^{p_i-1}|^2\, dx\right)^{1/2} .$$

Como $p_i-1 > -\frac{1}{2}$, $p_i-1 \longrightarrow \infty$ y $\sum \frac{1}{(p_i-1)} = +\infty$, resulta que la última integral tiende a cero si elegimos m y los μ_i adecuadamente. Luego $\{1,t^{p_1},t^{p_2},t^{p_3}\ldots\}$ es cerrado en el espacio de funciones continuas.

5) TEOREMA. La sucesión $\{t^{p_i}\} \subseteq C([0,1])$, $p_1 = 0$, $p_i \geq 0$ si $i > 1$, $p_i \longrightarrow \infty$, es cerrada en C si y sólo si $\sum_{i>1} \frac{1}{p_i} = \infty$.

En efecto, si lo es en C lo es en L^2 y entonces $\sum \frac{1}{p_i}$ diverge (Teorema de Müntz).

Obsérvese que la función idénticamente 1 es necesario incorporarla al sistema porque si no toda combinación $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j . t^{p_j}$ se anula en t=0.

6) $\{t^{p_i}\}$, $p_i > -\frac{1}{2}$, $p_i \longrightarrow \infty$, es cerrada en $L^1(0,1)$ si $\sum \frac{1}{p_i} = \infty$. (Sugerencia: $L^2(0,1)$ es denso en $L^1(0,1)$).

EJERCICIOS. 1) Sea $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ el sistema de Rademacher, y escribamos $W_0(t) = 1$, $W_N(t) = \Phi_{n_1}(t)\ \Phi_{n_2}(t)\ \Phi_{n_3}(t) \ldots$, donde $2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots$, $n_1 > n_2 > \ldots$, es el desarrollo diádico del entero positivo N. Mostrar que el sistema $\{W_N\}$ es ortogonal y normal en el intervalo (0,1) (*Sistema de Walsh*).

2) Sea S_N la suma de los primeros N sumandos de la serie de Fourier $\sum a_j . W_j$ de f(x), $0 \leqslant x \leqslant 1$. Demostrar la fórmula:

$$S_{2^n}(x_0) = \int_0^1 f(t) . \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \Phi_k(x_0).\Phi_k(t))\ dt ,$$

y mostrar que $S_{2^n}(x) \longrightarrow f(x)$ c.d. cuando $n \longrightarrow \infty$. O sea, el sistema $\{W_i\}$ es completo en $L^2(0,1)$.

(Sugerencia: Sean $x_0 \neq$ binario racional, I_{n-1} el intervalo de constancia de Φ_{n-1} que contiene a x_0. (Luego $|I_{n-1}| = 2^{-n}$). Obsérvese que todas las funciones $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$ son constantes en I_{n-1}. La integral es igual a $\frac{1}{|I_{n-1}|} . \int_{I_{n-1}} f(t)\ dt$.

Entonces: $S_{2^n}(x_0) \longrightarrow f(x_0)$ c.d.).

3) Si $\{\Phi_m(x)\}$ y $\{\Psi_n(y)\}$ son ortonormales y completas en $L^2(a \leqslant x \leqslant b)$ y $L^2(c \leqslant y \leqslant d)$ respectivamente, entonces el sistema $\{\Phi_m(x).\Psi_n(y)\}$ es ortonormal y completo en $L^2([a,b] \times [c,d])$.

9. BASES ESPECIALES.

1) Una base $\{x_i\}$ de X se dice *monótona* si $\|U_n x\|$ no decrece con n para todo $x \in X$.

Si $\{x_i\}$ no fuera monótona, para cierto n y cierto x: $\|U_{n+1}x\| < \|U_n x\|$.

Esto implicaría que :

$$\|U_n\| \geqslant \|U_n(U_{n+1}x)\| \ / \ \|U_{n+1}(x)\| = \|U_n(x)\| \ / \ \|U_{n+1}(x)\| \geqslant 1.$$

Luego, $\sup_n \|U_n\| \leqslant 1 \Rightarrow \{x_i\}$ monótona. La recíproca sigue inmediatamente de $\|U_n(x)\| \longrightarrow \|x\|$.

Tenemos entonces el siguiente:

TEOREMA 7. Una base $\{x_i\}$ de X es monótona si y sólo si: $\|U_n\| = 1$ para todo n.

2) Una base $\{x_i, x^*\}$ de X se dice *incondicional* si para todo $x \in X$ la serie $\sum x_i^*(x)x_i$ converge incondicionalmente.

TEOREMA 8. (Karlin). $C([0,1])$ no tiene ninguna base incondicional.

3) Una base $\{x_i, x_i^*\}$ para X se dice *absolutamente convergente* si $\sum x_i^*(x)x_i$ converge absolutamente para todo $x \in X$.

Vale el siguiente:

TEOREMA 9. Si X posee una base absolutamente convergente entonces es isomorfo topológicamente a ℓ^1.

4) Una base $\{x_i, x_i^*\}$ de X es *uniforme* si $\sum x_i^*(x)x_i$ converge uniformemente para todo x de la esfera unitaria de X. Vale entonces el:

TEOREMA 10. X tiene una base uniforme si y sólo si $\dim X < \infty$.

10. CRITERIO PARA QUE UNA SUCESION TOTAL SEA UNA BASE.

Una transformación lineal $P: X \longrightarrow X$ tal que $P^2 = P$ es una *proyección* si es continua. Vale que $X = P(X) \oplus (I - P)X$. Si M y N son subespacios tales que $X = M \oplus N$ y si $P: X \longrightarrow X$ está definida por $Px = x$ donde $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in M$ y $x_2 \in N$, entonces P es una proyección.

U_n es una proyección pues $U_n U_m = U_{n \wedge m}$.

TEOREMA 11. Sea Y un subespacio de X e $\{y_i\}$ una *base de* Y. Si existe una sucesión $\{x_i^*\} \subset X^*$ tal que $x_i^*(y_j) = \delta_{ij}$ y tal que $\sum_{i \leq n} x_i^*(x)y_i$ converge *en* X, *para todo* $x \in X$, entonces el operador P definido por:

$$Px = \lim_n \sum_{i \leq n} x_i^*(x)y_i \quad , \qquad x \in X,$$

define una proyección de X en Y.

DEMOSTRACION. $\|Px\| \leq \sup_n \| \sum_{i\leq n} x_i^*(x)y_i\| < \infty \Rightarrow$ existe $M < \infty$ tal que $\|Px\| \leqslant M.\|x\|$, (Teorema de Banach-Steinhaus).

Como $\{y_i\}$ es una base para Y, existe $\{\alpha_i\}$ tal que $y = \sum \alpha_i.y_i$ para todo $y \in Y$. Entonces: $Py = \lim_n \sum_{i\leq n} \alpha_i.Py_i = \lim_n \sum_{i\leq n} \alpha_i.y_i = y$ implica $P^2 = P$, $P(Y) = Y$. Q.E.D.

TEOREMA 12. Sea Y subespacio de X. Si $\{y_j\}$ es una *base* para Y y si P es una *proyección* de X en Y *entonces existe una única sucesión* $\{z_i^*\}$ en X^* tal que $z_i^*(y_j) = \delta_{ij}$ y tal que: $P(x) = \lim_n \sum_{i\leq n} z_i^*(x)y_i$, para todo $x \in X$.

DEMOSTRACION. Sea $\{y_i^*\}$ la sucesión biortogonal asociada a $\{y_i\}$. Para todo i el teorema de Hahn-Banach asegura la existencia de una extensión $y_i^{*\prime}$ de y_i^* a X. Sea $z_i^* = P^*y_i^{*\prime}$. Entonces:

$$z_i^*(y_j) = P^*y_i^{*\prime}(y_j) = y_i^{*\prime}(P\,y_j) = y_i^*(y_j) = \delta_{ij}.$$

Además: $P(x) = \lim_n \sum_{i\leq n} y_i^*(Px)y_i = \lim_n \sum_{i\leq n} y_i^{*\prime}(Px)y_i = \lim_n \sum_{i\leq n} P^*y_i^{*\prime}(x)y_i =$

$$= \lim_n \sum_{i\leq n} z_i^*(x)\, y_i \quad , \text{ para todo } x \in X.$$

Si $\{z_i^{*\prime}\}$ es otra sucesión con las propiedades de $\{z_i^*\}$ entonces tendremos $0 = \sum (z_i^* - z_i^{*\prime})(x)y_i$, para todo $x \in X$. Como $\{y_i\}$ es una base:

$$(z_i^* - z_i^{*\prime})(x) = 0 \text{ , para todo } x.$$

En consecuencia $z_i^* = z_i^{*\prime}$ y la sucesión $\{z_i^*\}$ es única. Q.E.D.

TEOREMA 13 (Nikolskii). Una sucesión total $\{x_i\}$ de elementos no nulos de X es una base para X si y sólo si existe una constante $M \geqslant 1$ tal que:
$\| \sum_{i\leq n} \alpha_i.x_i\| \leqslant M.\| \sum_{i\leq m} \alpha_i.x_i\|$, para todo n,m con $n \leqslant m$ y coeficientes arbitrarios $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$.

DEMOSTRACION. $\{x_i\}$ base $\Rightarrow M = \sup_n \|U_n\| \geqslant 1$. Entonces $\sum_{i\leq n} \alpha_i.x_i = U_n(\sum_{i\leq m} \alpha_i.x_i)$ si $m \geqslant n$. En consecuencia, $\| \sum_{i\leq n} \alpha_i.x_i\| \leqslant M.\| \sum_{i\leq m} \alpha_i.x_i\|$.

Veamos la recíproca. La desigualdad implica la independencia lineal de toda sección $\{x_i: i \leqslant n\}$. Sea $E_n = [x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n]$ y P_{nn} la aplicación idéntica de E_n en X. Sea P_{nm} la proyección de E_m en E_n, $m > n$, definida por:

$$P_{nm}(x+y) = x \quad , \quad x \in E_n \quad , \quad y \in [x_{n+1},\ldots,x_m] \;.$$

En consecuencia $\|P_{nm}(x+y)\| = \|x\| \leqslant M.\|x+y\|$ implica que $\|P_{nm}\| \leqslant M$, para todo

m,n con $m \geq n$.

Definamos en $D = \{x: x \in E_m, m < \infty\}$ las transformaciones lineales $P'_n: D \longrightarrow E_n$ como $P'_n(x) = P_{nm}(x)$, $x \in E_m$, $m < \infty$. Así: $\|P'_n\| \leq M$ y $\overline{D} = X$. Luego P'_n tiene una única extensión a X, llamémosla P_n: $\|P_n\| \leq M$. P_n tiene rango E_n y es una proyección sobre E_n. Además como $P_{n,m}.P_{n+p,m} = P_{n+p,m}.P_{n,m}$ en D si $m \geq n \vee (n+p)$, la misma relación vale en X: $P_{n+p}.P_n = P_n.P_{n+p}$.Para todo $x \in X$, y todo $\varepsilon > 0$,existe $n = n(x,\varepsilon)$ tal que $\inf\{\|x-y\|: y \in E_n\} < \varepsilon$. Dado un tal y, y $m \geq n$, $\|P_m x - x\| \leq \|P_m x - y\| + \|y - x\| =$
$= \|P_m(x - y)\| + \|x - y\| < (M+1).\varepsilon$.

Entonces $P_m x \longrightarrow x$. Si definimos $P_0 = 0$ y x^*_i por $x^*_i(x)x_i = (P_i - P_{i-1})x =$
$= (1 - P_{i-1})P_i x$, $x \in X$, tendremos:

$x^*_i(x_j)\ x_i = (P_i - P_{i-1})x_j = \delta_{ij}\ x_j$ y en consecuencia $\{x_i, x^*_i\}$ es un sistema biortogonal.

$U_n := \sum_{1\leq i\leq n} (P_i - P_{i-1}) = P_n \Rightarrow \sup \|U_n\| \leq M$. Además, $[\overline{x_1,x_2,x_3,\ldots}] = X$.

El teorema 2 implica entonces que $\{x_i\}$ es una base para X. Q.E.D.

11. EJEMPLOS.

a) Sea en c_0, δ_i el elemento que verifica $\delta_i(j) = \delta_{ij}$. Si $\alpha \in c_0$ entonces $\sum_{i\leq n} \alpha_i.\delta_i \longrightarrow \alpha$, o sea, $\{\delta_i\}$ es una base con sucesión biortogonal $\delta^*_i = \delta_i$. (Interpretar este abuso de lenguaje). Como $\|\alpha\| = \sup|\alpha_i|$, $\alpha = \sum \alpha_i.\delta_i$ es subconvergente y por lo tanto *incondicionalmente* convergente.

Además la base $\{\delta_i\}$ es *monótona.*

a') Sea $x_i = (1,1,\overbrace{1,\ldots}^{i},1,0,0,0,\ldots)$. $x^*_i = \delta_i - \delta_{i+1}$ es biortogonal a $\{x_i\}$ que es una sucesión total en c_0. Además,

$\sup_n \|U_n\alpha\| \leq \sup_n \|\sum_{i\leq n} (\alpha_i - \alpha_{i+1}).x_i\| = \sup_n \sup_{j\leq n} \{|\alpha_j - \alpha_{n+1}|: j \leq n\} \leq 2\|\alpha\|$,

y por lo tanto $\{x_i\}$ es una base para c_0. Sea $\alpha = (-1)^{i+1}/i$. Entonces

$\sum_{i\in impar} x^*_i(\alpha)x_i = \sum_{i\in impar} (\alpha_i - \alpha_{i+1}).x_i = (\sum_1^\infty \frac{1}{n}, \sum_3^\infty \frac{1}{n}, \ldots)$ muestra que

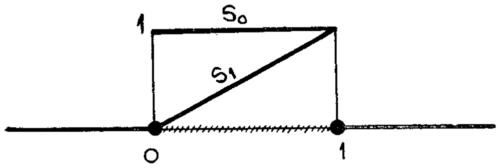
$\sum x^*_i(\alpha)x_i$ no es subconvergente y por lo tanto *no es incondicionalmente convergente.*

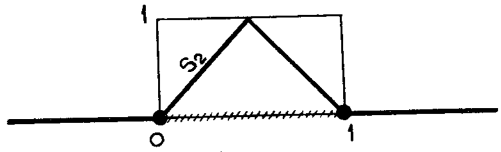
b) EL SISTEMA DE SCHAUDER DE C[0,1].

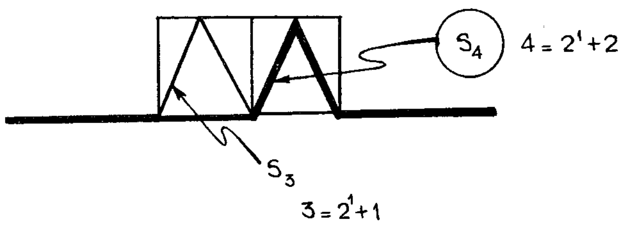
$$S_0(t) = \chi_{[0,1]}(t) \quad ; \quad S_1(t) = \chi_{[0,1]}(t) \quad ;$$

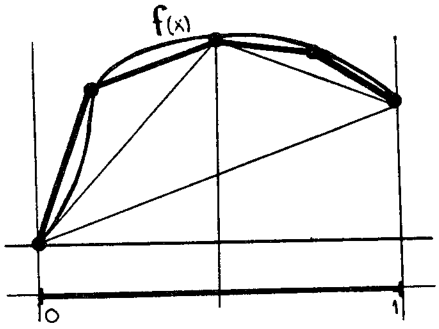
$$S_2(t) = S_1(2t) + \chi_{(0,1]}(2t-1) - S_1(2t-1) \quad ;$$

$$S_{2^n+i}(t) = S_2(2^n t-i+1) \quad , \quad i = 1,2,3,\ldots \quad , \quad n = 1,2,\ldots$$









El sistema es total y vale que:

(*) $$\| \sum_{i\leqslant n} \alpha_i . S_i \| \leqslant \| \sum_{i\leqslant n+m} \alpha_i . S_i \| \quad , \text{ para todo } n \geqslant 1,\ m \geqslant 1,$$

y α_i arbitrarios. Del teorema de Nikolskii sigue que es una base. Además de (*) sigue que es *monótona*.

c) El sistema de Haar definido por:

$x_0(t) = \chi_{[0,1]}(t)$, $x_{2^n+j}(t) = 2^{n/2}[\chi_{[0,1]}(2^{n+1}.t-2j+2) - \chi_{(0,1]}(2^{n+1}.t-2j+1)]$,

$j = 1,2,\ldots,2^n$, $n = 0,1,2,3,\ldots$, es una base *monótona para* $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$. En efecto, $\{x_i\}$ es un sistema total en L^p pues es completo respecto de $L^1(0,1)$. Sean s y t el ínfimo y el supremo, respectivamente, del soporte de la función x_i. Entonces, si $y \in [x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{i-1}]$ resulta:

$$\int_s^t |y(v) + \alpha.x_i(v)|^p\, dv = \frac{t-s}{2}\,(|y(t) + \alpha.2^{n/2}|^p + |y(t) - \alpha.2^{n/2}|^p) \geqslant$$

$$\geqslant (t-s).|y(t)|^p = \int_s^t |y(v)|^p\, dt.$$

Luego, $\|y\| \leqslant \|y+\alpha.x_i\|$, y por lo tanto $\|\sum_{i\leq n} \alpha_i.x_i\| \leqslant \|\sum_{i\leq m+n} \alpha_i.x_i\|$. Esto implica que $\{x_i\}$ es una base monótona.

d) Sea $\{\delta_i\} \subset \ell^p$, $1 \leqslant p < \infty$. $\delta_i^* = \delta_i \in \ell^q$ para todo i; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$\sum_{i\leq n} \delta_i^*(\alpha)\ \delta_i$ converge en ℓ^p al elemento de componentes

$$\alpha_i = \delta_i^*(\alpha) = \delta_i(\alpha).$$

Como cada desarrollo es subconvergente, también es incondicionalmente convergente, y la base es *incondicional*.

Obviamente es también *monótona, y para* ℓ^1 *es absolutamente convergente*.

Si $\alpha = \{i^{-s}\}$, $s = p'/p$, $1 < p' < p$, entonces $\|\alpha\|_p < \infty$ pero $\sum\|\delta_i^*(\alpha)\delta_i\|_p = \infty$, o sea, *no es absolutamente convergente para* $1 < p < \infty$.

e) Sea $\{x_i\}$ la sucesión definida así:

$x_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $x_{2i-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\text{sen } it$, $x_{2i}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\cos it$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,

$i = 1,2,\ldots$. Entonces el sistema trigonométrico $\{x_i\}$ es una *base ortonormal* en $L^2(0,2\pi)$, y por lo tanto incondicional.

Sin embargo, si bien *es una base para* $L^p(0,2\pi)$, $1 < p < 2$ y $2 < p < \infty$, *no es incondicional.No* es una base para $L^1(0,2\pi)$ *ni* lo es para $C[0,2\pi]$.

12. BASES EQUIVALENTES Y BASES DE BLOQUES.

Si X e Y son espacios de Banach y $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ bases para ellos, entonces $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ se dicen *equivalentes* si cada vez que $\sum_{i\leq n} \alpha_i.x_i$ converge en X,

$\sum_{i\leq n} \alpha_i . y_i$ converge en Y, y recíprocamente.

Veamos que la equivalencia de esas bases es necesaria y suficiente para que X e Y sean *isomorfos* y *de manera que* el isomorfismo $T: X \longrightarrow Y$ lleve una base en la otra: $Tx_n = y_n$ para todo n.

La necesidad es inmediata. Supongamos que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sean bases equivalentes. Definamos:

$$Tx = \sum_1^\infty c_n\, y_n \qquad \text{si} \qquad x = \sum_1^\infty c_n\, x_n .$$

T es lineal y inyectiva con $Tx_n = y_n$. Además $Tx = \lim_n T_n x$ donde $T_n\, x = \sum_{i=1}^n c_i\, y_i$. Luego:

$$\|T_n\, x\| \leqslant C\, \|\sum_1^n c_i\, x_i\| \leqslant C \sup_n \|\sum_1^n c_i\, x_i\| \leqslant C'\|x\| .$$

La última desigualdad sigue de la demostración de a) Teorema 1, § 1. Una aplicación del teorema de Banach-Steinhaus muestra entonces que T es acotado.

Q.E.D.

TEOREMA 14. Sea $\{x_i, x_i^*\}$ una base para $X_0 = [x_1, x_2, \ldots]^- \subset X$, $x_i^* \in X^*$. Si la sucesión $\{y_i\}$ en X satisface $\sum_{i=1}^\infty \|x_i^*\| \cdot \|x_i - y_i\| = \varepsilon < 1$ entonces $\{y_i\}$es una base equivalente para $Y = [y_1, y_2, y_3, \ldots]^-$.

DEMOSTRACION. Sea $i \leqslant m$. Entonces

$|\alpha_i| = |\sum_{j\leq m} x_i^*(\alpha_j . x_j)| \leqslant \|x_i^*\| . \|\sum_{j\leq m} \alpha_j . x_j\|$.

Luego, $\|\sum_{i\leq m} \alpha_i . y_i\| \leqslant \|\sum_{i\leq m} \alpha_i . x_i\| + \sum_{i\leq m} |\alpha_i| . \|x_i - y_i\| \leqslant$

$\leqslant \|\sum_{i\leq m} \alpha_i . x_i\| . [1 + \sum_{i\leq m} \|x_i^*\| . \|x_i - y_i\|] \leqslant 2 . \|\sum_{i\leq m} \alpha_i . x_i\|$.

Existe una constante $M \geqslant 1$ tal que (cf. Teorema 13):

$\|\sum_{i\leq m} \alpha_i . x_i\| \leqslant M . \|\sum_{i\leq n} \alpha_i . x_i\|$ para todo m,n , $m \leqslant n$.

Entonces, $\|\sum_{i\leq m} \alpha_i . y_i\| \leqslant 2 . M \|\sum_{i\leq n} \alpha_i . x_i\| \leqslant 2 . M(\|\sum_{i\leq n} \alpha_i . y_i\| + \sum_{i=1}^n |\alpha_i| . \|x_i - y_i\|) \leqslant$

$\leqslant 2 . M\|\sum_{i\leq n} \alpha_i . y_i\| + 2M\|\sum_{i\leq n} \alpha_i . x_i\| . \sum_{i=1}^\infty \|x_i^*\| . \|x_i - y_i\|$; luego:

$\|\sum_{i\leq m} \alpha_i . y_i\| \leqslant K . \|\sum_{i\leq n} \alpha_i . y_i\|$, donde $K = 2M(1-\varepsilon)^{-1}$.

O sea, $\{y_i\}$ es una base para Y. Como las estimaciones muestran que

$\|\sum_m^n \alpha_i . y_i\| \leqslant 2 . \|\sum_m^n \alpha_i . x_i\| \leqslant \frac{K}{M} . \|\sum_m^n \alpha_i . y_i\|$ resulta que $\{x_i\}$ es equivalente a $\{y_i\}$. Q.E.D.

NOTA. Si $X_0 = X$ entonces $Y = X$ (cf. § 15).

DEFINICION. Sea $\{x_i\}$ una base para X, $\{\gamma_i\}$ una sucesión numérica y $\{p_n\}$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos.

Una sucesión $\{y_n\}$ de elementos no nulos de X dada por

$$y_n = \sum_{p_n+1}^{p_{n+1}} \gamma_i . x_i$$

se llama una *base de bloques* con respecto a $\{x_i\}$.

TEOREMA 15. Una base de bloques $\{y_i\}$ con respecto a la base $\{x_i\}$ de X es una base para $Y = [y_1, y_2, \ldots]^-$.

(Demostración: usar el teorema de Nikolskii).

13. BASES PARA ESPACIOS DE HILBERT.

Por un espacio de Hilbert entenderemos un espacio de dimensión infinita con producto escalar,completo y separable.

Es decir, un espacio isomorfo a ℓ^2, e.g., $L^2(0,1)$. Para *toda* base $\{x_i, x_i^*\}$ vale que $\{x_i^*, x_i\}$ *es una base*, como se ve del Teorema 2, § 5. Existe siempre una base ortonormal la cual es necesariamente monótona.

Recordemos que una base *ortonormal* $\{x_i, x_i^*\}$ es aquella que verifica $x_i = x_i^*$.

Si una base verifica $\|x_i\| = 1$ para todo i diremos que está *normalizada*, y si $\|x_i^*\| = \|x_i\| = 1$ para todo i diremos que es *normal*.

Recordemos que la transformación $T: H \longrightarrow H^*$, $Ty(x) = (x,y)$, $x,y \in H$, es biunívoca, aditiva, isométrica y sobre. Además $T\alpha y = \bar{\alpha} Ty$. Como es costumbre denotaremos con el mismo símbolo a y y a Ty. Luego, si $\{x_i, x_i^*\}$ es ortonormal:

$$\|x_i\|^2 = (x_i, x_i) = x_i^*(x_i) = 1,$$

o sea, es normal. Para una base ortonormal vale la identidad de Parseval:

$$\|x\|^2 = \sum_1^\infty |(x, x_i)|^2.$$

Si Y es un subespacio propio de H e y^* es una funcional sobre Y entonces *existe una única extensión a* H *de aquella conservando la norma.* (Esto resulta de que si $z^*(x) = 0$ para todo $x \in Y$, o sea si $(x,z) = 0$ para todo $x \in Y$, z es ortogonal a Y).

Esta propiedad de extensión única es gozada por todos los espacios de Banach cuya esfera unitaria es *estrictamente convexa.*

EJERCICIO. Una base ortonormal para H es incondicional.

TEOREMA 16. Si $\{x_i, x_i^*\}$ es una base para H normal, entonces es ortonormal: $x_i = x_i^*$.

DEMOSTRACION. $1 = \|x_i\| = \|x_i^*\|$ para todo i. Sea P_j la proyección ortogonal sobre $M_j = [x_j]$ y sea $y_j^* = P_j x_j^*$. Entonces $y_j^*(x_j) = (x_j, y_j^*) = x_j^*(x_j) = 1$. Además: $1 \leqslant \|y_j^*\| \leqslant \|x_j^*\| = 1 \Rightarrow x_j^* = y_j^*$. O sea, $x_j^* \in M_j$. Supongamos $x_j^* = \alpha x_j$. Luego: $1 = x_j^*(x_j) = (x_j, \alpha x_j) = \bar{\alpha}$ y por lo tanto $\alpha = 1$ y también $x_j^* = x_j$. Q.E.D.

TEOREMA 17. (LEMA DE ORLICZ). Sea $\{f_i\}$ una sucesión en $L^2([0,1])$ tal que

$$\sup_{\mu} \{\| \sum_{i\in\mu} f_i \| : \mu \in \sum \} < \infty .$$

Entonces $\sum_i \|f_i\|^2 < \infty$. ($\sum$ = familia de subconjuntos finitos de N).

DEMOSTRACION. Sea $\{\psi_n\}$ el sistema de Rademacher. Aplicando la desigualdad de Bessel al sistema ortonormal de Rademacher tenemos:

$$\sum_{i\leqslant n} |\alpha_i|^2 \leqslant \int_0^1 |\sum_{i\leqslant n} \alpha_i . \psi_i(t)|^2 \, dt .$$

Suponiendo las f_i definidas en todo punto y finitas, se obtiene:

$$\sum_{i\leqslant n} |f_i(s)|^2 \leqslant \int_0^1 |\sum_{i\leqslant n} f_i(s) . \psi_i(t)|^2 \, dt \text{ , para todo s.}$$

Integrando respecto a s:

$$\sum_{i\leqslant n} \|f_i\|^2 \leqslant \int_0^1 ds \int_0^1 |\sum_{i\leqslant n} f_i(s) . \psi_i(t)|^2 \, dt =$$

$$= \int_0^1 dt \int_0^1 |\cdot|^2 \, ds = \int_0^1 \| \sum_{i\leqslant n} \psi_i(t) \, f_i \|^2 \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 [\, \| \sum_{i\in\mu_t^+} f_i \| + \| \sum_{i\in\mu_t^-} f_i \,]^2 \| dt \quad ,$$

donde $\mu_t^+ = \{i: \psi_i(t) > 0, \; i = 1,2,3,\ldots,n\}$

$\mu_t^- = \{i: \psi_i(t) < 0, \; i = 1,2,3,\ldots,n\}$.

Entonces $\sum_{i\leqslant n} \|f_i\|^2 \leqslant 4 . \sup_{\mu} \{\| \sum_{i\in\mu} f_i \|^2 : \mu \in \sum\} < \infty$. Q.E.D.

TEOREMA 18. Sea $\{x_i, x_i^*\}$ una base normalizada de H. La base es incondicional si y sólo si para todo $x \in H$:

$$(1) \qquad \sum_i |(x,x_i)|^2 < \infty \quad , \quad \sum_i |(x,x_i^*)|^2 < \infty .$$

DEMOSTRACION. Sean $x,y \in H$. Si (1) se verifica, entonces: $\sum_i |(x,x_i^*)(y,x_i)| < \infty$. Luego para toda sucesión creciente $\{m_i\}$ vale que:

$$\lim_n \left(\sum_{i \leq n} (x,x_{m_i}^*)\, x_{m_i}, y \right) \quad \text{converge.}$$

Como H es reflexivo es débilmente secuencialmente completo y por lo tanto $\sum (x,x_i^*)\, x_i$ es débilmente subconvergente. Del teorema de Orlicz-Pettis (cf. §3) resulta que es fuertemente subconvergente y en consecuencia incondicionalmente convergente.

Supongamos ahora que $\{x_i, x_i^*\}$ sea una base normalizada incondicional para H. Como para todo $x \in H$, $\sum (x,x_i^*)\, x_i$ converge según el filtro de partes finitas:

$$(2) \qquad \sup \{ \| \sum_{i \in \mu} (x,x_i^*)\, x_i \| : \mu \in \Sigma \} < \infty .$$

Sea $f_i = (x,x_i^*)\, Tx_i$ donde T es un isomorfismo isométrico entre $L^2(0,1)$ y H. Del lema de Orlicz sigue ahora que:

$$\sup_n \sum_{i \leq n} |(x,x_i^*)|^2 \leq \sup_n \sum_{i \leq n} \|(x,x_i^*)\, x_i\|^2 = \sup_n \sum_{i \leq n} \|f_i\|^2 < \infty .$$

De (2) sigue también que:

$$\sup_{\mu \in \Sigma} \left| \sum_{i \in \mu} (x,x_i^*)(x_i,y^*) \right| \leq M_{x,y^*} < \infty ,$$

para todo $x \in H$, para todo $y^* \in H$. Entonces: $\| \sum_{i \in \mu} (x_i,y^*)\, x_i^* \| \leq M_{y^*} < \infty$ con M independiente de μ. Esta es la desigualdad dual a (2) y como antes, sigue ahora que $\sum |(x,x_i)|^2 < \infty$ pues $\|x_i^*\| \geq 1$. Q.E.D.

COROLARIO. Si $\{x_i, x_i^*\}$ es una base normalizada incondicional para H entonces $\{x_i^*, x_i\}$ también es una base incondicional para H.

En efecto, de la Nota al Teorema 2 sigue que $\{x_i^*, x_i\}$ es una base para H. Además se satisface (1), la cual implica la convergencia incondicional (véase la primera parte de la demostración del Teorema 18). Q.E.D.

A continuación estudiaremos algunos resultados relacionados con la estabilidad de bases.

LEMA 1. Sea $\{x_k\}$ una base ortonormal para H e $\{y_k\}$ una sucesión ortonormal tal que

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - y_k\|^2 < 1.$$

Entonces $\{y_k\}$ es una base para H (N. Bari).

DEMOSTRACION. Si $Y = [\{y_k\}]^- \neq H$ existe $h \in H^*$ tal que $h(Y) = 0$, $h \neq 0$. Entonces: $(h,x_k) = (h,y_k) + (h,x_k-y_k) = (h,x_k-y_k)$ implica $|(h,x_k)|^2 \leq \leq \|h\|^2.\|x_k - y_k\|^2$, y por lo tanto, $\sum|(h,x_k)|^2 \leq \|h\|^2.\sum \|x_k - y_k\|^2 < \|h\|^2$, en contradicción con la identidad de Parseval. Q.E.D.

LEMA 2. i) Si bajo las mismas condiciones del Lema 1 tenemos solamente

$$(4) \qquad \sum_{N+1}^{\infty} \|x_k - y_k\|^2 < 1$$

entonces el sistema $\{x_1,x_2,\dots,x_N,y_{N+1},y_{N+2},\dots\}$ es total.

ii) Además, si un elemento h es ortogonal a:

$$\{y_{N+1},y_{N+2},\dots\} \text{ y a } z_n = x_n - \sum_{k=N+1}^{\infty} (x_n,y_k)\, y_k ,$$

$n = 1,2,3,\dots,N$, entonces $h = 0$.

DEMOSTRACION. i) Sea $(h,x_k) = 0$, $k = 1,2,3,\dots,N$. Como antes se ve que $\sum_{N+1}^{\infty} |(h,x_k)|^2 \leq \|h\|^2 . \sum_{N+1}^{\infty} \|x_k - y_k\|^2$, y por lo tanto valdría: $\sum_{1}^{\infty} |(h,x_k)|^2 < \|h\|^2$, si h fuera no nulo y ortogonal a $[x_1,x_2,\dots,x_N,y_{N+1},y_{N+2},\dots]^-$.

ii) $(h,x_n) = (h,z_n) + \sum_{N+1}^{\infty} (x_n,y_k)(h,y_k) = 0$, $n = 1,2,3,\dots,N$, junto con (4) implican ii). Q.E.D.

APLICACION. Consideremos la ecuación: $y'' + (\lambda - q).y = 0$, $q \in C([a,b])$, $a \leq x \leq b$, y las condiciones de contorno, $u(a).\cos\alpha + u'(a).\operatorname{sen}\alpha = 0$, $u(b).\cos\beta + u'(b).\operatorname{sen}\beta = 0$, y supongamos para fijar ideas $0 \leq \alpha,\beta < \pi$, $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Entonces las autofunciones normalizadas de este problema de contorno forman un sistema ortonormal y puede demostrarse que satisfacen, para $n = 0,1,2,\dots$:

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cdot \cos \frac{n.\pi.(x-a)}{b-a} + 0(\frac{1}{n}) = x_n(x) + 0(\frac{1}{n}) ,$$

uniformemente en $[a,b]$. Entonces $\sum_{0}^{\infty} \|x_k - y_k\|^2 < \infty$. Además, el sistema $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

es ortonormal y completo en $[a,b]$ (verificarlo).

Elijamos N de manera que $\sum\limits_{N+1}^{\infty} \|x_k - y_k\|^2 < 1$.

Sea $S = \{h \in H: h \perp Y = [y_{N+1}, y_{N+2}, \ldots]^-\}$.

Evidentemente $S \supset \{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_N\}$ y si h es ortogonal a Y y a $[z_i: i = 0,1,2,\ldots,N]$ entonces $h = 0$. Luego $S = [z_0, z_1, \ldots, z_N]$ y $\dim S \leqslant N+1$. Por otra parte: $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_N \in S$, y son linealmente independientes. Por lo tanto $\dim S = N+1$, y los z_i son combinaciones lineales de los y_j, $j = 0,1,2,3,\ldots,N$. Luego si h es ortogonal a $y_0, y_1, y_2, \ldots$ entonces $h=0$; en consecuencia $\{y_j\}$ es una base ortogonal para $L^2(a,b)$.

TEOREMA DE PALEY Y WIENER. (1934). Sea $\{y_n\}$ una sucesión y $\{x_n\}$ una base ortonormal de H, $n = 1,2,3,\ldots$. Supongamos que existe una constante θ, $\theta \in [0,1)$, tal que:

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n.(x_n - y_n)\Big\|^2 \leqslant \theta^2 . \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 ,$$

para toda sucesión $\{a_j\}$ y todo N. Existe entonces una sucesión $\{y_n^*\}$ que forma con $\{y_n\}$ un sistema biortogonal: $\{y_n, y_n^*\}$. Más aún, $\{y_n\}$ es una base para H lo mismo que $\{y_n^*\}$. Vale también que si:

$x = \sum (x,y_n^*)y_n = \sum (x,y_n)y_n^*$ entonces:

i) $\|x\|/(1+\theta) \leqslant (\sum |(x,y_n^*)|^2)^{1/2} \leqslant \|x\|/(1-\theta)$,

ii) $(1-\theta).\|x\| \leqslant (\sum |(x,y_n)|^2)^{1/2} \leqslant (1+\theta).\|x\|$.

APLICACION DEL TEOREMA DE PALEY-WIENER. (Duffin-Eachus, 1942). Sea $L^2(-\pi,\pi)$ nuestro espacio H y consideremos allí el sistema:

$$y_n(t) = e^{i\lambda_n t}/\sqrt{2\pi} \quad , \quad n = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots ,$$

con λ_n real o complejo que verifica:

$$M = \text{máx } |\lambda_n - n| < \pi^{-1}.\lg 2 \cong 0.69315/3.14159.$$

Sea $x_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi}$, $n = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$. Usando que

$$e^{i\lambda_n t} - e^{int} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i.(\lambda_n - n))^k}{k!} . t^k . e^{int} ,$$

y que $\|t^k.y^*(t)\| \leqslant \pi^k.\|y^*(t)\|$, tenemos:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n(y_n - x_n) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n . \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i.(\lambda_n - n))^k}{k!} . t^k.x_n(t) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k!} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n(i(\lambda_n - n))^k.x_n \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k!} \{ \sum_n |a_n|^2.|\lambda_n - n|^{2k}\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k!} . M^k.\{ \sum_n |a_n|^2\}^{1/2} = (e^{M\pi} - 1) \{ \sum_n |a_n|^2\}^{1/2}.$$

Sea ahora $\theta = e^{M\pi} - 1$. Entonces $\theta < 1$. Aplicando el teorema de Paley-Wiener resulta que $\{e^{i\lambda_n t}/\sqrt{2\pi}\}$ es una base normalizada cuyos desarrollos asociados corresponden a los de ciertas series de Fourier *no* armónicas.

El resultado precedente puede mejorarse de la siguiente forma:

TEOREMA DE KADEC. Si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión real para la cual $|\lambda_n - n| \leqslant L < 1/4$, $n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ entonces $\{e^{i\lambda_n t}\}$ satisface el criterio de Paley-Wiener.

(De (iii), Teorema 5, sigue entonces que $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $y_n = e^{i\lambda_n t}$, es una base de Riesz en $L^2(-\pi,\pi)$).

Lo esencial del teorema de Paley-Wiener está contenido en el siguiente:

TEOREMA 19. Sea $\{x_n\}$ una base del espacio de Banach X, y sea $\{y_n\}$ una sucesión de elementos de X tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - y_i) \right\| \leqslant \theta \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i \right\| \quad \text{donde } \theta \in [0,1),$$

los c_i son escalares cualesquiera y $n \in N$. Entonces $\{y_n\}$ es una base de X equivalente a $\{x_n\}$.

DEMOSTRACION. De la hipótesis sigue que podemos definir una aplicación $T: X \longrightarrow X$ por $T(\sum_{i=1}^{\infty} c_n\, x_n) = \sum_{i=1}^{\infty} c_n(x_n - y_n)$.
T es lineal de norma $\leqslant \theta < 1$. Luego existe $(I-T)^{-1}$ y vale: $(I-T)x_n = y_n$ para todo n. Q.E.D.

Que $\{y_n^*\}$ sea también una base equivalente a $\{x_n\}$ resulta de la siguiente proposición general y la nota al Teorema 2.

PROPOSICION 1. En un espacio de Hilbert H bases equivalentes tienen sucesiones biortogonales equivalentes.

DEMOSTRACION. Sean las bases $\{x_n,x_n^*\}$ e $\{y_n,y_n^*\}$ equivalentes y sea T el operador acotado invertible tal que $Tx_n = y_n$.

Entonces: $(x_m,T^*y_n^*) = (Tx_m,y_n^*) = (y_m,y_n^*) = \delta_{mn} = (x_m,x_n^*)$ implica: $T^*y_n^* = x_n^*$. Q.E.D.

Si ignoramos las constantes precisas que aparecen en i) y ii) constatamos que estas desigualdades corresponden a las del Teorema 5, iii).

El sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}$, $n = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, es una base de Riesz en $L^2(-\pi,\pi)$ si λ_n es complejo y $|\lambda_n-n| \leqslant L < (\lg 2)/\pi$, o si $|\lambda_n-n| \leqslant L < 1/4$ pero los λ_n son reales.

Un resultado debido a N.Levinson asegura que si los λ_n son números complejos arbitrarios pero que verifican $|\lambda_n| \leqslant |n| + \frac{1}{4}$, $n = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, entonces $[\{e^{i\lambda_n t}\}]^- = L^2(-\pi,\pi)$. En particular el sistema $K \cup \{1\}$, $K = \{e^{\pm i(n-1/4)t}: n = 1,2,3,\ldots\}$, es completo.

Sin embargo se puede probar que ya el subsistema K es completo en $L^2(-\pi,\pi)$. Esto implica que el sistema original *no* es una base y que el teorema de Kadec es, en cierto sentido, óptimo.

Sean ahora $\varepsilon > 0$ y K' el sistema: $\{e^{i(|n|+\varepsilon+1/4).\operatorname{sgn} n}: n = \pm1,\pm2,\ldots\}$.

Es interesante observar que $K' \cup \{1\}$ *no* es completo en $L^2(-\pi,\pi)$.

14. Sea X un espacio de Banach no necesariamente separable, Λ un conjunto de índices de cardinalidad arbitraria y X^* el dual de X.

Una familia $\{x_\lambda,f_\lambda\}$ es un *sistema biortogonal* si $x_\lambda \in X$ y $f_\lambda \in X^*$ para todo $\lambda \in \Lambda$ y $f_\lambda(x_\mu) = \delta_{\lambda\mu}$. Se dirá *maximal* si no hay un sistema biortogonal que lo contenga propiamente.

Un sistema biortogonal se llama *base generalizada para* X si $f_\lambda(x) = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$ implica $x = 0$. $\{x_\lambda,f_\lambda\}$ se dice *total* si las combinaciones lineales de $\{x_\lambda\}$ son densas en X.

Una base generalizada total se dice *base extendida de Markushevich* si Λ es no numerable; y si Λ es numerable, simplemente, *base de Markushevich*.

Obviamente una base generalizada para X es un sistema biortogonal maximal.

TEOREMA 20. Existe una base de Markushevich para todo espacio de Banach separable.

Vale también el siguiente:

TEOREMA 21. i) Toda base de Schauder para X es una base de Markushevich. ii) Recíprocamente, una base de Markushevich $\{x_i, f_i\}$ para X es una base de Schauder para X si para todo $x \in X$:

$$x = \lim_n \sum_{i \leq n} f_i(x) x_i .$$

EJERCICIO. Demostrar los Teoremas 20 y 21.

EJEMPLO. En ℓ^2 los dos sistemas ortogonales $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$ definidos por:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= (0,0;\dots;\underset{2k-1}{0},\underset{2k}{1};0,0;\dots.) , \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 1,2,3,\dots \\ \psi_k &= (0,0;\dots;\tfrac{1}{k},1;0.0;\dots.) , \end{aligned}$$

son bases ortogonales (equivalentes) de los subespacios:

$$M = \{(0,a_1;0,a_2;0,a_3;\dots.) : \sum a_i^2 < \infty\} ,$$

$$N = \{(\frac{b_1}{1}, b_1 ; \frac{b_2}{2} , b_2 ; \frac{b_3}{3} , b_3 ; \dots) : \sum b_i^2 < \infty\}.$$

Entonces: $M \cap N = \{0\}$.

Como todo elemento de la forma $(c_1,c_2,\dots,c_N,0,0,\dots) \in M+N$, tenemos $\overline{M+N} = \ell^2$. El elemento de ℓ^2:

$$h = (1,0;1/2,0;1/3,0;\dots) \notin M+N ,$$

pues si no, necesariamente $b_i = 1$ para todo i, contradicción.

O sea, $M+N \neq \ell^2$.

El sistema $\{\tilde{\varphi}_k\} \cup \{\tilde{\psi}_k\} = \tilde{\mathcal{U}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_k &= (0,0;\dots;\underset{2k-1}{-k},\underset{2k}{1};0,0;\dots) , \\ \tilde{\psi}_k &= (0,0;\dots;k,0;0,0;\dots) , \end{aligned}$$

es *biortogonal* a $\{\varphi_k\} \cup \{\psi_k\} = \mathcal{U}$. Luego, si $c = (c_1,c_2,\dots)$ es desarrollable en ℓ^2 respecto $\mathcal{U}$:

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \varphi_i + b_i \psi_i)$$

$\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ quedan *unívocamente determinados*. Además:

$$h = \sum_1^\infty (\psi_i - \varphi_i)$$

pero *no* vale $h = \psi_1 - \varphi_1 + \psi_2 - \varphi_2 + \ldots$ pues el término general tiene norma que tiende a 1. Luego *no es una base*. Sin embargo es un sistema biortogonal maximal. Más aún, es una base generalizada total, o sea, una *base de Markushevich* para ℓ^2.

15. COMPLEMENTOS A LA TEORIA DE BASES EN ESPACIOS DE HILBERT.

Sea H un espacio de Hilbert y $\{f_n\}$ una base en él. Esta se dice una *base de Bessel* si

$$\sum_{j=1}^{n} c_n f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Rightarrow \sum_1^\infty |c_n|^2 < \infty,$$

y se denomina *base de Hilbert* si

$$\sum_1^\infty |c_n|^2 < \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j f_j \xrightarrow[n\to\infty]{} .$$

Se demuestra que $\{f_n\}$ es una base de Riesz si y sólo si es a la vez una base de Hilbert y una base de Bessel.

Si $\{f_n\}$ es una base de Riesz y $\{e_n\}$ es una base ortonormal existe T invertible tal que $Te_n = f_n$ para todo n. Entonces:

$$(T^*Te_j, e_i) = (Te_j, Te_i) = (f_j, f_i) = G_{ij} ,$$

donde $G = (G_{ij})$ es el gramiano de $\{f_i\}$. Por lo tanto G es una matriz que genera un operador acotado invertible en ℓ_2: $\sum_{i=1}^{\infty} G_{ij}\, c_i = d_j$ define una aplicación lineal $G: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ tal que $\|d\| = \|G(c)\| \leq K.\|c\|$ y existe G^{-1}.

También puede demostrarse la recíproca y tenemos el

TEOREMA 22. $\{f_n\}$ es una base de Riesz si y sólo si la matriz de Gram del sistema genera un operador acotado invertible.

Sea $\{f_n^*\}$ la sucesión en H biortogonal a $\{f_n\}$. Ya vimos que también ella es una base de Riesz para H (cf. Proposición 1 de la sección 13 y Teorema 2). Del Teorema 5 obtenemos entonces:

$$(*) \qquad \sum_1^\infty |(f,f_n)| < \infty \quad , \quad \sum_1^\infty |(f,f_n^*)|^2 < \infty \quad , \quad \text{para todo } f \in H.$$

La recíproca también es cierta y vale el

TEOREMA 23. $\{f_n\}$ es una base de Riesz si y sólo si $\{f_n\}$ es completa en H, admite una sucesión $\{f_n^*\}$ biortogonal completa en H y ambas verifican (*).

COROLARIO. Sea $\{x_n, x_n^*\}$ una base normalizada de H. Entonces ella es incondicional si y sólo si es una base de Riesz.

DEMOSTRACION. La tesis sigue del Teorema 18, su Corolario y el Teorema 23.
Q.E.D.

Si una base $\{f_n\}$ verifica (*) de la sección 6 se dice que es *acotada*. Evidentemente, si $x_n := f_n/\|f_n\|$, $x_n^* := f_n^*.\|f_n\|$ entonces $\{x_n, x_n^*\}$ es una base normalizada. Del corolario sigue que si es incondicional es equivalente a una base de Riesz.

Por lo tanto tenemos: en un espacio de Hilbert todas las bases acotadas incondicionales son equivalentes (Köthe, Lorch, Gelbaum, Gelfand).

Queremos finalizar esta sección con algunos resultados de la teoría de estabilidad de bases. El primero es el teorema de Birkhoff-Rota:

TEOREMA 24. Si $\{e_n\}$ es una base ortonormal de H y si $\{x_n\}$ es una sucesión ortonormal para la cual $\sum_1^\infty \|e_n - x_n\|^2 < \infty$ entonces $\{x_n\}$ es una base.

Este teorema prácticamente fue utilizado en la primera aplicación de la sección precedente.

TEOREMA 25. (Krein-Milman-Rutman). Sea $\{x_n\}$ una base de un espacio de Banach X. Existen números $\varepsilon_n > 0$ tales que si $\|x_n - y_n\| < \varepsilon_n$ para todo n entonces $\{y_n\}$ es una base equivalente a $\{x_n\}$.

DEMOSTRACION. El teorema sigue inmediatamente de la nota al Teorema 14. Demostraremos esa nota con una aplicación del Teorema 19.

PROPOSICION 2. Sea $\{x_n\}$ una base para el espacio de Banach X, $\{x_n^*\}$ la sucesión asociada, e $\{y_n\}$ una sucesión tal que $\theta = \sum_{n=1}^\infty \|x_n^*\|.\|x_n - y_n\| < 1$. Entonces $\{y_n\}$ es una base para X equivalente a $\{x_n\}$.

DEMOSTRACION. Cualesquiera sean $c_1,\dots,c_N$, si $x = \sum_1^N c_i\, x_i$ tenemos
$\|\sum c_i(x_i - y_i)\| = \|\sum x_i^*(x)(x_i - y_i)\| \leqslant \theta.\|x\| = \theta\ \|\sum c_i\, x_i\|$. Q.E.D.

El resultado de Krein-Milman-Rutman tiene interesantes consecuencias en casos particulares pues asegura que si X tiene una base entonces de todo sub conjunto denso de X puede extraerse otra base.

NOTA. Así como en el caso del Teorema de N.Bari podía reemplazarse la cota 1 por ∞ lo mismo es posible para la proposición precedente con tal de asumir que $\{y_n\}$ es completa en X.

El Teorema de Birkhoff-Rota es un caso particular del siguiente teorema debido a F.Brauer (1964):

TEOREMA 26. Sea $\{x_n\}$una base ortonormal de H e $\{y_n, y_n^*\}$ un sistema biortogonal tal que

$$(\#) \qquad \sum_1^\infty \|x_n - y_n\|^2 < \infty \quad , \quad \sum_1^\infty \|x_n - y_n^*\|^2 < \infty.$$

Entonces la familia $\{y_n, y_n^*\}$ es una base de H.

(En consecuencia, $\{y_n^*, y_n\}$ es una base de H y como (#) implica (*), del teorema 23 sigue que $\{y_n, y_n^*\}$ es una base de Riesz de H).

CAPITULO VII

TEOREMAS DE PUNTO FIJO Y APLICACIONES.

1. Una transformación $T: F \longrightarrow F$ se dice que tiene un *punto fijo* si existe $x \in F$ tal que $Tx = x$. Teoremas que aseguran la existencia de un punto fijo se aplican con éxito en problemas del análisis lineal y no lineal, en particular en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. El principio de contracción de Banach-Cacciopoli es uno de ellos, y no es ni más ni menos que un resultado que permite evitar la repetición del método de aproximaciones sucesivas, el cuál podría aplicarse en lugar del teorema, cosa que a veces se hace y con ventajas.

DEFINICION 1. Sea T una aplicación de un espacio de Banach X en sí mismo y λ una constante no negativa menor que uno. Si T verifica

$$\|Tx - Ty\| \leqslant \lambda . \|x - y\| \quad , \quad \forall\ x,y \in X,$$

entonces T se llama una *contracción* en X y λ se llama la *constante de contracción* de T. Si T lleva $F \subset X$ en F entonces λ es llamada la constante de contracción de T *en* F.

TEOREMA 1. (Principio de contracción de Banach-Cacciopoli). Sea F cerrado contenido en X espacio de Banach, y $T: F \longrightarrow F$ una contracción en F. Entonces T tiene un único punto fijo $\overline{x}$ en F, al cual converge la sucesión $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0,1,2,\ldots$, cuando $n \longrightarrow \infty$, cualquiera sea $x_0 \in F$. Además, para todo $n \geqslant 1$:

$$\|\overline{x} - x_n\| \leqslant \lambda^n . \|x_1 - x_0\| / (1 - \lambda).$$

DEMOSTRACION. Supongamos $\lambda \in (0,1)$. La unicidad sigue de que si también $Tx' = x'$ entonces

$$0 \leqslant \|\overline{x} - x'\| = \|T\overline{x} - Tx'\| \leqslant \lambda . \|\overline{x} - x'\| \quad \text{implica} \quad \|\overline{x} - x'\| = 0 .$$

Dado $x_0 \in F$, por hipótesis, $Tx_n = x_{n+1} \in F$, y se tiene

$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \lambda . \|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \ldots . \leqslant \lambda^n . \|x_1 - x_0\|$. Luego, si $m > n$:

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \ldots . + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant (\lambda^{m-1} + \ldots + \lambda^n) . \|x_1 - x_0\| \leqslant$$

$\leqslant \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} . \|x_1 - x_0\|$, y $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy que converge a cierto $\overline{x}$ que necesariamente pertenece a $F = \overline{F}$ y es un punto fijo. Q.E.D.

EJERCICIOS. 1) Sea T una aplicación de un espacio métrico completo M en sí mismo y sea ρ la métrica del espacio y $0 < \lambda < 1$. Si $\forall\ x,y \in M$ se verifica

$$\rho(Tx,Ty) \leqslant \lambda\rho(x,y)$$

(o sea T es una contracción en M) entonces T tiene un único punto fijo $\overline{x}$ en M, el cual es el límite de $Tx_n = x_{n+1}$, $n = 0,1,2,\ldots$, con x_0 cualquier punto de M.

Además, $\rho(T^n x_0,\overline{x}) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot \rho(x_0,Tx_0)$, $\forall\ n \geqslant 1$.

2. Demostrar que la última desigualdad vale también para n=0.

3. Demostrar que si T es una transformación lineal del espacio de Banach X en sí mismo y $0 \leqslant \|T\| \leqslant 1$, entonces I- T es inyectiva.

4. (*Principio de aproximaciones sucesivas*). Si T es una aplicación continua de un espacio de Hausdorff H en sí mismo y si $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = y \in M$, entonces $Ty = y$.

OBSERVACIONES. a) Sea M un espacio métrico y sea T una aplicación continua de un subconjunto cerrado $F \subset M$ en un subconjunto compacto K. Si dado $\varepsilon > 0$ existe $x(\varepsilon)$ tal que

$$\rho(Tx(\varepsilon),x(\varepsilon)) < \varepsilon ,$$

diremos que $x(\varepsilon)$ es un punto ε-*fijo*, o "fijo salvo distancia ε". Si T tiene puntos ε-fijos para todo $\varepsilon > 0$ entonces T tiene un punto fijo. En efecto, para alguna subsucesión ε_n, $Tx(\varepsilon_n)$ converge (en K) a y. Luego,

$Ty = T \lim x(\varepsilon_n) = \lim Tx(\varepsilon_n) = y$.

Los puntos ε-fijos son los que usualmente uno espera encontrar al buscar puntos fijos de una transformación.

EJERCICIO. Demostrar el resultado precedente cuando F no es necesariamente cerrado pero $K \subset F$.

b) Si A es una aplicación continua de un espacio métrico completo M en sí mismo tal que $T = A^n$ es una contracción, entonces A tiene exactamente un punto fijo. En efecto, sea $\overline{x} = \lim T^j x_0$. Luego $A\overline{x} = \lim T^j Ax_0$ pues $T^j = A^{nj}$. Además $\rho(T^j Ax_0 , T^j x_0) \leqslant \lambda^j.\rho(Ax_0,x_0)$, y por lo tanto,

$\rho(T^j Ax_0,T^j x_0) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Como $\rho(T^j x_0,\overline{x}) \longrightarrow 0$ resulta que $\overline{x} = \lim T^j Ax_0 = A(\lim T^j x_0) = A\overline{x}$. Es decir todo punto fijo de T lo es de A. Recíprocamente, todo punto fijo de A lo es de T, y por lo tanto es único.

Una aplicación inmediata de este resultado es el hecho que una ecuación integral del tipo Volterra homogénea *no* tiene autovalores.

Sea $f(x) = \lambda.\int_a^x K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$, $\varphi \in C([a,b])$, $K(x,y)$ continua en x,y.

Definamos $A\,f = \lambda.\int_a^x K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$, $f \in C$.

Entonces, $\|Af - Ag\|_\infty = \|\lambda.\int_a^x K(x,y)(f(y)-g(y))dy\|_\infty \leqslant (b-a).|\lambda|.\|K\|_\infty.\|f-g\|_\infty$.

Más aún, vale: $\|A^n f - A^n g\|_\infty \leqslant \frac{(b-a)^n}{n!}.|\lambda|^n.\|K\|^n.\|f-g\|_\infty = k.\|f-g\|_\infty$.

Eligiendo n suficientemente grande resulta $k < 1$ y $T = A^n$ es una contracción de $C([a,b])$ en sí mismo. Luego, la ecuación de Volterra $Af = f$ tiene para λ una única solución. Si $\varphi \equiv 0$ entonces necesariamente $f \equiv 0$; y λ^{-1} *no* es autovalor si $\lambda \neq 0$.

Usualmente por autovalor se entiende un μ tal que $Bf = \mu f$ se satisface para cierto $f \neq 0$. Los λ son, con esta definición, los recíprocos de los μ. Hemos visto entonces que si $\mu \neq 0$ y $Bf = \int_0^x K(x,y)f(y)dy$, μ no es autovalor de B. Tampoco lo es $\mu = 0$ si se toma $K \equiv 1$.

2. En esta sección daremos una versión infinitodimensional del Teorema de Brouwer (cf.cap.V). Llamaremos H_0 al *cubo de Hilbert:*

$$H_0 = \{x = (x_1,x_2,\dots) \in l^2 : |x_i| \leqslant \tfrac{1}{i} , \quad \forall\ i\} .$$

H_0 es compacto.

TEOREMA 2. Todo subconjunto convexo compacto C de un espacio de Banach B es homeomorfo a un subconjunto convexo compacto de H_0.

DEMOSTRACION. Podemos suponer que $C \subset U$ = esfera unitaria de B. C es separable y por lo tanto $[C]$ también lo es, ($[C]$ = {combinaciones lineales de elementos de C}). Sea $f_n \in B^*$ tal que $f_n(x_n) = \|x_n\|/n$, $\|f_n\| = 1/n$, donde $\{x_n\}$ es un conjunto (numerable) de elementos no nulos, denso en $[C]$. Consideremos la siguiente aplicación *lineal* de C en H_0:

$$F: x \longrightarrow (f_1(x), f_2(x), \dots) .$$

F es continua. Además, $x \neq y$, $x,y \in [C]$ implica:

$$|f_n(x) - f_n(y)| \geqslant |f_n(x_n)| - |f_n(x-y-x_n)| \geqslant \frac{\|x_n\|}{n} - \frac{\|x-y-x_n\|}{n} .$$

Luego, si x_n es bastante próximo a $x-y$: $|f_n(x) - f_n(y)| > 0$.

Por lo tanto F es inyectiva, y define así un homeomorfismo de C sobre $F(C)$

(pues C es compacto). Q.E.D.

DEFINICION 2. P_n es la proyección de l^2 sobre un subespacio n-dimensional:

$$P_n(x_1,x_2,\dots) = (x_1,x_2,\dots,x_n,0,0,0,0,\dots).$$

TEOREMA 3. $H_0 \in$ p.p.f.

DEMOSTRACION. Dado $\varepsilon > 0$, existe n tal que $\rho(P_n x,x) = \|P_n x-x\| < \varepsilon$, $\forall\ x\in H_0$. $P_n(H_0)$ puede interpretarse como un subconjunto convexo compacto de R^n y tiene por lo tanto la propiedad de punto fijo.

Sea T una aplicación continua de H_0 en sí mismo. $P_n T$ transforma $P_n(H_0)$ en sí y por lo tanto existe x_ε tal que $P_n Tx_\varepsilon = x_\varepsilon$. Luego, $\|x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| = \rho(x_\varepsilon,Tx_\varepsilon) = \rho(P_n\ Tx_\varepsilon,Tx_\varepsilon) < \varepsilon$. Es decir, existen puntos ε-fijos para todo ε, y T tiene entonces la propiedad de punto fijo. Q.E.D.

COROLARIO 1. Todo subconjunto convexo compacto C de H_0 tiene la propiedad de punto fijo.

(En efecto, C es un retracto de H_0 y hereda la p.p.f.).

Del Corolario 1 y el Teorema 5 sigue ahora el siguiente *teorema de Schauder (1930)*:

COROLARIO 2. Todo subconjunto convexo compacto C de un espacio normado N tiene la propiedad de punto fijo.

(En efecto, la completación de N a un espacio de Banach B no altera al conjunto C).

EJERCICIO. Si F es un conjunto acotado, cerrado y convexo de un espacio de Banach, y si la aplicación continua f: $F \longrightarrow F$ es *completamente continua* (:= lleva acotados en relativamente compactos) entonces f tiene un punto fijo. (Sugerencia: la cápsula convexa cerrada de un conjunto compacto de un espacio de Banach es compacta (Mazur)).

El Corolario 2 fue generalizado por *Tychonoff* en 1935:

Cualquier subconjunto convexo compacto de un espacio localmente convexo $\in$ p.p.f.

La exigencia de compacidad en el teorema de Schauder es crítica como prueba el siguiente ejemplo debido a Kakutani (1943).

TEOREMA 4. La esfera unitaria U de l^2 *no* tiene la propiedad de punto fijo.

(Esto implica en particular que $\{x: \|x\| = 1\}$ es un retracto de U). Para la demostración del teorema 4 es más cómodo tratar $l^2(Z)$ en lugar de $l^2(N)$, i.e., $l^2(Z) = \{(\ldots,x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,\ldots): \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_i|^2 < \infty\}$.

Llamaremos S al operador definido por: $Sx = \sum x_n . e_{n+1}$ donde e_j es la sucesión igual a 1 en el lugar j, e igual a 0 en todo otro lugar.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4. Sea T definida por

$$Tx = (1 - \|x\|).e_0 + Sx.$$

$T: U \longrightarrow U$ pues $\|Tx\| \leqslant (1 - \|x\|) + \|Sx\| \leqslant (1 - \|x\|) + \|x\| = 1$, y obviamente es continua. Supongamos $Tx = x$. Entonces $(1 - \|x\|)e_0 + Sx = x$ implicaría $x - Sx = (1 - \|x\|).e_0$. En este caso sería $x \neq 0$.

Pero $x - Sx = \sum (x_n - x_{n-1}).e_n = c.e_0$ implica $x_n = x_0 \;\; \forall\, n > 0$, y $x_n = x_{-1}$ $\forall\, n < 0$. Como $x \in l^2$ necesariamente $x = 0$, contradicción. Q.E.D.

Klee (en 1955) prueba que cualquier subconjunto convexo no compacto de un espacio normado no tiene la propiedad de punto fijo, generalizando así el resultado de Kakutani.

Otros conjuntos que no tienen p.p.f. pueden obtenerse cuando es posible efectuar una reflexión en ellos con centro en un punto no en el conjunto, v.g. circunferencia, superficie esférica, o si es posible efectuar alguna rotación, v.g. el toro, la cinta de Möbius. Conjuntos no cerrados son fácilmente exhibibles como ejemplos de conjuntos donde hay una transformación continua sin punto fijo, por ejemplo, una que "mueva" los puntos hacia algún punto frontera no en el conjunto.

Sin embargo el plano proyectivo tiene la propiedad de punto fijo aunque R^k no la tiene. Es posible probar la existencia en R^k, $k \geqslant 2$, de un conjunto denso en todas partes con la p.p.f. (el llamado conjunto "spaghetti").

3. Volviendo a las aplicaciones con punto fijo observemos que vale el siguiente resultado:

Toda aplicación continua de un subconjunto convexo K de R^n en un conjunto compacto contenido en K tiene un punto fijo. En particular sigue que toda aplicación continua de R^n en un conjunto acotado de R^n tiene un punto fijo.

Estas generalizaciones del teorema de Brouwer siguen del llamado *segundo teorema de Schauder:*

TEOREMA 5. Sea C un subconjunto convexo ($\neq\emptyset$) de un espacio normado B. Sea T una aplicación continua de C en un subconjunto compacto $K \subset C$. Entonces T tiene un punto fijo.

DEMOSTRACION. $cc(T)$ denotará la cápsula convexa de T, $T \subset B$, y $\overline{cc}(T)$ la clausura de esa cápsula.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ una ε-red para K, y sea $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Definamos: $f_i(x) = (\varepsilon - \|x - x_i\|) \vee 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Entonces $f_i \neq 0$ si y sólo si $\|x - x_i\| < \varepsilon$. Luego, podemos definir P como:

$$P(x) = \frac{\sum f_i(x) x_i}{\sum f_i(x)} \quad , \quad x \in K, \tag{1}$$

pues el denominador es no nulo en K. P es continua y es una combinación convexa de los puntos x_i que distan de x menos de ε. Entonces

$$\|Px - x\| < \varepsilon \quad , \forall\, x \in K. \tag{2}$$

Sea ahora P_n la aplicación definida por (1) con $\varepsilon = 1/n$. Evidentemente $cc(X_n) \subset C$ pues $X_n \subset K$. Entonces $P_n T$ define una aplicación continua de $cc(X_n)$ en sí misma.

Del teorema de Brouwer sigue que existe para $P_n T$ un punto fijo y_n, $y_n \in cc(X_n)$. De (2) sigue ahora que $\|P_n Ty_n - Ty_n\| = \|y_n - Ty_n\| < \frac{1}{n}$.

Luego tenemos para todo ε un punto ε-fijo de T. Por lo tanto T tiene un punto fijo. Q.E.D.

En particular tenemos que: toda aplicación continua de un espacio normado B en sí mismo tal que TB es relativamente compacto tiene un punto fijo.

A continuación enunciaremos algunos resultados interesantes que no demostraremos.

DEFINICION 3. Una aplicación T de un espacio métrico en sí mismo que satisface la condición

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant \rho(x,y) \quad \forall \ x,y$$

se dirá *no expansiva*. Si se reemplaza $\leqslant$ por $<$ se dirá que T es una *aplicación contractiva*.

TEOREMA 6. (Browder, 1965). Toda aplicación no expansiva T de un subconjunto de un espacio de Hilbert convexo, cerrado y acotado en sí mismo tiene un punto fijo.

TEOREMA 7. Toda aplicación contractiva de un espacio compacto y métrico en sí mismo tiene un punto fijo.

4. MISCELANEA.

TEOREMA 8. (ROTHE, 1937). Sea N un espacio normado y U su esfera unitaria. Sea T una aplicación continua de U en N tal que $T(\partial U) \subset U$ y $T(U)$ es relativamente compacto. Entonces T tiene un punto fijo.

DEMOSTRACION. Sea $r(x) = x$ si $x \in U$ y $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ si $x \notin U$; entonces $\overline{(rT)(U)}$ es compacto. Del 2°teorema de Schauder sigue que rT tiene un punto fijo: $rTy = y$. Si $y \in \partial U$ entonces $Ty \in U$ por hipótesis y por lo tanto $y = rTy = Ty$; si $y \in \mathring{U}$, $Ty \in \mathring{U}$, y $rTy = Ty = y$. Q.E.D.

TEOREMA 9. (POTTER, 1973). Si U es un convexo cerrado de N también vale el resultado precedente.

DEMOSTRACION. Sea $\mathring{U} = \emptyset$. Entonces $\partial U = U$ y $T(U) \subset U$. Para este caso el resultado se reduce al 2° teorema de Schauder. Sea ahora $\mathring{U} \neq \emptyset$. Podemos suponer que $0 \in \mathring{U}$. La funcional de Minkowski

$$g(x) = \inf \{c: x \in cU\}$$

es una función real continua sobre N tal que: $g(cx) = cg(x)$ para $c \geqslant 0$; $g(x+y) \leqslant g(x) + g(y)$; $0 \leqslant g(x) < 1$ si $x \in \mathring{U}$; $g(x) > 1$ si $x \notin U$; $g(x) = 1$ si $x \in \partial U$. Sea ahora $r(x)$ definida así:

$$r(x) = \frac{x}{(1 \vee g(x))}$$

$r(x)$ es una retracción de N en U como en el Teorema 8 y se puede reproducir el argumento del teorema de Rothe. Q.E.D.

TEOREMA 10. (SCHAEFER, 1955). Sea N normado y T una aplicación continua de N en sí mismo, compacta. Entonces $x = \lambda Tx$ tiene solución para $\lambda = 1$, o $\{x: x = \lambda Tx,\ 0 < \lambda < 1\}$ no es acotada.

DEMOSTRACION. Sea $r(x)$ la retracción de N en $n.U$ definida por $r(x) = \frac{n.x}{(n \vee \|x\|)}$. rT tiene un punto fijo $x \in nU$ (cf.T.5). Entonces, o bien $\|Tx\| \leqslant n$ en cuyo caso $Tx = rTx = x$, o bien $\|Tx\| > n$ en cuyo caso $\|x\| = \|rTx\| = n$, y por lo tanto $x = rTx = (\frac{n}{\|Tx\|})Tx = \lambda Tx$, $0 < \lambda < 1$.

O sea, para algún n obtenemos una solución de $Tx = x$, o para cada n obtenemos un autovector de norma n para algún autovalor en $(0,1)$. Q.E.D.

5. CONTRACCIONES UNIFORMES.

En esta sección retornamos a las contracciones, esta vez a las *contracciones uniformes* de una familia de operadores.

Sea $F \subset X$, $G \subset Y$, X e Y espacios de Banach, y sea $\{T_y : y \in G\}$ una familia de operadores que transforman F en F. De la familia se dice que es una *contracción uniforme* (sobre F) si existe $\lambda \in [0,1)$ tal que:

$$\|T_y\, x - T_y\, z\| \leqslant \lambda . \|x - z\| \quad \forall\ y \in G, \quad \forall\ x,z \in F.$$

TEOREMA 11. Sea $F = \overline{F} \subset X$, $G \subset Y$, $\{T_y : y \in G\}$ una contracción uniforme sobre F.

a) Supongamos que para cada x fijo, $T_y(x)$ es una aplicación continua de $y \in G$. Entonces el único punto fijo $g(y)$ de T_y es continuo en y.

b) Si $\forall\ y \in G$, $A_y \in L(X,X)$ y $\|A_y\| \leqslant \gamma < 1$, y si $A_y(x)$ es continua en y para cada $x \in X$, entonces el operador $I-A_y$ tiene una inversa uniformemente acotada tal que $(I-A_y)^{-1}z$ depende continuamente de (y,z). Si además A_y es continuo en y tendremos:

$$\|(I - A_{y+k})^{-1} - (I - A_y)^{-1}\| \leqslant M.\|A_{y+k} - A_y\|$$

con M independiente de y y k.

c) Si $F = \overset{\circ}{\overline{F}}$, $G = \overset{\circ}{\overline{G}}$ y $T_y(x)$ tiene derivadas parciales Fréchet continuas respecto a (x,y), entonces $g(y)$ tiene derivada (Fréchet) respecto a $y \in \overset{\circ}{G}$. Esta derivada es continua como función de y.

DEMOSTRACION. a) Sea $g(y)$ el único punto fijo de T_y. Entonces $g(y+k)-g(y) = (T_{y+k}g(y+k) - T_{y+k}g(y)) + (T_{y+k}g(y) - T_y g(y))$ implica:

$$\|g(y+k) - g(y)\| \leqslant \lambda\|g(y+k) - g(y)\| + \|T_{y+k}g(y) - T_y g(y)\|.$$

Luego: $\quad \|g(y+k) - g(y)\| \leqslant (1-\lambda)^{-1} \|T_{y+k}g(y) - T_y g(y)\|.$

b) Sea $T_{y,z}x = A_y\, x + z$, $x \in X$, $z \in X$, $y \in G$. $\{T_{y,z} : z \in X,\ y \in G\}$ es una contracción uniforme pues lo es $\{A_y\}$.

El punto fijo $g(y,z)$ es tal que $g(y,z) - A_y g(y,z) = z$, o sea $I-A_y$ no sólo es invertible sino que $(I - A_y)^{-1}(z) = g(y,z)$ depende continuamente de (y,z).

Supongamos ahora A_y continuo en y. Entonces de $(I-A_y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_y^n$ obtenemos:

$$\sup_{\|z\|\le 1} \|g(x+k,z) - g(y,z)\| = \sup_{\|z\|\le 1} \|(I - A_{y+k})^{-1}z - (I - A_y)^{-1}z\| =$$

$$= \sup_{\|z\|\le 1} \|(A_{y+k} - A_y)z + (A^2_{y+k} - A^2_y)z + \dots\| \leqslant \|A_{y+k} - A_y\| . \sum_{j=0}^{\infty} (j+1).\gamma^j .$$

(En efecto, obsérvese que $\|A_y\| \leqslant \gamma$ y que:

(2) $\|A^n - B^n\| = \|A^{n-1}(A-B) + A^{n-2}(A-B)B + A^{n-3}(A-B)B^2 + \dots + (A-B)B^{n-1}\| \leqslant$

$\leqslant \|A-B\|.\gamma^{n-1}.n$ si $\|A\|, \|B\| \leqslant \gamma$).

c) Sean $A(x,y) = \dfrac{\partial T_y(x)}{\partial y}$, $B(x,y) = \dfrac{\partial T_y(x)}{\partial x}$ donde $(x,y) \in \mathring{F} \times \mathring{G}$. Observemos que:

$\|T_y(x+k) - T_y(x) - B(x,y)h\| = o(\|h\|)$ implica

$\|B(x,y)h\| \leqslant \|T_y(x+k) - T_y(x)\| + \gamma.\|h\|$, $\gamma < (1-\lambda)/2$, si $\|h\|$ es bastante pequeña.

O sea, $\|B(x,y)h\| \leqslant \lambda\|h\| + (1-\lambda).\|h\|/2 < \gamma'.\|h\|$, $\gamma' < 1$.

Luego, independientemente de $(x,y) \in \mathring{F} \times \mathring{G}$, $\|B(x,y)\| \leqslant \gamma'$.

Entonces:

(3) $$(I - B(g(y),y))z = A(g(y),y)h$$

tiene una única solución $z = z(y,h)$ continua en (y,h) (cf.b)). De la forma de la solución $z(y,h)$ vemos que es lineal en h: $z = C(y)h$ donde $C(y) \in B(X,X)$. Escribamos:

(4) $$\begin{aligned} g(y+h) - g(y) &= T_{y+h}g(y+h) - T_y g(y) = \\ &= \{T_y g(y+h) - T_y g(y)\} + [A(g(y+h),y)h + o(\|h\|)] = \\ &= \{B(g(y),y)(g(y+h) - g(y)) + o(\|g(y+h) - g(y)\|)\} + \\ &+ [A(g(y+h),y)h + o(\|h\|)] . \end{aligned}$$

De aquí obtenemos:

$g(y+h) - g(y) = (I - B)^{-1}(o(\|g(y+h) - g(y)\|)) + (I-B)^{-1}(A.h + o(\|h\|))$.

El último $o(\|h\|)$ es igual a $\alpha(y,h) = T_{y+h}g(y+h) - T_y g(y+h) - A(g(y+h),y)h$.

Usando la fórmula de incrementos finitos (cap.V, §2) se ve que dado ε existe $\delta = \delta(y)$ tal que $\|\alpha(y,h)\| \leqslant \varepsilon.\|h\|$ si $\|h\| \leqslant \delta(y)$, (cf.a)). Luego,

$\|g(y+h) - g(y)\| = \|\Delta g\| \leqslant \|(I - B)^{-1}\|\{o(\|\Delta g\|) + \|A\|.\|h\| + o(\|h\|)\}$

implica, si $\|h\|$ es pequeña, que $\|\Delta g\| \leqslant k.\|h\|$.

Sea ahora $g(y+h) - g(y) = C(y)h + w$. Resulta de (4) que:

$$z + w = C(y)h + w = B(g(y+h) - g(y)) + o(\|g(y+h) - g(y)\|) +$$
$$+ A.h + o(\|h\|) = B(C(y)h+w) + o(\|g(y+h) - g(y)\|) + A.h + o(\|h\|),$$

$$(I - B)(C(y)h + w) = A.h + o(\|\Delta g\|) + o(\|h\|).$$

De (3) y esta última igualdad resulta:

$$(5) \qquad (I - B)(w) = -(I - B)(C(y)h) + A.h + o + o =$$
$$= (A(g(y+h),y) - A(g(y),y))h +$$
$$+ o(\|g(y+h) - g(y)\|) + o(\|h\|).$$

Como $\|\Delta g\| = O(\|h\|)$, $o(\|\Delta g\|) = o(\|h\|)$ y de (5) obtenemos $w = o(\|h\|)$, y por lo tanto que $\frac{dg}{dy} = C(y)$.

Veamos finalmente que $g(y)$ es continuamente diferenciable. Como $g'(y)h = C(y)h = z(y,h)$ resulta que $g'(y)h$ es continua en (y,h). De (3) sigue que:

$$\|C(y+k) - C(y)\| = \|(I - B(g(y+k),y+k))^{-1} A(g(y+k),y+k) -$$
$$- (I - B(g(y),y))^{-1} A(g(y),y)\| \leqslant$$
$$\leqslant \theta . \|A(g(y+k),y+k) - A(g(y),y)\| +$$
$$+ \|(I - B(g(y+k),y+k))^{-1} . A(g(y),y) -$$
$$- (I - B(g(y),y))^{-1} . A(g(y),y)\|.$$

Recordando que $\|B(x,y)\| \leqslant \delta' < 1$, y usando b) obtenemos:

$\|C(y+k)-C(y)\| \leqslant \theta . \|A(g(y+k),y+k)- A(g(y),y)\| + M\|B(g(y+k),y+k) - B(g(y),y)\| . \|A(g(y),y)\|$, que tiende a cero cuando $k \longrightarrow 0$.

Esto es, $g'(y)$ es continua. Q.E.D.

El siguiente teorema de las funciones implícitas puede obtenerse de una aplicación del teorema 11.

TEOREMA 12. Sea $F: R^n \times R^m \longrightarrow R^m$, con primeras derivadas parciales continuas, y $F(0,0) = 0$. Si la matriz Jacobiana $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ verifica $\det \frac{\partial F(0,0)}{\partial y} \neq 0$, entonces existen entornos U y V de 0 en R^n y R^m respectivamente, tales que $\forall\, x \in U$, $F(x,y) = 0$ tiene una única solución $y \in V$:

$$y = g(x).$$

Además $g(0) = 0$ y g tiene primera derivada continua.

Estudiaremos luego (cf. T.17) una generalización a espacios de Banach de este resultado. El teorema 12 aparecerá así como un caso particular de aquél.

6. APLICACIONES.

TEOREMA 13 (Peano). Si $F(t,Y)$ es continua respecto (t,Y) en un entorno de (a,B) entonces el problema $Y' = F(t,Y)$, $Y(a) = B$, tiene una solución en un entorno de a. Aquí $t \in (-\infty,\infty)$, $Y \in R^n$, $F: R^{n+1} \longrightarrow R^n$.

DEMOSTRACION. Podemos suponer $\|F(t,Y)\| \leqslant K$ en $\{|t-a| \leqslant \varepsilon\} \times \{\|Y-B\| \leqslant \varepsilon\}$.

Sea $\gamma \leqslant \varepsilon$ tal que $\gamma.K \leqslant \varepsilon$. Sea S el espacio de funciones continuas definidas en $\{|t-a| \leqslant \gamma\}$ a valores en R^n con la norma uniforme.

Sea M el subconjunto de S definido así:

$$M = \{f \in S: |f(t) - B| \leqslant \gamma.K\}.$$

M es cerrado y convexo. Sea U el operador definido por:

$$U\,X(t) = B + \int_a^t F(s,X(s))\,ds.$$

De $\|U\,Y(t) - B\| = \|\int_a^t F(t,Y(t))\,dt\| \leqslant \gamma.K$, se ve que $U: M \longrightarrow M$.

Además U es continua. Más aún,

$$\|U\,Y(s) - U\,Y(t)\| \leqslant \|\int_s^t F(t,Y(t))\,dt\| \leqslant K.|s-t|$$

implica que $U(M)$ es equicontinua, y obviamente uniformemente acotada. O sea, UM $(\subset M)$ es relativamente compacto.

Como $M = \overline{M}$, $\overline{UM}$ es un compacto contenido en M. El segundo teorema de Schauder asegura la existencia de un punto fijo $X(s)$.

Pero $UX(s) = X(s) = B + \int_a^s F(t,X(t))\,dt$ implica $X'(s) = F(s,X(s))$, $\forall$ s tal que $|s-a| \leqslant \gamma$. Q.E.D.

COROLARIO. Si el entorno de a es $|t-a| \leqslant \alpha$ y el de B, $\|y-B\| \leqslant \beta$, y si $\varphi \geqslant \|F(t,y)\|$ en $\{|t-a| \leqslant \alpha\} \times \{\|y-B\| \leqslant \beta\}$ entonces la solución $Y(t)$ encontrada está definida en $|t-a| \leqslant \alpha \wedge \beta/\varphi$. (Demostrarlo).

TEOREMA 14. (Picard). Sea $f(t,y)$ analítica en $(t,y) \in C \times C$ en un entorno de (a,b). Entonces el problema

$$y' = f(t,y) \quad , \quad y(a) = b$$

tiene una única solución analítica en un entorno de a.

DEMOSTRACION. Supongamos que en $\{|t-a| \leqslant \varepsilon\} \times \{|y-b| \leqslant \varepsilon\}$ tenemos $|f| \leqslant K$, $|\partial f/\partial y| \leqslant L$. Tomemos γ bastante pequeño: $\gamma \leqslant \varepsilon \wedge \frac{\varepsilon}{K} \wedge \frac{1}{2L}$; $M = M(\gamma) :=$

$= \{g$ analítica en $|t-a| < \gamma$: g continua en $|t-a| \leq \gamma$ y tal que allí $|g-b| \leq \gamma . K\}$.

M es completo en la norma uniforme. Sea U definido como en el teorema precedente:

$$Uh(z) = b + \int_a^z f(s,h(s))\, ds.$$

Si $h \in M$ y la integral se toma a lo largo de un camino que une a con z contenido en $|s-a| < \varepsilon$ (salvo eventualmente z) entonces $U: M \longrightarrow M$, y

$\|Uh - Ug\| \leq \gamma L . \|h-g\| \leq \frac{1}{2} . \|h-g\|$.

El teorema de contracción asegura la existencia de un único punto fijo de U en M. Este es la única solución: en efecto, toda solución es derivable en un entorno de a, luego es analítica allí. En consecuencia está en $M(\gamma)$ si γ es bastante pequeño. Q.E.D.

TEOREMA 15. Consideremos la ecuación (F y X a valores en R^n)

$$X'(t) = F(X,t)$$

y supongamos que $\exists\ \tau > 0$: $F(X,t+\tau) = F(X,t)\ \forall\ t,\ \forall\ X$. Supongamos además:

(i) $\forall\ P_0 \in B^n = \{x: \|x\| \leq 1\}$ existe una solución única en $[0,\infty)$ tal que $X(0) = P_0$.

(ii) $X(0) \in B^n \Rightarrow X(t) \in B^n\ \forall\ t > 0$.

Entonces la ecuación tiene una solución periódica

$$X(t + \tau) = X(t) \quad \forall\ t.$$

DEMOSTRACION. Sea $P_\tau = X(\tau)$ y $X(t)$ la solución con valor inicial P_0. La aplicación $P_0 \longrightarrow P_\tau$ lleva B^n en B^n en forma continua (dependencia continua del parámetro inicial), y tiene entonces un punto fijo Z. O sea, la solución con valor inicial Z vuelve a estar en Z en el instante τ. Por lo tanto es una solución de período τ pues F es periódica en t de período τ. Q.E.D.

TEOREMA 16. (DE FUNCIONES IMPLICITAS). Sea $(a,b) \in R^2$ y N un entorno de ese punto donde $f(x,y)$ es continua y $\partial f/\partial y$ existe y es continua. Supongamos $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, $f(a,b) = 0$. Entonces hay un entorno de a y una función continua $y_0(x)$ definida allí tal que:

$$y_0(a) = b \quad , \quad f(x,y_0(x)) \equiv 0.$$

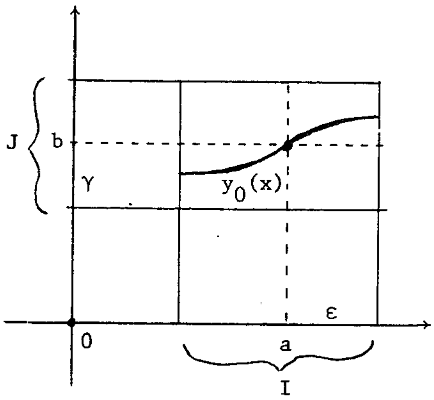
Esa solución es única.

DEMOSTRACION. Sea $D = (\partial f/\partial y)(a,b)$. Consideremos la aplicación:

$$Tz(x) = z(x) - f(x,z(x))/D.$$

Los puntos fijos de esta aplicación deberán ser las soluciones del problema. Sea $R \subset N$, $R = \{|x-a| \leqslant \varepsilon\} \times \{|b-y| \leqslant \gamma\} = I \times J$, donde ε y γ verifican

$$\left|\frac{1}{D}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 1\right| < 1/2 \text{ en } R, \quad \left|\frac{1}{D} f(x,b)\right| < \gamma/2 \quad \forall\, x \in I.$$



Sea $C = C(I)$ y $M = \{y \in C\colon y(a) = b,\ \|y(x) - b\| \leqslant \gamma\}$. Observemos que $\|T(b) - b\| = \|\frac{1}{D} f(x,b)\| < \gamma/2$, y que

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(y - \frac{1}{D} f(x,y)\right)\right| = \left|1 - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| < \frac{1}{2}.$$

Entonces si y y $z \in M$:

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| =$$

$$= \left|(y(x)-z(x)) - \frac{1}{D}(f(x,y(x)) - f(x,z(x)))\right| =$$

$$= \left|(y(x) - z(x)) - \frac{1}{D}(y(x) - z(x))\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi(x))\right| =$$

$$= |y(x) - z(x)|.\left|1 - \frac{1}{D}\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi(x))\right| \leqslant \frac{1}{2}.|y(x) - z(x)|.$$

Luego T es una contracción (con constante $\leqslant \frac{1}{2}$) que lleva M en sí mismo. En efecto, $\|Ty - b\| \leqslant \|Ty - Tb\| + \|Tb - b\| \leqslant \frac{1}{2}.\|y-b\| + \|Tb - b\| < \gamma$. Como M es un espacio métrico completo, T tiene un único punto fijo allí. Si $y_0(x)$ es una solución de $f(x,y(x)) \equiv 0$, $y(a) = b$ en un entorno rectangular U de (a,b) contenido en R y de la misma altura que R, entonces verifica $Ty_0 = y_0$ en U. Como el argumento precedente vale en U, la unicidad implica que y_0 es la restricción a U de la solución en R. La tesis sigue ahora. Q.E.D.

TEOREMA 17. Sea $F\colon X \times Y \longrightarrow X$ tal que $F(0,0) = 0$ donde X e Y son espacios de Banach. Supongamos que existan y sean continuas $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$. Si $A = \frac{\partial F(0,0)}{\partial x}$ y A^{-1} existe, entonces hay entornos de 0, U y V, en X e Y respectivamente, tales que para cada $y \in V$ la ecuación $F(x,y) = 0$ tiene solución x única, $x \in U$. Sea $x = g(y)$. g es continuamente diferenciable y $g(0) = 0$.

DEMOSTRACION. Escribamos $F(x,y) = \frac{\partial F(0,0)}{\partial x}.x - \left(\frac{\partial F(0,0)}{\partial x}.x - F(x,y)\right) =$ $= Ax - N(x,y)$, $N(0,0) = 0$. Luego:

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial F(0,0)}{\partial x} - \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \xrightarrow[x,y \to 0]{} 0.$$

Entonces

$$\|N(x,y)-N(x',y)\| \leqslant \|\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\| \cdot \|x'-x\| + o(\|x'-x\|).$$

$y \in Y$; $\|x\|$, $\|x'\| \leqslant \rho$, implican

$$\|N(x,y) - N(x',y)\| \leqslant k(y,\rho).\|x - x'\|.$$

(Aquí $k(y,\rho)$ es una función nula en $(0,0)$).

Encontrar una solución a $F(x,y) = 0$ es equivalente a encontrar una solución de $x = A^{-1} N(x,y)$. O sea, es equivalente a encontrar un punto fijo del operador $T_y: X \longrightarrow X$, $T_y := A^{-1} N(x,y)$. Entonces:

$\|T_y x\| = \|A^{-1}N(x,y)\| \leqslant K.\|N(x,y)\| \leqslant K\, k(y,\rho).\|x\| + K.\|N(0,y)\| = C,$

$\|T_y x - T_y x'\| \leqslant K.\|N(x,y) - N(x',y)\| \leqslant k(y,\rho)\, K.\|x - x'\|.$

Observemos un poco más a la función $k(y,\rho)$. Del teorema del valor medio sabemos que:

$$\|N(x,y)-N(x',y) - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.(x-x')\| \leqslant \|x-x'\|. \sup_{0\leq\theta\leq 1} \|\frac{\partial N(x+\theta\Delta x,y)}{\partial x} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\| .$$

Entonces la función $k(y,\rho)$ puede elegirse convenientemente pequeña con tal de tomar ρ y $\|y\|$ pequeños. Por ejemplo, de manera tal que si $\rho \leqslant \varepsilon$ y $\|y\| \leqslant \gamma$ entonces $k.K < 1$ y $C < \varepsilon$. En consecuencia, $\{T_y\}$ es una contracción uniforme de $U = \{x \in X: \|x\| \leqslant \varepsilon\}$ en U, si $y \in V = \{y \in Y: \|y\| < \gamma\}$. Del teorema 11 sigue que T_y tiene un único punto fijo $g(y)$ que se anula en 0. Como $T_y x$ es continua en y para $x \in U$, $g(y)$ es continua en V. Por otra parte,

$$\frac{\partial T_y x}{\partial x} = A^{-1}\,\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial T_y x}{\partial y} = A^{-1}\,\frac{\partial N(x,y)}{\partial y}$$ son operadores continuos en (x,y),

y esto implica que $g'(y)$ existe para $y \in V$, y es continua. QED.

Recordemos que el teorema 17 contiene como caso particular al teorema 12. Cuando el teorema de funciones implícitas se escribe en términos de una función $F(x,y) \equiv x - f(y)$ puede enunciarse de la siguiente manera: Sea $f(y) \in C^1$ en un entorno abierto E de 0, $\det \partial f/\partial y \neq 0$ en E y $f(0) = 0$. Existen entonces ε y $\gamma > 0$ tales que si $|x| < \gamma$, $x = f(y)$ tiene allí una única solución continua $y = g(x)$, y satisfaciendo la desigualdad $|y| < \varepsilon$. Además $g \in C^1$ en $|x| < \gamma$ y $g(0) = 0$. (Se deja al lector como ejercicio probar que bajo estas condiciones $g(\{|x| < \delta\})$ es un entorno de 0).

Este resultado puede *refinarse* así:

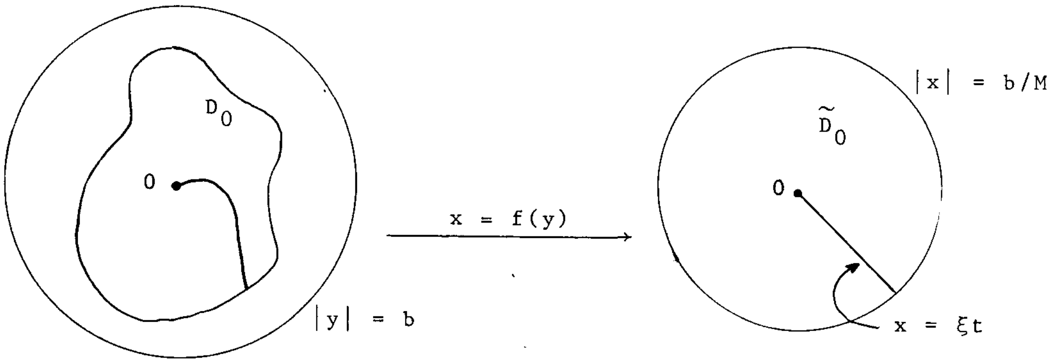
TEOREMA 18. Sea $E \supset \bar{D} = \{y: |y| \leqslant b\}$ y $M_1 > \|\partial f/\partial y\|$ = norma como operador de la matriz jacobiana, $M > \|(\partial f/\partial y)^{-1}\|$ en E. Sea $D_1 = \{y: |y| < b/M.M_1\}$ ($\subset D$ pues $M\, M_1 \geqslant 1$). Entonces existe un dominio D_0 : $D_1 \subset D_0 \subset D$ donde es

$x = f(y)$ un homeomorfismo de D_0 sobre $\widetilde{D}_0 = \{|x| < b/M\}$, (Wazewski).

DEMOSTRACION. En efecto, escribamos $\xi t = f(y)$, t real, $\xi \neq 0$ un vector constante. Entonces $y = y(t)$ e $y' = f_y^{-1}(y).\xi$.

Consideremos el problema de valores iniciales $y' = f_y^{-1}(y).\xi$, $y(0) = 0$. El Corolario del Teorema de Peano asegura que este problema tiene una solución $y = Y(t,\xi)$ para $|t| \leqslant b/M.|\xi|$.

Pero $f(Y(t,\xi))$ es una función de $t, h(t)$, tal que $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} =$
$= \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (\frac{\partial f}{\partial y})^{-1}\xi = \xi$. Entonces $h = \xi t + \eta$. Como $f(Y(0,\xi)) = f(0) = 0$, sigue que $\eta = 0$ y por lo tanto $f(Y(t,\xi)) = \xi t$.



Como f es C^1, localmente $Y(t,\xi)$ es la única solución de esta última ecuación (teorema de funciones implícitas) lo cual prueba que $Y(t,\xi)$ es la *única* solución de nuestra ecuación diferencial. (Luego, si $|\xi| = 1$, $y = Y(t,\xi)$ existe en $|t| \leqslant b/M$). Reemplacemos ξ por $c.\xi$, $c > 0$. Entonces $Y(t,c\xi)$ satisface $y' = f_y^{-1}(y).c\xi$, $y(0) = 0$, cuando $|t| \leqslant b/M.c.|\xi|$. Pero allí también $\frac{dY(ct,\xi)}{dt} = (f_y^{-1})(Y(ct,\xi)).c\xi$. La unicidad de la solución implica que

$Y(t,c\xi) = Y(ct,\xi)$ si $|t| \leqslant b/M.c.|\xi|$.

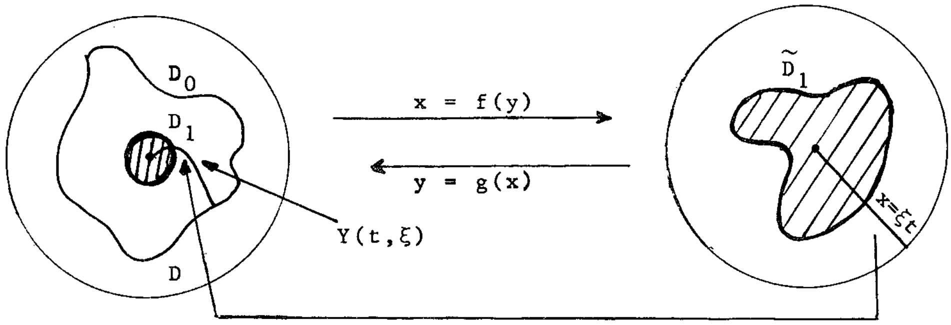
Sean ahora ξ y t tales que $|\xi| = 1$, $t=1$. Luego, $Y(1,c\xi) = Y(c,\xi)$ si $c \leqslant b/M$. Poniendo $c=t$, $Y(1,t\xi) = Y(t,\xi)$ si $|t| \leqslant b/M$, $|\xi| = 1$.

Sea $y = g(x) = Y(1,x)$ para $|x| \leqslant b/M$. Entonces $f(g(x)) \equiv x$. Luego $g(x) \in C^1$ en $|x| \leqslant b/M$ (teorema de funciones implícitas). Además $\partial g/\partial x =$
$= f_y^{-1}(y)|_{y=g(x)} \Rightarrow \det \partial g/\partial x \neq 0$ en $|x| \leqslant b/M$.

Sea ahora $D_0 = g(\{x: |x| < b/M\})$. Del teorema de funciones implícitas sigue que D_0 es un abierto y por construcción resulta $D_0 \subset D$. Además $g(f(y)) = y$ para y en D_0. Y también en $\overline{D_0}$. Tenemos así la proposición:

$x = f(y)$ *define una aplicación biyectiva de* $\overline{D_0}$ *en* $\{|x| \leqslant b/M\}$.

Veamos finalmente que $D_0 \supset D_1 = \{|y| < b/M\, M_1\}$.



Consideremos la aplicación $y = g(x)$ en $\{|x| \leqslant b/M\}$, y apliquémosle la proposición precedente (demostrada para $x = f(y)$). Existe un dominio $\tilde{D}_1$ en $\{|x| < b/M\}$ tal que $y = g(x)$ es una biyección de $\overline{\tilde{D}_1}$ sobre $\{|y| \leqslant b/M.M_1\}$. Necesariamente entonces $D_1 \subset D_0$.

NOTA. Obsérvese que f también suministra un homeomorfismo de $\overline{D_0}$ sobre $\{x: |x| \leqslant b/M\}$.

EJERCICIO. Demostrar que la función $g(x)$ del teorema 12 lleva cierto entorno de 0 en un entorno de 0.

TEOREMA 19. (Lipschitz, 1876). Sea f continua y tal que:

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leqslant K.|y - z|$$

en un entorno N_1 de (a,b). Entonces el problema de valores iniciales:

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \quad , \quad y(a) = b \quad , \tag{4}$$

tiene exactamente una solución en un cierto entorno de a.

DEMOSTRACION. (4) es equivalente a la ecuación integral:

$$y(t) = b + \int_a^t f(x,y(x))\, dx \ ,$$

o sea, es un punto fijo, en caso de existir, de la aplicación U:

$$(Uy)(t) = b + \int_a^t f(x,y(x))\, dx.$$

En un entorno compacto N_2 de (a,b), $N_2 \subset N_1$, se verifica: $|f(x,y)| \leqslant L$.

Sea $R \subset N_2$ el rectángulo: $\{|x-a| \leqslant d\} \times \{|y-b| \leqslant L.d\}$, y M = {funciones continuas con gráfico en R}. Entonces $U: M \longrightarrow M$. Si $dK < 1$, U es una contracción en M: $|Uy(t) - Uz(t)| \leqslant d.\sup_x |f(x,y(x)) - f(x,z(x))| \leqslant dK.\sup_x |y(x) - z(x)|$ implica $\|Uy - Uz\| \leqslant dK.\|y - z\|$.

Luego existe un punto fijo en M. Observemos que cualquier solución que pasa por b necesariamente debe estar contenida en M pues $|y'(t)| \leqslant L$ mientras no salga de N_2. Q.E.D.

Sea $D(f,g)$ una expresión diferencial lineal en f tal que $D(f,f)$ no necesariamente sea lineal en f. El *método de linealización de Leray-Schauder* nos permite resolver la ecuación $D(f,f) = 0$, en muchos casos, de la siguiente manera.

Sea $D(f,g) = 0$ y $f = Tg$ la supuesta solución única para cada g de una familia M. Si T tiene un punto fijo φ, $D(\varphi,\varphi) = 0$, y encontramos así una solución de la ecuación (no lineal) $D(f,f) = 0$.

Veamos una aplicación de este método y del 2° teorema de Schauder:

TEOREMA 20. Sea $f(t,x,y)$ continua y acotada en $[0,T] \times R \times R$. La ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} = f(t,x,\frac{dx}{dt})$, $x(0) = a$, $x(T) = b$, tiene una solución $x(t)$ en $0 \leqslant t \leqslant T$.

DEMOSTRACION. En efecto, sea $U: C^1 \longrightarrow C^1$ definido por: $Uy = x$, donde $x(0) = a$, $x(T) = b$, $x''(t) = f(t,y(t),y'(t))$. U está bien definido pues dada y la solución general de la ecuación tiene dos constantes arbitrarias.

Por hipótesis $|x''(t)| \leqslant K''$ donde K'' es independiente de t y de y. Luego, $|x'(t) - x'(0)| \leqslant K''.T$. Si $x'(0)$ no fuera acotada cuando y recorre C^1 entonces para alguna función $y(t)$, la función $x(t)$ tendría una derivada de módulo muy grande $\forall\, t \in [0,T]$. Por lo tanto si $x(0) = a$ sería imposible que $x(T) = b$. Luego, $\exists\ K'$ tal que $|x'(t)| \leqslant K'\ \forall\ y \in C^1$. Por lo tanto $|x(t)| \leqslant K\ \forall\ y \in C^1$. Entonces $\{x(t) : y \in C^1\}$ es precompacto en C^1. Sea $y_n \longrightarrow y$, $x\ = Uy_n \longrightarrow x$, en C^1. La segunda implica que $\|x_n - x\|_\infty \longrightarrow 0$, $\|x_n' - x_n'\|_\infty \longrightarrow 0$. Y la primera que $\{x_n''\}$ converge acotadamente a una función continua.

Necesariamente entonces a x'', y $Uy_n \longrightarrow Uy$. O sea, U es un operador cerrado de C^1 en un compacto de C^1. Esto implica que U es continuo. En efecto, si no $\exists\ \{y_n\}$ tal que $y_n \longrightarrow y$ pero $Uy_n \not\longrightarrow Uy$.

De la compacidad de la imagen resulta ahora que $\exists\ \{y_{n_j}\}$ tal que $y_{n_j} \longrightarrow y$ pero $Uy_{n_j} \longrightarrow z \neq Uy$. O sea, los puntos $\langle y_{n_j}, Uy_{n_j}\rangle$ del gráfico de U no convergen a $\langle y\ ,\ Uy\ \rangle$, contradicción.

Como U es continuo de un convexo $(\subseteq C^1)$ en un compacto $(\subseteq C^1)$, el 2° teorema de Schauder asegura que existe un punto fijo. Este resuelve el problema. Q.E.D.

Consideremos la ecuación:

(5) $$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x) = p(t) \quad , \quad -\infty < t < \infty,$$

donde $g(x) = -g(-x)$ es continua y tal que $|g(x)| \leqslant M \ \forall\ x$, y además $p(t+2T) = p(t)$, $p(t) = -p(-t)$. Buscamos soluciones periódicas para la ecuación (5).

TEOREMA 21. Existe una solución periódica de (5) de período 2T tal que $x(0) = x(T) = 0$ y $x(s) = -x(-s)$.

Sea $G(s,t)$ el núcleo de Green para la expresión diferencial $\ddot{x}$ tal que $G(0,t) = G(T,t) = 0 \ \forall\ t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, o sea el correspondiente al problema de contorno: $x(0) = x(T) = 0$. Una solución de $\ddot{x} = F(t)$, cualquiera sea $F(t)$ continua en $[0,T]$, viene dada por:

$$x(s) = \int_0^T G(s,t)F(t)\,dt.$$

Esta solución se anula en 0 y en T por lo que la solución general es:

$$x(s) = \int_0^T G(s,t)F(t)\,dt + as + b.$$

En $0 \leqslant s \leqslant T$, la solución de nuestro problema -si existe- es entonces de la forma:

(6) $$x(s) = \int_0^T G(s,t)\,[p(t) - g(x(t))]\,dt + as + b\,,$$

con a y b constantes.

Volviendo a la ecuación $\ddot{x}(t) = F(t)$ con $F \in C([0,T])$ podemos escribir:

$x(s) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(s).\int_0^T x(t).z_n(t).dt$ en $L^2(0,T)$, $z_n(t)$ = n-ésima autofunción normalizada (con $z_n(0) = z_n(T) = 0$) $= \sqrt{\frac{2}{T}}$. sen $\frac{n\pi s}{T}$. Integrando dos veces por partes $\int_0^T x(t).z_n(t).dt$ obtenemos:

$$x(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi s}{T} \,.\, \frac{2T}{\pi^2.n^2} \,.\, \int_0^T F(t).\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{T}\,.\,dt.$$

O sea, si ponemos: $K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T}{\pi^2.n^2} \,.\, \operatorname{sen}\frac{n\pi s}{T} \,.\, \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{T}$, vale que:

$$x(s) = -\int_0^T F(t).K(s,t)\,dt.$$

Es decir $-K(s,t) = G(s,t)$. Observemos que $K(s,t)$ está definida $\forall\ s\ \forall\ t$ y vale: $K(s+2T,t) = K(s,t+2T) = K(s,t)$. Definamos ahora $x(s)$, si existe, como solución de:

$$(7) \qquad x(s) = as + b + \int_0^T K(s,t)\,[g(x(t)) - p(t)]\,dt \quad ,$$

Veamos que (7) tiene una solución en $[-T,T]$. Sea:

$$(9) \qquad (Ux)(s) = y(s) = f(s) + \int_0^T K(s,t)\,g(x(t))\,dt \quad .$$

con $f(s) = \int_0^T K(s,t)(-p(t))\,dt$, y $\mathcal{D}$ el subconjunto convexo cerrado de $C([-T,T])$ definido por $|x(s)| \leqslant \|f(s)\|_\infty + \|K\|_\infty.T.M$, $x(0) = x(T) = x(-T) = 0$.

Entonces $U: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$. La continuidad de K y la acotación de g implican que $U(\mathcal{D})$ es equicontinua. Luego $\overline{U(\mathcal{D})}$ es compacta y contenida en $\mathcal{D}$. El 2° teorema de Schauder implica ahora que existe un punto fijo de la aplicación U.

Veamos ahora que x(s) es la solución periódica buscada.

Esta solución de (7) en $[-T,T]$ es solución de (5) en $[0,T]$ y verifica para $\sigma = -s$, $0 \leqslant s \leqslant T$,

$$(8) \qquad x(\sigma) = a\sigma + b - \int_0^T K(s,t)\,[g(x(t)) - p(t)]\,dt \ .$$

Entonces sigue de $x(T) = x(-T)$ necesariamente que $a = 0$. Luego de (8) obtenemos que $x(\sigma) = -x(s) + 2b$. Obviamente $b = 0$ y entonces:

$$\ddot{x}(\sigma) = -\ddot{x}(s) = g(x(s)) - p(s) = g(-x(\sigma)) - p(-\sigma) = p(\sigma) - g(x(\sigma)).$$

O sea, x(s) definida por (7) con a=b=0 es periódica de período 2T, pues lo es K; y además x(s) es solución de (5) en $[-T,T]$. Si s pertenece a este intervalo vale:

$$\ddot{x}(s+2T) = \ddot{x}(s) = p(s) - g(x(s)) = p(s+2T) - g(x(s+2T)) \ ,$$

y x(s) es solución $\forall$ s. Q.E.D.

Estudiaremos finalmente una aplicación a la teoría de funciones armónicas.

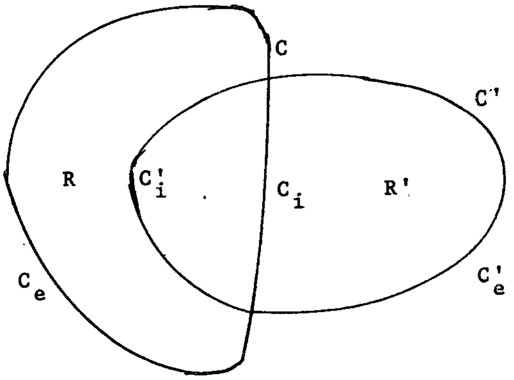
Sean R y R' dos regiones limitadas por los contornos C y C' donde $C = C_i + C_e$, $C' = C'_i + C'_e$, $C_i = C \cap R'$, $C'_i = C' \cap R$ y $C_e \cup C'_e$ es el contorno de $R \cup R'$.

Suponemos $C_i \neq \emptyset \neq C'_i$.

Buscamos una función armónica w en $R \cup R'$ continua hasta el borde que toma valores preasignados continuos en $C_e \cup C'_e$.

Suponemos que el problema es resoluble para R y R' y que los datos tienen módulos no mayores que uno.

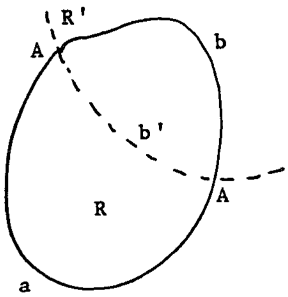
Sean u,v,... armónicas en R, continuas en $\overline{R}$ que toman valores dados en C_e, ídem para u',v',..., R' y C'_e, y que no superan en módulo a uno. (Como C'_e es cerrado por el teorema de Tietze existe una función continua en C' que coin



cide con un dato continuo en C_e'. Por lo tanto existe una función armónica en R', u', continua en $\overline{R'}$ e igual a aquella extensión en C', y además verificando $\|u\|_\infty \leqslant 1$ en $\overline{R'}$). Sea E el espacio de los pares $\xi = (u,u')$ con la métrica $\rho(\xi,\eta) = \rho((u,u'),(v,v')) =$
$= \|u - v\|_{\infty|C_i} \vee \|u' - v'\|_{\infty|C_i'}$. Observando que $\|u - v\|_{\infty|C_e} = 0 = \|u' - v'\|_{\infty|C_e'}$, y utilizando el principio de máximo para funciones armónicas resulta que E es completo. Consideremos la aplicación: $T\xi = T(u,u') = (\bar{u},\bar{u}')$ con $\bar{u} = u'$ en C_i, $\bar{u}' = u$ en C_i'. Entonces
$\rho(T\xi,T\eta) = \|u'-v'\|_{C_i} \vee \|u-v\|_{C_i'}$. Pero $\|u' - v'\|_{C_i} \leqslant q.\|u' - v'\|_{C'} =$
$= q.\ \|u' - v'\|_{C_i'}$ con cierto $q < 1$ (Lema auxiliar) que depende solamente de R y R'.

O sea, $\rho(T\xi,T\eta) \leqslant q.\rho(\xi,\eta)\ \ \forall\ \xi,\eta$. Luego, T es una *contracción* de E en E, y por lo tanto tiene un único punto fijo: $T(u,u') = (u,u')$. Entonces u=u' en C_i y u=u' en C_i' implican u=u' en el contorno de $R \cap R'$.
Entonces u=u' allí. Luego, la función w igual a u en R y a u' en R' define una función armónica continua hasta el borde igual al dato en $C_e \cup C_e'$. Q.E.D.

LEMA AUXILIAR. Bajo las mismas hipótesis enunciadas vale que si v es una



función armónica que se anula sobre a y que sobre b satisface la desigualdad $0 \leqslant |v| \leqslant 1$ entonces existe una constante positiva $q < 1$ que sólo depende de R y R' tal que sobre b' se satisface $|v| \leqslant q$.

La demostración de este lema puede verse en: Courant und Hilbert,Methoden der ....", vol.II,p.266.

Esta aplicación de punto fijo reemplaza al *método alternante* de H.A.Schwarz.

REFERENCIAS

[1] ACHIESER,N.I., Theory of approximation, Ungar, New York, 1956.

[2] ACHIESER,N.I. / GLASMANN,I.M., Theorie der Linearen Operatoren im Hilbert-Raum, Akademie-Verlag, Berlin, 1968.

[3] BERGER,M.S., Nonlinearity and Functional Analysis, Academic Press, New York, 1977.

[4] BIRKHOFF,G. and ROTA,G-C., Ordinary Differential Equations, J.Wiley and Sons, New York, 1978.

[5] De GUZMAN,M., Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Alhambra, Madrid, 1975.

[6] DIEUDONNE,J.A., Fundamentos de Análisis Moderno, Reverté, Barcelona, 1966.

[7] DUNFORD,N. and SCHWARTZ,J.T., Linear Operators, Part I: General Theory, Interscience Publishers, Inc.,New York, 1958.

[8] ELTON LACEY,H., The Isometric Theory of Classical Banach Spaces, Springer-Verlag, New York, 1974.

[9] HALMOS,P.R., Introduction to Hilbert Space, Chelsea, New York, 1957.

[10] HAMEL,G., Integralgleichungen, Springer-Verlag, Berlin, 1949.

[11] KACZMARZ,S. and STEINHAUS,H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea Publishing Co., New York, 1951.

[12] LORCH,E.R., Spectral Theory, Oxford University Press, New York, 1962.

[13] MARTI,J.T., Introduction to the Theory of Bases, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[14] RIESZ,F. et Sz.-NAGY,B., Lecons d'Analyse Fonctionnelle, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.

[15] SCHECHTER,M., Principles of Functional Analysis, Academic Press, New York, 1971.

[16] SCHEMEIDLER,W. and DREETZ,W., Functional Analysis, Capítulo 11 de Fundamentals of Mathematics, Vol.III, The MIT Press, 1974.

[17] SMART,D.R., Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[18] YOUNG,R.M., An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York, 1980.

[19] ZAANEN,A.C., Linear Analysis, North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 1956.

BIBLIOGRAFIA ADICIONAL

[20] BACHMAN,G. and NARICI,L., Functional Analysis, Academic Press, New York, 1968.

[21] BANACH,S., Théorie des opérations linéaires, Varsovia, 1932.

[22] BERBERIAN,S.K., Introduction to Hilbert Space, Oxford University Press, New York, 1961.

[23] COTLAR,M. and CIGNOLI,R., An Introduction to Functional Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1974.

[24] DAY,M.M., Normed Linear Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 1958.

[25] EDWARDS,R.E., Functional Analysis, Holt, Rinehart and Wiston, New York, 1965.

[26] GOLDBERG,S., Unbounded linear operators; Theory and Applications, Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[27] HILLE,E., Methods in Classical Analysis, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

[28] HILLE,E. and PHILLIPS,R.S., Functional Analysis and Semi-Groups, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol.31, Providence, R.I., 1957.

[29] KATO,T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York, 1966.

[30] KOLMOGOROV,A.N. y FOMIN,S.V., Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, MIR, Moscú, 1975.

[31] KÖTHE,G., Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, Berlín, 1969.

[32] PRUGOVEČKI,E., Quantum Mechanics in Hilbert Space, Academic Press, New York, 1981.

[33] RUDIN,W., Functional Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1973.

[34] STONE,M.S., Linear Transformations in Hilbert Spaces and their Applications to Analysis, American Math. Soc. Coll. Pub., Vol.15, New York, 1932.

[35] TAYLOR,A.E., Introduction to Functional Analysis, Wiley, New York, 1958.

[36] WILANSKY,A., Functional Analysis, Blaisdell, New York, 1964.

[37] YOSIDA,K., Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlín, 1965.