NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS

2

AGNES BENEDEK

SOBRE EL PROBLEMA DE DIRICHLET

1969
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

PUBLICACIONES DEL INSTITUTO DE MATEMATICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

I. NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

1. MONTEIRO (ANTONIO) et VARSAVSKY (OSCAR) - **Algèbres de Heyting Monadiques.** Traducción de una nota publicada en "**Actas de las X Jornadas de la Unión Matemática Argentina**", 1957, pp. 52-59.

2. MONTEIRO (ANTONIO) - **Normalité dans les Algèbres de Heyting Monadiques.** Traducción de una nota publicada en "**Actas de las X Jornadas de la Unión Matemática Argentina**", 1957, pp. 50-51.

3. VARSAVSKY (OSCAR) - **Quantifiers and equivalence relations.** Nota publicada en "**Revista Matemática Cuyana**", Vol. 2, fasc. 1 (1958), pp. 29-51.

4. SIKORSKI (ROMAN) - **Algebras de Boole.** Lecciones dictadas en la Universidad Nacional del Sur, redactadas por Antonio Diego. 1ª Edición, Universidad Nacional del Sur. 1960, 73 pág. (agotada). 2ª Edición, 84 pág.

5. SIKORSKI (ROMAN) - **Teorías matemáticas formalizadas.** Lecciones dictadas en la Universidad Nacional del Sur, redactadas por Antonio Diego. 1ª Edición, Universidad Nacional del Sur, 1960, 65 pág. (agotada). 2ª Edición, 70 pág.

6. MONTEIRO (ANTONIO) - **Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositionnel classique.** Nota publicada en "**Anais da Academia Brasileira de Ciências**" (1960), pp. 1-7.

7. MONTEIRO (ANTONIO) - **Algèbres monadiques.** Traducción de una nota publicada en "**Actas do Segundo Colóquio Brasileiro de Matemática**". São Paulo, 1960, pp. 33-52.

8. PORTE (JEAN) - **La logique mathématique et le calcul mécanique.** 1ª Edición, Universidad Nacional del Sur, 1960, 87 pág. (agotada). 2ª Edición, 104 pág. (en preparación).

9. PORTE (JEAN) - **Quelques extensions du théorème de déduction.** Nota publicada en "**Revista de la Unión Matemática Argentina**", 20 (1960), pág. 259-266.

10. MONTEIRO (ANTONIO) - **Linéarisation de la logique positive de Hilbert-Bernays.** Nota publicada en "**Revista de la Unión Matemática Argentina**", 20 (1960), pp. 308-309.

11. DIEGO (ANTONIO) - **Sur les Algèbres implicatives.** Traducción de una nota publicada en "**Revista de la Unión Matmeática Argentina**", 20 (1960), pp. 310-311.

12. DIEGO (ANTONIO) - **Sobre algébras de Hilbert.** Tesis de Doctorado en la Universidad Nacional de Buenos Aires (1961), 94 pág.

13. PORTA (HORACIO) - **Sur un théorème de Skolem.** Preprint de una nota publicada en **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.** 256 (1963), pp. 2562-2564.

14. MONTEIRO (LUIZ) et PICCO (DARIO) - **Les réticulés de Morgan et l'opération de Sheffer.** Preprint de una nota publicada en "**Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences**", 11 (1963), pp. 355-358.

15. MONTEIRO (ANTONIO) - **Construction des Algèbres de Nelson finies.** Preprint de una nota publicada en "**Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences**", 11 (1963), pp. 359-362.

16. DIEGO (ANTONIO) and SUAREZ (ALBERTO) - **Two sets of axioms for boolean algebras.** Preprint de una nota en curso de publicación en "**Portugaliae Mathematica**".

17. MONTEIRO (LUIZ) et GONZALEZ COPPOLA (LORENZO) - **Un théorème sur les Algèbres de Lukasiewicz trivalentes.** Preprint de una nota en curso de publicación en "**Portugaliae Mathematica**".

18. MARONNA (RICARDO) - **Axioms for Morgan lattices.** Prepint de una nota en curso de publicación en "**Portugaliae Mathematica**".

19. MONTEIRO (LUIZ) - **Sur les Algèbres de Heyting trivalentes.** Preprint de una nota en curso de publicación en "**Fundamenta Mathematicae**", sous le titre "Algèbre du calcul propositionnel trivalent de Heyting".

20. BRIGNOLE (DIANA) et MONTEIRO (ANTONIO) - **Caractérisation des Algèbres de Nelson par des égalités.** Preprint.

21. MONTEIRO (ANTONIO) - **Sur la définition des Algèbres de Lukasiewicz trivalentes.** Preprint.

22. MONTEIRO (LUIZ) - **Axiomes indépendants pour les Algèbres de Lukasiewicz trivalentes.** Preprint.

SOBRE EL PROBLEMA DE DIRICHLET

por

AGNES BENEDEK

Notas de curso.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
INSTITUTO DE MATEMATICA
BAHIA BLANCA - 1968

SOBRE EL PROBLEMA DE DIRICHLET

1. INTRODUCCION.

Consideraremos operadores diferenciales de la forma:

$$L(u) = \left(\sum_{i,j} a_{ij}(x)\, D_i D_j + \sum_j b_j(x)\, D_j + c(x) \right) u$$

definidos en una región acotada de contorno $C^{2,\lambda}$ con $\lambda < 1$, coeficientes pertenecientes a $C^{0,\lambda}(\mathcal{D})$ y verificando para cada $x \in \mathcal{D}$:

$$\sum a_{ij}(x)\, \gamma_i\, \gamma_j \geqslant \beta(\gamma_1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \gamma_n^2),$$

$\beta = \beta(x) > 0$, o lo que es lo mismo, verificando la desigualdad anterior en un cierto entorno de cada punto $x \in \mathcal{D}$ con β constante para ese entorno. Esta última es la condición de elipticidad.

Para quienes no esten familiarizados con la nomenclatura se introduce la sección siguiente).

Si $u \in C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$ entonces $Lu \in C^{0,\lambda}(\mathcal{D})$ y su restricción a $\partial\mathcal{D}$, que siempre denotaremos con $u_{|\partial}$, pertenece a $C^{2,\lambda}$, (cf. la sección siguiente). O sea, el operador $\mathcal{L}u = (Lu, u_{|\partial})$ es un operador lineal y continuo de $C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$ en $C^{0,\lambda}(\mathcal{D}) \times C^{2,\lambda}(\partial\mathcal{D})$.

<u>PROBLEMA</u>. Encontrar un operador inverso $\mathcal{E}$ tal que si $(f, \varphi) \in C^{0,\lambda}(\mathcal{D}) \times C^{2,\lambda}(\partial\mathcal{D})$ entonces:

$$\mathcal{E}(f,\varphi) = u \in C^{2,\lambda}(\mathcal{D}),\ \mathcal{L}u = (f,\varphi).$$

Supondremos que nuestras funciones son reales y que la región $\mathfrak{D}$ es un dominio: abierta y conexa.

Resolveremos el problema en el caso en que existe una constante $\beta > 0$ de elipticidad válida para todos los puntos del dominio simultáneamente, restricción que supondremos desde ahora en adelante.

(En la sección final se resolverá el problema mencionado solamente suponiendo $\varphi \in C^0(\partial\mathfrak{D})$.

2. NOMENCLATURA.

Diremos que en una región acotada $\mathfrak{D}$ una función f pertenece a $C^{k,\lambda}(\mathfrak{D})$, o simplemente a $C^{k,\lambda}$, $k \geqslant 0$, $0 < \lambda \leqslant 1$, si f tiene todas sus derivadas hasta el orden k continuas y acotadas, y las k-ésimas verificando uniformemente una condición de Lipschitz de orden λ :

$$\forall x \ \forall y, \ x \in \mathfrak{D}, \ y \in \mathfrak{D}, \ \left| D_{i_1} \ldots D_{i_k} f(x) - D_{i_1} \ldots D_{i_k} f(y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant M_{i_1, \ldots, i_k} |x - y|^{\lambda}, \text{ donde } D_i = \partial / \partial x_i \ , \ M_{i_1, \ldots, i_k}$$

constante.

O sea, las derivadas de orden k pertenecen a $C^{0,\lambda}(\mathfrak{D})$.

De lo dicho se desprende que tanto la función como sus derivadas en cuestión, pueden extenderse continuamente a $\overline{\mathfrak{D}}$, y las derivadas k-ésimas extenderse preservando las constantes $M_{i_1,\dots,i_k}$.

Si $f \in C^{0,\lambda}(\mathcal{D}) = C^{\lambda}(\mathcal{D})$, su norma se define como:

$\|f\|_{0,\lambda} = \|f\|_{\lambda} = \inf.\{M : |f(x) - f(y)| \leq M.|x-y|^{\lambda}, \forall\, x,y \in \mathcal{D}\} + \|f\|_{\infty}$. Si $f \in C^{k,\lambda}(\mathcal{D})$ su norma se define como:

$$(1)\quad \|f\|_{k,\lambda} = \sum_{h=0}^{k-1} \sum_{i_h=1}^{n} \dots \sum_{i_1=1}^{n} \|D_{i_1}\dots D_{i_h} f\|_{\infty} + \sum_{i_1=1,\dots,i_k=1}^{n} \|D_{i_1}\dots D_{i_k} f\|_{\lambda} .$$

$C^{k,\lambda}(\mathcal{D})$ es entonces un espacio vectorial normado completo. Veamos entonces la completidad. Si f_n es de Cauchy en la norma definida por (1) entonces:

$D_{i_1}\dots D_{i_h} f_n \xrightarrow{\ \cdot\ } g_{i_1\dots i_h}$ y por conocidos teoremas de análisis $g_{i_1\dots i_h}$ es la derivada $D_{i_1}\dots D_{i_h}$ de la función $g = \lim f_n$. Así que sólo falta demostrar que las derivadas k-ésimas de $f_n - g$ tienen norma Lipschitz λ tendiendo a 0 para $n \to \infty$.. Pero esto resulta haciendo tender m a ∞ en :

$\|D_{i_1}\dots D_{i_k}(f_n - f_m)\|_{\lambda} \leq \|f_n - f_m\|_{k,\lambda} < \epsilon$ si $n,m \geq N$.

Un espacio $C^{k,\lambda}(\mathcal{D}) \times C^{h,\mu}(\mathcal{D}')$ se supondrá siempre munido de la norma $\|.\|_{k,\lambda} + \|.\|_{h,\mu}$.

Se dirá que el contorno de $\mathcal{D}$ es de tipo $C^{2,\lambda}$ si para cada $x_0 \in \partial\mathcal{D}$ existe un hiperplano que pasa por ese punto tal que para un sistema ortonormal de coordenadas $\{y_1,\ldots,y_n\}$ con centro en x_0 y un eje perpendicular al mencionado hiperplano, el contorno, $\partial\mathcal{D}$, en un entorno U de x_0 satisface la ecuación:

$$y_n = \alpha(y_1,\ldots,y_{n-1})$$

con $\alpha\in C^{2,\lambda}(U\cap\{y_n=0\})$ y si un punto pertenece a $\mathcal{D}\cap U$ entonces sus coordenadas $(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n)$ satisfacen

$$\bar{y}_n > \alpha(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{n-1})$$

El sistema $z_i = y_i$, $1\leq i\leq n-1$, $z_n = y_n - \alpha(y_1,\ldots,y_{n-1})$ junto a: $y_i = z_i$, $1\leq i\leq n-1$, $y_n = z_n + \alpha(z_1,\ldots,z_{n-1})$ definen una aplicación y su inversa, de U en un cierto entorno V del origen, tal que ambas son de tipo $C^{2,\lambda}$ y que lleva $\partial\mathcal{D}\cap U$ en $\{z_n = 0\}\cap V$ y $\mathcal{D}\cap U$ en $\{z_n > 0\}\cap V$.

Como del sistema $\{x_1,\ldots,x_n\}$ se pasa al $\{y_1,\ldots,y_n\}$ por una traslación más una rotación se puede decir que existe una aplicación $z_i = z_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i = 1,\ldots,n$, que lleva un entorno de x_0 en un entorno de 0 tal que ella y su inversa : $x_i = x_i(z_1,\ldots,z_n)$, son de tipo $C^{2,\lambda}$ en los entornos correspondientes y de manera que el contorno se corresponde con $z_n = 0$ y $\mathcal{D}$ se aplica en el semiplano superior (siempre en los entornos mencionados).

Es fácil ver que, recíprocamente, si se satisfacen las condiciones mencionadas en el último párrafo entonces en x_0 existe un hiperplano que pasa por él tal que $\partial\mathcal{D}$ satisface, respecto de un sistema de coordenadas ortonormal con un eje perpendicular al hiperplano, una ecuación : $y_n = \alpha(y_1,\dots,y_{n-1})$ con $\alpha \in C^{2,\lambda}$ y tal que los puntos de $\mathcal{D}$ satisfacen $y_n > \alpha(y_1,\dots,y_{n-1})$.

Diremos que $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, $x \in \partial\mathcal{D}$, pertenece a $C^{2,\lambda}(\partial\mathcal{D})$, si para cada punto $x_0 \in \partial\mathcal{D}$, existe un entorno U de x_0, tal que en su homólogo V se verifica:

$$\varphi_V(z) = \varphi(x_1(z_1,\dots,z_{n-1}),\dots,x_n(z_1,\dots,z_{n-1})) \in$$
$$\in C^{2,\lambda}(V \cap \{z_n = 0\}).$$

Cubriendo $\partial\mathcal{D}$ con un número finito de entornos $U_1,\dots,U_m$ definimos $\|\varphi\|_{2,\lambda}$ como la suma de las normas $C^{2,\lambda}(V_i \cap \{z_n = 0\})$ de las φ_{V_i}. Otro cubrimiento de $\partial\mathcal{D}$, $U'_1,\dots,U'_{m'}$, dá origen a una norma equivalente pues la transformación que lleva un sistema $z_1,\dots,z_n$ en otro $z'_1,\dots,z'_n$ es de tipo $C^{2,\lambda}$.

Sea ahora $u \in C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$. Veremos que $u/_{\partial\mathcal{D}}$

(esto es la restricción de la extensión contínua de u al contorno de) pertenece a $C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$. Además:

(*) $\quad \| u/_{\delta\mathcal{D}} \|_{2,\lambda} \leq C \; \| u \|_{2,\lambda} \; (\mathcal{D})$.

En efecto: con la notación del párrafo anterior $u/\partial\mathcal{D}\,(x_1(z_1,\ldots,z_{n-1},0),\ldots,x_n(z_1,\ldots,z_{n-1},0)) =$ $\varphi_v(z_1,\ldots,z_{n-1})$ es límite uniforme de

$\varphi_{v,\varepsilon}\,(z_1,\ldots,z_{n-1}) = u(x_1(z_1,\ldots,z_{n-1};\,\varepsilon),\ldots,x_n(z_1,\ldots,z_{n-1},\varepsilon))$.

Por otra parte estos $\varphi_{v,\varepsilon}$ verifican:

a) $\|\varphi_{v,\varepsilon}\|_{2,\lambda\;(v)} \leqslant C \;\|u\|_{2,\lambda\;(\mathcal{D})}$ donde C sólo depende de las funciones $x_i(z)$,

b) $\{\varphi_{v,\varepsilon}\}$ es de Cauchy en $C^{2,\lambda}(V)$.

Pasando al límite, se obtiene

$\|\varphi_v\|_{2,\lambda} \leqslant C \;\|u\|_{2,\lambda}$ y de aquí resulta (*).

3. <u>BOSQUEJO DE LA SOLUCION</u>.

a) Sea $\Omega_{2\delta}$ la semiesfera de centro O y radio 2δ , en $\{x_n \geqslant 0\}$, L un operador como el descripto en la introducción, definido en $\Omega_{2\delta}$, φ definida en $\{x_n=0\}$ $\cap\, \Omega_{2\delta}$. El primer paso será encontrar una solución (local) $\mathcal{E}(f,\varphi)$ a la ecuación $\mathcal{L}u = (f,\varphi)$.

Esto es, un operador contínuo de $C^{0,\lambda}\,(\Omega_{2\delta}) \times C^{2,\lambda}\,(\Omega_{2\delta} \cap \{x_n=0\})$ en $C^{2,\lambda}(\Omega_{2\delta})$ tal que $\mathcal{L}\,\mathcal{E}(f,\varphi) = (f,\varphi)$ en Ω_δ y de manera que para toda $u \in C^{2,\lambda}(\Omega_{2\delta})$ de soporte en $\overline{\Omega}_\delta$ se verifica: $\mathcal{E}(\mathcal{L}\, u) = u$.

b) El segundo paso es encontrar una solución local al problema $Lu = f$ en $\Omega_{2\delta}$, donde esta vez $\Omega_{2\delta}$ es la <u>esfera</u> de centro 0 y radio 2δ y $f \in C^{0,\lambda}(\Omega_{2\delta})$. Esto es, se hallará un operador contínuo

$$E: C^{0,\lambda}(\Omega_{2\delta}) \longrightarrow C^{2,\lambda}(\Omega_{2\delta})$$

tal que: $L\,E\,f = f$ en Ω_δ y para funciones $u \in$ $\in C^{2,\lambda}(\Omega_{2\delta})$, de soporte en $\overline{\Omega}_\delta$ vale: $E\,L\,u = u$.

c) Resueltos a) y b) se puede encontrar para cada $x_0 \in \overline{\mathcal{D}}$ un entorno $\mathcal{D}_{x_0}$ y una solución local $\mathcal{E}$ (o E) tal que $\mathcal{E}$ es contínuo de:

$C^{0,\lambda}(\mathcal{D}) \times C^{2,\lambda}(\partial\mathcal{D}) \longrightarrow C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$ (o de $C^{0,\lambda}(\mathcal{D}) \longrightarrow C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$) y verifica :

$$\mathcal{L}\,\mathcal{E}(f,\varphi) = (f,\varphi) \text{ en } \mathcal{D}_{x_0}$$

$$\mathcal{E}\,\mathcal{L}u = u, \text{ si } \underline{u} \text{ tiene soporte en } \overline{\mathcal{D}}_{x_0} \text{ y}$$

$u \in C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$.

(o: $L\,E\,f = f$ en $\mathcal{D}_{x_0}$, $E\,L\,u = u$ si u tiene soporte en $\overline{\mathcal{D}}_{x_0}$).

<u>En efecto</u> : si $x_0 \in \mathcal{D}$ c) no es otra cosa que b), trasladado el origen a x_0 , y definiendo el nuevo

operador E como el dado en b) multiplicado por $\varphi(x)$ donde $\varphi(x) = 1$ en Ω_δ, sop. $\varphi(x) \subset \Omega_{2\delta}$, $\varphi \in C^\infty$.

Si $x_0 \in \partial \mathcal{D}$, c) resulta de a) y de las observaciones siguientes:

Sea $\chi : x \longrightarrow y$ una transformación que lleva un entorno U de x_0 en un entorno V del origen, llevando $\mathcal{D} \cap U$ en $\{x_n > 0\} \cap V$, χ de clase $C^{2,\lambda}$.

La correspondencia de funciones:

$f(x)$ definida en $U \longleftrightarrow \bar{f}(y)$ definida en V tal que:

$\bar{f}(\chi(x)) = f(x)$ (o sea $\bar{f}_o\chi = f$; $f = \bar{f}_o\chi^{-1}$) lleva la clase $C^{2,\lambda}(U)$ sobre $C^{2,\lambda}(V)$ (idem $C^{0,\lambda}(U)$ sobre $C^{0,\lambda}(V)$), además:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,s} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_s} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} + \sum_k \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

luego:

$$\sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

se transforma en :

$$\sum_{\substack{i,k\\ j,\ell}} a_{ik} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_j \partial y_\ell} + \sum_{i,j} b_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_j} +$$

$$+ \sum_{j,i,k} a_{ik} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_j} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_k} + c\bar{u} = \bar{f}$$

Se obtiene entonces:

$$\sum_{j,\ell} \tilde{a}_{j\ell} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_j \, \partial y_\ell} + \sum_j \tilde{b}_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_j} + c\bar{u} = \bar{f}$$

donde los coeficientes son de tipo C^λ y vale:

$$\tilde{A} = \left[\tilde{a}_{j\ell} \right] = \left[\sum a_{ik} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_k} \; \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right]$$

O sea si $A = \left[a_{ij} \right]$ y $J = \dfrac{\partial y_1 \ldots y_n}{\partial x_1 \ldots x_n}$, $\tilde{A} = J\,A\,{}^tJ$.

Por lo tanto, si ξ es un vector no nulo:

$${}^t\xi \; A \, \xi \; > \beta \; |\xi|^2$$

$${}^t\xi \; \tilde{A}\,\xi = {}^t\xi \; J\,A\,{}^tJ\,\xi = {}^t({}^tJ\,\xi)\,A\,({}^tJ\,\xi) \geqslant$$

$$\geqslant \beta \, |{}^tJ\,\xi|^2 \geqslant \beta' \, |\xi|^2$$

donde $\beta' > 0$ pues J es no singular. Esto prueba que el cambio de coordenadas χ transforma $\mathcal{L}$ en un $\tilde{\mathcal{L}}$ de la misma naturaleza, pero en un semi-espacio. Aplicando a), se encuentra una solución local $\tilde{\mathcal{E}}$ en $\Omega_{2\delta}$ para $\tilde{\mathcal{L}}$, y la solución local $\mathcal{E}$ correspondiente a $\mathcal{L}$ estará definida en $\mathcal{D}$ por:

$$\mathcal{E}(f,\varphi)(x) = \psi(x) \, \tilde{\mathcal{E}}(\bar{f},\bar{\varphi})(\chi(x))$$

(donde $\psi \in C^\infty(R^n)$, $\psi = 1$ en $\chi^{-1}(\Omega_\delta)$, sop$\psi \subset \chi^{-1}(\Omega_{2\delta})$).
El entorno $\mathcal{D}_{x_0}$ será $\chi^{-1}(\Omega_\delta)$, queda probado c).

d) Cubramos $\overline{\mathcal{D}}$ con un número finito de entornos $\mathcal{D}_{x_0}$ mencionados en el punto c): $\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_k$; sea $\{\varphi_j\}$ una descomposición de la unidad respecto a estos entornos (es decir, soporte φ_j contenido en $\overline{\mathcal{D}_j}$,

$\varphi_j \geqslant 0$ e indefinidamente diferenciable, $\sum_{j=0}^{k} \varphi_j = 1$ en $\overline{\mathcal{D}}$).

Sea $u \in C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$ y $\mathcal{L} u = (f, \varphi)$. Entonces, en $\mathcal{D}$ vale: (1) $\mathcal{L}(\varphi_j u) = \varphi_j \mathcal{L}(u) + (L_j u, 0)$ donde L_j es de orden < 2 y con coeficientes a soporte relativamente compacto en $\mathcal{D}_j$. $\varphi_j \mathcal{L}(u)$ es una abreviatura de $(\varphi_j L(u), (\varphi_j u)|_\partial)$.

Sea $\mathcal{E}_j$ el operador asociado a $\mathcal{D}_j$ de acuerdo al punto c). De

(2) $\mathcal{E}\mathcal{L}(\varphi_j u) = \varphi_j u = \mathcal{E}_j(\varphi_j \mathcal{L}(u)) + \mathcal{E}_j(L_j u, 0)$

obtenemos: $\|\varphi_j u\|_{2,\lambda} \leqslant \Gamma_j \{ \|\varphi_j f\|_\lambda + \|\varphi_j|_\partial \varphi\|_{2,\lambda}) + + \|u\|_{1,\lambda} \}$

El último sumando acota-salvo factor constante- a $(L_j u, 0)$.

Como $u = \sum \varphi_j u$ y las φ_j son indefinidamente diferenciables:

(3) $\|u\|_{2,\lambda} \leqslant C. \{ \|f\|_\lambda + \|\varphi\|_{2,\lambda} + \|u\|_{1,\lambda} \}$.

A la desigualdad precedente nos referiremos como la <u>desigualdad fundamental</u>.

e) Sea N el subespacio vectorial de las soluciones del problema homogéneo: $Lu = 0$ en $\mathcal{D}$, $u = 0$ en

$\partial\mathcal{D}$, $u \in C^{2,\lambda}$, entonce la desigualdad fundamental se se reduce a:

(4) $$\| u \|_{2,\lambda} \leq C \| u \|_{1,\lambda} \text{ , para } u \in N .$$

Como <u>la esfera unitaria de $C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$ es relativamente compacta en $C^{1,\lambda}(\mathcal{D})$</u>, como veremos enseguida, si $u_k \in N$ y $\| u_k \|_{2,\lambda} \leq 1$, existe una subsucesión

$u_{k_i} \longrightarrow v$ en $C^{1,\lambda}(\mathcal{D})$.

Pero entonces de (4): $u_{k_i} \longrightarrow v$ en $C^{2,\lambda}$.

Por lo tanto, la esfera unitaria de N es compacta, lo cual implica que N es de dimensión finita. Como en un espacio de Banach todo subespacio de dimensión finita tiene un suplemento topológico, existe N' (subespacio) tal que:

(4 bis) $$C^{2,\lambda}(\mathcal{D}) = N \oplus N'$$

<u>PROPOSICION 1</u>: Para $u \in N'$ vale

$$\| u \|_{2,\lambda} \leq C (\| f \|_{\lambda} + \| \varphi \|_{2,\lambda}).$$

En efecto, sino fuera así existiría una sucesión $\{u_k\}$ de $C^{2,\lambda}$ tal que $\| u_k \|_{2,\lambda} = 1$ y $\| f_k \|_{\lambda} \longrightarrow 0$, $\| \varphi_k \|_{2,\lambda} \longrightarrow 0$. Por la compacidad de $C^{2,\lambda}$ en $C^{1,\lambda}$ mencionada se puede suponer que esa sucesión verifica además: $u_k \longrightarrow v$ en $C^{1,\lambda}$. Por la desigualdad fundamental $u_k \longrightarrow v$ en $C^{2,\lambda}$, y en consecuencia pertenece a N' y es de norma 1. De la continuidad de

$\mathcal{L}$, resulta:

$$\mathcal{L} v = \lim \mathcal{L} u_k = \lim (f_k, \varphi_k) = (0,0)$$

O sea, $v \in N$, y como pertenece a N', $v = 0$ contradicción.

Esta proposición dice en particular que si $N = \{0\}$ - o sea si el problema homogéneo tiene solución única entonces existe un operador $\mathcal{E}$ contínuo inverso de $\mathcal{L}$ del rango de $\mathcal{L}$ sobre $C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$.

Finalmente, veamos que si $\{u_k\} \subset C^{2,\lambda}$ y $\|u\|_{2,\lambda} = 1$ entonces existe una subsucesión convergiendo en $C^{1,\lambda}$.

Como $|D_i D_j u_k| \leq 1$ se tiene:

$$|D_i u_k(x) - D_i u_k(y)| \leq C\,|x - y|$$

y del teorema de Arzelá deducimos que una subsucesión, que también denotaremos $D_i u_k$, converge uniformemente a una función v_i. Además:

$$|(D_i u_k(x) - D_i u_k(y)) - (v_i(x) - v_i(y))| \,/\, |x-y|^{\lambda} \leq$$

$$\leq 2(C\,|x-y|^{1-\lambda} \wedge \epsilon |x-y|^{-\lambda}) \leq 2\,\epsilon^{1-\lambda} C^{\lambda}.$$

La desigualdad con $2.C\,|x-y|^{1-\lambda}$ resulta de que $v_i(x) = \lim D_i u_k(x)$ es Lipschtz-1 y aquella con $|x-y|^{-\lambda}$ de la convergencia uniforme de $D_i u_k(x)$ a $v_i(x)$.

Como: $\inf(C.r^{1-\lambda}, \ r^{-\lambda})$ alcanza su máximo en $r = \epsilon/C$ se logra la desigualdad final. Esto prueba que las constantes Lipschitz-λ de $D_i u_k - v$ tienden a 0. De aquí se obtiene facilmente, que $\| u_k - v \|_{1,\lambda} \longrightarrow 0$ para cierta subsucesión $k \longrightarrow \infty$.

f) <u>PROPOSICION 2</u>: El rango de $\mathcal{L}$ es cerrado.

Sea $\{u_j\} \subseteq N'$ y $\mathcal{L} u_j = (f_j, \varphi_j) \longrightarrow (f, \varphi)$.
De la proposición 1 se deduce la existencia de $u \in N'$, límite en $C^{2,\lambda}$ de u_j. La continuidad de $\mathcal{L}$ implica:

$$\mathcal{L} u_j \longrightarrow \mathcal{L} u = (f, \varphi) \quad , \text{ Q.E.D.}.$$

Para los operadores que tratamos, vale todavía que la codimensión del rango de $\mathcal{L}$ es finita e igual a la dimensión de N.

No lo demostraremos aquí pero puede deducirse del teorema siguiente:

<u>TEOREMA 1</u>: La codimensión del rango de L = 0 si $C(x) \leq 0$.

Este resultado se demostrará al final del capítulo.

g) El teorema prometido en f) junto con las consideraciones que le preceden permiten conclüir que el problema

$$(5) \qquad \begin{aligned} Lu &= f \quad , \quad f \in C^{\lambda}(\mathcal{D}), \\ u/_{\partial} &= \varphi \quad , \quad \varphi \in C^{2,\lambda}(\partial \mathcal{D}), \end{aligned}$$

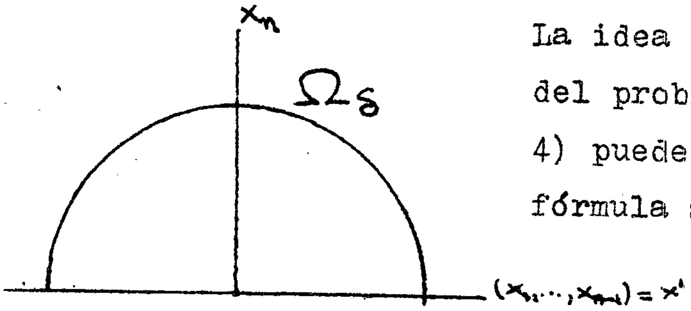
con L a coeficientes $C^{\lambda}(\mathcal{D})$, tiene una y sólo una solución en $C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$ si es posible hallar soluciones locales $\mathcal{E}$ descriptas en los puntos a) y b). Trataremos en lo sucesivo solamente el caso a), pues el b) es de misma naturaleza, o aún más simple.

El problema descrito en b) puede reducirse todavía al caso en que $L \equiv \Delta = \sum_{i=1}^{n} D_i D_i$, o sea al problema:

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta u = f & , f \in C^{\lambda}(\Omega_\delta) , \\ u|_{\partial} = \varphi & , \varphi \in C^{2,\lambda}(\{x_n = 0\} \cap \Omega_\delta). \end{cases}$$

La reducción mencionada es tema de la sección 5. La sección 4 se ocupará de la solución del problema (6), la sección 6 de la demostración del siguiente teorema:

TEOREMA 2. El problema (5) cuando $C(x) \leqq 0$ posee una y sólo una solución en $C^{2,\lambda}$.



La idea que domina al ataque del problema (6) (cf. sección 4) puede condensarse en la fórmula siguiente:

$$(7) \quad u(x) = C_1 \int_{R^{n-1}} \frac{x_n \, \varphi(y)}{(x_n^2 + |x' - y|^2)^{n/2}} \, dy + C_2 \int_{R^n} \tilde{f}(z) \, h(x-z) \, dz$$

$$\text{donde } h(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{2-n}}{(n-2)} & \text{si } n > 2 \\[2ex] \lg \dfrac{1}{x} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

y $\tilde{f}$ es la extensión impar de f a través de $x_n = 0$, y $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Esto es:

$u = C_1(\varphi * \text{núcleo de Poisson}) + C_2(\tilde{f} * \text{núcleo de Green})$.

La imparidad de $\tilde{f}$ provocará la coincidencia de u con φ en $\{x_n = 0\}$ pues el segundo sumando se anulará allí. Como el primero es armónico en $x_n > 0$, el laplaciano de u coincidirá con el del segundo sumando, o sea con f. Estas consideraciones deberían mantenerse presentes durante la lectura de la sección 4.

Finalmente, en la sección 7 se demostrará el teorema 7 cuyo enunciado es el mismo que el del teorema 2 pero con un debilitamiento en su hipótesis: sólo se pide que: $\varphi \in C^0(\partial \mathfrak{D})$.

4. SOLUCION PARA EL PROBLEMA LOCAL Y CON EL OPERADOR DE LAPLACE.

LEMA FUNDAMENTAL: Sea $K(z,x,y)$ una función medible definida en $S \times R^n \times R^n$, S un abierto convexo de R^m localmente integrable en y para todo $(z,x) \in S \times R^n$ tal que $y \neq x$, y verificando las siguientes propiedades:

i) $\text{v.p.} \int_{|y| \leq 2} K(z,x,y)\, dy$ es indefinidamente diferenciable en $|x| \leq 1$, y $z \in S$, (*).

(*) v.p. designa el valor principal de la integral indicada, o sea, $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon \leq |y-x|\,,\ |y| \leq 2} K(z,x,y)\, dy$.

ii) $\displaystyle\int_{\substack{|y-x'| > 2|x'-x| + r \\ |y| \leqslant 2}} K(z,x,y)\, dy$

está uniformemente acotada para $|x'| \leqslant 1$, $r > 0$, $|x| \leqslant 1$, $z \in S$,

iii) $|K(z,x,y)| \leqslant M.|x-y|^{-n}$,

iv) $|\text{grad.}_{(z,x)} K(z,x,y)| \leqslant M.|x-y|^{-n-1}$.

Sea además para $f(x)$ de soporte contenido en $|x| \leqslant 1$ y $f \in C^{\lambda}$, Kf definido por:

(1) $$Kf(z,x) = \text{v.p.} \int K(z,x,y)\, f(y)\, dy.$$

Entonces $Kf \in C^{\lambda}(S, |x| \leqslant 1)$, y si $\|Kf\|_{\lambda}$ designa la norma de Kf en $(S, |x| \leqslant 1)$ entonces

(2) $$\|Kf\|_{\lambda} \leqslant C.\|f\|_{\lambda} .$$

DEMOSTRACION: Como toda integral coincide con su valor principal si aquella existe, de ahora en adelante omitiremos el signo v.p., y supondremos que toda integral viene precedida del mismo. Pongamos:

(3) $$Kf(z,x) = \int_{|y| \leqslant 2} K(z,x,y)(f(y)-f(x))dy + f(x) \int_{|y| \leqslant 2} K(z,x,y)dy$$

El segundo sumando existe como valor principal como se desprende de la hipótesis i). El primero también existe, y esta vez como integral simple, pues como $f \in C^{\lambda}$ y iii), el integrando, salvo constante está acotado por: $|x - y|^{\lambda - n}$, que es localment integrable en y.

Por lo tanto Kf existe como valor principal, y vale:

(4) $\qquad |Kf(z,x)| \leqslant C. \, \|f\|_\lambda .$

Sea $\xi = (x + x')/2$ y consideremos la siguiente descomposición:

(5) $\qquad Kf(z',x') - Kf(z,x) =$

$$= \Big[f(x') \int_{|y|\leqslant 2} K(z',x',y)dy - f(x) \int_{|y|\leqslant 2} K(z,x,y)dy \Big] +$$

$$+ \int_{\substack{|y-\xi|\leqslant|x-x'|+|z-z'| \\ |y|\leqslant 2}} \Big[K(z',x',y)(f(y) - f(x')) - K(z,x,y)(f(y) - (f(x))\Big]dy +$$

$$+ \int_{\substack{|y-\xi|\geqslant|x-x'|+|z-z'| \\ |y|\leqslant 2}} \Big[K(z',x',y) - K(z,x,y)\Big] (f(y) - f(x'))dy +$$

$$+ \Big[f(x) - f(x')\Big] \int_{\substack{|y-\xi|\geqslant|x-x'|+|z-z'| \\ |y|\leqslant 2}} K(z,x,y)dy$$

El primer sumando está acotado por $M. |(x,x') - (z,z')|^\lambda$ como se ve facilmente luego de sumar y restar

$$f(x). \int_{|y|\leqslant 2} K(z',x'y)dy \quad \text{(úsese i)}$$

Se supone naturalmente que la constante M depende del recinto acotado A. El último sumando está acotado por $M'.|x' - x|^\lambda$ como se ve aplicando ii) y la hipótesis: $f \in C^\lambda$.

Aplicando iv) al tercer sumando, éste resulta acotado -salvo factor constante- por:

$$\Big[\int_{\substack{|y-\xi| \geqslant |x-x'|+|z-z'| \\ |y| \geqslant 2}} (|x'-y|^{\lambda} . |x''-y|^{-n-1}) \, dy \Big] (|x-x'| + |z-z'|)^{1}$$

donde x" es un punto del segmento (x,x'). La expresión entre corchetes es menor o igual que:

$$c \int_{\substack{|y-\xi| \geqslant |x-x'|+|z-z'| \\ y \quad 2}} |\xi - y|^{\lambda-n-1} \, dy \leqslant C' \int_{r \geqslant |x'-x|+|z'-z|} r^{\lambda-2} \, dr \leqslant$$

$$\leqslant C'' (|x'-x| + |z'-z|)^{\lambda-1} .$$

De esto se deduce que también el tercer sumando de (5) es no superior a:

$$M_1 \, | (x',x) - (z',z) |^{\lambda} .$$

Minuendo y sustraendo del segundo sumando se tratan de la misma manera. El sustraendo, por ejemplo, es no mayor que (cf. iii)):

$$c \int_{|y-\xi| \geqslant |x-x'|+|z-z'|, \, |y| \leqslant 2} |y-x|^{\lambda-n} \, dy \leqslant c_1 \int_{r \leqslant \alpha (|x-x'|+|z-z'|)} r^{\lambda-1} \, dr \leqslant$$

$$\leqslant c_2 (|x-x'| + |z-z'|) .$$

Estas desigualdades prueban que:

(6) $$| Kf(z',x') - Kf(z,x) | \leqslant M_0 \, | (x,x') - (z,z') |^{\lambda} .$$

Repasando la demostración de las desigualdades precedentes se vé que:

(7) $$M_0 \leqslant (\text{cte, independiente de } f) \, \| f \|_{\lambda} .$$

(4), (6) y (7) dan entonces:

$$\| Kf \|_{\lambda} \leqslant M \, \| f \|_{\lambda} , \text{ Q.E.D..}$$

LEMA 1: Sea Uf definido por $h(x) * f$, para f de soporte en $|x| < 1$, $f \in C^{\lambda}$. Entonces: $Uf \in C^{2,\lambda}(|x|<1)$,

$$\|Uf\|_{2,\lambda} \leq C \|f\|_{\lambda}.$$

$$\frac{\partial^2 Uf(x)}{\partial x_i \partial x_j} = C_{ij} f(x) + \text{v.p.} \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j} * f$$

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ C_{nn} \text{ si } i = j. \end{cases}$$

(La norma $(2,\lambda)$ de Uf se calcula en $\{|x| < 1\}$).

DEMOSTRACION: Es fácil ver que Uf tiene derivadas primeras contínuas y acotadas, aún en el caso en que la función f tan sólo es acotada, de soporte en $|x| \leq 1$. En efecto, $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)$ es una función localmente integrable.

Por lo tanto:
$$U^i f(x) = \int \frac{\partial h}{\partial x_i}(x-y)\, f(y)\, dy$$

es una función contínua y acotada, localmente. Por el teorema de Fubini:

$$Uf(x) = \int_{|y|<1} dy\, f(y) \int_{x_i^o}^{x_i} \frac{\partial h}{\partial \xi_i}(x_1 - y_1, \ldots, \xi_i - y_i, \ldots, x_n - y_n)\, d\xi_i +$$

$$+ Uf(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^o, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$

$$\int_{x_i^o}^{x_i} U^i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi_i, \ldots, x_n)\, d\xi_i +$$

$$+ Uf(x_1, \ldots, x_i^o, \ldots, x_n),$$

de donde se sigue inmediatamente que: $\dfrac{\partial Uf}{\partial x_i}(x) = U^i f(x)$.

Para referencia posterior hacemos notar que si definimos $U^i_\epsilon f(x)$ por:

$$(8) \qquad U^i_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_i}\{h(x-y)\}\ f(y)\ dy$$

entonces $U^i_\epsilon f$ converge uniformemente a $U^i f$ en $|x|<1$.

Sea ahora $f \in C^\lambda$, además de tener soporte compacto en $|x|<1$; vale:

$$(9) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}(U^i_\epsilon f)(x) = \int_{|x-y|\geqslant\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} h(x-y)\ f(y)\ dy\ +$$

$$+ \int_{|x-y|=\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_i}\ h(x-y)\ f(y)\ \operatorname{sgn}(x_j - y_j)\ dy^j$$

donde $dy^i = dy_1, \ldots, dy_{i-1}, dy_{i+1}, \ldots, dy_n$.

En efecto, (9) resulta de (8) formando el cociente incremental y pasando al límite. El segundo sumando es la contribución de la variación del dominio de integración.

La primera integral en (9) converge uniformemente a:

$$\text{v.p.} \int D_i D_j \{\ h(x-y)\}\ \ f(y)\ dy \quad .$$

En efecto, las derivadas segundas igualan a:

$$(10) \qquad (-n)(-1)\ |x-y|^{-2-n}(x_i - y_i)(x_j - y_j), \quad \text{si } i \neq j$$

$$(11) \qquad -\Big[\ 1-n(x_i - y_i)^2 \ /\ |x-y|^2\Big]\,|x-y|^{-n}\ , \quad \text{si } i = j$$

Tanto (10) como (11) tienen media cero sobre toda superficie esférica de centro x. Designando con

$G(x,y)$ uno de ellos podemos escribir:

$$(12) \qquad \int_{|x-y| \geqslant \epsilon} G(x,y)\, f(y)\, dy = \int_{2 > |x-y| \geqslant \epsilon} G(x,y)\, (f(x)-f(y))\, dy \; + $$

$$+ \; f(x) \int_{2 \geqslant |x-y| \geqslant} G(x,y)\, dy$$

La última integral en (12) es cero y la primera converge para $\epsilon \longrightarrow 0$ pues $f \in C^{\lambda}$. La uniformidad de la convergencia es inmediata si x está acotado.

La segunda integral en (9) es:

$$(13) \qquad - \int_{|x-y| = \epsilon} |x-y|^{-n} (x_i - y_i)\, \mathrm{sgn}(x_j - y_j)\, f(y)\, dy^j =$$

$$= \frac{-1}{n} \int_{|x-y| = \epsilon} |x_i - y_i|\, \mathrm{sgn}\left[(x_j - y_j)(x_i - y_i)\right] f\, dy^j$$

Reemplazando $f(y)$ por $\left[f(y) - f(x)\right] + f(x)$, se vé que el límite de (13) para $\epsilon \longrightarrow 0$ es uniforme en $|x| < 1$, y coincide por razones de simetría con

$$(14) \qquad \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} f(x)\, \epsilon^{-n} \int_{|z| = \epsilon} |z_i|\, \mathrm{sgn}\left[z_n \cdot z_i\right] dz^n.$$

La integral en (14) es 0 si $i \neq n$ e igual a

$$\epsilon^n \int_{|z| = 1} |z_n|\, dz^n \quad \text{si } i = n.$$

Se probó así la fórmula para $\dfrac{\partial^2 Uf}{\partial x_i\, \partial x_j}$

Como $(\partial / \partial x_i)\, h(x-y) = -|x-y|^{-n} (x_i - y_i)$ tenemos:

$$|(\partial/\partial x_i)\ Uf| \leqslant +\int_{|y|\leqslant 2} |x-y|^{1-n}\,|f(y)|dy \leqslant$$

$$\leqslant (n-2)\ \|f\|_\lambda \int_{|y|\leqslant 2} |x-y|^{1-n} dy\ .$$

La última integral está uniformemente acotada para $|x| \leqslant 1$. Esto significa que para demostrar que Uf es contínuo de $C^{0,\lambda}(|x|<1)$ en $C^{2,\lambda}(|x|<1)$ bastará ver que el núcleo $K(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\ h(x-y)$

satisface las condiciones del lema fundamental con n = 0 Verifiquemos:

i) $$\mathrm{vp}\int_{|x|<2} K(x,y)\,dy = \mathrm{vp}\int_{|y|<2} \frac{\partial^2 h(x-y)}{\partial x_i\,\partial x_j}\ dy =$$

$$= \int_{|y|=2} \frac{\partial h(x-y)}{\partial x_j}\ dy^i$$

donde $dy^i = dy_1 \dots dy_{i-1}\, ,\, dy_{i+1} \dots dy_n$, y $|x|<1$. La segunda igualdad resulta de aplicar el teorema de la divergencia de Gauss a la región: $|y| \leq 2$, $|x-y| \geqslant \epsilon$. La integral sobre $|x-y| = \epsilon$ se anula, cf.(10) y (11).

ii) Por el mismo teorema de Gauss, suponiendo siempre $|x|<1$,

$$\int_{\substack{|y|\leqslant 2 \\ |y-x'|>2|x-x'|+r}} K(x,y)\,dy = \int_{S_1} \frac{\partial h(x-y)}{\partial x_j}\ dy^i + \int_{S_2} \frac{\partial h(x-y)}{\partial x_j}\ dy^i$$

donde $S_1 \doteq \{|y| = 2\} \cap \{|y-x'| > 2\,|x-x'| + r\}$

$S_2 = \{|y-x'| = 2\,|x-x'| + r\} \cap \{|y| \leqslant 2\}$

Como $\left|\frac{\partial h}{\partial x_j}(x-y)\right| \leqslant |x-y|^{-n+1}$, tenemos:

para $y \in S_1$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x_j}(x-y)\right| \leqslant 1$

para $y \in S_2$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x_j}(y-x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{|y-x'|}\right)^{1-n}$,

luego:

$$\int\limits_{\substack{|y| \leqslant 2 \\ |y-x'| \geqslant 2|x-x'| + r}} K(x,y)\,dy \leqslant \int\limits_{S_1} 1\,dy^i + \int\limits_{S_2} \left(\frac{2}{|y-x'|}\right)^{1-n} dy^i \leqslant$$

$$\leqslant C_1 + \int\limits_{|y-x'| = 2|x-x'| + r} \left(\frac{2}{y-x'}\right)^{1-n} dy^i = C_1 + C_2 .$$

Esto concluye la verificación de ii).

iii) y iv) son inmediatos. Q.E.D..

<u>COROLARIO</u>: $Uf = n\,C_{nn}\,f$.

En efecto, $\Delta h(x) = 0$ si $x \neq 0$

<u>LEMA 2</u>: Sea $f \in C^\lambda(R^n_+)$ de soporte contenido en $|x| \leqslant 1$ y sea $\tilde{f}$ su extensión impar a R^n (*). Llamemos:

(*) $R^n_+ = \{x_n \geqslant 0\}$. $\tilde{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$

En realidad debería hablarse de extensión impar respecto de x_n .

$$Vf = h(x) * \tilde{f} .$$

Entonces: $Vf \in C^{2,\lambda}(R^n_+, |x|<1), \|Vf\|_{2,\lambda} \leq C \|f\|_\lambda$,

donde la primera norma se calcula en $(R^n_+, |x|<1)$.

DEMOSTRACION: Sea f^* la extensión par de f: $f^*(x_1,\ldots,x_n) = f^*(x_1,\ldots,x_{n-1}, - x_n)$, $f \in C^\lambda(R^n)$ y tiene la misma norma que f en $C^\lambda(R^n_+)$. Luego:

$$(15)\quad Vf(x) = \int_{|y|\leq 2} h(x-y) \operatorname{sgn} y_n\, f^*(y)\, dy = \int_{|y|\leq 2} h(x-y)\, \tilde{f}(y)\, dy$$

Como en el lema anterior se vé que Vf tiene las primeras derivadas contínuas, y si $x_n > 0$,

$$(16)\quad \frac{\partial^2 Vf}{\partial x_i \partial x_j}(x) = C_{ij}\, f(x) + \int_{|y|\leq 2} \frac{\partial^2 h(x-y)}{\partial x_i\, \partial x_j} \operatorname{sgn} y_n f^*(y)\, dy$$

donde $C_{ij} = \delta_{ij}\, C_{nn}$.

Para completar la demostración del lema mostremos que el núcleo $K(x,y) = \operatorname{sgn} y_n \dfrac{\partial^2 h(x-y)}{\partial x_i\, \partial x_j}$ verifica las hipótesis del lema fundamental.

Como h(x-y) es armónica en $x \neq y$, la derivada segunda $\partial^2 / \partial x_n^2$ es una combinación lineal de las restantes y por lo tanto bastará verificar i) - iv) para núcleos donde $i < n$.

$$\text{i)} \quad \int_{|y| \leqslant 2} K(x,y)\, dy = \int_{|y|=2} \operatorname{sgn} y_n \frac{\partial h(x-y)}{\partial x_j}\, dy^i \in C^{\infty}(|x|<1)$$

$$\text{ii)} \quad \int_{\substack{|y-x'| \geqslant 2|x-x'|+r \\ |y| \leqslant 2}} K(x,y)\, dy = \int_{\mathfrak{S}} \operatorname{sgn} y_n \frac{\partial h(x-y)}{\partial x_j}\, dy^i$$

donde:

$$\mathfrak{S} = \{ y : |y-x'| = 2|x-x'| + r \ \text{ si } |y|<2 \text{ o bien } |y|=2 \}$$

$\mathfrak{S} = S_1 \cup S_2$ del lema anterior.

(Obsérvese que no se puede aplicar el Teorema de Gauss directamente, dado que el integrando contiene el factor $\operatorname{sgn} y_n$. Pero, descomponiendo el dominio en dos partes con $y_n > 0$, e $y_n < 0$, se puede aplicar el Teorema de Gauss a cada parte, y se obtiene el resultado de arriba).

La segunda integral está acotada (cf. lema precedente). iii) y iv) son obvios. Q.E.D..

LEMA 3: Sea

$$Wf = \int_{R^{n-1}} \frac{x_n}{\left[x_n^2 + |x^n - y|^2 \right]^{n/2}} f(y)\, dy$$

($x^n = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$) para $f \in C^{2,\lambda}(R^{n-1})$ de soporte contenido en $|y| < 1$. Entonces $Wf \in C^{2,\lambda}(R^n_+)$ y:

$$\| Wf \|_{2,\lambda} \leqslant C \| f \|_{2,\lambda} .$$

La primera norma se calcula en $R^n_+ \cap \{ |x| < 1 \}$.

DEMOSTRACION:

$$x_n (x_n^2 + |x^n|^2)^{-n/2} = -\frac{\partial}{\partial x_n} h(x)$$

es armónica en $x_n > 0$. Luego D_iD_jWf se puede expresar como combinación lineal de las D_kD_jWf con $k < n$, y bastará acotar estas últimas. Para $i < n$, $j < n$:

$$\text{(17)} \qquad D_iD_jWf = D_iD_j \int_{R^{n-1}} \frac{x_n}{(x_n^2 + |y|^2)^{n/2}}\, f(x^n - y)\, dy =$$

$$= \int_{R^{n-1}} \frac{x_n}{(x_n^2 + |y|^2)^{n/2}} (D_iD_jf)(x^n - y)\, dy =$$

$$= \int \frac{x_n}{(x_n^2 + |x^n - z|^2)^{n/2}} (D_iD_jf)(z)\, dz =$$

$$= W(D_iD_jf).$$

En cambio si $j = n$, $i < n$, usamos la siguiente identidad debida a la armonicidad de $h(x)$:

$$\text{(18)} \qquad D_n \frac{x_n}{(x_n^2 + \; x^{n\;2})^{n/2}} = + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_h^2}\, h(x) =$$

$$= - \sum_{h=1} D_h \left\{ \frac{x_h}{(x_n^2 + \; x^{n\;2})^{n/2}} \right\}.$$

De (18) obtenemos:

$$\text{(19)} \qquad D_iD_nWf = - D_i \sum_{h=1}^{n-1} D_hW_hf = - \sum_{h=1}^{n-1} W_h(D_iD_hf)$$

donde W_h es la convolución con el núcleo:

$$\frac{y_h}{(x_n^2 + |y|^2)^{n/2}}$$

La demostración de este lema quedará concluída luego de verificar que los núcleos K y K_h verifican las hipótesis del lema fundamental con $m=1$, x_n haciendo el papel de z y con n reemplazado por n-1, siendo la región donde varía z la semirrecta positiva. Los núcleos en cuestión son entonces:

$$K(x_n,x',y) = x_n(x_n^2 + |x'-y|^2)^{-n/2}$$

$$K_h(x_n,x',y) = (x_h' - y_h)(x_n^2 + |x' - y|^2)^{-n/2}$$

$h = 1,\ldots,n-1.$

i) es inmediato pues $x_n > 0$. Idem iii) y iv).

Veamos ii):

$$\int_{R^{n-1}} \frac{x_n \, dy}{(x_n^2 + |x'-y|^2)^{n/2}} = \int_{R^{n-1}} \frac{dz}{(1 + |(x'/x_n) - z|^2)^{n/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{R^{n-1}} \frac{dz}{(1 + |z|^2)^{n/2}} < \infty .$$

Esto prueba ii) para K. En el caso K_h tenemos:

$$K_h = K \frac{\partial (x_n^2 + |x' - y|^2)^{(2-n)/2}}{\partial x_n} ,$$

K = constante.

Luego $\displaystyle\int_{\substack{|y| \leqslant 2 \\ |y-x'| \geqslant 2|x-x'| + r}} K_h(x_n, x', y)\, dy$

se reduce a una integral sobre el contorno de la región indicada. Esta última integral se trata como en la demostración de ii) en el lema 1. (Obsérvese que ahora la región de integración es de dimensión n-1). Q.E.D.

<u>La existencia de solución local</u> de un problema de contorno con el laplaciano se concluye de los lemas precedentes y se resume en el siguiente:

<u>TEOREMA 3</u>: Existe un operador $\mathcal{E}$ de $C^{\lambda}(|x|<1, x_n>0) \times C^{2,\lambda}(|x|<1,\ x_n = 0)$ en $C^{2,\lambda}(|x|<1,\ x_n > 0)$ tal que: $\mathcal{L}\,\mathcal{E}\,(f,\varphi) = (f,\varphi)$,

1) $\| u \|_{2,\lambda} \leqslant M(\| f \|_{\lambda} + \| \varphi \|_{2,\lambda})$,

2) $\Delta u = f$ en $|x| \leqslant 1/2$, en $x_n \geqslant 0$; $u = \varphi$ en $\{|x| \leqslant 1/2,\ x_n = 0\}$,

3) Si $u \in C^{2,\lambda}(|x| < 1, x_n > 0)$ y tiene soporte en $|x| < \frac{1}{2}$, entonces:

$$\mathcal{E}\,(\Delta u, u|_{x_n = 0}) = u .$$

Además, si $w \in C^0(|x| < 1, x_n \geqslant 0)$, es dos veces contínuamente derivable en el recinto $\{x_n > 0, |x| < 1\}$, tiene soporte en $|x| \leq 1/2$ en $x_n = 0$ pertenece a $C^{2,\lambda}$ y

satisface $\Delta w \in C^{\lambda}$, entonces $w \in C^{2,\lambda}$ y $w = \mathcal{E}(\Delta w, w|_{\partial})$.

DEMOSTRACION. Definamos

$\mathcal{E}(f, \varphi) = C_1 V(\Psi f) + C_2 . W(\Psi \varphi)$, donde V y W son los operadores definidos en los lemas 2 y 3 respectivamente, $\Psi \in C^{\infty}(R^n)$ con soporte en $|x| \leqslant 1$, $\Psi = 1$ en $|x| \leqslant 1/2$.

Las constantes C_1 y C_2 se eligen de manera que 2) se verifique.

Esto es posible pues W es un núcleo de tipo positivo-precisamente es el núcleo de Poisson para el semiespacio superior-salvo factor constante. Por las propiedades de esos núcleos (cf. por ejemplo, A. Zygmund, Trigonometric series, I, § 2):

$$W(\Psi \varphi) \longrightarrow C_2^{-1} \Psi \varphi \text{ en el contorno.}$$

Por otra parte $W(\Psi \varphi)$ es armónica en $x_n > 0$. Por el contrario $V(\Psi \varphi)$ se anula en $x_n = 0$ y su laplaciano en $x_n > 0$ coincide, salvo constante, con f. Esto no es otra cosa que el corolario al lema 1.

Así, $\mathcal{E}(f, \varphi)$ es una función definida en R^n_+, siendo 1), consecuencia de los lemas 2 y 3. Naturalmente, $\mathcal{L}\mathcal{E}(f, \varphi) = (f, \varphi)$ pues es esto lo que se probó recién Veamos 3). Sea $u_1 = \mathcal{E}(\Delta u, u|_{\partial})$. Tendremos entonces:

$\Delta(u_1 - u) = 0$ en R^n_+ y $u_1 - u = 0$ en $x_n = 0$.

Adeamás $u_1 - u$ tiende a cero para $|x| \to \infty$, como $|x|^{2-n}$ para $n > 2$; para $n = 2$ esta acotación no sirve, en cambio se vé que u_1 tiende a cero aún en este caso, pues $u_1 = C_1 V(\Delta u) + C_2 W(u/\partial)$, y el potencial de una función de media cero, de soporte compacto, tiende a cero.

Un conocido teorema sobre funciones armónicas asegura entonces que $u_1 - u = 0$, en $x_n \geqslant 0$.

Como el mencionado teorema sólo usa la continuidad de $u_1 - u$ en el borde, queda también demostrada la afirmación sobre w, Q.E.D..

5. REDUCCION AL CASO CLASICO.

TEOREMA 4: Sea $L = \sum_{i,j} a_{ij} D_i D_j + \sum_i b_i D_i + C$, un operador de segundo orden elíptico, tal que sus coeficientes pertenecen a C^λ.

Existe entonces un $\delta > 0$ y un operador contínuo $\mathcal{E}$ de

$$C^\lambda(|x| < \delta, x_n > 0) \times C^{2,\lambda}(|x| < \delta, x_n = 0) \longrightarrow C^{2,\lambda}(|x| < \delta, x_n > 0)$$

tal que si $(f, \varphi) = u$, $Lu = f$ en $|x| < \delta/2$, $x_n > 0$, $u/\partial = \varphi$ en $x_n = 0, |x| \leq \delta/2$.

Además, si sop $u \subset \{|x| < \delta/2\}$ y $u \in C^{2,\lambda}$, $\mathcal{E}(Lu, u/\partial) = u$.

DEMOSTRACION. Con L_2 designaremos la parte principal de L, o sea, $\sum_{i,j} a_{ij}D_iD_j$, y escribiremos L(x, D) en lugar de la expresión que define L: x es el punto que se considera y D designa a las derivadas. Como la matriz $\{a_{ij}\}$ es simétrica (siempre puede reducirse a este caso), es diagonalizable y por ser definida positiva, los elementos de la diagonalizada son positivos si están en la diagonal.

Ahora es fácil ver que existe una transformación lineal no-singular de coordenadas, para la cual:

(1) $\qquad L(0,D) = \Delta$ + operador de orden <2

Como una transformación tal mantiene hiperplanos y como una rotación no cambia el laplaciano, puede suponerse que $\{x_n = 0\}$ permanece fijo.

En esta situación supongamos que las variables son $(x_1,\dots x_n)$ e introduzcamos nuevas variables $(y_1,\dots y_n)$ de manera que $x = \rho y$. El problema se convierte en

$$\begin{cases} L(\rho y,\ D/\rho)\ u(\rho . y) = f(\rho . y) \\ u(\rho . y) = \varphi(\rho y) \quad \text{para } y_n = 0 \end{cases}$$

Llamando $v(y) = u(\rho y)$ nos bastará construir la solución local para el problema (2), en $|y| < 1$. (Esto es con $\delta = 1$ en la definición de solución local).

Este problema equivale por (1) a;

$$
(3)\quad \begin{cases} \Delta v + \Big(\sum\limits_{i,j} (a_{ij}(\rho y) - a_{ij}(0)) \dfrac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} + \\ + \rho \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i(\rho y) \dfrac{\partial v}{\partial y_i} + \rho^2 c(\rho y) v \Big) = \\ = \Delta v + R_\rho(y,D)v = \rho^2 f(\rho y) \\ v(y) = \varphi(\rho y) \text{ para } y_n = 0. \end{cases}
$$

$R_\rho(y,D)$ verifica:

$$
(4)\quad \| R_\rho v \|_{0,\lambda(|y|<1, y_n>0)} \leqslant M \rho^\lambda \| v \|_{2,\lambda(|y|<1, y_n>0)}
$$

En efecto, veámoslo, por ejemplo, para los términos donde aparecen las derivadas segundas:

$$
\| \{ a_{ij}(\rho y) - a_{ij}(0) \} D_i D_j v \|_{0,\lambda} \leqslant
$$

$$
\leqslant \| a_{ij}(\rho y) - a_{ij}(0) \|_{0,\lambda} \| D_i D_j v \|_{0,\lambda} \leqslant C \rho^\lambda \| v \|_{2,\lambda}
$$

Para resolver el problema (3) ensayemos con $v = \mathcal{E}(g, \varphi_1)$, donde $\mathcal{E}$ es el operador definido en el teorema 3, y tratemos de encontrar g y φ_1. Para que v satisfaga (3) en $|y| \leqslant 1/2$, es necesario y suficiente que:

$$
(5)\quad \begin{cases} g + R_\rho(\mathcal{E}(g, \varphi_1)) = \rho^2 f(\rho y) \\ \varphi_1 = \varphi(\rho y) \quad \text{en } y_n = 0 . \end{cases}
$$

O sea:

$$
(6)\quad (g, \varphi_1) + (R_\rho \mathcal{E}(g, \varphi_1), 0) = (\rho^2 f(\rho y), \varphi(\rho y)).
$$

Definiendo: $T(h,\Psi) = (R_\rho \mathcal{E}(h,\Psi),\ 0)$ resulta

(7) $(g, \varphi_1) + T(g, \varphi_1) = (\rho^2 f(\rho y), \varphi(\rho y))$ donde

$\|T\|$, como operador de $C^{0,\lambda} \times C^{2,\lambda} \longrightarrow C^{0,\lambda} \times C^{2,\lambda}$ es menor o igual que $M.\rho^\lambda$. (cfr (4)).

Eligiendo ρ <u>suficientemente pequeño</u> (este es el momento en el cual se elige ρ, y como se vé tal elección depende solamente de M) conseguimos $\|T\| \leqslant 1/2$, y por lo tanto $I + T$ es un operador invertible de $C^{0,\lambda} \times C^{2,\lambda}$ sobre si mismo, con $(I + T)^{-1} = I - T + T^2 - T^3 + \ldots\ldots\ldots$

Existe entonces una única solución (g, φ_1) al problema (7) y <u>afirmamos que una solución local del problema (3) es</u>:

(8) $v(y) = \mathcal{E}(g, \varphi_1) = \mathcal{E}\left[(I + T)^{-1}(\rho^2 f(\rho y), \varphi(\rho y))\right] =$

$= \mathcal{E}_\rho(\rho^2 f(\rho y), \varphi(\rho y))$.

En efecto: para $|y| < 1/2$, usando (7) y (8)

$$(\Delta v(y),\ v\big|_{y_n = 0}) = (g, \varphi_1) = (\rho^2 f(\rho y), \varphi) - (R_\rho v, 0)$$

O sea v satisface (3) en $|y| < 1/2$.

Por otra parte, si v tiene soporte contenido en $|y| \leq 1/2$, entonces por el teorema 3

$$v = \mathcal{E}(\Delta v,\ v\big|_{y_n = 0})$$

Luego el par:

$(g, \varphi_1) = (\Delta v, \ v|_{y_n=0})$ es (la) solución de

$$(g, \varphi_1) + T(g, \varphi_1) = ((\Delta + R_\rho) v, \ v|_{y_n=0}), \text{ y}$$

$$\mathcal{E}_\rho ((\Delta + R_\rho)v, \ v|_{y_n=0}) = \mathcal{E}(g, \varphi_1) = v. \quad \text{Q.E.D.}$$

6. SOBRE EL RANGO DE L.

Designaremos con Λ la familia de todos los operadores elípticos en $\mathcal{D}$ con coeficientes en $C^\lambda(\mathcal{D})$. Λ_o denotará la subfamilia de Λ tal que $\mathcal{L}(u) = 0$ implica $u = 0$. Λ_{oo} denotará la subfamilia de Λ_o tal que $\mathcal{L}$ como operador de $C^{2,\lambda}$ en $C^\lambda \times C^{2,\lambda}$ es sobre. Introducimos en Λ la topología dada por la métrica dist$(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ = norma de operador $(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)$ de $C^{2,\lambda}$ en $C^\lambda \times C^{2,\lambda}$.

LEMA 4: Λ_{oo} es abierto y cerrado en Λ_o.

En efecto, sea $\mathcal{L} \in \Lambda_{oo}$ y $\mathcal{E} = \mathcal{L}^{-1}$, $c = \|\mathcal{E}\|$. Si $\mathcal{L}'$ verifica: $\|\mathcal{L} - \mathcal{L}'\| < 1/2c$ entonces

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + (\mathcal{L}' - \mathcal{L}) = \mathcal{L}(I + \mathcal{E}(\mathcal{L}' - \mathcal{L})) \text{ es invertible,}$$

y Λ_{oo} es abierto.

Sea ahora $\mathcal{L}$ límite de $\mathcal{L}_n \in \Lambda_{oo}$ y supongamos $\mathcal{L} \in \Lambda_o$. Sea $\mathcal{E}_n$ inverso de $\mathcal{L}_n$. Tenemos la siguiente alternativa:

1°) $\| \mathcal{E}_{n_i} \| \leqslant M < \infty$ para alguna subsucesión n_i ;

2°) $\| \mathcal{E}_n \| \longrightarrow \infty$.

En el primer caso, para n_i tan grande que $\| \mathcal{L} - \mathcal{L}_{n_i} \| < 1/2M$, resulta: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{n_i} + (\mathcal{L} - \mathcal{L}_{n_i})$ invertible. En el segundo caso existe $u_n \in C^{2,\lambda}(\mathfrak{D})$ con $\| u \|_{2,\lambda} = 1$ y $\mathcal{L}_n(u_n) \longrightarrow 0$. Aplicando la proposición 1, obtendremos (*);

$$1 = \| u_n \|_{2,\lambda} \leqslant c.\| \mathcal{L} u_n \|_{C^\lambda \times C^{2,\lambda}} \leqslant$$
$$\leqslant c \left[\| \mathcal{L} - \mathcal{L}_n \| + \| \mathcal{L}_n u_n \| \right] \longrightarrow 0$$

contradicción, o sea el segundo caso no puede presentarse, Q.E.D..

<u>TEOREMA 5:</u> Los operadores de Λ con $c(x) \leqslant 0$ pertenecen a Λ_{oo}.

Esto significa que para estos operadores $\mathcal{L}$, dado $f \in C^\lambda(\mathfrak{D})$ y $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial\mathfrak{D})$, existe una y única solución $u \in C^{2,\lambda}(\mathfrak{D})$ tal que: $\mathcal{L} u = (f, \varphi)$, probándose así el siguiente:

<u>TEOREMA 6:</u> Sea L un operador elíptico con coeficientes $C^\lambda(\mathfrak{D})$ y $c(x) \leqslant 0$, sea $\mathfrak{D}$ una región como la

---

(*) Recordar que norma en $C^\lambda \times C^{2,\lambda}$ está dada por la suma de las normas.

descrita en la sección 2. Entonces existe una y sólo una solución del problema: $Lu = f$, $u/\partial = \varphi$. Esta solución es contínua en los datos f, φ.

La demostración del teorema 5, se hace siguiendo tres pasos: a) se demostrará que esos operadores están en Λ_0, b) que ellos forman un conjunto conexo, c) que uno de ellos pertenece a Λ_{00}. Esto implica el resultado buscado, como se vé inmediatamente usando el lema precedente.

DEMOSTRACION DE a): Sea

$$\Lambda \ni L = \sum_{i,j} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i} b_i D_i + c \ , \quad c \leqslant 0.$$

Consideremos la función:

$$v = \exp(-\alpha |x-z|^2) \quad y \quad z \in \bar{\mathcal{D}} .$$

En Lv, $4\alpha^2.\exp.(-\alpha|x-z|^2)$ es factor de:

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x_i - z_i)(x_j - z_j) \ ,$$

el cual es positivo pues $x \in \mathcal{D}$ y L es elíptico. Luego, si α es bastante grande tendremos $Lv > 0$ en $\bar{\mathcal{D}}$, es decir, al extender Lv a $\bar{\mathcal{D}}$ la extensión resulta positiva.

Sea ahora $u \in C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$ con $\mathcal{L} u = 0$, entonces $u_\epsilon = u + \epsilon v$ verifica $Lu > 0$ en $\bar{\mathcal{D}}$.

Veamos la siguiente implicación:

$Lu > 0 \Longrightarrow$ u no tiene **un máximo** positivo en $\mathcal{D}$.

Si $Lu > 0$ y el máximo se alcanzase en $(x_1, \ldots, x_n)$ allí $\partial u / \partial x_i = 0$, y además dada la dirección η :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} \eta_i \, \eta_j \leq 0.$$ O sea la matriz de

$U = \left\{ \partial^2 u / \partial \eta_i \, \partial \eta_j \right\}$ es no positiva definida.

Sea $A = \left[a_{ij} \right]$. Entonces:

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \text{traza de } (A\,U) = \text{traza}(O\,A\,U\,{}^tO) = \quad (*)$$

$$= \text{traza } (O\,A\,{}^tO\,O\,U\,{}^tO),$$ donde O es una matriz ortogonal que diagonaliza a A. Luego, $D = O\,A\,{}^tO$ posee la diagonal con elementos todos positivos. Por otra parte una transformación ortogonal no cambia la no-positiva definitud de U. Luego ${}^tO\,U\,O$ tiene en la diagonal elementos no positivos.

Así tenemos por fin: traza $A\,U \leq 0$. Como $c \leq 0$ (!) y $\partial u/\partial x_i = 0$ en el máximo, resulta $Lu \leq 0$ allí, contradicción.

Aplicando a u_ϵ este principio de máximo, resulta que esa función no tiene máximos positivos en $\mathcal{D}$. Por otra parte en $\partial\mathcal{D}$ vale $\epsilon v > 0$, $(u = 0)$ y por lo tanto $u_\epsilon \leq$ máximo de u_ϵ en $\partial\mathcal{D} = \epsilon.\{$máximo de v en $\partial\mathcal{D}.\}$.

Finalmente, $u = \lim u_\epsilon \leq 0$ en $\mathcal{D}$.

Como $-u$ es solución del mismo problema, también $-u \leq 0$. Así $u = 0$ y hemos demostrado que si $\mathcal{L}u = 0$

(*) La traza es el coeficiente de λ^{n-1} en el polinomio característico y por lo tanto invariante bajo transformaciones ortogonales.

entonces $u = 0$, lo cual implica que $C^{2,\lambda} = N'$ (cf. fórmula (4 bis.)), o lo que es lo mismo que $L \in \Lambda_0$.

b) Como la suma de operadores elípticos es elíptico y también el producto por una constante positiva y que estas operaciones " mantienen $c \leq 0$", resulta que el conjunto de los operadores en cuestión es convexo y por lo tanto conexo.

c) El operador $\mathcal{L} : u \longrightarrow (\Delta u, u/_{\partial}) \in \Lambda_{00}$.

Para demostrar esto es necesario escribir para $f \in C^{\lambda}(\mathcal{D})$, $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial\mathcal{D})$, una $u \in C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$ tal que $\Delta u = f$ en $\mathcal{D}$, y $u = \varphi$ en $\partial\mathcal{D}$.

Sea $\tilde{f}$ una extensión a R^n de f tal que $\tilde{f} \in C^{\lambda}(R^n)$ y tiene soporte compacto. Tal extensión existe, pues si $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_j\}$ es una partición de la unidad respecto de entornos relativamente compactos con $\sum_{i=1}^{j} \varphi_i(x) = 1$ en $\overline{\mathcal{D}}$, de la fórmula $f = \sum (f\varphi_i)$ en $\mathcal{D}$, se deduce que bastará extender la f - para cada $x_0 \in \overline{\mathcal{D}}$ - de $\mathcal{D} \cap U$ a U, donde U es un entorno de x_0. Por la compacidad de $\overline{\mathcal{D}}$ se pueden elegir $U_1, \ldots, U_j$ de manera que cubran ese conjunto y se ajusten a las condiciones exigidas al entorno U mencionado en la sección 2.

Se asocia a esa familia la partición de la unidad mencionada. Es suficiente ver que cada $f\varphi_i$ admite una extensión de $U_i \cap \mathcal{D}$ a U_i con soporte compacto contenido allí y perteneciente a C^{λ}. Por las propiedades del contorno el problema se reduce a considerar el caso en que U_i es un entorno del origen, $\partial \mathcal{D}$ coincidiendo con $x_n = 0$ y $U_i \cap \mathcal{D} \equiv U_i \cap \{ x_n > 0 \}$. En esta situación es inmediato que la extension par respecto x_n de $f \varphi_i$ pertenece a C^λ. Multiplicando por una función adecuada de C^∞ el resultado tendrá soporte contenido en U_i , asegurándose así la existencia de la extensión.

Sea ahora $u_1 = \tilde{f} * k\,|x|^{2-n}$, $k = (n.c_{nn})^{-1}$, entonces $u_1 \in C^{2,\lambda}(R^n)$ y verifica $\Delta u_1 = \tilde{f}$ en R^n, $\Delta u_1 = f$ en $\mathcal{D}$, como se vé del lema 1.

Para encontrar u bastará resolver:

(1) $\Delta u_2 = 0$ en $\mathcal{D}$, $u_2/_\partial = \varphi - u_1/_\partial = \varphi_1$,

pues: $u = u_1 + u_2$ tiene laplaciano f y coincide con φ en $\partial \mathcal{D}$.

El problema (1) tiene una solución u_2 indefinidamente diferenciable en $\mathcal{D}$, contínua en $\overline{\mathcal{D}}$, como se vé por ejemplo usando el método de Perron (cf. Petrovsky, I. G., Lectures on Partial Differential Equations, § 31). Probaremos aquí que pertenece a $C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$, hecho que depende de las propiedades del contorno. Bastará verlo para todo punto de $\partial \mathcal{D}$.

Sea $0 \in \partial \mathcal{D}$, y $\mathcal{E}_0$ la solución local que corresponde a un entorno Ω_δ de 0. Llamemos $v = \mathcal{E}_0(0, \varphi_1)$, luego $v \in C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$ y $w = u_2 - v$. Entonces en cierto Ω_δ

(2) $\Delta w = 0$ en $\Omega_{\delta/2}$, $w = 0$ en $\partial\mathcal{D}\cap\Omega_{\delta/2}$, w contínua en $\overline{\Omega}_{\delta}$.

Esto significa que basta demostrar que $u \in C^{2,\lambda}(\Omega_{\delta/2})$ para tener $u_2 \in C^{2,\lambda}(\mathcal{D})$. Más aún basta ver que en un entorno de 0, V, $w \in C^{2,\lambda}(\Omega_{\delta/2}\cap V)$. Sigamos llamando $\Omega_{\delta/2}$ a $\Omega_{\delta/2}\cap V$. Por un teorema de Kellog se sabe que $w \in C^{1,0}(\Omega_{\delta/2})$, y se puede incluso probar que $w \in C^{1,1/2}(\Omega_{\delta/2})$ usando una variante del teorema mencionado, la cual presentamos para comodidad del lector en el apéndice.

Luego, si Ψ es una función de C^{∞}, igual a 1 en un entorno de 0 y a soporte compacto adecuado, tenemos:

$$\Delta(\Psi w) = \Psi\Delta w + (\text{operador de primer orden})(w) =$$

$$= 0 + R(w) \in C^{0,\lambda}, \tag{3}$$

$$\Psi w = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_{\delta/2}, \ \lambda \leq 1/2.$$

Por otra parte: $h = \mathcal{E}_0(R(w),0) \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \leq \frac{1}{2}$. De acuerdo al teorema 3, $h = \Psi w$, o sea, $w \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \leq \frac{1}{2}$, en cierto Ω_{δ}, y por lo tanto, $w \in C^{1,\lambda}$. Aplicando de nuevo (3), se obtiene $R(w) \in C^{0,\lambda}$, y con el mismo argumento se vé que $\mathcal{E}_0(R(w),0)$ (= w en un entorno de 0) pertenece a $C^{2,\lambda}$. Q.E.D.

APENDICE.

TEOREMA AUXILIAR: Sea dada una hipersuperficie Γ por la ecuación: $x_1 = f(x_2,\ldots,x_n) \in C^2$, en un entorno U de O. Sea u armónica en $\Omega = \{x_1 > f(x_2,\ldots,x_n)\} \cap U$ contínua hasta el borde y tal que: $u(f,x_2,\ldots,x_n) \equiv 0$. (*)

Entonces grad.u es contínua en $\overline{\Omega}$ y verifica una condición Hölder 1/2 en un entorno V ($\subset U$) de O:

$$\forall\ x, \forall\ y,\ (x,y) \in \overline{V\cap\Omega}, |\text{grad } u(x)-\text{grad } u(y)| \leqslant C|x-y|^{1/2}$$

donde C es una constante independiente de x e y.

Tres lemas precederán a la demostración de este resultado:

LEMA 1: Sea B_r una esfera de radio r tangente a $\{x_n = 0\}$ con centro $\overline{O}$ y Ψ una función contínua en el contorno de B_r tal que si $\xi \in \partial B_r$ entonces:

$$|\Psi(\xi)| \leqslant |\xi|^2 \wedge M.$$

Luego, existe una constante C_n, que depende sólo de n, tal que, para I_Ψ integral de Poisson de Ψ,

(1) $$|\text{grad } I_\Psi(x)| \leqslant M^{1/2}.C_n\ ,\ x \in (0,\overline{O}).$$

DEMOSTRACION: Sea η una dirección y u una función armónica definida en una esfera B_ρ de radio ρ y centro O, sea v una armónica tal que $|u| \leqslant v$ en B_ρ. Entonces de:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(0) = \frac{1}{\rho^n \beta_n} \int_{B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \eta}\, dx_1 \ldots dx_n = \frac{1}{\rho^n \beta_n} \int_{|x|=} u \cos \widehat{\eta\nu}\, d\sigma_x$$

resulta

$$(2) \qquad |\operatorname{grad} u(0)| \leqslant \frac{\alpha_n}{\rho \beta_n} v(0)$$

donde α_n = superficie de la esfera unitaria, β_n = volumen de la esfera unitaria.

Observemos que para $M^{1/2} x \in (0,\bar{0})$:

$$(3) \qquad (\operatorname{grad} I_\Psi)(M^{1/2} x) = \operatorname{grad}_x \frac{I_\Psi(M^{1/2} x)}{M^{1/2}} =$$

$$= M^{1/2} \operatorname{grad}_x \left[\frac{I_\Psi(M^{1/2} x)}{M} \right].$$

La función entre corchetes es:

1) armónica en $B_\rho(0/\sqrt{M})$, $\rho = r/\sqrt{M}$,

2) si $\xi \in \partial B_\rho$, vale:

$$M^{-1} |\Psi(\sqrt{M}\, \xi)| \leqslant (M \wedge M|\xi|^2) M^{-1} = \Psi_1(\xi) =$$

$$= 1 \wedge |\xi|^2 .$$

Luego, para probar el lema basta demostrar que si u verifica 1) y 2), y $x \in (0',0)$, $0'$ = centro de la esfera B_ρ, entonces:

$$(4) \qquad |\operatorname{grad} u(x)| \leqslant C_n$$

donde C_n no depende más que de la dimensión. En efecto, poniendo

$$u(x) = \frac{I_\psi(\sqrt{M}\, x)}{M} = \frac{I_\varphi(x)}{M}$$

con $\varphi(\xi) = \psi(\xi/\sqrt{M})$, $\xi \in \partial B_\rho$, $x \in B_\rho$, de (3) obtenemos:

$$\sup_{y \in (0,\bar{0})} |\operatorname{grad} I_\psi(y)| \leq \sqrt{M} \cdot \sup_{x \in (0,0')} |\operatorname{grad} u(x)| \leq C_n \sqrt{M}.$$

Probemos (4). La demostración la dividiremos en dos casos:

1) $\rho \leq 1$; 2) $\rho > 1$.

<u>Caso 1</u>: Si $\xi \in B_\rho$ y α es el ángulo formado por $\overline{O'O}$ y $\overline{O'\xi}$, y P es la proyección de ξ en $\{x_n = 0\}$, vale:

$$\xi P = |\xi| .\operatorname{sen}(\alpha/2) = |\xi| |\xi|/2\rho = |\xi|^2/2\rho .$$

De modo que la función armónica $v(\xi) = 2.\overline{O\xi} \times \vec{\nu}$, $\vec{\nu}$ versor ortogonal a $\{x_n = 0\}$, mayora a u en $B_\rho(O')$. De (2) obtenemos:

$$|\operatorname{grad} u(x)| \leq v(x) \frac{\alpha_n}{\beta_n |x|} = \frac{2|x|\alpha_n}{|x|\beta_n} = \frac{2\alpha_n}{\beta_n}$$

<u>Caso 2</u>: Sea $O'' = (0,0,\ldots,0,-1)$. Si $\xi \in \partial B_\rho$, de la fórmula del coseno, tenemos:

$$|\xi O''|^2 \geq |\xi|^2 + 1,$$

de los cual resulta (*):

$$|\xi P| = |\xi O''| - 1 \geq \frac{|\xi|^2}{1 + |\xi O''|} \geq \frac{|\xi|^2}{2 + |\xi|} = \frac{|\xi|}{2 + |\xi|} . |\xi|.$$

Si $|\xi| < 1$, $|\xi P| \geq (1/3)|\xi|^2$, si $|\xi| \geq 1$, $|\xi P| \geq 1/3$, por lo tanto:

(5) $$|\xi P| \geq (|\xi|^2 \wedge 1)/3.$$

(*) P se encuentra a distancia uno de O" y en el segmento que une ξ con O".

Consideremos la función armónica:

$$v(\xi) = \frac{3^n}{n-2}\ (1-\frac{1}{|\xi - 0''|^{n-2}}).$$

Aplicando el teorema del valor medio al paréntesis se vé que este es mayor o igual que:

$(n-2)\ |P\xi|\ .\ 3^{1-n}$, en la región: $1 \leqslant |\xi - 0''| \leqslant 3$. Luego en $B_\rho \cap \{ 1 \leqslant |\xi - 0''| \leqslant 3 \}$ vale: $v(\xi) \geqslant u(\xi)$. Usando nuevamente (2), obtenemos:

$$|\text{grad } u(x)| \leqslant \frac{\alpha_n\ v(x)}{|x|\ \beta_n} \qquad \text{para } |x| \leqslant 1,\ x \in (0,0').$$

En consecuencia allí:

$$|\text{grad } u(x)| \leqslant 3^n \alpha_n / \beta_n.$$

En $|x| > 1$, usamos como mayorante $v \equiv 1$,

$$|\text{grad } u(x)| \leqslant \frac{1}{|x|}\frac{\alpha_n}{\beta_n} \leqslant \frac{\alpha_n}{\beta_n}\ ,\ \text{Q.E.D.}.$$

<u>LEMA 2</u>: Sea $d < r$, B_r como en el lema 1. Sea φ una función definida en ∂B_r tal que:

(6) $$|\varphi(x)| \leqslant |x|^2\ ,\ \varphi(x) = 0 \quad \text{si } |x| < d.$$

Entonces existe una constante K (que sólo depende de n y r) tal que, si φ es contínua, $u = I\varphi$, y x e y pertenecen a $(0,0')$, vale:

$$|\text{grad } u(x) - \text{grad } u(y)| \leqslant K\ |x-y|\ /\ d.$$

<u>DEMOSTRACION</u>: De la acotación de φ resulta que si $\xi \in \partial B_r$:

$$|\varphi(\xi)| \leqslant 2\left[\overrightarrow{0\xi} \times \overrightarrow{00'}\right] = 2|\xi|\, r \cos(\overrightarrow{0\xi}, \overrightarrow{00'}) = |\xi|^2$$

Como la expresión entre corchetes es lineal en $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, es armónica, y por lo tanto:

$$|I_\varphi(x)| \leqslant 2\left[\overrightarrow{0x} \times \overrightarrow{00'}\right] \leqslant 2r|\mathbf{x}| \qquad \text{para } x \in B_r.$$

Por otro lado tenemos, de la transformación de Kelvin, para $x \overline{\in} \overline{B}_r$:

$$I_\varphi(x) = r^{n-2}|x|^{n-2}\, I_\varphi(xr^2|x|^{-2}),$$

$$|I_\varphi(x)| \leqslant |I_\varphi(xr^2/|x|^2)| \leqslant 2r\,|xr^2/|x|^2| \leqslant$$

$$\leqslant 2r|\mathbf{x}| \ .$$

Recapitulando: $I_\varphi(x)$ es una función armónica en $R^n - \left\{\partial B_r \cap \{|x| \geqslant d\}\right\}$ que verifica:

(7) $$|I_\varphi(x)| \leqslant 2r|x| \ .$$

Por otra parte, de las propiedades de las funciones armónicas se sabe que si u es armónica en $x + B_\rho$ (cf.(2)) vale:

(8) $$|\operatorname{grad} u(x)| \leqslant \frac{\alpha_n}{\rho\beta_n} \cdot \underset{|\xi - x| = \rho}{\text{máximo}} |u(\xi)| \ .$$

Aplicando (8) a $I_\varphi(y)$, ρ = distancia de y a $\left\{\partial B_r \{|x| \geqslant d\}\right\}$, tenemos:

(9) $$|\operatorname{grad} I_\varphi(y)| \leqslant \frac{2r\,\alpha_n}{\beta_n}\left\{\frac{|y| + \rho}{\rho}\right\}, \ y \in \overset{\circ}{B}_r.$$

Los puntos y que distan del segmento (0,0') menos que d/2 verifican: $|y| < d + \rho < 3\rho$, y por lo tanto la expresión entre llaves en (9) es < 4. Para esos puntos, y, vale entonces:

(10) $\quad |\mathrm{grad}\ I_\varphi(y)| \leqslant 8(\alpha_n/\beta_n)\cdot r.$

Sean ahora $z,y \in (0,0')$. De (8), aplicada con $\rho = d/2$, $x = 0$, resulta:

$$|\mathrm{grad}\ I_\varphi(y) - \mathrm{grad}\ I_\varphi(z)| \leqslant \frac{\alpha_n}{\beta_n\ (d/2)} \cdot \sup_{|\xi|=d/2} |I_\varphi(z+\xi) - I\ (y+\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\alpha_n}{d\beta_n}\Big[\sup_{\substack{|\xi|=d/2\\ y\in(0,0')}} |\ \mathrm{grad}\ I_\varphi(\xi + y)\ |\Big] \cdot |z - y| .$$

De (10) y la última expresión tenemos:

$$|\ \mathrm{grad}\ I_\varphi(y) - \mathrm{grad}\ I_\varphi(z)| \leqslant C_{r,n}|z-y|/d, \text{ Q.E.D..}$$

LEMA 3: Sea φ contínua y definida en ∂B_r, B_r como en el lema precedente, $|\varphi(x)| \leqslant |x|^2$ en ese contorno.

Entonces existe una constante $C_{n,r}$ tal que para $x,y \in (0,0')$ vale:

$$|\mathrm{grad}\ I_\varphi(x) - \mathrm{grad}\ I_\varphi(y)| \leqslant C_{n,r}|x-y|^{1/2}.$$

DEMOSTRACION: Descompongamos φ en $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ con $\varphi_1 = 0$ si $|x| \geqslant d$, $\varphi_2 = 0$ si $|x| \leqslant d/2$. Entonces: $I_\varphi = I_{\varphi_1} + I_{\varphi_2}$. Como $|\varphi_1(x)| \leqslant |x|^2 \wedge d^2$ del lema 1 se obtiene: $\quad |\ \mathrm{grad}\ I_{\varphi_1}(x)| \leqslant C'_{n,r}\ d$, $x \in (0,0')$.

Del lema 2,

$$|\ \mathrm{grad}\ I_{\varphi_2}(x) - \mathrm{grad}\ I_{\varphi_2}(y)| \leqslant C''_{n,r}|x-y|/d \quad .$$

O sea,

$$\left| \text{grad } I_\varphi(x) - \text{grad } I_\varphi(y) \right| \leqslant \left(d + \frac{|x-y|}{d}\right) C_{n,r}.$$

Tomando $d = |x-y|^{1/2}$, que hace mínimo al paréntesis, obtenemos la tesis, Q.E.D. .

DEMOSTRACION DEL TEOREMA AUXILIAR:

Es posible definir en cada punto de Γ un sistema de ejes, cuyo eje x_1 es perpendicular a Γ y cuyos versores coordenados forman campos vectoriales contínuamente diferenciables. Una forma de construirlo es la siguiente: sean $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ los versores coordenados en O con $\vec{e}_1$ perpendicular a Γ, $\vec{\eta}$ un versor ortogonal a Γ en O'; supongamos que en la región que nos interesa para todo O' el $\vec{\eta}$ asociado sea tal que su trasladado al origen sea independiente de $\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$; consideremos el sistema $\{\vec{\eta},\vec{e}\,'_2,\ldots,\vec{e}\,'_n\}$, $\vec{e}\,'_i$ = versor paralelo a $\vec{e}_i$ en O'; su Graham-Schmidt ortonormalizado y en ese orden, permite definir en O' un sistema $\{\vec{\eta},\vec{E}_2,\ldots,\vec{E}_n\}$ que como se vé de su construcción está formado por versores con componentes contínuamente diferenciables.

Sea r un número positivo fijo tal que cada esfera con radio r tangente a Γ en todo punto de un cierto entorno de O (que podemos suponer toda la región en cuestión) es o completamente interior o completamente exterior a Ω. Un tal r existe: por ser $\Gamma \in C^2$ vale el desarrollo en O':

$$x_1 = f(x_2,\dots,x_n) = \sum_{i=2}^{n} a_i x_i + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} x_i x_j + o(|\bar{x}|^2),$$

$\bar{x} = (x_2,\dots,x_n)$.

Si suponemos la superficie referida a su plano tangente en O' la ecuación de ella toma la forma:

$$f = \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} x_i x_j + r(|x|^2).$$

Luego:

$$\left|\sum b_{ij} x_i x_j\right| \leqslant \left(\sum x_j^2\right)^{1/2} \left[\sum_j \left(\sum_i b_{ij} x_i\right)^2\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant |\bar{x}| \left[\sum_j \left(\sum_i b_{ij}^2\right) \cdot \left(\sum x_i^2\right)\right]^{1/2} = |\bar{x}|^2 \cdot \sum_{i,j} b_{ij}^2 = |\bar{x}|^2 M.$$

O sea, en un entorno, tendremos:

$$(11) \qquad -\left[M + 1\right] |x|^2 \leqslant f \leqslant \left[M + 1\right] |x|^2.$$

$\pm x_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)(M+1)$ define las esferas tangentes a Γ en O' de radio $r = 1/2(M+1)$, que como se vé de (11), dejan entre ellas a la hipersuperficie Γ, si $|\bar{x}| \leq \rho(0')$. Para demostrar la existencia de un tal r sólo falta ver que en un entorno V de 0, $\rho(0')$ está uniformemente acotada por abajo por una constante positiva. En efecto:

$$o(|\bar{x}|^2) = \varepsilon_{0'} \cdot |\bar{x}|^2$$

donde

$$\varepsilon_{0'} = \sum_{i,j=2}^{n} (\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(\theta') - (\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(0')$$

$|\theta' - 0'| \leqslant |x|$.

O sea, si O' se encuentra en un entorno V conveniente de O, de la continuidad uniforme de las derivadas segundas se vé que $|\varepsilon_{O'}| < 1$ en $|x| < k$. Así (11) vale simultáneamente en $O' \in V$ con un mismo $\rho(O') > 0$. Sean x, y dos puntos de Ω que distan de Γ menos de r. Bastará demostrar la condición de Hölder para tales puntos, pues siendo u armónica es indefinidamente diferenciable, verificándose la mencionada condición de Hölder uniformemente para los puntos que distan más que r/2 de Γ.

Tomemos las dos esferas B_1 y B_2 con centros O_1 y O_2 respectivamente, de radios igual a r, tangentes a Γ en O_1 y O_2 tales que $x \in (\bar{O}_1, O_1)$, $y \in (\bar{O}_2, O_2)$. Referidas a los sistemas de coordenadas cuyos versores más arriba he os denotado con $\{\vec{\eta}, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n\}$ podemos "identificar" B_1 y B_2 de la siguiente manera: definimos una correspondencia $B_1 \ni \xi \longrightarrow T\xi \in B_2$ tal que $\xi_i = (T\xi)_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Vale entonces:

$$(12) \quad |\xi - T\xi| \leq |O_1 - O_2| + 2r \Big\{ |\vec{\eta}(O_1) - \vec{\eta}(O_2)| + \sum_2^n |\vec{E}_i(O_1) - \vec{E}_i(O_2)| \Big\}.$$

Como los versores son continuamente diferenciables de (12) obtenemos:

$$(13) \qquad |\xi - T\xi| \leq K\, |O_1 - O_2| .$$

$\overrightarrow{O_1O_2}$ coincide con la proyección de la poligonal $\overrightarrow{O_1x\ y\ O_2}$ sobre la recta que pasa por O_1, O_2 y por lo tanto:

$|\overrightarrow{O_1O_2}| \leqslant |\text{proy } \overrightarrow{O_1x}| + |x-y| + |\text{proy } \overrightarrow{O_2y}|$.

Si α es el ángulo que forma la secante O_1O_2 con la tangente a la superficie en el plano P determinado por x, O_1, O_2, obtenemos : $|\text{proy } \overrightarrow{O_1x}| \leqslant r\, |\text{sen}\,\alpha|$. La curva $P \cap \Gamma$ tiene en un punto de su arco $\widehat{O_1O_2}$ una tangente paralela al segmento $\overline{O_1O_2}$ y por lo tanto el ángulo formado por $\vec{\eta}(\tilde{O})$ con $\vec{\eta}(O_1)$ es mayor o igual al formado por $\vec{\eta}(O_1)$ con la proyección (*) de $\vec{\eta}(\tilde{O})$ en P que coincide con α.
O sea.

$$|\text{sen}\,\alpha| \leqslant |\vec{\eta}(O_1) - \vec{\eta}(\tilde{O})| \leqslant K' |O_1 - \tilde{O}| \leqslant$$

$$\leqslant K'' |O_1 - O_2| \quad (*) .$$

Por lo tanto:

$$|\text{proy } \overrightarrow{O_1x}| \leqslant M r |O_1 - O_2| .$$

La constante M sólo depende de la función que define a Γ y del tamaño del entorno de O que consideremos. Eligiendo r bastante chico, cosa que podíamos haber hecho desde un principio, resulta:

(14) $\qquad |O_1 - O_2| \leqslant (1/2)\, |O_1 - O_2| + |x - y|$.

(13) y (14) prueban (15):

(15) $\qquad |\xi - T\xi| \leqslant 2K\, |x - y|$.

Veamos ahora que si Ω es bastante pequeño, vale

(16) $\qquad |u(\xi)| \leqslant C\, d(\xi, \Gamma) = C.\text{distancia de } \xi \text{ a } \Gamma$.

(*) O_2 es bastante cercano a O_1 . Ambos son cercanos a O.

En efecto, sea $\xi \in \Omega$, P' el punto de Γ que realiza la mínima distancia a Γ (*). Supongamos $d(\xi,\Gamma) < r$, pues en caso contrario (16) se verifica con cierta C. Tomemos las esferas de radio r tangentes a Γ en P'. La que no intersecta Ω sea de centro P; la otra de centro P". Entonces $\xi \in (P',P")$; en efecto, supongamos que no sea cierto y que respecto a un sistema de ejes ortogonales con centro P', ξ sea de la forma: $(|\xi|,0,0\ldots,0)$ y que la hipersuperficie tenga ecuación:

$$y_1 = g(y_2,\ldots,y_n) = \alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n + O(|y|^2).$$

Por lo tanto para cierto i, $\alpha_i > 0$. Sea $\alpha_2 > 0$. Para $y_3=\ldots=y_n=0$ vale:

$$g = \alpha_2 y_2 + O(1)\, y_2^2$$

Si y_2 es pequeño, $g \geqslant (\alpha_2/2)\, y_2$, y por lo tanto

$$\operatorname{dist}\left[(|\xi|,0,0,\ldots,0),\Gamma\right] \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{dist}\left[(|\xi|,0,0,\ldots,0),(\frac{\alpha_2}{2}\bar{y}_2,0,\ldots,0)\right]$$

donde $(\bar{y}_1,\bar{y}_2)$ es el punto de intersección de la recta $y_1 = (\alpha_2/2)\, y_2$ con la perpendicular a esa recta desde $(|\xi|,0,\ldots,0)$ (en $y_2=\ldots=y_n=0$), contradicción. O sea $\xi \in (P',P")$.

Consideremos la función armónica

$$h = r^{2-n} - |\xi - P|^{2-n} ,$$

(*) Siempre podemos suponer r y Ω tan pequeños como para que P' exista para $\xi \in \Omega$.

P asociado a ξ como más arriba, dist $(\xi, \Gamma) < r$. Por ser $h \geqslant 0$ en Γ es allí mayor o igual que u, y por ser positiva en la superficie esférica de centro P y radio 2r, puede encontrarse K (independiente de ξ) tal que:

(17) $$|u(\xi)| \leqslant K\, h(\xi) \leqslant C_r\, |\xi - P'|, \quad \xi \in \Omega.$$

De modo que para $\xi \in \partial B_1$ vale:

(18) $$|u(\xi)| \leqslant C_r\, |\xi - P'(\xi)| \leqslant M.\, |\xi - O_1|^2,$$

donde M no depende de O_1.

Sea $y = Tz$. Entonces:

$$\operatorname{grad} u(x) - \operatorname{grad} u(y) =$$
$$= \left\{ \operatorname{grad} u(x) - \operatorname{grad} u(z) \right\} + \left\{ \operatorname{grad} u(z) - \operatorname{grad}_z u(Tz) \right\} +$$
$$+ \left\{ \operatorname{grad}_z u(Tz) - \operatorname{grad} u(y) \right\} = \vec{S_1} + \vec{S_2} + \vec{S_3}.$$

Por el lema 3:

(19) $$|S_1| \leqslant C.\, |x - z|^{1/2} \leqslant C'.\, |x - y|^{1/2}$$

La última desigualdad es consecuencia de $x - z = x - y + y - z = (x - y) + (Tz - z)$, y de la fórmula (15).

Observando que $u(z) - u(Tz) = I_{u(\xi) - u(T\xi)}$ tenemos:

(20) $$|u(\xi) - u(T\xi)| \leqslant |\operatorname{grad} u(a)|\, |\xi - T\xi| \leqslant C''|x-y|,$$

donde la segunda desigualdad es consecuencia de (15), (10) (poniendo en esta última $y = a$) y la acotación uniforme del gradiente de u en los puntos que distan por lo menos r de Γ. Del lema 1, poniendo $\Psi = I_{u(\xi) - u(T\xi)}$ y de la fórmula (20) obtenemos:

(21) $\quad |\vec{S_2}| = |\text{grad}_z(u(z) - U(Tz))| \leqslant C_o \cdot |x - y|^{1/2}.$

Recordando que $y = Tz$, un cálculo fácil muestra que si J designa a la matriz jacobiana: $J_{ij} = \partial y_j / \partial z_i$, se tiene:

(22) $$\text{grad}_z\ u(Tz) = J \cdot \text{grad}_y\ u(y) \ ,$$

donde $\text{grad}_y\ u(y)$ es el vector columna de componentes $\partial u / \partial y_i$. Luego, si $\vec{v} = \text{grad}\ u$,

(23) $$|\vec{S_3}| = |(J - I) \cdot v| \leqslant (\sum_{i,j} |(J - I)_{ij}|^2)^{1/2} . \quad v \ .$$

La transformación T no es otra cosa que una rotación seguida de una traslación: $T = Q + \vec{t}$, y de (22) se vé que la matriz de Q coincide con J, Por otra parte, dado un vector unitario e cualquiera, toda rotación Q verifica para cierta k que depende sólo de u:

$$|Q_{ij} - \delta_{ij}| \leqslant k\ |\vec{e} - Q\vec{e}\,| \ .$$

Por lo tanto,

(24) $$(\sum_{i,j} |(J - I)_{ij}|^2)^{1/2} \leqslant k'\ |\vec{e} - Q\vec{e}\,| \ .$$

Tomando en (24) $\vec{e} = \vec{\eta}(O_1)$, resulta $Q\vec{e} = \vec{\eta}(O_2)$. Finalmente:

(25) $$|\vec{S_3}| \leqslant k'' . \sup |\text{grad}_y\ u(y)| \ . \ |\vec{\eta}(O_1) - \vec{\eta}(O_2)| \leqslant$$
$$\leqslant k'' . C . |O_1 - O_2| \leqslant k_o \cdot |x - y| \ ,$$

como se vé de (14) y del lema 1. En conclusión, de (19), (21) y (25), resulta:

$$|\text{grad}\ u(x) - \text{grad}\ u(y)| \leqslant M . |x - y|^{1/2} \ ,$$

M no depende de x ni de y, Q.E.D..

O. Kellog demuestra (cf. Trans. Am. Math. Soc., Vol 33, nº 2) un resultado más fuerte: Si f pertenece a $C^{1,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, bajo las mismas hipótesis sobre u vale que grad u satisface una condición de Hölder λ, en un entorno de 0.

De todas maneras, como se vió, para demostrar el teorema de Dirichlet para entorno $C^{2,\lambda}$ basta usar el teorema auxiliar arriba demostrado.

7. EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA DATO DE CONTORNO CONTINUO.

Nuestro objetivo final es rebajar las condiciones que aseguran exitencia y unicidad solicitando solamente para lograr esto que en $\mathcal{D}$, $f \in C^{2,\lambda}$, y en $\partial\mathcal{D}$, φ sea contínua. Para demostrar este resultado necesitaremos la siguiente desigualdad. Para operadores en $\mathcal{D}$ como los descriptos en las secciones 1 y 2, si K es un compacto contenido en la región y δ es su distancia al complemento de $\mathcal{D}$, vale:

$$(1) \qquad \|u\|_{2,\lambda/K} \leq \frac{C}{\delta^{2+\lambda}} \left[\|Lu\|_{0,\lambda} + \|u\|_{\infty} \right] .$$

La primera norma se calcula en K y las otras en $\mathcal{D}$; C sólo depende del operador y de la región. Partimos demostrando una serie de lemas auxiliares:

LEMA 1: Si φ es una función a soporte compacto en $\mathcal{D}$, y si $D_i^j = \partial^j/\partial x_i^j$, entonces:

$$\|\varphi u\|_{2,\lambda} \leq C \left\{ \|\varphi Lu\|_{0,\lambda} + \sum_{i,k=1}^{n} \sum_{j=0}^{1} \|(D_i^j \varphi)\, D_k u\|_{0,\lambda} + \right.$$

$$\left. + \left\| \sum_{j=0}^{2} (D_i^j \varphi)\, u \right\|_{0,\lambda} \right. .$$

DEMOSTRACION: Sea $\{\mathcal{D}_j\}$ el cubrimiento de $\mathcal{D}$ usado en el punto d) de la sección 3, $\{\varphi_j\}$ la descomposición de la unidad correspondiente y $\mathcal{E}_j$ las soluciones locales asociadas con $\mathcal{D}_j$.

Tenemos:

$$\varphi u = \sum \varphi_j \, u \, \varphi = \sum_j \mathcal{E}_j \, \mathcal{L}(\varphi_j \varphi u).$$

Como $\mathcal{L}(\varphi_j \varphi u) = (L(\varphi_j \varphi u), 0)$, obtenemos:

$$\| \varphi u \|_{2,\lambda} \leq c \sum_j \| L(\varphi_j \varphi u) \|_{0,\lambda} \leq$$

$$\leq c \left\{ \sum_j \| \varphi_j \varphi \, Lu \|_{0,\lambda} + \sum_j \| (L\varphi_j \varphi - \varphi_j \varphi L) u \|_{0,\lambda} \right\}$$

De aquí sigue la tesis observando los coeficientes del operador entre paréntesis.

Definamos:

$$\mathcal{H}_\lambda(u, \mathcal{D}) = \sup_{x, y \in \mathcal{D}} |u(x) - u(y)| / |x - y|^\lambda.$$

LEMA 2: Sea $\mathcal{D}_\delta = \{ x : | x_i - x_i^0 | \leq \delta \}$ un hipercubo de lado 2δ. Si $u \in C^{N+k,\lambda}(\mathcal{D}_\delta)$ y ν es un número positivo menor o igual a uno, vale para k entero $\geqslant 0$:

i) $$(\nu\delta)^N \| D^{(N)} u \|_{\infty/\mathcal{D}_\delta} \leq C_{N,k} \left\{ \| u \|_{\infty/\mathcal{D}_\delta} + \right.$$

$$\left. + (\nu\delta)^{N+k+\lambda} \mathcal{H}_\lambda(D^{(N+k)} u; \mathcal{D}_\delta) \right\}$$

ii) $$(\nu\delta)^{N+\lambda} \mathcal{H}_\lambda(D^{(N)} u; \mathcal{D}_\delta) \leq C_{N,k} \, \nu^{\lambda-1} \left\{ \| u \|_{\infty/\mathcal{D}_\delta} + \right.$$

$$\left. + (\nu\delta)^{N+k+\lambda} \mathcal{H}_\lambda(D^{(N+k)} u; \mathcal{D}_\delta) \right)$$

(Aquí $C_{N,k}$ no depende ni de ν, ni de δ, ni de u, solamente de N y k, y $D^{(j)}$ indica un operador

$$\partial^j / \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}, \quad s_1 + \ldots + s_n = j).$$

DEMOSTRACION: i) e ii) siguen por inducción de las fórmulas:

i') $(\nu\delta)^N \| D^{(N)} u\|_\infty \leq C_N\{\|u\|_\infty + (\nu\delta)^{N+1}\|D^{(N+1)} u\|_\infty\}$,

ii') $(\nu\delta)^N \| D^{(N)} u\|_\infty \leq C_N\{\|u\|_\infty + (\nu\delta)^{N+\lambda}\mathcal{H}_\lambda(D^{(N)}u;\mathcal{D}_\delta)\}$,.

iii') $\mathcal{H}_\lambda(D^{(N)} u;\mathcal{D}_\delta) \leq K\delta^{1-\lambda}\|D^{(N+1)} u\|_\infty$.

(En efecto, de i') e ii') por inducción resulta i); y de i) e iii') resulta ii)).

DEMOSTRACION de i') e ii'): Sea $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ un multiíndice de derivación de orden $N = \beta_1+\dots+\beta_n$. Sea y un punto de $\mathcal{D}_\delta$. Para fijar ideas supongamos $y_i \leq x_i^0$, para todo i. Escribimos $u(y_1 + t\alpha)$ por $u(y_1+ t\alpha_1,\dots, y_n + t\alpha_n)$. Esta función está definida si $0 \leq t \leq \delta/N$.

Consideremos la expresión:

$$f(t) = \sum_{\alpha_i\leq\beta_i} (-1)^{|\alpha|} u(y+t\alpha) \binom{\beta_1}{\alpha_1}\cdots\binom{\beta_n}{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \sum \alpha_i .$$

De $(1 - e^x)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} (-1)^h e^{hx}$, derivando q veces, se obtiene, luego de hacer $x\to 0$:

$$\sum_{h=0}^{n} (-1)^h \binom{n}{h} h^q = \delta_{q,n}\, n!\ .$$

Así:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\dots,f^{(N-1)}(0) = 0,\ f^{(N)}(0)=D^\beta u(y)N!$$

La última igualdad es debida a que la derivada

$\partial^N/\partial y_1^{\beta_1} \cdots \partial y_n^{\beta_n}$ aparece $N!/\beta_1!\ldots\beta_n!$ veces en la expresión $(\partial/\partial y_1 + \cdots + \partial/\partial y_n)^N$.

Una aplicación del teorema del valor medio permite ahora obtener:

$$f(t) = t^N f^{(N)}(\theta t) = t^N f^{(N)}(0) + t^N(f^{(N)}(\theta t) - f^{(N)}(0)).$$

O sea, escribiendo $\binom{\beta}{\alpha}$ por $\binom{\beta_1}{\alpha_1}\cdots\binom{\beta_n}{\alpha_n}$ y α^γ por $\alpha_1^{\gamma_1}\cdots\alpha_n^{\gamma_n}$, tenemos:

$$(2)\quad N!\, t^N |D^\beta u(y)| = \sum_{\alpha\le\beta} (-1)^{|\alpha|} u(y+t\alpha)\binom{\beta}{\alpha} -$$

$$-t^N \sum_{\alpha\le\beta} (-1)^{|\alpha|}\binom{\beta}{\alpha} \sum_{|\gamma|=N} \alpha^\gamma \left[(D^\gamma u)(y+\theta t\alpha) - (D^\gamma u)(y)\right]$$

Luego:

$$N!\, t^N |D^\beta u(y)| \le$$

$$\le \|u\|_\infty \sum_{\alpha\le\beta}\binom{\beta}{\alpha} + t^N |\theta t N| \|D^{(N+1)} u\|_\infty \sum_{\substack{\alpha\le\beta \\ |\gamma|=N}} \binom{\beta}{\alpha}\alpha^\gamma \le$$

$$\le C\left\{\|u\|_\infty + t^{N+1}\|D^{(N+1)} u\|_\infty\right\}, \quad 0 \le t \le \delta/N .$$

Eligiendo $t = \nu\cdot\delta/N$ obtenemos i'). Si el corchete de (2) lo hubiéramos acotado por $(\theta t N)^\lambda \mathcal{H}_\lambda(D^\gamma u; \mathcal{D}_\delta)$ hubiéramos obtenido ii').

<u>DEMOSTRACION de iii')</u> : Esta sigue del teorema del valor medio, pues:

$$\frac{|D^\gamma u(x) - D^\gamma u(y)|}{|x-y|^\lambda} \le |x-y|^{1-\lambda}\|\text{grad } D^\gamma u\|_\infty \le$$

$$\le K\, \delta^{1-\lambda}\|D^{(N+1)} u\|_\infty .$$

LEMA 3: Si $\mathcal{D}_{2\delta} \subseteq \mathcal{D}$, existe una constante $C_{L,\mathcal{D}}$ independiente de δ y u tal que:

$$\delta^{2+\lambda}\|u\|_{2,\lambda/\mathcal{D}_\delta} \leq C_{L,\mathcal{D}} \Big\{ \delta^2\|Lu\|_{\infty/\mathcal{D}_{2\delta}} + \delta^{2+\lambda}\mathcal{H}_\lambda(Lu, \mathcal{D}_{2\lambda}) + \delta\|D^{(1)}u\|_{\infty/\mathcal{D}_{2\delta}} + \delta^{1+\lambda}\mathcal{H}_\lambda(D^{(1)}u, \mathcal{D}_{2\delta}) + \|u\|_{\infty/\mathcal{D}_{2\delta}} + \delta^\lambda \mathcal{H}_\lambda(u; \mathcal{D}_{2\delta}) \Big. .$$

Aquí $D^{(1)}$ está en lugar de una derivada $\partial/\partial x_j$, y $\delta < 1$.

DEMOSTRACION: Sea φ una función C^∞ de soporte en el hipercubo $|x_i| < 2$, $\varphi = 1$ en el hipercubo $|x_i| < 1$. Llamando $\varphi_\delta(x) = \varphi((x-x_0)/\delta)$ aplicamos el resultado del lema 1 a φ_δ:

$$\|u\|_{2,\lambda/\mathcal{D}_\delta} \leq \|\varphi_\delta u\|_{2,\lambda} \leq$$

$$(3) \qquad \leq C\Big\{\|\varphi_\delta Lu\|_{0,\lambda} + \sum_{i=1,0} \|D^{(i)}\varphi_\delta \; D^{(1)} u\|_{0,\lambda} + \sum_{i=0,1,2} \|(D^{(i)}\varphi_\delta) u\|_{0,\lambda}\Big\}.$$

Observemos ahora que valen las siguientes desigualdades:

a) $\|v.u\|_{0,\lambda} \leq \mathcal{H}_\lambda(v)\|u\|_\infty + \mathcal{H}_\lambda(u)\|v\|_\infty + \|u\|_\infty\|v\|_\infty$,

b) $\mathcal{H}_\lambda(D^{(i)}\varphi_\delta) = \delta^{-i-\lambda}\mathcal{H}_\lambda(D^{(i)}\varphi)$,

c) $\|D^{(i)}\varphi_\delta\|_\infty = \delta^{-i}\|D^{(i)}\varphi\|_\infty$.

Aplicando a) a cada sumando de (3), usando b) c), y multiplicando por $\delta^{2+\lambda}$ se obtiene la desigualdad del lema.

<u>LEMA 4</u>: Para todo $0 \leq \vartheta \leq 1$, $\mathcal{D}_{2\delta} \subseteq \mathcal{D}$, vale:

$$\delta^{2+\lambda} \|u\|_{2,\lambda/\mathcal{D}_\delta} \leq C \left\{ \|Lu\|_{0,\lambda} + \vartheta^{-1-\lambda} \|u\|_{\infty/\mathcal{D}} + \right.$$
$$\left. + \vartheta^{\lambda} \, \delta^{2+\lambda} \|u\|_{2,\lambda/\mathcal{D}_{2\delta}} \right\}.$$

C no depende de δ, ϑ y u, y si de L y $\mathcal{D}$.

<u>DEMOSTRACION</u>: Aplicar al resultado del lema 3, las desigualdades del lema 2.

<u>DEFINICION</u>:

$$/\!/ u /\!/_{2,\lambda/\mathcal{D}} = \sup \left\{ \delta^{2+\lambda} \|u\|_{2,\lambda/\mathcal{D}_\delta} : \delta < 1, \mathcal{D}_{4\delta} \subseteq \mathcal{D} \right\}$$

$/\!/ . /\!/$ define una norma.

<u>LEMA 5</u>: $\delta^{2+\lambda} \|u\|_{2,\lambda/\mathcal{D}_{2\delta}} \leq C \; /\!/ u /\!/_{2,\lambda/\mathcal{D}}$

donde C sólo depende de la dimensión.

<u>DEMOSTRACION</u>: $\mathcal{D}_{2\delta}$ se descompone en 4^n cubos de interior disjunto: $\mathcal{D}^{(i)}_{\delta/2}$, $i=1,2,\ldots,4^n$.

Cada uno de ellos verifica:

$$\mathcal{D}^{(i)}_{4.\delta/2} \subseteq \mathcal{D}_{4\delta} \subseteq \mathcal{D}$$

Luego:

$$\delta^{2+\lambda} \|u\|_{2,\lambda/\mathcal{D}_{2\delta}} \leq \sum_{i=1}^{4^n} \delta^{2+\lambda} \|u\|_{2,\lambda/\mathcal{D}^{(i)}_{\delta/2}} =$$

$$= 2^{2+\lambda} \sum_{i=1}^{4^n} (\delta/2)^{2+\lambda} \| u \|_{2,\lambda/\mathcal{D}^{(i)}_{\delta/2}} \leq$$

$$\leq 2^{2+\lambda} . 4^n /\!/ u /\!/_{2,\lambda/\mathcal{D}} .$$

<u>DEMOSTRACION DE LA DESIGUALDAD (1)</u>:

Tomando en el lema 4 supremo en δ siempre que $\mathcal{D}_{4\delta} \subseteq \mathcal{D}$ tenemos, por el lema 5 que:

$$/\!/ u /\!/_{2,\lambda/\mathcal{D}} \leq c_I \Big\{ \| I u \|_{0,\lambda/\mathcal{D}} + \nu^{-1-\lambda} \| u \|_{\infty/\mathcal{D}} +$$

$$+ \nu^{\lambda} c /\!/ u /\!/_{2,\lambda/\mathcal{D}} \Big\} .$$

Eligiendo <u>ahora</u> ν tal que $\nu^{\lambda} c\, c_I \leq 1/2$, obtenemos:

$$(4) \quad /\!/ u /\!/_{2,\lambda/\mathcal{D}} \leq 2 c_I \Big\{ \| I u \|_{0,\lambda/\mathcal{D}} + \nu^{-1-\lambda} \| u \|_{\infty/\mathcal{D}} \Big\} .$$

Sea d la distancia de K a $\partial\mathcal{D}$. Poniendo $\delta = (d/4\sqrt{n}) \wedge 1$, todo cubo $\mathcal{D}_{4\delta}(x_o) \subseteq \mathcal{D}$ si $x_o \in K$, y $K \subseteq \bigcup_{x_o \in K} \mathcal{D}_{\delta}(x_o)$. Por el lema 2, si $x_o \in K$:

$$\delta^i \| D^{(i)} u \|_{\infty/\mathcal{D}_{\delta}(x_o)} \leq C(/\!/ u /\!/_{2,\lambda/\mathcal{D}} + \| u \|_{\infty/\mathcal{D}}),$$

$i = 0,1,2.$

Entonces:

$$(4') \quad \delta^i \| D^{(i)} u \|_{\infty/K} \leq C(/\!/ u /\!/_{2,\lambda/\mathcal{D}} + \| u \|_{\infty}), i=0,1,2.$$

Por otro lado, si $x,y \in K$, o bien $|x-y| < \delta$, y por lo tanto $x \in \mathcal{D}_{\delta}(y)$, y:

$$(5)\qquad \frac{|D^{(2)}u(x) - D^{(2)}u(y)|}{|x-y|^{\lambda}} \leq \|u\|_{2,\lambda/\mathcal{D}_\delta(y)} \leq$$

$$\leq c_1\, \delta^{-2-\lambda} /\!/u/\!/_{2,\lambda/\mathcal{D}}$$

o bien, $|x - y| > \delta$ y entonces de (4):

$$\frac{|D^{(2)}u(x) - D^{(2)}u(y)|}{|x-y|^{\lambda}} \leq \frac{2\,\|D^{(2)}u\|_{\infty/K}}{\delta^{\lambda}}$$

$$\leq c_2\, \delta^{-2-\lambda}\left\{ \|u\|_{\infty} + /\!/u/\!/_{2,\lambda} \right\}.$$

Usando (4), (4'), (5) y (5'), obtenemos:

$$\|u\|_{2,\lambda/K} \leq C'\,\delta^{-2-\lambda}\left\{\|Lu\|_{0,\lambda/\mathcal{D}} + \|u\|_{\infty/\mathcal{D}}\right\} \quad ,$$

Q.E.D..

Estamos ahora en condiciones de demostrar el:

TEOREMA 7: Sean L y $\mathcal{D}$ como en los teoremas precedentes. Dada $f \in C^{0,\lambda}(\mathcal{D})$ y φ contínua en $\partial\mathcal{D}$, existe una y sólo una función u, contínua en $\overline{\mathcal{D}}$, que para todo compacto $K \subset \mathcal{D}$, pertenece a $C^{2,\lambda}(K)$, y que es solución del problema:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \mathcal{D}. \\ u = & \text{en } \partial\mathcal{D}. \end{cases}$$

DEMOSTRACION: Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de funciones de $C^{2,\lambda}(\partial\mathcal{D})$ tal que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ uniformemente .(Obsérvese que por el teorema de Stone-Weierstrass, la clausura en la norma uniforme de $C^{2,\lambda}(\partial\mathcal{D})$ es $C(\partial\mathcal{D})$ o sea todas las funciones contínuas sobre $\partial\mathcal{D}$).

Sea $\{u_n\}$ la sucesión de soluciones al problema:

$$\begin{cases} Lu_n = f \\ u_n = \varphi_n \end{cases}, \quad (u_n \in C^{2,\lambda}(\mathcal{D}))$$

$(u_n - u_m)$ satisface entonces $L(u_n - u_m) = 0$, y por lo tanto toma su máximo y mínimo en el borde $\partial\mathcal{D}$ (ver demostración del teorema 6). Luego:

$$|u_n - u_m|(x) \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \ \forall x \in \mathcal{D}.$$

O sea , la sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy en la norma uniforme sobre $\mathcal{D}$. Llamemos u su límite. Es evidente que $u/_{\partial\mathcal{D}} = \varphi$. Por la desigualdad (1) de este párrafo:

$$\|u_n - u_m\|_{2,\lambda(K)} \leq \frac{C}{\delta^{2+\lambda}}\|u_n - u_m\|_{\infty/\mathcal{D}} \quad ,$$

donde δ es la distancia del compacto K a $\mathcal{b}(\mathcal{D})$.

Así $\{u_n\}$ es de Cauchy en $C^{2,\lambda}(K)$ y

$u(x)/_K = \lim\limits_{n \to \infty} u_n(x)/_K$ en la norma $C^{2,\lambda}(K)$. Por lo tanto

$u \in C^{2,\lambda}(K)$ y $\quad Lu = \lim\limits_{n \to \infty} Lu_n = f$.

Queda así probado que u satisface el problema de Dirichlet planteado.

La unicidad de la función u sigue del principio del máximo, como en el caso del teorema 6, pues lo que allí se demostró efectivamente es que:

$Lw = 0$, $w \in C^2(\mathcal{D})$, w contínua en $\overline{\mathcal{D}}$ implica

$$|w| \leq \max_{\partial\mathcal{D}} |w| . \quad \text{Q.E.D..}$$