

22

A. Benedek y R. Panzone

**LA DISTRIBUCIÓN DE LOS AUTOVALORES DEL PROBLEMA DE DIRICHLET
DEL OPERADOR DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL DE STURM-LIOUVILLE**

TEOREMAS ASINTÓTICOS
de Hermann Weyl y de Torsten Carleman

Las publicaciones del Instituto de Matemática están destinadas principalmente a reunir los trabajos de investigación, notas de cursos, seminarios y actas de congresos realizados en la Universidad Nacional del Sur en el campo de la matemática.

Estas publicaciones no tienen carácter periódico, y sus fascículos –cada uno de los cuales contiene en general un solo trabajo– son numerados en forma continuada.

Las universidades, academias, sociedades científicas y los editores de revistas de matemática quedan invitados a canjear sus publicaciones por las del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Toda correspondencia relativa a estas colecciones deberá ser dirigida a:

I N M A B B



CONICET

U N S

SERVICIO DE CANJE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
AV. ALEM 1253
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
(8000) BAHÍA BLANCA - ARGENTINA
bibima@criba.edu.ar

22

A. Benedek y R. Panzone

**LA DISTRIBUCIÓN DE LOS AUTOVALORES DEL PROBLEMA DE DIRICHLET
DEL OPERADOR DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL DE STURM-LIOUVILLE**

TEOREMAS ASINTÓTICOS
de Hermann Weyl y de Torsten Carleman

2011

INMABB - CONICET

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHÍA BLANCA - ARGENTINA

ABSTRACT

These notes deal with basic results about the asymptotic distribution of the eigenvalues $\{\lambda_n\}$ of the Dirichlet problem for the differential operator $-k^{-1}(x)\Delta_x$, $x = (x_1, x_2)$, $k(x) > 0$ defined on an open and bounded set $D \subset \mathbb{R}^2$. The more general D is, the more conditions are to be imposed on the weight function k to get our main objective, that is, to prove that $n/\lambda_n \sim (4\pi)^{-1} \iint_D k(x_1, x_2) dx_1 dx_2$. We pay attention to the regularity of the eigenfunctions, isospectrality of different regions, some properties of the Green kernel and the behaviour of the boundary $J = \partial D$. Included is also a synopsis of the seminal paper of Hermann Weyl that appeared in the *Mathematische Annalen* a century ago. Let us review the present work chapter by chapter:

Chapter 0. This is a chapter of prerequisites. It includes the mentioned synopsis and several auxiliary results, among others the fundamental solution for the Laplacian, Weyl's Lemma, the definitions of several families of functions: $C^{0,\alpha}$, Lip_{loc} , Lip_+ , Λ_α , \mathcal{S} , \mathcal{U} , theorems of maximum for elliptic differential equations, a general principle of maximum for the Laplacian, Weierstrass preparation theorem, Ikehara's theorem, a theorem of Lax and Milgram, a tauberian theorem of Hardy and Littlewood, etc.

Chapter 1. In this chapter we introduce the Green's kernel for the Dirichlet problem of the Laplacian in a Jordan region D and prove several properties of it. Following a classical method we show for the differential operator $-k^{-1}\Delta$ the existence of an orthonormal and complete family of eigenfunctions in $L^2(D, k)$, $k \in Lip_+(D)$. By definition k is a continuous, bounded, positive and bounded away from zero function that satisfies locally a Hölder condition whose parameters depend on the neighborhood.

The eigenfunctions are associated to the family of eigenvalues which are positive and of finite multiplicity. A set of functions dense in $L^2(D, k)$ have a Fourier expansion uniformly and absolutely convergent.

Chapter 2. We treat here the isospectrality of problems where $(D, k_1) \neq (D, k_2)$ and show that if $D = B =$ an open disk, there are infinitely many pairwise different k_n such that all the spectra $\{\lambda_m\}$ of the Dirichlet problem for $-k_n^{-1}\Delta$ on B are equal. We also trace the isospectral problem just mentioned to Euler but for the vibrating string.

The isospectrality when $(D_1, k) \neq (D_2, k)$, (Kac's problem), is considered in an appendix to the Chapter where we show, following Conway, that for $k \equiv 1$ there are two Jordan regions D_j with the same areas and perimeters, not congruent and isospectral. We also discuss the counter $N(\lambda) = \#\{\lambda_m \leq \lambda\}$.

Chapter 3. Here we study the Green's kernel $G_k(p, q; \lambda)$ of Dirichlet's problem for the operator $-\mathcal{L} = -\Delta + (-\lambda)k$, $\lambda = -t < 0$ and Green's operator $(G_t^{(1)}f)(p) = \int_D G_k(p, q; -t)f(q) dq$. We approximate $G_k(p, q; -t)$ by $K_0(\sqrt{t}|p - q|)$ where K_0 is Kelvin's function and estimate the error.

Using this and following Carleman we prove for D a Jordan region having a boundary J with Minkowski dimension less than 2 and $k \in \Lambda_\alpha(D)$ that $\lambda_n \int_D k(p) dp \sim 4\pi n$. By definition the function k is in $Lip_+(D)$ and satisfies a global Hölder condition $|k(p) - k(q)| \leq M(p)|p - q|^\alpha$, $p, q \in D$, with $M(p)$ a summable function. In particular we have one of Weyl's theorems since every Jordan region with finite perimeter has $\dim_{\text{box}}(J) < 2$.

We also show the plausibility of the modified Weyl-Berry conjecture for the operator \mathcal{L} . Finally we prove a similar asymptotic result for the selfadjoint elliptic differential operator $-\Delta v + kv = \mu v$: if $k, m \in \mathcal{L}_\alpha(D)$, $v = 0$ on J , then $\mu_n \int_D m(p) dp \sim 4\pi n$.

The equation $\Delta v + [\mu m - k]v = 0$ is the analogue of the so called Sturm-Liouville (ordinary) differential equation, (cf. [BR], Ch. 10).

FOREWORD

This little book deals with the asymptotic distribution of the normal frequencies of vibration of a non-homogenous plane membrane fixed at the boundary of a Jordan region that could have a rough boundary.

It is to be expected that these normal frequencies satisfy $f_n \approx \sqrt{\lambda_n}$. The central theme of this monograph is the first approximation of the asymptotic behaviour of these frequencies, which is like $\frac{n}{\lambda_n} \sim A$, $\lambda_n = \kappa f_n^2$, where A and κ are constants.

*This fact, for regions with rectifiable boundaries, was first obtained by Hermann Weyl in his paper on the distribution of the family of eigenvalues $\{\lambda_n\}$ of certain boundary problems, (see *Math. Ann.*, 71, p. 441-479, 1912). It is an important and basic result and we shall deal with it in its generalization.*

The differential operator of our mathematical model is the bidimensional Sturm-Liouville operator $-\frac{1}{k(x)}\Delta_x$ in a region D where $k(x) > 0$. The (positive) numbers λ_n will be the eigenvalues of the Dirichlet boundary problem and the limit A will be equal to $(1/4\pi) \int_D k(x)dx$. One of the theoretical problems is to know for which "weights" $k(x)$ this main result holds.

Hermann Weyl's asymptotic theorems answer an important question posed more than a century ago, (cf. [W], p. 442). Another question that has been posed is whether the family of eigenvalues determines the membrane or not, (cf. [K], 1966). However, this question has a negative answer. Notwithstanding, it is strongly related to an old problem for the vibrating string to which Euler has paid attention, (for the string one must have $\frac{n^2}{\lambda_n} \rightarrow A_0 = \text{constant}$).

If N is the counting function, $N(\lambda) :=$ number of j 's such that $\lambda_j \leq \lambda$, then Weyl's theorem can be rewritten as $N(\lambda)/\lambda \rightarrow A$ whenever $\lambda \rightarrow \infty$. When $k \equiv 1$ it holds that $4\pi A = \text{area}(D)$.

Moreover, if in this situation the region has a smooth boundary J then $N(\lambda) \sim \frac{\text{area}(D)}{4\pi} \lambda - \frac{\text{length}(J)}{4\pi} \sqrt{\lambda}$. As a matter of fact, one of the aims of the theory is to add information to the well established first approximation $N(\lambda)/\lambda \rightarrow A$ which is valid with great generality.

We believe that in each chapter of this memoir some contributions were made. None the less, we have written it with all the details that are proper of a book for advanced students —even so it is not easy to read— and as an introduction to a possible continuation.

Bahía Blanca, January 2011.

PREFACIO

Este trabajo versa sobre la teoría de objetos vibrantes finitos. Nos hemos limitado a objetos bidimensionales pues creemos que la membrana vibrante es en alguna medida paradigmática y más simple de tratar. Consideramos sólo membranas planas, no necesariamente homogéneas, fijas en el borde, el cual puede ser no rectificable.

De las frecuencias de vibración debe esperarse que satisfagan $f_n \approx \sqrt{n}$. El tema central de este trabajo es el comportamiento asintótico de esas frecuencias cuya primera aproximación es $\frac{n}{\lambda_n} \sim A$, $\lambda_n = \kappa f_n^2$, donde A y κ son constantes. Este hecho para regiones con borde rectificable es un corolario del estudio de Hermann Weyl sobre la distribución de la familia de autovalores $\{\lambda_n\}$, (Math. Ann., 71, p. 441-479, 1912).

Es un resultado básico y de gran importancia en la problemática del comportamiento asintótico de los autovalores del que nos ocuparemos principalmente en su generalización por T. Carleman. Una sinopsis del trabajo de Weyl se encuentra al comienzo de esta obra.

El operador diferencial que rige el modelo matemático que estudiaremos será el operador de Sturm-Liouville bidimensional, $-\frac{1}{k(x)}\Delta_x$, en una región de Jordan D donde $k(x) > 0$. Los λ_n aparecerán como los autovalores de un problema de Dirichlet y la constante mencionada arriba será $A = \frac{1}{4\pi} \int_D k(x) dx$. Uno de los problemas que se presentan es para cuáles “pesos” $k(x)$ son vigentes los argumentos de los resultados a los que se llega.

Se ha insinuado que la investigación es el arte del bien preguntar. El teorema asintótico responde a preguntas formuladas hace cien años, (cf. [W], p. 442). Otra pregunta bien formulada a mediados del siglo XX, (cf. [K]), inquiriere por la posibilidad de que la familia de autovalores determine la membrana: ¿puede oírse la forma de un tambor? Si bien la respuesta es negativa se reencuentra esta cuestión con un viejo tema que ya interesó a L. Euler en el caso de la cuerda vibrante; aquí debe esperarse que $\frac{n^2}{\lambda_n} \rightarrow A_0$, donde A_0 es una constante.

Si N es el contador, $N(\lambda) = n^\circ$ de j 's tales que $\lambda_j \leq \lambda$, entonces el teorema de Weyl se reescribe como $N(\lambda)/\lambda \rightarrow A$ para $\lambda \rightarrow \infty$. Cuando $k \equiv 1$ vale $4\pi A = \text{area}(D)$. Sobre ciertas regiones de contorno muy regular y $k(x) \equiv 1$ hay más información; en efecto, se sabe también que $N(\lambda) \sim \frac{\text{area}(D)}{4\pi} \lambda - \frac{\text{longitud}(\text{contorno de } D)}{4\pi} \sqrt{\lambda}$. Otro de los varios objetivos de la teoría es precisamente sumar conocimiento al que da la bien establecida primera aproximación $N(\lambda)/\lambda \rightarrow A$, que es válida con gran generalidad.

Creemos que hay en todos los capítulos contribuciones originales, pero hemos redactado esta memoria con todos los detalles propios de unas notas de curso para alumnos avanzados (aun así no es fácil de leer) y como fundamento de una posible continuación.

Bahía Blanca, enero de 2011.

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 0. Sinopsis del trabajo de Hermann Weyl. Teorema sobre la conmutación de la derivación y la integración. La solución fundamental $E(x) = s(0, x)$, $s(a, x) = -(2\pi)^{-1} \log|x - a|$ para el Laplaciano. Regularidad de $\sigma f = E * f$. Contraejemplo. Derivadas segundas de $E(x)$. Regularidad de σf cuando f es Hölder continua: lema de Weyl. La familia \mathcal{L}_α . El operador de Sturm-Liouville $(-\frac{1}{k(x)})\Delta_x$ en una región de Jordan. La dimensión de Minkowski (box) del contorno de una región de Jordan. Algunos teoremas de máximo y mínimo, corolarios del Lema de Hopf. Principio general de máximo para el Laplaciano. Funciones de varias variables complejas, teorema de preparación de Weierstrass. Series de Dirichlet, teorema de Landau. La transformada de Mellin-Stieltjes, teorema de Ikehara. Funcionales bilineales en un espacio de Hilbert, teorema de Lax y Milgram. Valores propios, addendum. Una desigualdad numérica. Un teorema tauberiano de Hardy y Littlewood. 1

Capítulo 1. El núcleo de Green $G(p, q) = s(p, q) - H(p, q)$ para el Laplaciano. Resultados auxiliares. Demostración de varias propiedades del núcleo de Green. El operador G , $(Gu)(p) = \int_D G(p, q)u(q)dq$. Teorema del desarrollo en autofunciones $\{\phi_n(p; k)\}$ del operador $(-\frac{1}{k(x)})\Delta_x$. Desarrollo de $G(p, q)$ en autofunciones $\phi_n(p; k)$ normalizadas. 23

Capítulo 2. La membrana vibrante y sus autovalores, algunos espectros. Transformaciones conformes. Membranas circulares: el espectro no determina a k . Cuerdas y membranas isoespectrales, el teorema de Euler y el problema de Kac. El contador $N(\lambda)$ y propiedades del espectro cuando $N(\lambda)/\lambda \rightarrow A$. El remanente en la fórmula de Weyl, la conjetura de Weyl-Berry modificada. **Apéndice al Capítulo 2.** Regiones planas isoespectrales. Solución del problema de Dirichlet. Principio de reflexión de Schwarz. Principio de reflexión de las autofunciones. El problema de Kac: dada k , el espectro no determina a la región. 37

Capítulo 3. El contorno de ciertas regiones planas, la propiedad S_ε y la dimensión box. El núcleo de Green $G_k(p, q; \lambda)$ del operador $-\mathcal{L} = -\Delta + (-\lambda)k$ para $\lambda = -\chi^2 = -t$, $t > 0$, y el operador $G_t^{(1)}$, $(G_t^{(1)}u)(p) = \int_D G_k(p, q; -t)u(q)dq$. Propiedades del núcleo de Green de $-\mathcal{L}$, el dominio $D_{\Delta+\lambda k} = D_\Delta$ de $-\mathcal{L}$, el operador inverso: $(\Delta + \lambda k)^{-1}(\cdot) \equiv -G_t^{(1)}(\cdot)$ y el rango \mathbb{R} del operador $G_t^{(1)}$. Aproximación al núcleo $G_k(p, q; \lambda)$ por la función de Kelvin K_0 , propiedades de K_0 y del error $-H_k^w(p, q; \lambda) = G_k(p, q; \lambda) - \frac{1}{2\pi}K_0(\chi w|p - q|)$, $w > 0$. Acotación de la función $H_k^w(p, q; \lambda)$. La función $F(p; \lambda)$. La función $\phi(p; s)$. Integración de las funciones $H(p, p)/t^s$ y $H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, p; -t)/t^s$. Comportamiento asintótico de los autovalores del operador bidimensional de Sturm-Liouville: la versión de T. Carleman del teorema de H. Weyl. Plausibilidad de la conjetura de Weyl-Berry modificada para el operador $-\mathcal{L} = -\Delta + (-\lambda)k$. Comentarios. La ecuación lineal autoadjunta de tipo elíptico. 53

CAPÍTULO 0

En este Capítulo presentamos un resumen del trabajo fundamental de H. Weyl, la solución fundamental para el Laplaciano y algunos resultados auxiliares.

0.1. Sinopsis del trabajo de Hermann Weyl, *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, Math. Ann., 71, 441-479, (1912).*

§1. *Relación de los valores propios de dos núcleos con los de su suma. Aproximación de un núcleo por medio de combinaciones bilineales finitas de funciones.*

Sea \mathbf{K} el operador Hilbert-Schmidt definido por el núcleo real y simétrico $K(s, t) \in L^2((a, b) \times (a, b))$, $K \neq 0$: $\mathbf{K}f(s) = \int_a^b K(s, t)f(t)dt$. Los **valores propios** $\chi_j = \chi_j(\mathbf{K})$, presentes según su multiplicidad, verifican $\int_a^b K(s, t)\varphi_j(t)dt = \chi_j\varphi_j(s)$ con autofunciones φ_j tales que $\int_a^b \varphi_j^2(t) dt = 1$, $\int_a^b \varphi_j\varphi_k dt = 0$ si $k \neq j$. Se suponen ordenados de manera que $|\chi_1| \geq |\chi_2| \geq \dots > 0$. Sus inversos $\lambda_j = \frac{1}{\chi_j}$ serán llamados los **autovalores** del operador. Vale $\|\mathbf{K}\|_2^2 = \sum_1^\infty \chi_j^2$.

Los valores propios no negativos (no positivos) entre los χ_j los denotaremos χ_{n+} (χ_{n-}) donde $n \geq 1$ designa la posición de ese valor propio entre los no negativos (no positivos) ordenados por módulo decreciente.

Vale $\chi_{1-} \leq (\mathbf{K}f, f) \leq \chi_{1+}$ si $\|f\|_2 = 1$. Notaremos $k_n(s, t) = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j}\Phi_i(s)\Phi_j(t)$, $c_{i,j} = c_{j,i}$ donde $\Phi_j \in L^2(a, b)$ y $K_n(s, t) = \sum_1^n \chi_j\varphi_j(s)\varphi_j(t)$. Se tiene entonces el

Lema. $\chi_{(n+1)+}(\mathbf{K}) = \chi_{1+}(\mathbf{K} - \mathbf{K}_n) \leq \chi_{1+}(\mathbf{K} - k_n)$.

Teorema I. Sean K', K'' dos núcleos como K tales que $K = K' + K''$. Entonces, si $\chi'_h \equiv \chi_h(K')$, etc., valen

$$(1) \chi_{(m+n+1)+} \leq \chi'_{(m+1)+} + \chi''_{(n+1)+}$$

$$(2) \chi_{(m+n+1)-} \geq \chi'_{(m+1)-} + \chi''_{(n+1)-}$$

$$(3) |\chi_{m+n+1}| \leq |\chi'_{m+1}| + |\chi''_{n+1}|.$$

El siguiente teorema II generaliza al Lema,

Teorema II. Valen,

$$\chi_{(n+m)+}(K) \leq \chi_{m+}(K - k_n),$$

$$\chi_{(n+m)-}(K) \geq \chi_{m-}(K - k_n),$$

$$|\chi_{n+m}(K)| \leq |\chi_m(K - k_n)|.$$

Teorema III. $\|K - k_n\|_2^2 \geq \sum_{n+1}^{\infty} \chi_j^2$.

Si $K = K(\alpha)$ y en la norma-2 es continuo en α entonces también dependen continuamente de ese parámetro los valores propios: $\alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \chi_{n+}(\alpha) \rightarrow \chi_{n+}(\beta)$, etc.

Teorema IV. Sea $p(s)$ una función continua a trozos y tal que $0 \leq p_0 \leq |p(s)| \leq P_0$ donde $a \leq s \leq b$ y p_0, P_0 son constantes. Sea $K'(s, t) = p(s)K(s, t)p(t)$. Entonces, $\chi_{n+}(K) \cdot p_0^2 \leq \chi'_{n+} \equiv \chi_{n+}(K') \leq \chi_{n+}(K) \cdot P_0^2$.

Teorema V. Sean $(a, b) \supset (a_1, b_1)$ y $K'(s, t) = K(s, t)I_{(a_1, b_1) \times (a_1, b_1)}(s, t)$. Entonces, $\chi_{n+}(K) = \chi_{n+} \geq \chi'_{n+}$, $\chi_{n-} \leq \chi'_{n-}$. O sea, $\lambda_{n+}(K) \leq \lambda_{n+}(K')$, etc.

Si $(a_1, b_1) \downarrow \{x\}$ entonces $\chi_{n+}(K') \rightarrow 0, \chi_{n-}(K') \rightarrow 0$.

§2. *Invariancia de la distribución asintótica de los valores propios respecto de la adición de núcleos con distribución de autovalores rara. Valores propios de un núcleo continuamente diferenciable.*

Los resultados precedentes dan origen a diversos corolarios. Por ejemplo,

Teorema VI. Sean K, K', K'' como en el Teorema I. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} n\chi'_{n+} = 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} n\chi''_{n-} = 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} n\chi_{n+} = 1$.

Teorema VII. Si $K(s, t)$ es continuamente diferenciable, incluso en el borde del cuadrado $Q = (a, b) \times (a, b)$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3} \chi_n = 0$.

En la demostración de este teorema recurre al Teorema III. En el Teorema VII puede reemplazarse “incluso en el borde del cuadrado Q ” por “en el interior del cuadrado Q y $\int_Q \left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)^2 dsdt < \infty$ ”. Para demostrar esto utiliza el siguiente resultado: si u es de cuadrado integrable, continuamente diferenciable en Q° y de media cero entonces $\|u\|_2^2 \leq \frac{|Q|}{\pi^2} \|\nabla u\|_2^2$, $|Q| = \text{área de } Q$.

A continuación considera el caso en que el dominio es una región de Jordan J de contorno rectificable de longitud L . Sea $A_n \equiv A\left(\frac{1}{n}\right) = \{s = (s_1, s_2) \in J: \text{dist}(s, \partial J) < 1/n\}$. El área de A_n es $|A_n| = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Supone del núcleo K que posee derivadas primeras continuas en J° y de cuadrado integrable y además que el núcleo satisface una condición como $\iint_{A_n \times A_n} K^2 dsdt = o\left(\frac{1}{n}\right)$, obviamente satisfecha por núcleos acotados. Hace uso de una construcción de rectángulos esencialmente disjuntos —a partir de un cuadrículado de lado $1/n^2$ — contenidos en J° , de lados $\leq 1/n$ y cuyo número es $O(n^2)$. Obtiene entonces que $n\chi_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$.

El método de demostración puede utilizarse en abiertos planos acotados conexos con un número finito de contornos rectificables, obteniéndose el mismo resultado.

§3. Ley asintótica de los autovalores de la ecuación de las ondas en el plano para las condiciones de contorno $u = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Teorema VIII. Sea J un abierto acotado plano conexo con un número finito de contornos rectificables. Para el problema de Dirichlet ($u = 0$ en ∂J) los autovalores del operador diferencial $-\Delta u = \lambda u$ son positivos y cuando se los ordena según su magnitud se comportan en el infinito como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \frac{|J|}{4\pi}$, ($|J| := \text{área de } J$).

Para probar este teorema considera un núcleo, $\frac{1}{2\pi} G(x, y; \xi, \eta) := \frac{1}{2\pi} \left(\log \frac{1}{r(x, y; \xi, \eta)} - H(x, y; \xi, \eta) \right)$, el núcleo de Green, cuyos valores propios, que son todos positivos, coinciden con los recíprocos de los autovalores de la ecuación diferencial $-\Delta u = \lambda u$.

Aquí $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ y $H(x, y; \xi, \eta)$ es, para (x, y) fijo en J , una función armónica de $(\xi, \eta) \in J$ tal que G se anula en el borde. Vale $0 \leq G < \log r^{-1}$, $0 < H \leq \log r^{-1}$. Usando el Principio de Dirichlet (cf. [We], entre todas las funciones continuamente diferenciables v en J con valor de contorno continuo f la función armónica con esta propiedad es la (única) que minimiza $\iint_J |\text{grad } v|^2 dx dy$), prueba que el núcleo $H(x, y; \xi, \eta)$ satisface las condiciones mencionadas en el §2 que aseguran que sus valores propios α_n verifican $n\alpha_n \rightarrow 0$. En efecto, con ese fin prueba que $\iint_J \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \leq 2\pi \log \frac{1}{\rho(x, y)} < \infty$ donde $(x, y) \in J$, $\rho(x, y) = \text{dist}\{(x, y), \partial J\}$ y que $\iint_{A_n} H^2 d\xi d\eta \leq M \frac{(\log n)^2}{n}$. Del Teorema VI se deduce entonces que basta estudiar el límite de los valores propios del núcleo relativamente sencillo $K = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}$, el cual si bien satisface la segunda de las dos desigualdades precedentes no verifica la primera.

Sean J' , J'' dos regiones formadas por un número finito de cuadrados congruentes tales que $J' \subset J \subset J''$. Por el Teorema V se tiene $\chi_{n+}(J') \leq \chi_{n+}(J) \leq \chi_{n+}(J'')$; por tanto para demostrar que $\lim n\chi_{n+}(J) = |J|/4\pi$ bastará demostrar esta propiedad para regiones como J' , J'' que se aproximan a J . Por homotecias los autovalores $\lambda = \chi^{-1}$ se multiplican por un factor t^2 mientras que las áreas se dividen por ese factor. Sea ahora $J = \cup_1^N q_i$, los q_i cuadrados de un cuadrículado del plano de lado l , esencialmente disjuntos. Por lo dicho y dado que se quiere probar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \frac{|J|}{4\pi}$, se puede suponer $l = 1$. Bastará demostrar que $\lim n\chi_{n+}(J) = |J|/4\pi$. En esta situación $|J| = |\cup_1^N q_i| = \#\{q_i\} = N$. Se descompone el núcleo K , $K = K_0 + \sum_{1 \leq h < i \leq N} K_{hi}$, $K_{hi} = K(x, y; \xi, \eta) \{ I_{q_h}(x, y) I_{q_i}(\xi, \eta) + I_{q_h}(\xi, \eta) I_{q_i}(x, y) \}$, $2K_0 = \sum_{1 \leq i \leq N} K_{ii}$. Se

demuestra que cada núcleo K_{hi} , $h \neq i$, es tal que $\lim n\chi_{n+}(K_{hi}) = 0$. Del Teorema VI sigue entonces que los valores propios de K y K_0 deben tener el mismo comportamiento asintótico.

Supóngase que $N = 1$ y $K_0 = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$, $(x, y), (\xi, \eta) \in Q = (0,1) \times (0,1)$. Si $\sigma(\lambda; Q) = \#\{\lambda_n \leq \lambda\}$ entonces $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\lambda; Q)}{\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n(Q)}$. Los autovalores del problema diferencial están en correspondencia biunívoca con los siguientes pares (m, n) según la fórmula $\lambda_{(m,n)} = \pi^2(m^2 + n^2)$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$, (para infinitos λ la multiplicidad es mayor que 1). Se demuestra con un argumento geométrico-numérico que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\lambda; Q)}{\lambda} = 1/4\pi$. Por tanto, $\lim n\lambda_n^{-1}(Q) = 1/4\pi$. Como se vio los valores propios de $K_0 = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$ en Q y los del núcleo de Green del problema de Dirichlet en esa región tienen el mismo límite asintótico. Luego, $\lim \frac{n}{\lambda_n(Q)} = \lim n\chi_{n+}(Q) = 1/4\pi$.

Por otra parte, si $|J| = N > 1$, cada valor propio $\chi(Q)$ de multiplicidad $m_{\chi(Q)}$ es un valor propio $\chi(J)$, $J = \cup_1^N q_i$, de multiplicidad $m_{\chi(J)} \geq Nm_{\chi(Q)}$. Como cada valor propio $\chi(J)$ de K_0 correspondiente a $J = \cup_1^N q_i$ coincide con un valor propio $\chi(Q)$ se deduce que $m_{\chi(J)} \leq Nm_{\chi(Q)}$. O sea, por cada $\chi(Q)$ hay exactamente N valores propios $\chi(J) = \chi(Q)$. Luego, $\lim m. \chi_{m+}(J) = \lim Nn. \chi_{n+}(Q) = N \lim n\chi_{n+}(Q) = \frac{|J|}{4\pi}$.

De otras condiciones de borde considera solamente la de Neumann que exige que la derivada normal de u en ∂J se anule sobre el contorno de J del que se supone formado por curvas de curvatura continua. La ecuación $-\Delta u = \mu u$ tiene ahora autovalores que también verifican $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n} = \frac{|J|}{4\pi}$.

§4. Investigaciones análogas para la ecuación diferencial lineal autoadjunta.

En este párrafo se estudian los autovalores de la siguiente ecuación diferencial lineal autoadjunta de tipo elíptico donde $p \in C^2(\bar{J})$, q y K son continuas en \bar{J} y $p > 0$, $K > 0$ allí:

$$(17) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial}{\partial y} \right) - q \right\} u + \lambda K u \equiv L(u) + \lambda K u = 0.$$

Sumando $\pm NKu$, $N \gg 1$, se puede reemplazar q por otro q que asegure la positividad de la función $l = l(x, y) = \frac{q}{p} + \frac{\Delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}}$ y por tanto también la de los autovalores. Estos autovalores λ_n para el problema de Dirichlet de $-L(u) = \lambda Ku$ se comportan según el siguiente Teorema IX donde escribimos $k = K/p$. Por tanto, lo mismo vale para los de la ecuación de partida.

TEOREMA IX. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \frac{\iint_J k(x,y) dx dy}{4\pi}$.

En efecto, realizando el cambio de variables $u = v/\sqrt{p}$ se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{p}}L(u) = \frac{1}{\sqrt{p}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} - \left(\frac{q}{\sqrt{p}}\right)u \equiv \Delta v - l(x,y)v.$$

Entonces, la ecuación de autovalores $-\frac{Lu}{\sqrt{p}} = \frac{\lambda Ku}{\sqrt{p}} = \lambda kv$, se escribe como

$$(17') \quad -\Delta v + lv = \lambda kv = w.$$

Si $\mathbf{G}(\Gamma)$ es el inverso de $-\Delta(-\Delta + l)$ tenemos

$$\mathbf{G}w = v = \mathbf{G}(w - lv) = \mathbf{G}w - \mathbf{G}(l\Gamma w).$$

Luego, el núcleo de \mathbf{G} resuelve la siguiente ecuación integral ($x = (x_1, x_2)$, etc.),

$$(18) \quad \frac{\Gamma(x,t)}{2\pi} - \int_J \left\{-\frac{G(x,z)l(z)}{2\pi}\right\} \frac{\Gamma(z,t)}{2\pi} dz = \frac{G(x,t)}{2\pi}.$$

Por otra parte, como $v = \mathbf{G}(\lambda K \frac{v}{p})$ obtenemos $\chi v = \mathbf{G}\left(\sqrt{\frac{K}{p}}\sqrt{\frac{K}{p}}v\right)$. Por tanto, $\chi\left(\sqrt{\frac{K}{p}}v\right) = \sqrt{\frac{K}{p}}\mathbf{G}\left(\sqrt{\frac{K}{p}}\sqrt{\frac{K}{p}}v\right)$, es decir, $\chi\Phi = \sqrt{\frac{K}{p}}\mathbf{G}\left(\sqrt{\frac{K}{p}}\Phi\right)$ y el operador con núcleo

$$(19) \quad \frac{1}{2\pi}\sqrt{k(x)}\Gamma(x,t)\sqrt{k(t)}$$

posee los mismos autovalores $\lambda_n = 1/\chi_{n+}$ que la ecuación (17'). Debemos probar entonces que vale

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 4\pi n \chi_{n+} = \int_J k(t) dt.$$

El núcleo $\frac{1}{2\pi}\sqrt{k(x)}[\Gamma(x,t) - G(x,t)]\sqrt{k(t)}$ define un operador tal que $\chi_{n+} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ y por tanto, los valores propios de (19) y $\frac{1}{2\pi}\sqrt{k(x)}G(x,t)\sqrt{k(t)}$ tienen el mismo comportamiento asintótico. Como $G = \frac{1}{2\pi}\left(\log \frac{1}{r} - A\right)$, A armónica, por lo ya visto y el T. IV resulta que $\frac{1}{2\pi}\sqrt{k(x)}\left(\log \frac{1}{r(x,t)}\right)\sqrt{k(t)}$ y $\frac{1}{2\pi}\sqrt{k(x)}G(x,t)\sqrt{k(t)}$ tienen valores propios con el mismo comportamiento asintótico.

Finalmente el autor muestra que $K(x,t) := \frac{1}{2\pi}\sqrt{k(x)}\left(\log \frac{1}{r(x,t)}\right)\sqrt{k(t)}$ tiene valores propios que se comportan como en (20) y lo hace descomponiendo J en regiones pequeñas, $J = \cup J_i$ y $K = \sum K(x,t)I_{J_i}(x)I_{J_m}(t) = \sum K_{ii} + \sum_{h < i} K_{hi} = \tilde{K} + \hat{K}$; luego observa que \hat{K} verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} 4\pi n \chi_{n+}(\hat{K}) = 0$, (como en el T. VIII). Pero en cada

$J_i \times J_i$, $\sqrt{k(x)k(t)} \sim k(z)$, $z \in J_i$. Recurriendo nuevamente al Teorema IV logra demostrar que $\int_J k dt - \varepsilon \leq \underline{\lim} 4\pi n \chi_{n+}(\tilde{K}) \leq \overline{\lim} 4\pi n \chi_{n+}(\tilde{K}) \leq \int_J k dt + \varepsilon$ para todo ε .

§5. *Modificaciones propuestas para el trasplante de la demostración al caso tridimensional.*

Sea V una región acotada en R^3 de volumen $|V|$ con contorno formado por un número finito de superficies de área finita.

TEOREMA X. El problema de Dirichlet para la ecuación $-\Delta u = \lambda u$ tiene autovalores cuyo comportamiento asintótico es $\frac{n}{\sqrt{\lambda_n^3}} \sim \frac{|V|}{6\pi^2}$.

Si el contorno es de curvatura continua y la condición de contorno es $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ vale el mismo resultado.

§6. *Sobre el espectro de la radiación en el vacío.*

Göttingen, Mayo 1911.

0.2. La solución fundamental para el Laplaciano. Sean $s(a, x) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-a|}$,

$E(x) = \frac{\log|x|}{2\pi} = -s(0, x)$. Entonces $\Delta_x s(a, x) = 0$ en $R^2 \setminus \{a\}$. Vale el siguiente

TEOREMA 1. Sea $f(x) \in L^\infty(R^2)$ de soporte compacto. Si $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ y

$$(1) \quad u(x) := (\sigma f)(x) := - \int_{R^2} s(x, y) f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \log|x-y| f(y) dy = (E * f)(x)$$

entonces $u(x) \in C^1(R^2)$ y para todo $x \in R^2$ vale:

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = - \int \frac{\partial s}{\partial x_i}(x, y) f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} f(y) dy.$$

DEMOSTRACIÓN. Las funciones $\log|x|$, $x_i/|x|^2$ son localmente integrables en R^2 . Por tanto las convoluciones en (1) y (2) definen funciones continuas. La igualdad en (2) es consecuencia del siguiente teorema auxiliar, QED.

El siguiente es un resultado sobre la posibilidad de conmutar derivación e integración que cubre todos los casos del presente texto.

LEMA 1 (teor. de la conmutación de derivación e integración) Sea $a < t < b$, $0 \in (a, b)$, $f(t, y)$ absolutamente continua en t para casi todo y . Supongamos $f(0, y)$ absolutamente integrable en y : $\int |f(0, y)| dy < \infty$. Si $\frac{\partial f}{\partial t}(t, y)$ es absolutamente integrable en (t, y) :

$$(3) \quad \int_a^b dt \int \left| \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) \right| dy < \infty,$$

entonces $f(t, y)$ es medible en (t, y) y $f(t, \cdot)$ es absolutamente integrable para todo $t \in (a, b)$. Además,

$$(4) \quad F(t) := \int f(t, y) dy$$

es absolutamente continua en (a, b) y vale

$$(5) \quad F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) dy \quad \text{casi doquier (a.e.) en } t \in (a, b).$$

Más aún, si $\int \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) dy$ es continua en t entonces

$$\frac{d}{dt} \int f(t, y) dy = F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) dy \quad \text{en todo } t \in (a, b).$$

No demostraremos este lema. Su demostración es esencialmente una aplicación del Teorema de Fubini para pasar de (4) a (5).

COROLARIO 1. Sean $f, \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1((a < t < b) \times \{y \in \mathbb{R}^2\})$ y $f(t, y)$ absolutamente continua en t a.e. y . Entonces, a.e. t , $\frac{d}{dt} \int f(t, y) dy = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) dy$. Si $\int \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) dy \in C(a, b)$ entonces la igualdad vale para todo t .

0.2.1. Regularidad de σf .

TEOREMA 1. Sea $f_1 \in L^\infty$, $f_1 \in C^1(D)$, donde D es una región acotada y $f_1 = 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Si $u_1(x) = (\sigma f_1)(x) = (E * f_1)(x)$ entonces

$$u_1(x) \in C^2(D) \quad \text{y} \quad \Delta u_1 = f_1 \quad \text{en } D.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $B_\varepsilon(0) = \{x : |x-0| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ y $W := \{y : M \geq |y| \geq 2\varepsilon\}$, $M > 2\varepsilon$. La función

$$(6) \quad \int_W \log|x-y| h(y) dy, \quad h \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$$

es indefinidamente diferenciable en B_ε . En efecto, ello resulta de repetidas aplicaciones del Lema 1. Más aún, las derivadas se obtienen derivando bajo el signo integral.

La función f_1 puede descomponerse así: $f_1 = h + f$, $f \in C^1$ con soporte compacto contenido en D e igual a f_1 en $U = B_{2\varepsilon}(x_0)$, un 2ε -entorno de x_0 , $x_0 \in D \supset U$.

Entonces $u_1 = \sigma h + \sigma f$, y de lo dicho resulta que en un ε -entorno de x_0 :

$\Delta(\sigma h)(x) = -\int \Delta_x s(x, y) h(y) dy = 0$. Para esta f sea u definida por (1). Como

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int \frac{y_i}{|y|^2} f(x-y) dy, \quad f \in C^1, \quad \text{supp } f \subset D,$$

resulta de una aplicación del Lema 1 que

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{y_i}{|y|^2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y) dy \in C(D).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= -\sum_{i=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int \frac{y_i}{|y|^2} \frac{\partial}{\partial y_i} f(x-y) dy = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum \int_{|y|>\eta} -\frac{y_i}{|y|^2} \frac{\partial}{\partial y_i} f(x-y) dy = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\{|y|>\eta\}} \left[-\text{div}_y \left(\frac{y_1 f(x-y)}{|y|^2}, \frac{y_2 f(x-y)}{|y|^2} \right) + f(x-y) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \frac{y_1}{|y|^2} + \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{y_2}{|y|^2} \right) \right] dy = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\{|y|>\eta\}} [-\text{div}(f(x-y) \cdot \text{grad } \log|y|) + f(x-y) \cdot \Delta \log|y|] dy = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\{|y|=\eta\}} f(x-y) (\text{grad } \log|y| \times \bar{n}) d\sigma = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\{|y|=\eta\}} f(x-y) \frac{d\sigma}{\eta} = f(x), \text{ QED.} \end{aligned}$$

0.2.2. Contraejemplo. Probaremos por reducción al absurdo que en el Teorema 2 no basta elegir $f_1 \in C(D)$ si queremos que $u_1 \in C^2(D)$. En lo que sigue usaremos sin previo aviso extensiones (o restricciones) de funciones dadas siempre que aquellas se reconozcan claramente en el contexto y supondremos sin pérdida de generalidad que $0 \in D$.

Supongamos que: $\Delta(C^2(D)) \supset C(D) \cap L^\infty(D)$. Sea $C_0(\bar{D})$ la familia de funciones continuas en \bar{D} nulas en ∂D . Para $\phi \in C_0(\bar{D})$ consideremos la aplicación $\sigma: \phi \rightarrow \sigma\phi = \left(\frac{\log|\cdot|}{2\pi}\right) * \phi$. Por hipótesis una tal $\phi = \Delta u$ para algún $u \in C^2(D)$.

Por otra parte, $v = \sigma\phi$ es solución de $\Delta v = \phi$ en el espacio de distribuciones $D'(R^2)$. Luego $v \in C^2(D)$. En efecto, $\Delta(v) = \phi$ en $D'(D)$ y $u - v$ es una distribución armónica en $D'(D)$ y por tanto es una función armónica, ([S], [H], [T]). Luego, $u - v \in C^\infty(D)$ y así $v \in C^2(D)$.

Sea $K = \{x: |x| \leq R\} \subset D$, $C_0(K) =$ la familia de funciones continuas en K , nulas en ∂K . Convenimos en denotar con $C^k(K)$ a la familia de funciones continuas con k derivadas continuas en el interior de K extendibles continuamente hasta el borde. En particular, $C^0(K) \supset C_0(K)$. Cuando interpretemos a estas familias como espacios de Banach lo serán munidas con la norma $\|\cdot\|_{(k)}$,

$$\|f\|_{(k)} := \|f\|_\infty + \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_\infty + \dots + \sum_{h \leq k} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_1^h \partial x_2^k} \right\|_\infty$$

Abusando de la notación podemos interpretar a $C_0(K)$ como la familia de funciones continuas en D , nulas en $D \setminus K$, o bien, nulas en $R^2 \setminus K$. Entonces, $C_0(K) \subset C_0(\bar{D})$ es un subespacio cerrado de $C_0(\bar{D})$. Es claro ahora el significado de la proposición:

$$\sigma \text{ es 1-1 de } C_0(K) \text{ en } C^2(K),$$

pues en $D'(R^2)$ vale $\Delta\sigma\phi = \phi$.

Además σ define una transformación cerrada: en efecto, si $\phi_n \rightarrow \phi$ en $C_0(K)$ y $\sigma\phi_n \rightarrow v$ en $C^2(K)$ entonces $\sigma\phi_n \rightarrow \sigma\phi$ en $D'(D)$ y por tanto $v = \sigma\phi$. Aplicando el teorema del gráfico cerrado vemos que σ es acotada.

Probaremos enseguida que:

$$(9) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma\phi) = -\frac{1}{\pi} v p \frac{x_1 x_2}{|x|^4} * \phi.$$

Supuesto esto tenemos, por ser σ acotada de $C_0(K)$ en $C^2(K)$, que

$$(10) \quad \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma\phi) \right\|_{\infty|K} = \left\| v p \frac{x_1 x_2}{|x|^4} * \phi \right\|_{\infty|K} \leq C \|\phi\|_{\infty|K}.$$

Para una sucesión de funciones $0 \leq \psi_n \in C_0^\infty(H)$, $\|\psi_n\|_\infty = 1$, tal que $\psi_n \uparrow \chi_H$ donde χ_H es la función característica de un cuadrado $H := (0, \delta) \times (0, \delta) \subset K$, vale (T. de Fatou)

$$\left(v p \frac{x_1 x_2}{|x|^4} * \psi_n \right)(0) \rightarrow \infty. \text{ Pero por (10):}$$

$$\left(v p \frac{x_1 x_2}{|x|^4} * \psi_n \right)(0) \leq \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma\psi_n) \right\|_{\infty|K} \leq C < \infty,$$

contradicción.

Llegamos así a la

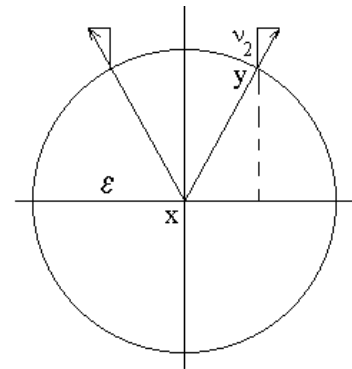
PROPOSICIÓN 1. *i) $C(D) \cap L^\infty(D) \not\subset \Delta(C^2(D))$,*

ii) $\sigma(C_0(K)) \not\subset C^2(D)$.

0.2.3. Derivadas segundas de $E(x)$.

DEMOSTRACIÓN DE (9). Sea $\phi \in C_0^\infty(R^2)$. Entonces, $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma\phi) =$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{1}{2\pi} \int (\log|x-y|) \phi(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \frac{\partial \phi}{\partial y_2}(y) dy =$$



$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \phi(y) \right) - \phi(y) \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \right) \right\} dy. \text{ Recurriendo a la fórmula}$$

de la divergencia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (\sigma\phi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi} \int_{|x-y|=\varepsilon} \phi(y) \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \nu_2 ds + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \phi(y) 2 \frac{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{|x-y|^4} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi} \int_{|x-y|=\varepsilon} (\phi(y) - \phi(x)) \frac{x_1 - y_1}{\varepsilon^2} \nu_2 ds + \\ &\frac{1}{\pi} \left(-vp \frac{x_1 x_2}{|x|^4} * \phi \right). \end{aligned}$$

La última igualdad debido a que $\int_{|x-y|=\varepsilon} (x_1 - y_1) \nu_2 ds = 0$, (ver figura). Como el último límite es cero, obtenemos (9) y

$$(11) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\log|x|}{2\pi} \right) = \frac{-1}{\pi} vp \frac{x_1 x_2}{|x|^4}$$

en el espacio de las distribuciones $D'(R^2)$, qed.

0.2.4. Más sobre las derivadas segundas de $E(x)$. Queremos probar ahora que en $D'(R^2)$ vale:

$$(12) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\log|x|}{2\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} vp \frac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^4} + \frac{\delta}{2}.$$

En efecto, como antes $\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{1}{2\pi} \log|x| \right] * \phi = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{1}{2\pi} \log|x| * \phi \right) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma\phi) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \frac{\partial \phi}{\partial y_1}(y) dy = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \phi(y) \right) - \phi(y) \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \right) \right\} dy &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi} \int_{|x-y|=\varepsilon} \phi(y) \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \nu_1 ds + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \phi(y) \frac{|x-y|^2 - 2(x_1 - y_1)^2}{|x-y|^4} dy = \\
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi} \int_{|x-y|=\varepsilon} (\phi(y) - \phi(x)) \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \nu_1 ds - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{2\pi} \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \nu_1 ds + \nu p \frac{|x|^2 - 2x_1^2}{2\pi|x|^4} * \phi = \\
&= 0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{2\pi \varepsilon} \int_{|x-y|=\varepsilon} \nu_1^2 ds + \nu p \frac{x_2^2 - x_1^2}{2\pi|x|^4} * \phi = \phi(x)/2 + \nu p \frac{x_2^2 - x_1^2}{2\pi|x|^4} * \phi = \\
&= \left[\frac{\delta}{2} + \nu p \frac{x_2^2 - x_1^2}{2\pi|x|^4} \right] * \phi, \quad \text{QED.}
\end{aligned}$$

En forma completamente análoga se obtiene también

$$(13) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\log|x|}{2\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} \nu p \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^4} + \frac{\delta}{2}.$$

Sumando (12) y (13) obtenemos

$$(13') \quad \Delta \left(\frac{\log|x|}{2\pi} \right) = \delta \quad \text{en } D'(R^2)$$

0.2.5. Acción de σ sobre funciones Hölder continuas.

DEFINICIÓN 1. Diremos que $f \in C^{0,\alpha}(D)$ ($\alpha \in (0,1]$) si existe una constante M tal que para todo x, y de la región D vale $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$.

En palabras, f es Hölder continua de orden α en D . El teorema siguiente mejora al T. 1, §0.2.1.

TEOREMA 1 (Lema de H. Weyl). Sea f_1 nula en $R^2 \setminus D$ y Hölder continua de orden α en D , una región acotada. Entonces $u = \sigma(f_1)$ es una función con primeras y segundas derivadas continuas en D .

DEMOSTRACIÓN. Observemos en primer lugar que f_1 es una función acotada en R^2 . Sea ahora $\Phi \in C^\infty(D)$ con soporte en B , un círculo abierto tal que $K = \bar{B} \subset D$.

Sea $x \in B$. Por el T. 1, §0.2.1, sabemos que $\sigma(\Phi)$ tiene segundas derivadas continuas. Veamos qué ocurre con estas derivadas.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma(\Phi)}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \int \frac{\partial s}{\partial x_i}(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(y) dy = \int_K s_{x_i}(x, y) \frac{\partial}{\partial y_j}(\Phi(y) - \Phi(x)) dy = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{K \cap \{|x-y| \geq \varepsilon\}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j}(s_{x_i}(x, y)[\Phi(y) - \Phi(x)]) - s_{x_i, y_j}[\Phi(y) - \Phi(x)] \right\} dy = \text{(cf. (11), (12), (13))} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{K \cap \{|x-y| \geq \varepsilon\}} \frac{\partial}{\partial y_j}(s_{x_i}(x, y)[\Phi(y) - \Phi(x)]) dy - \int_K s_{x_i, y_j}(x, y) [\Phi(y) - \Phi(x)] dy = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial(K \cap \{|x-y| \geq \varepsilon\})} s_{x_i}(x, y) [\Phi(y) - \Phi(x)] \bar{n}_j ds(y) - \int_K s_{x_i, y_j}(x, y) [\Phi(y) - \Phi(x)] dy = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{|x-y|=\varepsilon} s_{x_i}(x, y) (\Phi(y) - \Phi(x)) \nu_j ds - \int_{\partial K} \Phi(x) s_{x_i}(x, y) \bar{n}_j ds - \int_K s_{x_i, y_j}(x, y) [\Phi(y) - \Phi(x)] dy
\end{aligned}$$

El límite es igual a cero (cf. (7)). Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma(\Phi)}{\partial x_i \partial x_j} &= \int \frac{\partial s}{\partial x_i}(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(y) dy = - \int_{\partial K} \Phi(x) s_{x_i}(x, y) \bar{n}_j ds - \int_K s_{x_i, y_j}(x, y) [\Phi(y) - \Phi(x)] dy, \\
(14) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma(\Phi)) &= \Phi(x).F(x) + \int_K s_{x_i, y_j}(x, y) [\Phi(x) - \Phi(y)] dy, \quad F \in C^\infty(R^2 \setminus \partial K).
\end{aligned}$$

Sea $f \in C^{0, \alpha}(D)$, f con soporte en B y $\phi_\varepsilon(x) = \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\varepsilon^2}$ donde $\phi \geq 0$, $\phi \in C_0^\infty(B_1)$, $\int \phi(x) dx = 1$, $B_1 = \{x : |x| < 1\}$. Entonces, $\Phi_\varepsilon(x) := (f * \phi_\varepsilon)(x)$ satisface una condición de Hölder α , uniformemente en ε .

Aplicando la fórmula (14) a Φ_ε para $\varepsilon < \varepsilon_0$ vale,

$$(15) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma(\Phi_\varepsilon)) = \Phi_\varepsilon(x).F(x) + \int_K s_{x_i, y_j}(x, y) [\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(y)] dy$$

Pasando al límite para $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos, en el sentido de las distribuciones,

$$(16) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma(f)) = f(x).F(x) + \int_K s_{x_i, y_j}(x, y) [f(x) - f(y)] dy.$$

En efecto, $\Phi_\varepsilon(x) \rightarrow f(x)$ en B y el integrando en (15) define una familia de funciones que converge puntualmente y en forma dominada pues, independientemente de ε , se tiene que el módulo del integrando es $\leq \frac{M_0|x-y|^\alpha}{|x-y|^2}$.

La función límite $G(x) := \int_K s_{x_i, y_j}(x, y) [f(x) - f(y)] dy$ es continua en B . Aceptando esto por un momento concluimos que el segundo miembro de (16) es la derivada de $\sigma(f)$ respecto de x_i, x_j en el sentido ordinario. Luego, $\sigma(f)$ es dos veces continuamente diferenciable en B .

Una función f_1 que verifica las hipótesis del teorema se puede descomponer en la forma: $f_1 = h + f$, $f \in C^{0,\alpha}(D)$, f con soporte en B e igual a f_1 en un 2ε -entorno de un punto dado x_0 , $x_0 \in D$. Entonces $\sigma f_1 = \sigma h + \sigma f$. De lo demostrado anteriormente sigue el teorema pues $\sigma h \in C^\infty$ en un ε -entorno de x_0 .

Para demostrar que G es una función continua basta probar que es continua en $x_0 \in B$.

De $G(x) = \int_K s_{x_i, y_j}(x, y) [f(x) - f(y)] dy$ obtenemos con $c = (-1)^{\delta_{i,j}}$,

$$(17) \quad G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_K [f(x) - f(y)] \left\{ c \frac{2(x_i - y_i)(x_j - y_j) - \delta_{i,j}|x-y|^2}{|x-y|^4} \right\} dy$$

con $|\{\dots\}| \leq 3|x-y|^{-2}$. O sea, $|s_{x_i, y_j}| \leq \frac{3}{|x-y|^2}$. Luego,

$$G(x) - G(x_0) = \int_{K \cap \{|y-x_0| \geq 2\varepsilon\}} \left\{ s_{x_i, y_j}(x, y) [f(x) - f(y)] - s_{x_i, y_j}(x_0, y) [f(x_0) - f(y)] \right\} dy + \\ + \int_{|y-x_0| < 2\varepsilon} s_{x_i, y_j}(x, y) [f(x) - f(y)] dy - \int_{|y-x_0| < 2\varepsilon} s_{x_i, y_j}(x_0, y) [f(x_0) - f(y)] dy = I_1 + I_2 + I_3.$$

Debemos estimar las I_h . En primer lugar tenemos: $I_1 \rightarrow 0$ para ε fijo y $x \rightarrow x_0$.

Si $|x - x_0| < \varepsilon$ entonces $|I_2| \leq 3M \int_{|y-x| < 3\varepsilon} |x - y|^{\alpha-2} dy = 2\pi M \int_0^{3\varepsilon} \frac{dr}{r^{1-\alpha}} = \frac{2\pi M}{\alpha} \varepsilon^\alpha$. Por tanto,

$|I_3| \leq \frac{2\pi M}{\alpha} \varepsilon^\alpha$. De todo esto concluimos que $G(x) \rightarrow G(x_0)$ para $x \rightarrow x_0$, QED.

DEFINICIÓN 2. Sea A un abierto acotado. $f \in Lip_{loc}(A)$ significa que f es una función acotada definida en A tal que para cada $x \in A$ existe un entorno circular $B = B^x$ tal que $x \in B \subset \bar{B} \subset A$ y donde f satisface una condición de Hölder α : si $z, y \in B^x$ entonces $|f(z) - f(y)| \leq C|z - y|^\alpha$ donde $C = C(x) < \infty$, $\alpha = \alpha(x)$, $0 < \alpha \leq 1$. $Lip_+(A)$ designará a la familia de funciones $f \in Lip_{loc}(A)$ tales que $inf(f) > 0$.

COROLARIO 1. Si D es una región de Jordan y $f \in Lip_{loc}(D)$ entonces $\sigma f \in C^2(D)$.

0.3. La familia de funciones $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\gamma(D)$. Sigue de $f \in Lip_{loc}(A)$ que dado x para todo y puede encontrarse un $M(x) < \infty$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M(x)|x - y|^{\alpha(x)}$. Obsérvese que si existe γ tal que para todo x , $0 < \gamma \leq \alpha(x)$, esta desigualdad vale con γ en lugar de α pero con otra M .

DEFINICIÓN 3. Sea D una región de Jordan. Diremos que $f \in \mathcal{L}_\gamma(D)$, $0 < \gamma \leq 1$, si $f \in Lip_+(D)$ y para todo $x, y \in D$ y para cierta $M_0(x)$ finita, absolutamente integrable en D , vale $|f(x) - f(y)| \leq M_0(x)|x - y|^\gamma$.

\mathcal{L}_γ es una variedad aditiva tal que para cada f existe $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$ tal que $\forall x: \varepsilon \leq f(x) \leq 1/\varepsilon$. Obviamente, $\{constantes\} \subset C^{0,\gamma}(D) \subset \mathcal{L}_\gamma(D)$. Otro ejemplo: la función $g(t) = \sqrt{t}$, $t \in I = (0,1)$ verifica $|g(u) - g(v)| \leq u^{-1/2}|u - v|$; por tanto, $f(x_1, x_2) = 1 + g(x_1) \in \mathcal{L}_1(I \times I)$ con $M(x_1, x_2) = 1/\sqrt{x_1}$.

0.3.1. El operador de Sturm-Liouville $(-\frac{1}{k(x)})\Delta_x$ en una región de Jordan D .

Supondremos en la definición del operador que para cierto α , $k(x) \in \mathcal{L} = \mathcal{L}_\alpha(D)$.

DEFINICIÓN 4. Escribiremos $\mathcal{S}(D) := C_0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ donde $C_0(\bar{D}) := \{v \in C(\bar{D}): y \in \partial D \Rightarrow v(y) = 0\}$ y también $\mathcal{U}(D) := C(\bar{D}) \cap C^2(D)$. Por *solución clásica*

del problema de Dirichlet: $\Delta u + \lambda k(x)u = 0, u|_{\partial D} = 0$, entenderemos una función en $\mathcal{S}(D)$ que verifica en D : $-\left(\frac{1}{k}\Delta\right)u = \lambda u$.

Demostraremos en el §1.9 el siguiente teorema sobre el sistema ortonormal de autofunciones del operador y sus desarrollos en serie.

TEOREMA 1. Sea $k(x) \in Lip_+(D)$, D región de Jordan. El problema de contorno $\Delta u + \lambda k u = 0, u|_{\partial D} = 0$, posee infinitos autovalores reales de multiplicidad finita que pueden ordenarse según su magnitud creciente: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_n \rightarrow \infty$. Las correspondientes autofunciones $\{\phi_j\}$, soluciones de $\frac{-1}{k}\Delta\phi_j = \lambda_j\phi_j$, reales y normalizadas, $\int_D \phi_i(x)\phi_j(x)k(x)dx = \delta_{ij}$, forman un sistema ortonormal completo respecto de la medida $k(x)dx$ en D .

Toda función $u \in \mathcal{S}(D)$ tal que $\Delta u \in L^\infty(D)$ admite un desarrollo absoluta y uniformemente convergente, en \bar{D} : $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$, donde $c_n = c_n(u) = \int_D u \phi_n k dx$.

0.3.2. La dimensión de Minkowski (dimensión box) del contorno J de una región de Jordan D . Sea $V(\delta) = \{x \in R^2: \exists y \in J: |x - y| \leq \delta\}$. Entonces, la dimensión box (de Minkowski) superior de $J = \partial D$ se define como $\mathbf{d} \equiv \overline{dim}_B J := 2 - \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\log|V(\delta)|}{\log\delta}$. Si $dim_H(J)$ designa a la dimensión Hausdorff de J se tiene $2 \geq \mathbf{d} = \overline{dim}_B J \geq dim_H(J) \geq 1$, ([F]). Luego, si $2 > \mathbf{d}$ entonces la medida plana de J es nula, $|J| = 0$.

Uno de nuestros objetivos es probar el siguiente resultado, (cf. [La]).

TEOREMA 1. Sea D una región de Jordan y $k(x) \in \mathcal{I} = \mathcal{I}_\alpha(D)$. Si el contorno J tiene dimensión de Minkowski < 2 entonces los autovalores del problema $\Delta u + \lambda k(x)u = 0, u \in \mathcal{S}(D)$, verifican $\lambda_n \int_D k(x)dx \sim 4\pi n$.

TEOREMA 2. Para D una región de Jordan parametrizable vale la tesis del Teorema 1.

En efecto, en este caso $\mathbf{d} = 1$.

0.4. Algunos teoremas de máximo y mínimo. Sean $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ y $f(x)$ funciones continuas reales en \bar{D} , D es aquí un dominio (abierto conexo) acotado de \mathbb{R}^2 . Sea A el operador definido sobre $\mathcal{U}(D)$ por

$$Au := \sum_{i,k=1}^2 a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^2 a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad x = (x_1, x_2).$$

Supongamos A de tipo elíptico, es decir, para todo $x \in D$:

$$\sum_{i,k=1}^2 a_{ik}(x) h_i h_k > 0 \text{ si } h = (h_1, h_2) \neq 0.$$

Para este operador vale el (cf. [He]):

LEMA de Hopf. Sea $u \in \mathcal{U}(D)$, $Au \geq 0$ en D . Si $\exists x_0 \in D$ tal que $u(x) \leq u(x_0)$ para todo $x \in \bar{D}$ entonces, $u(x) \equiv u(x_0)$ en \bar{D} .

Sea $\tilde{A} := A + a$, $a \leq 0$, pero del dominio D supongamos que su contorno satisface la siguiente propiedad: si $x_0 \in \partial D$ entonces existe una esfera $B \subset D$ tal que $x_0 \in \partial B$. Vale entonces el

Segundo lema de Hopf. Sean $u \neq \text{constante}$, $u \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D) (\subset \mathcal{U}(D))$, $\tilde{A}u \geq 0$ en D . Supongamos que en $x_0 \in \partial S$, u tenga un máximo > 0 . Entonces, $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$, donde ν designa a la normal interior a la esfera B en ese punto.

0.4.1. Son corolarios del Lema de Hopf los siguientes teoremas.

TEOREMA 1 (del máximo). Sea $a \leq 0$. Si $f \leq 0$ en \bar{D} entonces toda solución no constante $u(x)$ de $\tilde{A} := Au + au = f$ que tenga un mínimo < 0 en \bar{D} lo alcanza en ∂D , y no en D . Si $f \geq 0$ en \bar{D} entonces toda solución no constante $u(x)$ de $\tilde{A} := Au + au = f$ que tenga un máximo > 0 en \bar{D} lo alcanza en ∂D , y no en D .

TEOREMA 2 (de unicidad y continuidad). El problema de contorno $Au + au = f$ en D , $a \leq 0$, $u = \phi$ en ∂D , $\phi \in C(\partial D)$, tiene a lo sumo una solución $u(x) \in \mathcal{U}(D)$. Si las $u_i(x)$, $i = 1, 2$, son soluciones con $u_i = \phi_i$ en ∂D entonces $\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \geq \|u_1 - u_2\|_\infty$.

0.4.2. Principio general de máximo (para el Laplaciano). Veamos ahora una útil generalización. En este trabajo usamos la expresión $\Delta u + c(x)u = f$ en el sentido de las distribuciones $D'(D)$. Nótese sin embargo que lo hacemos *siempre junto a una hipótesis que asegura que la distribución u es función*, $u = u(x) \in L^1$, lo mismo que $c(x)$ y son tales que $c(x)u(x)$ está en cada caso bien definida y es función.

TEOREMA 1. Sea D un dominio acotado, $L^1(D) \ni c(x) \leq 0$ y sea $u \in C(\bar{D})$ tal que $\Delta u + c(x)u = f(x)$ en $D'(D)$ donde $f \in L^1(D)$.

- a) Si $f(x) \geq 0$ y $M = \max_{\bar{D}} u(x) > 0$ entonces $M = m = \max_{\partial D} u(x)$.
- b) Si $f(x) \leq 0$ y $\min_{\bar{D}} u(x) < 0$ entonces $\min_{\partial D} u(x) = \min_{\bar{D}} u(x)$.
- c) Si $c(x) \equiv 0$ y $f(x) \geq 0$ entonces $\max_{\bar{D}} u(x) = \max_{\partial D} u(x)$.
- d) Si $c(x) \equiv 0$ y $f(x) \leq 0$ entonces $\min_{\bar{D}} u(x) = \min_{\partial D} u(x)$.

DEMOSTRACIÓN. a) Supongamos que $M = u(x_0) > m$. Sea \mathcal{D} la componente conexa de $\{x: u(x) > 0\}$ que contiene a x_0 . Entonces, $\partial \mathcal{D} \subset \{u = 0\} \cup \partial D$. Definamos, para $v \in L^1(\mathcal{D})$,

$$v^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{D}} v(y) \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = \int_{\mathcal{D}} v(y) \varphi_\varepsilon(x-y) dy, \quad 0 \leq \varphi \in C_0^\infty(|x| < 1) \quad \text{con} \\ \int \varphi dx = 1. \text{ Luego, } v^\varepsilon \in C^\infty.$$

Sea $\mathcal{D}_{\varepsilon_0} = \{x \in \mathcal{D}: d(x, \partial \mathcal{D}) > \varepsilon_0\}$ y $0 < \varepsilon \ll \varepsilon_0$. Allí: $(\Delta u)^\varepsilon = -(cu)^\varepsilon + f^\varepsilon \geq 0$. Si $x_0, x \in \mathcal{D}_{\varepsilon_0}$ tenemos:

$$F(x) := (|c|u + f)^\varepsilon(x) = (\Delta u)^\varepsilon(x) = \langle \Delta u, \varphi_\varepsilon(x-\cdot) \rangle = \langle u(y), \Delta_y \varphi_\varepsilon(x-y) \rangle = \langle u, \Delta_x \varphi_\varepsilon(x-\cdot) \rangle \\ = \int u(y) \Delta_x \varphi_\varepsilon(x-y) dy = \Delta_x \int u(y) \varphi_\varepsilon(x-y) dy = \Delta_x (u^\varepsilon).$$

O sea, $\Delta(u^\varepsilon) = F \geq 0$ en $\mathcal{D}_{\varepsilon_0}$. Del teorema del máximo se deduce entonces que $u^\varepsilon(x_0) \leq \max_{x \in \partial \mathcal{D}_{\varepsilon_0}} u^\varepsilon(x)$. De esto sigue que $M \leq \sup(m, 0)$, una contradicción.

b) sigue de a) aplicada a $-u$. c) resulta sumando a u una constante adecuada, QED.

0.5. Funciones de varias variables complejas. Sean G_1 y G_2 dos conjuntos abiertos del plano complejo y $F(z, w)$ definida en $G_1 \times G_2$. Diremos que $F(z, w)$, a valores

complejos, es holomorfa en $G_1 \times G_2$ si para cada valor $z \in G_1$ es holomorfa con respecto a $w \in G_2$ y para cada valor $w \in G_2$, F es holomorfa con respecto a $z \in G_1$. Una función holomorfa en $G_1 \times G_2$ es continua allí (teorema de Hartog), y las derivadas $\frac{\partial^{m+n} F}{\partial z^m \partial w^n}(z, w)$ existen y son holomorfas en $G_1 \times G_2$.

Condición necesaria y suficiente para que $F(z, w)$ sea holomorfa en algún entorno bicircular de (z_0, w_0) , o dicho más brevemente, para que sea holomorfa en (z_0, w_0) , es que F admita un desarrollo de la forma $F(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)(w - w_0)^n$ uniformemente convergente en un entorno abierto bicircular $K_1 \times K_2$ con coeficientes $a_n(z)$ holomorfos en K_1 .

TEOREMA 1 (de preparación de Weierstrass) ([SZ]). Sea $F(z, w)$ una función holomorfa, no idénticamente nula, en el entorno bicircular $D_1 \times D_2$ alrededor del punto $(z_0, w_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Sea $F(z_0, w_0) = 0$. Entonces en un cierto entorno $K_1 \times K_2$ de (z_0, w_0) la función es de la forma

$$F(z, w) = (z - z_0)^m P(z, w) F_1(z, w)$$

donde $F_1(z, w) \neq 0$ en $K_1 \times K_2$ y es holomorfa allí, m es un entero no negativo y P es un polinomio en w de grado $k \geq 0$ para todo $z \in K_1$ de la forma

$$P(z, w) = (w - w_0)^k + A_1(z)(w - w_0)^{k-1} + \dots + A_k(z)$$

donde $A_j(z)$ es holomorfa en K_1 y $A_j(z_0) = 0$ para todo j , $j = 1, \dots, k$.

Si $F(z_0, w) \neq 0$ en K_2 , esto es, si $m = 0$, entonces

$$F(z, w) = P(z, w) F_1(z, w)$$

con $k > 0$, k = la multiplicidad de la raíz $w = w_0$ de $F(z_0, w)$. En este caso podemos escribir $P(z, w)$ también en la forma $P(z, w) = \prod_{j=1}^k (w - w_j(z))$ donde $w_j(z)$ son funciones continuas de z , verificando $w_j(z_0) = w_0$.

Más aún, son de la forma $w_j(z) = \tau_j((z - z_0)^{1/q})$, (serie de Puiseux, cf. [H]), para cierto q entero positivo, donde las $\tau_j(v)$ son analíticas en un entorno de $v = 0$.

LEMA 1. Sea $\phi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j + ib_j)z^j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j + i \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^j$ una función analítica en un entorno de $z = 0$, donde los a_j y b_j son reales. Entonces vale la alternativa:

- a) $\phi(x)$ es real para $0 < x < \delta$, δ bastante pequeño, o bien
- b) $Im(\phi(x)) \neq 0$ para todo $x > 0$, x bastante pequeño.

DEMOSTRACIÓN. Si no pasa b), existe una sucesión $x_i \rightarrow 0$ tal que $Im(\phi(x_i)) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_i^j = 0$. Pero entonces $b_j = 0$ para todo j , o sea vale a), QED

COROLARIO 1. Sea $I = \{x: 0 < x < \varepsilon\}$, $x^{\frac{1}{q}}$ continua en I . Si ε es bastante pequeño entonces en el teorema anterior $\tau_i(x^{1/q})$ es una función a valores reales en I , o bien no toma valores reales allí.

0.6. Sobre series de Dirichlet, ([Wi]). Si $f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(-\lambda_k s)$, $s = \sigma + it$, $\sigma > \sigma_c$,

es analítica en el infinito entonces $f(s)$ es igual a una constante. $f(s)$ no tiene necesariamente una singularidad sobre la abscisa de convergencia. Sin embargo vale el

TEOREMA 1 (Landau). Si $a_k > 0$ para todo k entonces $f(s)$ no es analítica en $s = \sigma_c$.

0.6.1. Sobre la transformada de Mellin-Stieltjes, ([I], [Ko], [C]). Sea $\alpha(x)$ una

función monótona, no negativa, no decreciente en $(1, \infty)$ y sea $f(s) = \int_{1+}^{\infty} x^{-s} d\alpha(x)$.

TEOREMA 1 (Ikehara). Si para $Re(s) > 1$ la integral converge y para $A = \text{constante}$

$g(s) := f(s) - \frac{A}{s-1}$ tiene una extensión continua a $Re s \geq 1$ entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{x} = A$.

0.7. Funcionales bilineales en un espacio de Hilbert. El siguiente teorema es un caso particular del teorema de representación de Lax-Milgram.

TEOREMA 1. Sea H un espacio de Hilbert y sea $b(.,.): H \times H \rightarrow Q$ (= cuerpo de escalares de H , $Q = C$ ó R) una aplicación que verifica:

$$i) \quad b(u_1 + u_2, v) = b(u_1, v) + b(u_2, v), \quad b(u, v_1 + v_2) = b(u, v_1) + b(u, v_2);$$

ii) $b(cu, v) = cb(u, v) = b(u, \bar{c}v)$ para $c \in Q$;

iii) $|b(u, v)| \leq K \|u\| \|v\|$, $|b(u, u)| \geq k \|u\|^2$ para ciertos $K, k > 0$.

Entonces, para todo $s \in H$ existe un (único) $q \in H$, $q = q(s)$, tal que $b(u, s) = (u, q)$ para todo $u \in H$. Además $q = q(s)$ es un operador de H sobre H , lineal y acotado, lo mismo que q^{-1} .

DEMOSTRACIÓN. Las hipótesis implican que $b(\cdot, s)$ es un operador lineal y acotado. Luego por el teorema de Riesz-Fischer existe $q(s)$ tal que $b(\cdot, s) = (\cdot, q(s))$. Por iii), $b(\cdot, s) = 0 \Rightarrow s = 0$, o sea q es uno a uno. Por i) e ii) es lineal y es continuo pues vale

$$\|q(s)\|^2 = (q(s), q(s)) = b(q(s), s) \leq \text{por iii)} \leq K \|q(s)\| \|s\|.$$

Por iii) $k \|s\|^2 \leq |b(s, s)| = |(s, q(s))| \leq \|s\| \|q(s)\|$,

de donde se deduce que q tiene rango cerrado y q^{-1} es continuo.

Sea S el rango de q , $S := \{q(s) : s \in H\}$. Sea $z \perp S$. Entonces $0 = (z, q(s)) = b(z, s)$ para todo s . Para $s = z$ sigue por iii) que $z = 0$. Luego, $S = H$. QED.

0.8. Valores propios. (1) de §0.1 vale aun para operadores K_1, K_2 simétricos completamente continuos y en la siguiente forma $\chi_{(p+q-1)+} \leq \chi'_{p+} + \chi''_{q+}$. Por tanto, $|\chi_{p+} - \chi'_{p+}| \leq \|K_2\|$. Si además $K_2 \geq 0$ entonces $\chi_{p+} \geq \chi'_{p+}$, (cf. [RN], §95).

0.9. Una desigualdad numérica. Sean $a, b > 0$ y $0 < \alpha \leq \beta$. Entonces

$$\frac{(a+b)^\alpha}{a^\alpha b^\beta} \leq 2^\alpha (a^{-\beta} + b^{-\beta}).$$

En efecto, si $a < b$ tenemos $\frac{(a+b)^\alpha}{a^\alpha b^\beta} = \frac{(1+a/b)^\alpha}{a^\beta} \left(\frac{a}{b}\right)^{\beta-\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{a^\beta}$, y si $b \leq a$,

$$\frac{(a+b)^\alpha}{a^\alpha b^\beta} = \frac{(1+b/a)^\alpha}{b^\beta} \leq \frac{2^\alpha}{b^\beta}. \text{ En consecuencia, } \frac{1}{a^\alpha b^\beta} \leq \frac{2^\alpha}{(a+b)^\alpha} \left(\frac{1}{a^\beta} + \frac{1}{b^\beta}\right), \quad \text{QED.}$$

0.10. TEOREMA (Hardy y Littlewood, [Ti]). Sean $0 \leq f(x)$ no decreciente y $0 < \beta < \alpha > 1$. Si $\int_0^\infty \frac{f(y)}{(x+y)^\alpha} dy \sim \frac{c}{x^\beta}$ entonces (y sólo entonces)

$$f(x) \sim \frac{c\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-\beta-1} \text{ para } x \rightarrow \infty.$$

CAPÍTULO 1

Se sugiere al lector recurrir al Capítulo 0 en la primera búsqueda de referencias sobre resultados utilizados en el texto.

1.0. El núcleo de Green para el Laplaciano. Para probar el teorema citado en **0.3.1** necesitamos algunos resultados correspondientes al caso $k(x) \equiv 1$. Sea D una región plana de Jordan de contorno J . Nos proponemos estudiar el núcleo de Green del *problema de Dirichlet*:

$$(1) \quad \Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{en } D, \quad u = 0 \quad \text{en } \partial D.$$

La *función (núcleo) de Green*, $G(p, q)$, se construye utilizando la solución (elemental) fundamental del operador Δ (cf. **0.2**) y el *teorema de existencia y unicidad de la solución armónica*: si g es una función continua definida sobre J entonces existe una y sólo una función armónica en D continua en \bar{D} que coincide con g sobre J .

DEFINICIÓN 1. Sean $p \in D$, $q \in \bar{D}$, $p \neq q$.

$$(2) \quad G(p, q) := s(p, q) - H(p, q),$$

donde $s(p, q) := \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|q - p|}$ y $H(p, \cdot)$ es la función armónica en D que coincide con

$s(p, \cdot)$ en ∂D : $\Delta_q H(p, q) = 0$ para todo $q \in D$, $H(p, r) = s(p, r)$ para todo $r \in \partial D$.

Es decir, $G(p, q)$ está definida, por el momento, en $D \times \bar{D}$. Si $p_n \rightarrow p$ en D entonces $H(p_n, q)$ converge uniformemente a $H(p, q)$, $q \in \bar{D}$, (cf. **0.4.1**). Una consecuencia de esto es que $H(p, q)$ es continua en $D \times \bar{D}$. Por tanto $G(p, q)$ es continua en $(p, q) \in D \times \bar{D}$ siempre que $p \neq q$. En particular, $G(p, q)$ es medible en $D \times \bar{D}$. Convendremos en definir $G(p, p) = +\infty$ si $p \in D$.

Si $E(x) = -s(0, x)$ entonces $\Delta E = \delta (= \delta_0)$ en $D'(R^2)$ y para toda distribución T de soporte compacto vale $E * (\Delta T) = T = \Delta(E * T)$, (cf. [H], [Tr]).

El próximo teorema enuncia propiedades del núcleo (función) de Green.

TEOREMA 1. *i)* Sea D de Jordan de contorno J . Sean $u \in \mathcal{S}(D)$, $\phi \in L^\infty(D)$ y

$$(3) \quad \Delta u = \phi \quad \text{en } D.$$

Entonces, si *definimos* el operador G por $(Gf)(p) := \int G(p, q)f(q)dq$, vale

$$(4) \quad u(p) = -\int_D G(p, q)\phi(q) dq = (G(-\Delta u))(p), \quad p \in D.$$

O sea, $G \circ -\Delta = I$ en $u \in \mathcal{S}(D)$ cuando $\Delta u \in L^\infty$.

ii) Si $p, q \in D$, $p \neq q$, entonces

$$G(p, q) = G(q, p),$$

iii) Sea $\phi \in L^\infty(D)$ y $p \in \bar{D}$. Si

$$u(p) := -\int_D G(p, q)\phi(q) dq = -G\phi(p)$$

entonces $u \in C(\bar{D})$, $u=0$ en ∂D y para $i=1,2$,

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial p_i} = -\int_D \frac{\partial G}{\partial p_i}(p, q)\phi(q) dq \in C(D).$$

Es decir, $-G: L^\infty(D) \rightarrow C_0(\bar{D}) \cap C^1(D)$.

iv) Sea $\phi \in C^1(D) \cap L^\infty(D)$. Entonces la función $u(p)$ definida por $u = -G\phi$, pertenece a $\mathcal{S}(D)$ y verifica $\Delta u = \phi$. Es decir, resuelve un problema de Dirichlet:

$$\phi \in C^1 \cap L^\infty \implies -G\phi \in \mathcal{S}, (-\Delta \circ G)\phi = I\phi = \phi.$$

v) son equivalentes las siguientes proposiciones ($\lambda \in \mathbf{C}$):

$$a) \quad \Phi \in L^2(D), \quad \Phi = \lambda G\Phi,$$

$$b) \quad \Phi \in \mathcal{S}(D), \quad -\Delta\Phi = \lambda\Phi.$$

vi) Si M es el *diámetro* de D , $M := \sup\{|x - y|: x, y \in D\}$, entonces

$$0 \leq G(p, q) \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{M}{|p - q|}, \quad (p, q) \in D \times \bar{D},$$

$$vii) \quad \int_{\bar{D}} G^2(p, q) dq \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\{|q| < M\}} \log^2 \left(\frac{M}{|q|} \right) dq = C^2 < \infty, \quad p \in D,$$

$$viii) \quad \gamma^2 = \iint_{D \times \bar{D}} G^2(p, q) dp dq \leq C^2 |D| < \infty.$$

Obsérvese que el operador G , $(G\phi)(p) = \int_D G(p, q)\phi(q) dq$, es, según *i*), *iv*), el inverso

del operador diferencial $-\Delta$. Y además que no necesariamente $|D| = |\bar{D}|$ pues puede

ser que $|J| > 0$. A continuación demostraremos las propiedades *vi*)-*viii*) de $G(p, q)$ y luego mostraremos que *i*)-*iv*) \Rightarrow *v*).

DEMOSTRACIÓN DE *vi*)-*viii*). La no negatividad de G sigue del hecho que G es no negativa en el contorno de la región $D \setminus \bar{B}_\varepsilon(p)$ –donde ε es suficientemente pequeño– y es armónica en su interior. El principio de máximo aplicado a la función armónica $-H(p, \cdot)$ da lugar a la desigualdad uniforme:

$$(6) \quad -H(p, q) \leq \frac{1}{2\pi} \max_{r \in \partial D} \log|p-r| \leq \frac{1}{2\pi} \log M$$

de la cual sigue *vi*). Obviamente, *vi*) \Rightarrow *vii*) \Rightarrow *viii*) , qed.

DEMOSTRACIÓN DE *i*)-*iv*) \Rightarrow *v*). Supongamos que Φ verifica a). De *vii*) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz resulta $|\Phi| \leq |\lambda|C\|\Phi\|_2$. Luego, $\Phi \in L^\infty(D)$. De *iii*) sigue ahora que $\Phi \in C^1(D)$. Finalmente, de *iv*) se deduce b).

Recíprocamente, si vale b) podemos aplicar *i*) y obtenemos a), qed.

1.1. Resultados auxiliares. En esta sección y las siguientes veremos algunos resultados necesarios para la demostración de *i*)-*iv*). Aquí u designará a una función armónica (real) no constante en D , región de Jordan: $u = u(p)$, $p = (x, y) \in D$, ([Ke]).

DEFINICIÓN 1. Por un arco de curva C^n , n entero positivo, entenderemos una curva γ que admite una representación $\underline{f}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $0 < t < 1$, $x_i(t) \in C^n(0,1)$, tal que para todo $t \in (0,1)$, $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) \neq (0,0)$ y \underline{f} es un homeomorfismo (C^0) de $(0,1)$ sobre $\gamma = \underline{f}(0,1)$.

En palabras, γ es un arco de Jordan C^n .

DEFINICIÓN 2. De un conjunto conexo compacto Γ de R^2 se dirá que es una curva cerrada C^n si para todo $z=(x, y) \in \Gamma$ existe un entorno U_z tal que $\Gamma \cap U_z$ es un arco de curva C^n .

Luego, Γ es una curva de Jordan C^n . Γ admite un versor normal (n_1, n_2) en cada uno de sus puntos.

DEFINICIÓN 3. Diremos que un dominio D es *estándar regular* ($D \in ER$) si es un recinto de Jordan cuyo contorno es una curva C^1 (con tangente no nula en todo punto). Los dominios estándar regulares son *normales* (para el teorema de Gauss) pues valen en ellos los teoremas de Gauss, Green y Stokes. Vale que si a un dominio estándar D se le quita un número finito de círculos contenidos en D el dominio múltiplemente conexo que resta es normal.

NOTACION. Recordemos que $B_\varepsilon(p) = \{q: |p - q| < \varepsilon\} = S_\varepsilon \setminus \Sigma_\varepsilon = \bar{B}_\varepsilon \setminus \Sigma_\varepsilon$, $\Sigma_\varepsilon = \{q: |p - q| = \varepsilon\}$.

1.2. PLAN para la demostración de i) e ii). Supongamos $D \in ER$ (Def. 3).

Llamaremos $D_\eta := D \setminus S_\eta(p)$, $S_\eta \subset D$. Entonces,

$\int_D G(p, q) \phi(q) dq = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{D_\eta} (G(p, q) \Delta u(q) - u(q) \Delta_q G(p, q)) dq$. Luego si $r = |p - q|$, esto es

igual a (n normal exterior, $u \in C^2$):

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{D_\eta} (G(p, q) \Delta u(q) - u(q) \Delta_q G(p, q)) dq = \\
 & = \int_{\partial D} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma_q - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{r=\eta} \left(G \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial G}{\partial r} \right) d\sigma_q = \\
 & = \left[\int_J G \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_q - \int_J u \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma_q \right] + 0 + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{r=\eta} u \frac{\partial G}{\partial r} d\sigma_q = \left[\int_J - \int_J \right] - \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\eta} \int_{r=\eta} u(q) d\sigma_q = \\
 & = [\dots] - u(p) = \approx 0 - u(p) = -u(p).
 \end{aligned}$$

O sea, si $[\dots] = 0$ tendríamos *i*). Esto es, necesitamos

$$(\alpha) \int_J G \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_q = 0 \quad (\beta) \int_J u \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma_q = 0.$$

Veamos ahora *ii*). Para $p, q \in D$, $p \neq q$, sea $S = S_\eta(p) \cup S_\eta(q) \subset D$, donde las esferas $S_\eta(p), S_\eta(q)$, no tienen puntos en común. Sea $D_\eta = D \setminus S$. Aplicando el teorema de Green a las funciones $u(s) = G(p, s)$, $v(s) = G(q, s)$, armónicas en D_η , obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{D_\eta} (u\Delta v - v\Delta u) ds = \int_{\partial D_\eta} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \\
&= \int_J \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \int_{|s-q|=r=\eta} \left(v \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial v}{\partial r} \right) d\sigma_s + \int_{|s-p|=r=\eta} \left(v \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial v}{\partial r} \right) d\sigma_s.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
(2) \quad 0 &= \left[\int_J \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma \right] + \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(0 - \int_{|s-q|=r=\eta} u \frac{\partial v}{\partial r} d\sigma_s + \int_{|s-p|=r=\eta} v \frac{\partial u}{\partial r} d\sigma_s - 0 \right) = \\
&= \left[\int_J u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \int_J v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \right] + u(q) - v(p) = 0 + G(p, q) - G(q, p).
\end{aligned}$$

Aquí necesitamos que las dos integrales del corchete se anulen. Ambas son del tipo (β) .

NB. La región D del Teor. 1, §1.0, no es necesariamente ER ni puede asegurarse que $\frac{\partial G}{\partial n}$ exista en ∂D por lo que la argumentación precedente no es correcta en general. Sin embargo esta es válida en regiones aproximantes D_ε para las que son verdaderas las fórmulas de esta sección. Las construiremos a continuación verificando $D_\varepsilon \uparrow D$. Así podremos finalmente probar el teorema mencionado para D de Jordan arbitraria.

1.3. Nuevos resultados auxiliares. Sea u armónica en D , región de Jordan, tal que $u \neq cte$.

NOTACION. $X(u)$ denotará al conjunto (cerrado) de puntos de D donde se anula el gradiente de la función armónica u .

LEMA 1. El conjunto $u(X(u))$ es numerable.

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que u es localmente constante sobre $X(u)$, ($= \bar{X}(u)$ en D). Sea $p \in X(u)$. Podemos suponer que $p = (0,0)$, esto es, $\nabla u(0,0) = 0$. La función $F(x, y) = u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)$ es analítica (real) en un entorno $U \times U (\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ por lo que admite una extensión $\tilde{F}(z, w)$, obtenida extendiendo ambos sumandos, analítica en un entorno $V \times V (\subset \mathbb{C} \times \mathbb{C})$ del origen. Podemos suponer, disminuyendo el entorno si es necesario, que $u(x, y)$ tiene en $V \times V$ una extensión $\tilde{u}(z, w)$. Las extensiones mencionadas son únicas. Esto implica que $\tilde{F}(z, w) = \tilde{u}_z^2(z, w) + \tilde{u}_w^2(z, w)$.

El teorema de preparación de Weierstrass (§ 0.5) afirma entonces que \tilde{F} , en un entorno bicircular $W \times W \subset V \times V$, se anula solamente sobre el gráfico de un número finito (eventualmente 0) de funciones analíticas en $W \setminus \{0\}$, $\tau_j(z^{1/q})$, tales que las $\tau_j(v)$ son analíticas en W , nulas en $z = 0$ y posiblemente también sobre un entorno reducido Y de $w = 0$ en $\{0\} \times C$. Usando ahora el Corolario 1, § 0.5, obtenemos que para un entorno bicircular real de $(0,0)$, $U \times U (\subset R \times R)$ vale

$$X(u) \cap U \times U = \bigcup_{j=1}^k \{(x, \tau_j(x^{1/q}) : x \in U\} \cup \{(0, y) : y \in U\} \cup (0,0).$$

Si sobre $I = \{x : 0 < x \in U\}$, $(x, \tau_j(x^{1/q})) \in X(u)$ entonces $\nabla u(x, \tau_j(x^{1/q})) = 0$ y $\frac{d}{dx} u(x, \tau(x^{1/q}))$ es cero en I . Por la continuidad de u , $u(x, \tau(x^{1/q})) \equiv u(0,0)$ en I . De la misma manera, si para $y \in U$, $(0, y) \in X(u)$ entonces $u(0, y) \equiv u(0,0)$. Conclusión: u es localmente constante sobre $X(u)$, QED.

LEMA 2. Los conjuntos equipotenciales $J_\mu = \{p = (x, y) : u(p) = \mu\}$, $\mu \notin u(X(u))$, si no son vacíos, localmente son curvas C^m , cualquiera sea $m > 0$.

DEMOSTRACIÓN. En J_μ , $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| > 0$. Entonces, localmente se tiene $y = y(x) \in C^\infty$, o bien, $x = x(y) \in C^\infty$, QED.

Sea ahora $u(q)$ una función armónica no negativa en $D \setminus \{p\}$, $p \in D$, continua hasta $J = \partial D$ y nula allí, que tiende a $+\infty$ cuando $q \rightarrow p$. Por ejemplo, $u(q) = G(p, q)$. Si τ es un arco de Jordan (abierto) contenido en D tal que un extremo $r \in \partial D$ y el otro es p entonces $\{t : t = u(x), x \in \tau\} = (0, \infty)$ pero por el Lema 1,

$$\text{card}\{t : t = u(x), \nabla u(x) = 0\} \leq \aleph_0.$$

Definamos para $\varepsilon \notin u(X(u))$, $1 \gg \varepsilon > 0$,

$$D_\varepsilon = \{q : u(q) > \varepsilon\}, C_\varepsilon = \{q : 0 < u(q) < \varepsilon\}, J_\varepsilon = \{q : u(q) = \varepsilon\}.$$

Se deduce entonces que $\partial D_\varepsilon = J_\varepsilon \cup \{p\}$, $\partial C_\varepsilon = J_\varepsilon \cup J$. Por *dominio* entendemos un abierto conexo y vale el

LEMA 3. D_ε y C_ε son dominios. J_ε es una curva de Jordan cerrada C^m , $\forall m > 1$, (que tiene tangente continua no nula en todo punto y es por tanto rectificable).

DEMOSTRACIÓN. r y q en D se dicen *conectados* en D si existe un arco de Jordan contenido en D con extremos r y q (arquiconexión). D_ε es conexo: en efecto, si no lo fuera existiría $p_0 \in D_\varepsilon$ no conectado en D_ε a p . Sea

$$T_0 = \{q \in D_\varepsilon : q \text{ conectado en } D_\varepsilon \text{ a } p_0\}.$$

Entonces, T_0 es abierto y $\partial T_0 \subseteq J_\varepsilon$. Luego, $u = \varepsilon$ en T_0 , lo cual no es posible pues $u(p_0) > \varepsilon$ y u es armónica.

$\overline{D_\varepsilon}$ es un compacto contenido en D . Sea $C' = R^2 \setminus \overline{D_\varepsilon} = C_\varepsilon \cup \{R^2 \setminus D\}$. C' es un dominio: en efecto, para ver esto es suficiente mostrar que todo punto de C_ε se puede conectar con un punto de J . Sea $p_1 \in C_\varepsilon$ y $S_0 = \{q \in C_\varepsilon : q \text{ está conectado a } p_1 \text{ en } C_\varepsilon\}$. Entonces $\partial S_0 \subseteq \partial C_\varepsilon = J_\varepsilon \cup J$. Si $\partial S_0 \subseteq J_\varepsilon$ entonces llegamos a una contradicción como antes. Luego $\partial S_0 \cap J \neq \emptyset$. De esto se deduce que p_1 está conectado a J .

El conjunto compacto J_ε , contenido en el dominio interior a J , admite exactamente dos dominios complementarios: D_ε y C' . Como es localmente una curva C^2 con tangente no nula, pues $\varepsilon \notin X(u)$, tiene normal en cada punto $r \in J_\varepsilon$, la cual posee la dirección del gradiente de u . Luego, hay dos pequeños segmentos de extremo r , uno contenido en D_ε y otro en C_ε , salvo por ese extremo. El teorema recíproco de Jordan asegura entonces que J_ε es una curva de Jordan.

C_ε está contenido en el interior de J y en el exterior de J_ε , ambas curvas de Jordan. En consecuencia, C_ε es un conjunto abierto conexo, QED.

1.4. CONTINUACION de la demostración de ii). Usamos la notación del §1.2, $u(s) = G(p, s)$, $v(s) = G(q, s)$, y con $0 < \varepsilon \notin u(X(u))$, $\varepsilon < u(q)$. Si $J_\varepsilon = \{s \in D : u(s) = \varepsilon\} = \{s : G(p, s) = \varepsilon\}$ entonces $q \in D_\varepsilon$. Obsérvese que $\forall \delta \exists \theta : \text{dist}(s, J) \leq \theta \Rightarrow 0 \leq G(p, s) \leq \delta$ por lo que $J_\varepsilon \rightarrow J$. Reemplazando en la deducción de (2) 1.2 D por D_ε , obtenemos:

$$(1) \quad v(p) - u(q) = \int_{J_\varepsilon} -\frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma_s + \varepsilon \int_{J_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma_s.$$

Si en (1) **1.2** hubiéramos usado $u \equiv 1$ y D_ε en lugar de D , habríamos obtenido:

$$(2) \quad \tilde{p} \in D_\varepsilon \Rightarrow - \int_{J_\varepsilon} \frac{\partial G(\tilde{p}, s)}{\partial n} d\sigma_s = 1.$$

Como $\frac{\partial u}{\partial n} \leq 0$ en J_ε , n normal exterior y $\int_{J_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma_s = \int_{J_\varepsilon} \frac{\partial G(q, s)}{\partial n} d\sigma_s$, resulta, por el teorema del valor medio y para cierto punto $s_\varepsilon \in J_\varepsilon$:

$$(3) \quad v(p) - u(q) = - \int_{J_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma_s - \varepsilon = \int_{J_\varepsilon} v \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma_s - \varepsilon = v(s_\varepsilon) \int_{J_\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma_s - \varepsilon =$$

$$= -v(s_\varepsilon) \int_{J_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_s - \varepsilon.$$

Luego, $v(p) - u(q) = v(s_\varepsilon) \cdot 1 - \varepsilon$. Para $\varepsilon \rightarrow 0$, $v(s_\varepsilon) \rightarrow 0$ pues $J_\varepsilon \rightarrow J$, y la tesis sigue,

QED.

Definimos $G(p_0, q) := \lim_{p \rightarrow p_0} G(p, q)$ para $p, q \in D$, $p_0 \in \partial D$. Como ese límite existe y es igual a $\lim_{p \rightarrow p_0} G(q, p) = G(q, p_0) = 0$, resulta: $G(p_0, q) = 0$ para todo $p_0 \in \partial D$, $q \in D$.

1.5. CONTINUACION de la demostración de i). Sea $\varepsilon \ll 1$, $D'_\varepsilon = D_\varepsilon \setminus S_\varepsilon(p)$, $r = |p - q|$. Por hipótesis $u \in \mathcal{S}(D)$ y sabemos que, para $\eta \rightarrow 0$, (cf. (1), §1.2),

$$\int_{r=\eta} u \frac{\partial G}{\partial r} d\sigma_q = -\frac{1}{2\pi\eta} \int_{r=\eta} u(q) d\sigma_q \rightarrow -u(p).$$

Por (2) y como en (3), obtenemos,

$$\int_{\{G(p, s)=\varepsilon\}} v(s) \frac{\partial G(p, s)}{\partial n} d\sigma_s = v(s_\varepsilon) \int_{J_\varepsilon} \frac{\partial G(p, s)}{\partial n} d\sigma_s = v(s_\varepsilon).$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } \int_D G(p, q) \phi(q) dq &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D'_\varepsilon} G(p, q) \Delta u(q) dq = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{J_\varepsilon} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma_q + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma_q = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{J_\varepsilon} G(p, q) \frac{\partial u}{\partial n}(q) d\sigma_q - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{J_\varepsilon} u(q) \frac{\partial G}{\partial n}(p, q) d\sigma_q + 0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} u(q) \frac{\partial G}{\partial r}(p, q) d\sigma_q = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{J_\varepsilon} G(p, q) \frac{\partial u}{\partial n}(q) d\sigma_q - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(q_\varepsilon) + 0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} u(q) \frac{\partial G}{\partial r}(p, q) d\sigma_q = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{J_\varepsilon} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}(q) d\sigma_q + 0 + 0 - u(p).$$

Dado que $\Delta u = \phi$, usando la fórmula de Green obtenemos,

$$\int_D G(p, q) \phi(q) dq = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \iint_{D_\varepsilon} \phi dx dy - u(p) = -u(p), \quad \text{QED.}$$

1.6. DEMOSTRACIÓN de iii). Sean $p, r \in \bar{D}$ y $|p - r| < \delta$. Por definición:

$$u(p) = \int_{D \cap S_{2\delta}(r)} G(p, q) \phi(q) dq + \int_{D \setminus S_{2\delta}(r)} G(p, q) \phi(q) dq =: I_1(p) + I_2(p).$$

Como en $D \setminus S_{2\delta}(r)$ vale $G(p, q) \leq \frac{1}{2\pi} \log(M/\delta)$, resulta:

$$(1) \quad I_2(r) = \lim_{p \rightarrow r} I_2(p).$$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, si δ es suficientemente pequeño,

$$(2) \quad |I_1(p)| \leq \frac{\|\phi\|_\infty}{2\pi} \int_{\{|x| < 3\delta\}} \log \frac{M}{|x|} dx < \varepsilon.$$

De (1) y (2) sigue entonces que $u(r) = \lim_{p \rightarrow r} u(p)$ y $u \in C(\bar{D})$.

En el caso que $r \in \partial D$: $u(r) = \int_D G(r, q) \phi(q) dq = 0$.

Teniendo en cuenta el Teorema 1 del §0.2, la demostración del punto iii) llega a su fin con una aplicación del siguiente lema.

LEMA 1. Sea $\phi \in L^\infty(D)$, $H(p, q) = s(p, q) - G(p, q)$ y

$$(3) \quad F(x) := \int_D H(x, y) \phi(y) dy.$$

Entonces, $F(x) \in C^\infty(D)$ y en D vale,

$$(4) \quad \frac{\partial^{i+j} F}{\partial x_1^i \partial x_2^j}(x_1, x_2) = \iint_D \frac{\partial^{i+j} H}{\partial x_1^i \partial x_2^j}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \phi(y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \Delta_x F = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. (5) sigue inmediatamente de (4). Veamos (4). Sabemos que la función $H(p, q)$ es continua en $(p, q) \in D \times \bar{D}$ y simétrica en $D \times D$. Además, por ser armónica, $H(\cdot, q) \in C^\infty(D)$ para todo $q \in D$.

Si $K \subset \text{int}(K') \subset K' \subset D$, K y K' compactos, entonces, para $(p, q) \in K \times D$ y por medio de la desigualdad de Harnack para la función armónica $H(\cdot, q)$ calculada en $p \in K$ y radio del círculo igual a $\text{dist}(K, \partial K')$ obtenemos,

$$(6) \quad \left| \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \right| \leq 2 \sup_{p \in K', q \in D} |H(p, q)| / \text{dist}(K, \partial K') = M(K, K') \sup\{|H(p, q)| : (p, q) \in K' \times D\}$$

Por tanto, si $C_0(K', D) := \sup\{|H(p, q)| : (p, q) \in K' \times D\}$ tenemos,

$$(7) \quad C_1(K, D) = \sup\left\{ \left| \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \right| : (p, q) \in K \times D \right\} \leq M(K, K') \cdot C_0(K', D) < \infty.$$

La validez de (4) para las derivadas de primer orden se obtiene ahora derivando (3) bajo el signo integral. Esta operación queda justificada por el Lema 1 del párrafo **0.2**.

Con derivadas de orden superior se procede en forma semejante pero recurriendo a (7),

QED.

1.7. DEMOSTRACIÓN de iv). Usaremos a continuación el teorema de existencia y unicidad de la solución armónica mencionado en **1.0**. La función

$$v(p) = - \int_D s(p, q) \phi(q) dq = \frac{1}{2\pi} \int_D \phi(q) \log|p - q| dq$$

pertenece a $C^2(D) \cap C^1(\bar{R}^2)$ y es solución de $\Delta v = \phi$ en D , (cf. **0.2** y **0.1**).

Recurriendo a la función armónica $w \in C^\infty(D) \cap C(\bar{D})$ tal que $w = -v$ en ∂D , definimos $u = v + w$. Entonces, $u \in \mathcal{S}(D)$ y como $\Delta w = 0$ en D , u resuelve el problema de Dirichlet $\Delta u = \phi$, $u = 0$ en ∂D .

De *i*) sigue que además u y w son de la forma ($p \in D$):

$$u(p) = - \int_D G(p, q) \phi(q) dq, \quad w(p) = \int_D H(p, q) \phi(q) dq, \quad \text{QED.}$$

1.8. COMPLEMENTO. Como consecuencia del último Lema y el Corolario 1 del §**0.2.5** obtenemos el siguiente resultado

TEOREMA 1. Sea D de Jordan. Si $f \in Lip_{loc}(D)$ entonces $\int_D G(p, q) f(q) dq \in C^2(D)$.

Este teorema tiene la siguiente extensión que no demostraremos,

TEOREMA 2. Sea $0 < \alpha < 1$. Sea ϕ una función acotada, localmente α -Hölder continua en D de Jordan. Entonces, la función $u(p) = -G(\phi)(p) = -\int_D G(p, q) \phi(q) dq$

tiene derivadas segundas localmente α -Hölder continuas.

1.9. El desarrollo en autofunciones del operador $-k^{-1}(x)\Delta_x$.

TEOREMA 1. i) Sea $k(x) \in Lip_+(D)$ tal que $0 < \varepsilon < k(x)$ para $x \in D$ región de Jordan. El problema (clásico) de contorno $\Delta u + \lambda k u = 0$, $u|_{\partial D} = 0$, esto es,

$$(1) \quad -\frac{1}{k(x)} \Delta u(x) = \lambda u(x), \quad u \in \mathcal{S}(D),$$

posee infinitos autovalores reales de multiplicidad finita que pueden ordenarse según su magnitud creciente: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$.

ii) Las correspondientes autofunciones $\phi_j \in \mathcal{S}(D)$, reales, normalizadas en $L^2(D, k)$:

$$\|\phi_j\|_k := \sqrt{\int_D |\phi_j(x)|^2 k(x) dx} = 1, \text{ verifican,}$$

$$(2) \quad \int_D \phi_i(x) \phi_j(x) k(x) dx = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Estas forman un sistema ortonormal completo respecto de la medida $k(x) dx$ en D .

iii) Toda función $u \in \mathcal{S}(D)$ tal que $\Delta u \in L^\infty(D)$ admite un desarrollo uniformemente y absolutamente convergente en \bar{D} :

$$(3) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \quad c_n = c_n(u) = \int_D u \phi_n k dx.$$

NB. Designaremos con $\mathcal{L}_{\lambda, k}$, o simplemente con \mathcal{L}_λ , al operador $\Delta + \lambda k$, por lo que al problema clásico (1) lo podemos describir como $\mathcal{L}_{\lambda, k} u = 0$, $u \in \mathcal{S}$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1. i) Del teorema del máximo (§0.4.1) se deduce que si $u \neq 0$ resuelve (1) entonces $\lambda \notin (-\infty, 0]$.

Sea $\lambda \neq 0$. Sea $u \in \mathcal{S}(D)$ tal que $\Delta u = -\lambda k u$ y $0 < \sqrt{\varepsilon} < f := \sqrt{k}$. Entonces, por i) Teorema 1, §1.0,

$$(4) \quad \lambda^{-1} u(p) = \int_D G(p, q) u(q) k(q) dq = \int_D G(p, q) u(q) \cdot f^2(q) dq.$$

Recíprocamente, si $u \in L^2(D)$ y satisface (4) entonces $ku \in L^2(D)$ y u es acotada. En consecuencia, $u \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$, $u|_{\partial D} = 0$. Como u es acotada y localmente Lipschitz, $ku \in Lip_{loc}(D)$. Del Teorema 1, §1.8, obtenemos $u \in C^2(D)$ y por tanto $u \in \mathcal{S}(D)$.

Entonces, usando la solución fundamental del Laplaciano y el Lema 1 §1.6, obtenemos: $\Delta\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \Delta(-E * uk) = -uk$ ($D'(D)$). Por ser $u \in C^2$, $\Delta u = -\lambda k u$ también en sentido ordinario. Es decir, u es solución de (1), (en sentido clásico).

Hemos probado entonces que el problema diferencial (1) es, para $\lambda \neq 0$, *equivalente* al siguiente problema integral:

$$(5) \quad \mu \tilde{u}(p) = \int_D \tilde{G}(p, q) \tilde{u}(q) dq =: (\tilde{K} \tilde{u})(p),$$

donde $\tilde{G}(p, q) = f(p)G(p, q)f(q)$, $(p, q) \in \bar{D} \times D$, $\tilde{u}(p) = f(p)u(p)$, $\mu = 1/\lambda$.

Las autofunciones normalizadas $\tilde{\phi}_n$, $n = 1, 2, \dots$, con valores propios $\mu_n \neq 0$ se corresponden con los del problema (1): $\phi_n = \tilde{\phi}_n / f$ con autovalores $\lambda_n = 1/\mu_n$.

$\mu = 0$ no es valor propio. En efecto, el núcleo de \tilde{K} verifica: $\tilde{G}(p, q) = \tilde{G}(q, p) \in$

$L^2(D \times D)$, y $\|\tilde{G}\|_2 \leq C|D|^{1/2}\|k\|_\infty < \infty$ ya que $\forall p \in D: \int |\tilde{G}(p, q)|^2 dq \leq$

$C\|k\|_\infty < \infty$, (vii) T1 1.0). Luego, la integral en (5) define un operador de Hilbert-

Schmidt, \tilde{K} , en $L^2(D)$, $(\tilde{K} \tilde{u})(p) = \int_D \tilde{G}(p, q) \tilde{u}(q) dq$. \tilde{K} es autoadjunto y de rango

denso. Esto último sigue de i) T. 1 §1.0 pues $C_0^\infty(D) \subset \mathcal{S}(D)$.

De esto sigue que para todo n , $n = 1, 2, \dots$, μ_n es real no nulo —por lo ya dicho positivo— de multiplicidad finita con $\lambda_n = \mu_n^{-1} \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$.

\tilde{K} es un operador positivo pues

$$(6) \quad \tilde{G}(p, q) = \sum_i \mu_i \tilde{\phi}_i(p) \tilde{\phi}_i(q) \quad (L^2(p, q)), \mu_i > 0.$$

ii) Las autofunciones del problema diferencial, $\phi_n = \tilde{\phi}_n / f$, son ortogonales respecto al peso k : $\int_D \phi_n(q) \phi_m(q) k(q) dq = \int_D \tilde{\phi}_n(q) \tilde{\phi}_m(q) dq = \delta_{nm}$, y forman un sistema completo en

$L^2(D; k)$ pues $\{\tilde{\phi}_n\}$ es completo en la clausura del rango de \tilde{K} , es decir, en $L^2(D)$.

iii) Sea $U(p) := (\tilde{K}H)(p) = \int_D \tilde{G}(p, q) H(q) dq$ (\in rango de \tilde{K}) donde $H \in L^2$.

Como para todo p , $\int_D |\tilde{G}(p, q)|^2 dq \leq M < \infty$, en virtud de un teorema de E. Schmidt vale,

(cf. [RN]), que el desarrollo $U(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n(U) \tilde{\phi}_n(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \tilde{c}_n(H) \tilde{\phi}_n(p)$ es

absolutamente convergente.

Más aún, el desarrollo es uniformemente convergente en D .

Si $u \in \mathcal{S}(D)$, $\|\Delta u\|_{\infty} < \infty$, entonces $uf = \tilde{K}((-\Delta u)/f)$. O sea, $U(p) := (uf)(p)$ pertenece al rango de \tilde{K} . Además,

$$(7) \quad c_n(u) = \int_D u(q) k(q) \phi_n(q) dq = \tilde{c}_n(U) = \int_D (u(q)f(q)) \tilde{\phi}_n(q) dq$$

$$\text{Luego, } \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n(U) \tilde{\phi}_n(p) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(u) \tilde{\phi}_n(p) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(u) \phi_n(p) \right) f(p) \xrightarrow{\bullet} U(p) = u(p) f(p)$$

y como $\infty > \sqrt{\|k\|_{\infty}} \geq f > \sqrt{\varepsilon}$, sigue que $\sum c_n \phi_n \rightarrow u$, QED.

COROLARIO 1. Las soluciones de $-\Delta u = \tau k u$, $u \in \mathcal{S}(D)$, $k(x) \in Lip_{loc}(D)$ tal que para cierto $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < k(x)$, resuelven la ecuación $u(p) = \tau \int_D G(p, q) u(q) \cdot k(q) dq$ y de

manera que,

$$(8) \quad \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n} = \int_D G(p, q) \phi_n(q) \cdot k(q) dq, \quad \phi_n = \phi_n(\cdot) = \phi_n(\cdot; k),$$

$$(9) \quad \forall p \in \bar{D}, \quad G(p, q) = \sum \phi_n(p) \phi_n(q) / \lambda_n \quad (L^2(q \in D)),$$

$$(9') \quad G(p, q) = \sum \phi_n(p) \phi_n(q) / \lambda_n, \quad L^2(D \times D),$$

$$(10) \quad \sum |\phi_n(p) / \lambda_n|^2 = \int G^2 \cdot k dq \leq \|k\|_{\infty} C^2 < \infty, \text{ uniformemente en } p \in \bar{D}.$$

CAPÍTULO 2

2.0. La membrana vibrante y sus autovalores. Sean ρ la masa por unidad de área de una membrana plana y τ la tensión uniforme ejercida sobre ella. Sean $z = z(x, y, t)$ el desplazamiento vertical en el instante t del punto $(x, y) \in D$ donde D es la *región de Jordan* ocupada por la membrana. La ecuación del movimiento es

$$(1) \quad \Delta z - f^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \quad k(x, y) := f^2(x, y) = \rho(x, y)/\tau.$$

Separando variables obtenemos:

$$(2) \quad z = u(x, y) T(t), \quad \Delta u + \lambda f^2 u = 0, \quad T'' + \lambda T = 0.$$

Si la membrana es homogénea, es decir, si $\rho \equiv \text{cte.}$, entonces $c = \sqrt{\tau/\rho} = 1/f$ es la velocidad de las ondas en la membrana (cf. [Co], §27). En lo que sigue suponemos $\tau \equiv 1$ por lo que $k = f^2 = \rho$.

En esta situación los autovalores del problema de la membrana fija en el borde son, *por definición*, los autovalores del problema de Dirichlet de la ecuación de Laplace $\Delta u + \lambda f^2 u = 0$ para la región ocupada por la membrana.

DEFINICIÓN 1. Dos membranas se dirán isoespectrales si tienen los mismos autovalores con las mismas multiplicidades.

Algunos espectros. Veamos la composición de la familia de autovalores de algunos problemas de contorno lineales y planos.

Ecuación diferencial: $\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

$\alpha) u(0) = 0 = u(\pi): \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{multiplicidad de } \lambda_n = \text{mult}(\lambda_n) = 1.$

$\beta) u'(0) = 0 = u'(\pi): \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \text{mult}(\lambda_n) = 1.$

$\gamma) u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi): \quad \lambda_n = 4n^2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \text{mult}(\lambda_0) = 1$ y si $n \geq 1$,
 $\text{mult}(\lambda_n) = 2.$

Ecuación diferencial: $\Delta u + \lambda u = 0$, $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$.

$$\alpha') u = 0 \text{ en } \partial R : \lambda_{nm} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), m, n = 1, 2, \dots$$

Si $(a/b)^2$ es irracional los autovalores son simples, i.e., de multiplicidad uno. Si $(a/b)^2$ es racional, infinitos autovalores son degenerados, o sea de multiplicidad mayor que uno.

Las frecuencias normales de vibración son entonces: $f_{nm} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$, $m, n \geq 1$.

$$\beta') \text{ Contorno libre: } \lambda_{nm} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Contorno libre significa $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ en ∂R , siendo η la normal exterior; vale la misma

observación que en el caso α') respecto de la multiplicidad de los autovalores.

γ') Las soluciones periódicas $e^{2\pi i \left(\frac{mx}{a} + \frac{ny}{b} \right)}$, m, n enteros, son las autofunciones correspondientes a los autovalores $\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$ del problema $u(0, y) = u(a, y)$,

$u(x, 0) = u(x, b)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, b)$. Estos son de multiplicidad

≥ 4 si $|m| > 0 < |n|$.

Ecuación diferencial: $\Delta u + \lambda u = 0$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

δ') $u = 0$ en ∂D : $\lambda_{nm} = (\mu_n^{(m)})^2$, donde $\mu_n^{(m)}$ es el n -ésimo cero positivo de J_m y $m = 0, 1, 2, \dots$. O sea, $\lambda_{nm} > 0$ para todo m, n , y de multiplicidad dos.

Transformaciones conformes. Sea T la transformación definida por $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, funciones dos veces continuamente diferenciables tales que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = f^2(\xi, \eta)(d\xi^2 + d\eta^2), f^2 \neq 0, \text{ en } (x, y) \in D,$$

D una región acotada simplemente conexa que contiene el origen. Como

$$(3) \quad d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy, \quad d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy,$$

sigue que

$$(4) \quad (\xi_x^2 + \eta_x^2)f^2 = 1, \quad (\xi_y^2 + \eta_y^2)f^2 = 1, \quad \xi_x \xi_y + \eta_x \eta_y = 0.$$

Sean $\begin{cases} x = \alpha_1 t \\ y = \alpha_2 t \end{cases}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ y $\begin{cases} x = \beta_1 t \\ y = \beta_2 t \end{cases}$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ dos rectas que se cortan en $(0,0)$

$\in D$. El coseno del ángulo que forman $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ viene dado por

$$(5) \quad \cos\theta = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2.$$

Las curvas imágenes son $(\xi(\alpha_1 t, \alpha_2 t), \eta(\alpha_1 t, \alpha_2 t))$ y $(\xi(\beta_1 t, \beta_2 t), \eta(\beta_1 t, \beta_2 t))$, cuyos

vectores tangentes son $\vec{\alpha}_T = (\alpha_1 \xi_x + \alpha_2 \xi_y, \alpha_1 \eta_x + \alpha_2 \eta_y)$ y $\vec{\beta}_T = (\beta_1 \xi_x + \beta_2 \xi_y, \beta_1 \eta_x + \beta_2 \eta_y)$

en $t = 0$. Sea θ' el ángulo que forman estas curvas en $Q = (\xi(0,0), \eta(0,0))$. Entonces

$$(6) \quad \cos\theta' = \frac{\vec{\alpha}_T \cdot \vec{\beta}_T}{|\vec{\alpha}_T| |\vec{\beta}_T|} = \frac{\alpha_1 \beta_1 / f^2 + \alpha_2 \beta_2 / f^2}{\sqrt{1/f^2} \cdot \sqrt{1/f^2}} = \cos\theta.$$

Luego, $\theta = \theta'$ o bien $\theta = -\theta'$. Comparando áreas infinitesimales y usando (6) tenemos,

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \right| d\xi d\eta = dx dy, \quad f^{-2} dx dy = d\xi d\eta.$$

Esto implica que

$$(7) \quad \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \right| = f^2(\xi,\eta).$$

Computando el seno de θ' y comparándolo con el de θ resulta que

$$\theta = \theta' \Leftrightarrow \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} > 0 \Leftrightarrow f^2 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}. \text{ O sea, siempre } \theta = \theta' \text{ o bien } \theta = -\theta'.$$

Sea $h > 0$, $h^2(x,y) = 1/f^2(\xi,\eta)$. Escribamos,

$$\xi_x = h \cos \tau, \quad \eta_x = h \sin \tau, \quad \xi_y = h \cos \eta, \quad \eta_y = h \sin \eta.$$

Tendremos entonces,

$$(4') \quad \xi_x^2 + \eta_x^2 = h^2, \quad \xi_y^2 + \eta_y^2 = h^2, \quad 0 = \xi_x \xi_y + \eta_x \eta_y = h^2 \cos(\tau - \eta).$$

Localmente la aplicación $T: (x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ es 1-1; digamos en la *bola abierta* $B = B_\varepsilon(0)$. De la tercera igualdad en (4') resulta $\eta = \tau \pm \pi/2$. Luego,

$$\xi_y = h \cos(\tau \pm \pi/2), \quad \eta_y = h \operatorname{sen}(\tau \pm \pi/2).$$

Por tanto, $\operatorname{sgn} = +: \xi_x = \eta_y, \xi_y = -\eta_x$, $\operatorname{sgn} = -: \xi_x = -\eta_y, \xi_y = \eta_x$, que son las condiciones de Cauchy-Riemann y anti Cauchy-Riemann, respectivamente. En el

primer caso tenemos, $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x^2 + \xi_y^2 > 0$ por lo que $\theta = \theta'$ y en el segundo,

$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = -(\xi_x^2 + \xi_y^2) < 0$ y $\theta = -\theta'$. La transformación será entonces conforme si y sólo

si $\theta = \theta'$ si y sólo si se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann. De la diferenciabilidad de ξ y η concluimos ahora que en este último caso $\zeta = \xi + i\eta$ es una función holomorfa con derivada no nula, $|\zeta'|^2 = f^{-2}$. Además en este caso vale, para $w = w(x, y) \in C^2(D)$,

$$(8) \quad (\Delta_{xy} w) f^2 = (\Delta_{xy} w) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| = (\Delta_{xy} w) \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \Delta_{\xi\eta} w.$$

Por tanto, si la región de Jordan D con contorno J es llevada conformemente en el círculo unitario $B_1(0)$ por la transformación $T: (x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ tal que $T \in C(\bar{D})$,

$T^{-1} \in C(S_1(0))$, $S_1 = B_1 \cup \Sigma_1$, $\Sigma_1 = \partial S_1$, entonces el problema

$$(9) \quad \Delta_{xy} w + \lambda w = 0 \quad \text{en } D, \quad w|_J = 0,$$

se transforma en

$$(10) \quad \Delta_{\xi\eta} w + \lambda [f(\xi, \eta)]^2 w = 0 \quad \text{en } B_1, \quad w|_{\Sigma_1} = 0.$$

Observaciones. a) Un teorema de H. Weyl, (T. 8, 0.1), implica que si D y \tilde{D} , regiones de Jordan, tienen los mismos autovalores para el problema (9) entonces

$$(11) \quad \text{área de } D := |D| = |\tilde{D}|$$

y por tanto

$$(12) \quad |D| = \int_{B_1(0)} f^2 d\xi d\eta = \int_{B_1(0)} \tilde{f}^2 d\xi d\eta = |\tilde{D}|.$$

b) Si los contornos de D y \tilde{D} son además curvas C^2 convexas vale también que:

$$\int_{\Sigma_1} |f| d\sigma = \text{longitud de } J = \text{longitud de } \tilde{J} = \int_{\Sigma_1} |\tilde{f}| d\sigma, \text{ ([PI]; cf. (30)).}$$

c) Sea $\zeta = \xi(x, y) + i\eta(x, y) = W(z) = W(x + iy)$ una función analítica de $z = x + iy$ en D verificando $W'(z) \neq 0$ allí. Entonces $|d\zeta|^2 = |W'(z)|^2 |dz|^2 = |W'(z)|^2 (dx^2 + dy^2)$. Luego, $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ cumplen la hipótesis de esta sección con $f(\xi, \eta) = |W'(z)|^{-1} > 0$.

Membranas circulares. Una transformación homográfica de $B_1(0)$ sobre $B_1(0)$:

$\zeta = \frac{az + b}{cz + d}$ que lleva $z = 0$ en $\zeta = p$, $0 < p < 1$, es de la forma

$$(13) \quad \zeta = \frac{z - p}{pz - 1}.$$

Su derivada $\zeta' = \frac{p^2 - 1}{(pz - 1)^2}$ muestra que lleva la dirección $x > 0$ en el punto $(0, 0)$ en la dirección $\xi < 0$ en el punto $(p, 0)$. Entonces,

$$(14) \quad \xi = \frac{p(x^2 + y^2 + 1) - x(1 + p^2)}{(px - 1)^2 + (py)^2}, \quad \eta = \frac{(p^2 - 1)y}{(px - 1)^2 + (py)^2};$$

$$(15) \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x^2 + \xi_y^2 = \xi_x^2 + \eta_x^2 = |\zeta'|^2 = \left(\frac{p^2 - 1}{(px - 1)^2 + (py)^2} \right)^2 = h^2(x, y) = f^{-2}(\xi, \eta).$$

La transformación inversa a (13) es la misma transformación homográfica, esto es,

$$(16) \quad z = \frac{\zeta - p}{p\zeta - 1}.$$

Luego,

$$(17) \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \left(\frac{p^2 - 1}{(p\xi - 1)^2 + (p\eta)^2} \right)^2 = f^2(\xi, \eta), \quad h^2(\xi, \eta) = f^2(\xi, \eta).$$

En consecuencia, si $\tilde{W}(\xi, \eta) = W(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, el problema de contorno

$$(18) \quad \Delta_{xy} W + \lambda W = 0, \quad W|_{\Sigma_1} = 0,$$

es equivalente a (cf. (8)-(10)):

$$(19) \quad \Delta_{\xi\eta} \tilde{W} + \lambda f^2(\xi, \eta) \tilde{W} = 0, \quad \tilde{W}|_{\Sigma_1} = 0.$$

Pero $f^2(0,0) = \{p^2 - 1\}^2$ por lo que (17) es distinta para cada p .

Vale entonces el siguiente resultado (véase § 0.3.1):

PROPOSICIÓN 1. Existen infinitas membranas circulares del mismo radio, dos a dos distintas e isoespectrales.

Las normas de las autofunciones que se corresponden están relacionadas de la siguiente forma,

$$(20) \quad \begin{aligned} \|\phi_j\|_2^2 &= \iint |\phi_j(x, y)|^2 dx dy = \iint |\tilde{\phi}_j(\xi, \eta)|^2 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta = \\ &= \iint |\tilde{\phi}_j(\xi, \eta)|^2 f^2(\xi, \eta) d\xi d\eta = \iint |\tilde{\phi}_j(\xi, \eta)|^2 k(\xi, \eta) d\xi d\eta = \|\tilde{\phi}_j\|_{2,k}^2, \quad k = f^2. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 2. Si en la ecuación (1) $f^2 \equiv 1$, es decir, si la ecuación se reduce a

$\Delta z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$, diremos que la membrana correspondiente es un *tambor* (de Jordan). Si

además $D = B_r(0)$ diremos que la membrana es un *tambor circular*.

DEFINICIÓN 3. Una membrana plana que ocupa la región acotada Z , fija en el borde y cuyo operador espacial asociado es

$$(21) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \lambda f^2(\xi, \eta), \quad k = f^2,$$

se dirá que *suenas como un tambor* si es isoespectral con el tambor que ocupa la misma región. Es decir, si tiene el mismo espectro que

$$(22) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \lambda \right) u = 0 \text{ en } Z, \quad u|_{\partial Z} = 0.$$

La Proposición 1 dice entonces que hay tambores para los que existen infinitas membranas que suenan como él.

2.1. Cuerdas y membranas isoespectrales. En 1966 M. Kac, [K], popularizó un interesante problema. Preguntó si dos tambores no iguales pueden sonar de la misma manera. Técnicamente la pregunta podría formularse así:

P) ¿dos regiones planas acotadas no congruentes pueden ser isoespectrales para el problema de Dirichlet?

Observemos que decir que *dos regiones planas tienen el mismo espectro* significa que tienen los mismos autovalores para el problema de Dirichlet contados según su multiplicidad. La respuesta a P) es *sí*:

TEOREMA 1. Hay dos tambores de Jordan con las mismas áreas y perímetros, no congruentes e isoespectrales (cf. el Apéndice A al presente Capítulo).

El problema P) es un problema inverso de unicidad para el dominio del operador, dado el espectro, y que se resuelve por la negativa.

En cambio la Proposición 1 resuelve por la negativa un problema inverso de unicidad para el peso $k (= f^2)$ del operador de Sturm-Liouville, también dado el espectro.

Para la cuerda vibrante esto mismo fue planteado y resuelto por L. Euler ca. 1770.

TEOREMA 2 (Euler, [Eu]). Sea

$$(1) \quad u''(x) + \lambda r(x)u(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad u(0) = u(l) = 0.$$

Si $l = \pi$ y $r(x)$ es de la forma $r(x) = (ax + b)^{-4}$, $b > 0$, $b(al + b) = 1$ entonces el espectro del problema coincide con el del caso $a = 0, b = 1$ (el problema α) del inicio) y los autovalores de la ecuación son entonces

$$(2) \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Pero las funciones $r(x) = (ax + b)^{-4}$ no son todas las que verifican el teorema (cf. [L]). En efecto, tenemos la

PROPOSICIÓN 2. Existen funciones $r(x)$ positivas indefinidamente diferenciables distintas de las mencionadas en el teorema precedente que dan lugar al mismo espectro.

Sin embargo vale el siguiente (cf. [Mo], [Bo]),

TEOREMA 3. Sea $r(x)$ positiva, $x \in [0, \infty)$, y localmente absolutamente continua lo mismo que su derivada. Si para todo $l > 0$ el problema (1) tiene infinitos sobretonos armónicos ($\forall l \exists c_0(l)$ tal que para infinitos $n > 0$, $\mu_n = c_0(l)n^2$) entonces

$$(3) \quad r(x) = (ax + b)^{-4}, \quad b > 0.$$

Una demostración de los teoremas 2 y 3 y la proposición 2 puede verse en [Pa]. En este orden de cosas puede agregarse que en general, un solo espectro no basta para determinar el

coeficiente $q(x)$ en un problema de Sturm-Liouville, ([BR]), en ecuaciones ordinarias. Pero vale el siguiente resultado debido a N. Levinson (cf. [Le], también [Bo]).

TEOREMA 4. Sea $q(x) \in L^2(0, \pi)$, real, $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < \pi$, $\beta \neq \gamma$. Supongamos dados los dos espectros correspondientes a $y'' + [\lambda - q(x)]y = 0$ y las condiciones de borde

$$(4) \quad \begin{cases} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sen\alpha = 0 \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sen\beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sen\alpha = 0 \\ y(\pi)\cos\gamma + y'(\pi)\sen\gamma = 0 \end{cases} .$$

Entonces, α, β, γ y los espectros determinan $q(x)$ c.d.

2.2. El contador $N(\lambda)$. La fórmula de H. Weyl: $\lambda_n \text{ área de } Z \sim 4\pi n$, puede escribirse como, (ver Prop. 3),

$$(1) \quad \frac{N(\lambda)}{\lambda} \rightarrow A \in (0, \infty), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

donde $A = \frac{\text{área de } Z}{4\pi}$ y $N(\lambda) = N(\lambda; Z, k) = \#\{\lambda_j: \lambda_j \leq \lambda\}$. Queremos analizar algunas consecuencias del último límite.

PROPOSICIÓN 3. Si Z es una membrana tal que $N(\lambda) \uparrow \infty$ y verifica (1) se tiene

i) $\lambda_n \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$.

ii) Vale,

$$(2) \quad \frac{n}{\lambda_n} \rightarrow A, \quad n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{N(\lambda)}{\lambda} \rightarrow A, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

iii) $\#\{\lambda_j: \lambda_j = \lambda_n\} = o(n)$ y $\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \rightarrow 1$.

iv) En la definición de $N(\lambda; Z, k)$ puede reemplazarse \leq por $<$.

DEMOSTRACIÓN. i) (1) implica $\lambda_n \rightarrow \infty$ pues $N(\lambda) \rightarrow \infty$, $A < \infty$.

ii) \Rightarrow . De la hipótesis sigue que $\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \rightarrow 1$. Supongamos que

$$\lambda_{n-1} < \lambda_n = \dots = \lambda_{n+\varepsilon(n)} < \lambda_{n+\varepsilon+1}.$$

Entonces, $\frac{n + \varepsilon(n)}{\lambda_{n+\varepsilon(n)}} = \frac{n + \varepsilon(n)}{\lambda_n} \rightarrow A$ implica que $\frac{\varepsilon(n)}{\lambda_n} \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$.

Como para $\lambda_{n-1} \leq \lambda < \lambda_n$, se tiene

$$\frac{n-1}{\lambda_{n-1}} \geq \frac{N(\lambda)}{\lambda} \geq \frac{N(\lambda)}{\lambda_n} = \frac{n}{\lambda_n} + o(1) = \frac{n + \varepsilon(n)}{\lambda_n} + o(1) = \frac{n + \varepsilon(n)}{\lambda_{n+\varepsilon(n)}} + o(1)$$

y sigue que $\lim \frac{N(\lambda)}{\lambda} = A$.

ii) \Leftarrow . De $\frac{N(\lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}}, \frac{N(\lambda_{n+\varepsilon})}{\lambda_n} \rightarrow A$ sigue que $\frac{n+\varepsilon(n)}{n} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \rightarrow 1$. Sea $t = \frac{\inf\{\lambda_n - \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}, n\}}{2^n}$.

Entonces, $\frac{N(\lambda_{n-t})}{\lambda_{n-t}} = \frac{n-1}{\lambda_{n-t}} \rightarrow A$. Por tanto, $\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-t}} \rightarrow 1$ por lo que $\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \rightarrow 1$. Luego,

$\frac{\varepsilon(n)}{n} \rightarrow 0$. Pero, $\frac{\varepsilon(n)}{n} \sim \frac{\varepsilon(n)}{\lambda_n(\frac{n}{\lambda_{n-1}})} \sim \frac{\varepsilon(n)}{\lambda_n(\frac{n-1}{\lambda_{n-1}})} \sim \frac{1}{A} \frac{\varepsilon(n)}{\lambda_n}$. Por tanto, $\frac{\varepsilon(n)}{\lambda_n} \rightarrow 0$. De $\frac{N(\lambda_{n+\varepsilon})}{\lambda_n} \rightarrow A$

obtenemos ahora $\frac{n}{\lambda_n} \rightarrow A$, QED.

2.3. El remanente en la fórmula de Weyl. En el Capítulo 3 probaremos que los autovalores del operador $-k^{-1}\Delta$ con $k(x) \in J_\alpha(D)$ verifican $\lambda_n \int_D k dp \sim 4\pi n$. Por la

Proposición 3 §2.2, esto es equivalente a $N(\lambda) = \frac{\int_D k(p) dp}{4\pi} \lambda + o(\lambda)$. Para su demostración necesitaremos que $D \in S_\varepsilon$, una clase de regiones de Jordan que contiene a todas las de contorno rectificable. O sea, tendremos el teorema de H. Weyl cuando $k(x) \equiv 1$.

Las regiones de Jordan D de contorno regular son parametrizables y cuando $k(x) \equiv 1$ se conoce también el segundo término de la aproximación asintótica (cf. bibliografía de [La], [Sy]). En efecto para el Laplaciano vale el

TEOREMA 1. Si $|D| = \text{área } D$, $\langle J \rangle = \text{longitud } J$, entonces

$$(1) \quad N(\lambda) \sim \frac{|D|}{4\pi} \lambda - \frac{\langle J \rangle}{4\pi} \sqrt{\lambda}.$$

$\cup_{0 < \varepsilon \leq 1} S_\varepsilon$ contiene a las regiones de Jordan tales que su contorno J tiene dimensión de Minkowski $\mathbf{d} < 2$, (cf. §3.0). Si $k \equiv 1$ el remanente $\delta(\lambda) = N(\lambda) - \frac{\int_D k(p) dp}{4\pi} \lambda$ es en este caso mejor que $o(\lambda)$. Se enuncia este hecho en el siguiente Teorema 2 que es una suerte de confirmación de la conjetura de Weyl-Berry modificada para el Laplaciano ($k \equiv 1$), (véase [La], fórmula (1.8)).

TEOREMA 2. Si $1 > d > \mathbf{d}/2$ ($\geq 1/2$), y $A = (4\pi)^{-1}|D|$ entonces

$$(2) \quad \delta(\lambda) = N(\lambda) - A\lambda = O(\lambda^d).$$

APENDICE A (al Capítulo 2)

A.0. Regiones planas isoespectrales. Hay dos regiones planas que tienen los mismos autovalores para el problema de Dirichlet contados según su multiplicidad. En esta nota exhibiremos dos tales regiones pero no siguiendo el tratamiento original ([GWW]) sino la presentación que hace Conway en su libro [Cw].

El siguiente resultado es bien conocido y su demostración independiente del Teorema 2 siguiente.

TEOREMA 1 (de existencia de solución armónica). Sean D una región de Jordan, $f \in C(\partial D)$. Existe exactamente una función $v \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ tal que $\Delta v = 0$ en D , $v = f$ en ∂D . En realidad, $v \in C^\infty(D)$.

TEOREMA 2 (solución del problema de Dirichlet). Sean D una región de Jordan, $F \in C(\bar{D})$, $f \in C(\partial D)$. Entonces,

i) existe u (única) tal que

$$(1) \quad u \in C(\bar{D}) \cap C^1(D), \Delta u = F \text{ en } D, u = f \text{ en } \partial D,$$

ii) si además $F \in C^1(D)$ entonces $u \in \mathcal{U}(D)$.

DEMOSTRACIÓN. Se deduce del Teorema 1 del § 1.0 y del teorema precedente, QED.

A.1. Sea A una región de Jordan en el plano complejo e I un intervalo abierto, A simétrica respecto del eje real: $(x, y) \in A \Rightarrow (x, -y) \in A$ e I tal que $I = A \cap \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Sean $G := \{(x, y) \in A : y > 0\}$ y $\hat{G} := \{(x, y) \in A : y < 0\}$.

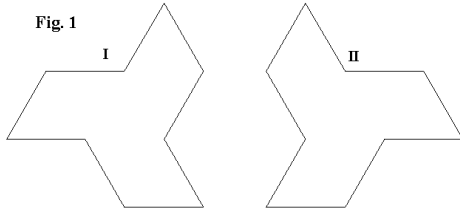
TEOREMA 3 (Principio de reflexión de Schwarz). Una función $W(z)$, holomorfa en G , continua en $G \cup I$ y que toma valores reales en I , puede continuarse a \hat{G} definiendo en $A = G \cup I \cup \hat{G}$ una función holomorfa $W_0(z)$ tal que

$$(2) \quad \begin{aligned} W_0(z) &= W(z), \operatorname{Im} z \geq 0, \\ W_0(z) &= \overline{W(\bar{z})}, \operatorname{Im} z < 0. \end{aligned}$$

Del teorema del valor medio para funciones armónicas o del Teorema 3, se deduce el

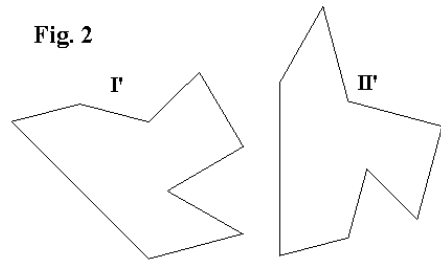
TEOREMA 4 (principio de reflexión para funciones armónicas). Si $V(x,y)$ es armónica en G , continua en $G \cup I$, nula en I , entonces existe $H(x,y)$ armónica en A que coincide con V en $G \cup I$ y tal que para todo punto en A vale: $H(x,y) = -H(x,-y)$.

Veremos que esto vale también para autofunciones del problema de Dirichlet.



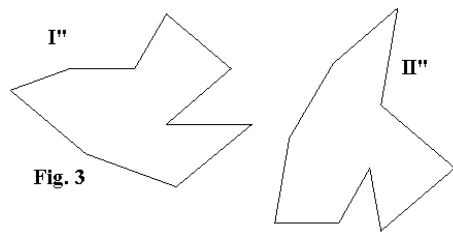
Los polígonos I y II son congruentes y, como demostraremos, isoespectrales. Ellos resultan de la unión esencialmente disjunta de 7 triángulos congruentes a un triángulo equilátero T (cf. Fig.4).

Los polígonos I' y II' resultan de la unión esencialmente disjunta de 7 triángulos congruentes a un triángulo escaleno T (cf. Fig.5). O sea, estos polígonos tienen la misma área pero como los lados más largos de cada uno de ellos tienen distinta longitud no son congruentes.



A pesar de esto ellos son también isoespectrales, como veremos.

Por deformación de I y II se obtienen I' y II' . En este caso los menores ángulos interiores de T son $\pi/4$ y $\pi/3$. Si fueran $2\pi/9$ y $\pi/3$ obtendríamos las regiones no congruentes isoespectrales de la Fig. 3.



TEOREMA 5 (de reflexión de las autofunciones). Sea A una región como en A1. Sea ϕ una autofunción correspondiente al autovalor λ en la región G :

$$(3) \quad \phi \in \mathcal{S}(G), \Delta\phi = \lambda\phi.$$

Entonces, Φ definida por

$$(4) \quad \Phi(x,y) = \phi(x,y) \text{ en } \bar{G}, \Phi(x,y) = -\phi(x,-y) \text{ en } \hat{G},$$

es una autofunción en la región A para el problema de Dirichlet y el autovalor λ .

DEMOSTRACIÓN. Sea $F \in C(\bar{A})$. Definimos $\tilde{F}(x_1, x_2) := -F(x_1, -x_2)$. Si F es tal que

$$(5) \quad \tilde{F}(x_1, x_2) = -F(x_1, -x_2) = F(x_1, x_2)$$

y f es una función continua en ∂A que también verifica (5), o sea $\tilde{f} = f$ en ∂A , entonces la función $H \in C^1(A) \cap C(\bar{A})$ que es solución del problema:

$$(6) \quad \Delta H = F, \quad (D'(D)), \quad H|_{\partial A} = f$$

verifica (5). En efecto, $\tilde{H}(x_1, x_2) := -H(x_1, -x_2)$ satisface

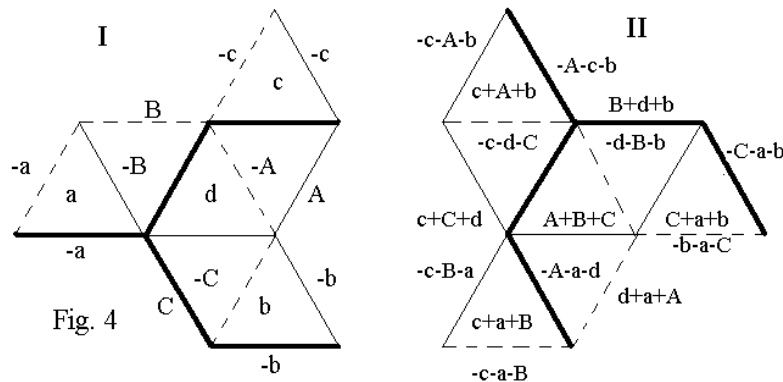
$$(7) \quad \Delta \tilde{H} = \tilde{F} = F, \quad \tilde{H}|_{\partial A} = \tilde{f} = f.$$

Entonces, $\Delta(H - \tilde{H}) = 0, (H - \tilde{H})|_{\partial A} = 0$. Luego, $V := H - \tilde{H}$ es una función armónica en A , continua en \bar{A} , que se anula en el contorno y por tanto $V = 0$. O sea,

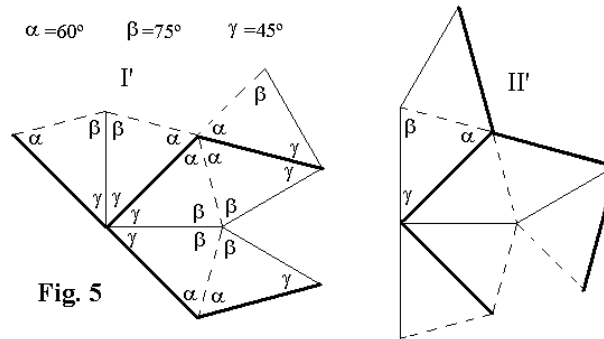
$$(8) \quad H(x_1, x_2) = -H(x_1, -x_2).$$

(8) implica que H se anula en I .

Sea ahora ϕ como en (3) y Φ como en (4); entonces $\Phi = \tilde{\Phi}$. Sea $F := \lambda\Phi$ en A , $f = 0$ en ∂A y H la solución correspondiente de (6). Es decir, en G , H satisface $\Delta H = F = \lambda\Phi$ con $H=0$ en el contorno de G . En consecuencia, $H=\phi$ en G . Como H verifica (8), vale $H=\Phi$ en A . O sea, Φ verifica $\Delta\Phi = \lambda\Phi$ en A , $\Phi = 0$ en ∂A y pertenece a $C^1(A) \cap C(\bar{A})$. Pero entonces $F = \lambda\Phi$ pertenece a este espacio y $\Phi \in \mathcal{S}(A)$. O sea, Φ es una autofunción clásica para el autovalor λ del problema de Dirichlet en A , QED.



A continuación definimos una biyección de las autofunciones de la región I correspondientes al autovalor λ con las autofunciones de la región II asociadas al mismo autovalor. En la Fig. 4 se muestra a estas dos regiones divididas en triángulos equiláteros con sus tres lados diferenciados de manera tal que cada uno es congruente de una sola manera con otro de tal forma que los triángulos se toquen según lados del mismo tipo y de manera que los triángulos lindantes se presenten simétricamente. Demostraremos que si $N_\lambda^I, N_\lambda^{II}$ son los autoespacios en cuestión existe una inyección $T: N_\lambda^I \rightarrow N_\lambda^{II}$ por lo que $\dim(N_\lambda^I) \leq \dim(N_\lambda^{II})$. En la Fig. 5 los lados gruesos son los más largos de los triángulos y los punteados los más cortos.



Sea ϕ una autofunción para el problema de Dirichlet en la región I correspondiente al autovalor λ :

$$(9) \quad \Delta\phi = \lambda\phi \text{ en } I, \phi = 0 \text{ en } \partial I.$$

Cada letra con su signo en la Fig. 4 indica la restricción de ϕ al triángulo donde esa letra se encuentra. Como ϕ se anula en los lados del contorno puede prolongarse a lo largo de cada uno de ellos en forma C^2 y satisfaciendo (9), como fue mostrado en el principio de reflexión de autofunciones. Por ejemplo, en el triángulo superior de I en la Fig. 4, $\phi = c$ se prolonga, a través del lado punteado y del de línea fina, por funciones que denotaremos simplemente como $-c$, ignorando el argumento, pero recordando cuando haga falta el tipo de lado por donde se realiza la extensión. Esto es justamente lo

que distinguirá a una extensión de la otra. Naturalmente ϕ no tiene por qué anularse en el lado grueso y por allí se prolonga como $-A$.

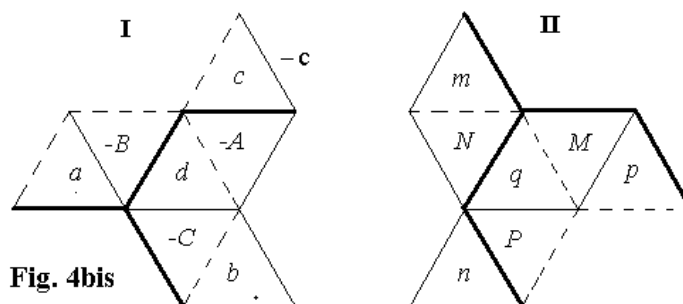
En II de la Fig. 4 se muestra cómo de ϕ se obtiene una autofunción ψ para el mismo autovalor λ para esa región, o sea, que resuelve:

$$(10) \quad \Delta\psi = \lambda\psi \text{ en II,}$$

$$(11) \quad \psi = 0 \text{ en } \partial \text{ II.}$$

Se comienza definiendo $\psi = A + B + C$ en el triángulo central. Pero las funciones A, B, C pueden extenderse como $-d, -B, -b$, respectivamente, a través de la línea punteada.

Por tanto, definimos $\psi = -d - B - b$ en el triángulo a la derecha del central. A través



del lado de línea gruesa, A, B, C se extienden como $-c, -d, -C$, por lo que definimos $\psi = -c - d - C$ en el triángulo a la izquierda del central, y así continuamos. De lo dicho sigue que (10) resulta satisfecha.

Pero observando las prolongaciones hacia el exterior de II vemos que también queda satisfecha (11). Las restricciones de ψ a los triángulos que forman II las llamaremos m, n, p, q, M, N, P . Las definimos algebraicamente así:

$$(12) \quad \begin{cases} q = A + B + C & M = -d - B - b & N = -c - d - C \\ P = -A - a - d & m = c + A + b & n = c + a + B \\ p = C + a + b \end{cases}$$

Como ya notamos cada una de las funciones de la derecha en (12) satisface la ecuación

diferencial (10) en el triángulo correspondiente y es continua hasta su borde.

También se ve que la función q se extiende en forma C^2 como M a través de la línea punteada ya que lo hacen sus sumandos: A como $-d$, B como $-B$ y C como $-b$.

$$\begin{array}{cccccc}
 & A & B & C & a & b & c & d \\
 \mathbf{M} = & \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
 -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
 \end{pmatrix} & \begin{array}{l}
 q \\
 M \\
 N \\
 P \\
 m \\
 n \\
 p
 \end{array} \\
 \det \mathbf{M} = & 24
 \end{array}$$

Siguiendo así se verifica que ψ satisface (10) en todo II. Además, $\psi = 0$ en cada segmento del borde de II; p. ej., m se anula en el lado fino de su triángulo pues allí se anula cada uno de sus sumandos mientras que en el lado grueso $c + A = c - (-A) = 0$ y b es cero. Por tanto se verifica que ψ satisface (11).

Las ecuaciones (12) forman un sistema lineal en las variables A, B, C, a, b, c, d . Su matriz \mathbf{M} tiene determinante no nulo, luego la transformación T es uno a uno.

El procedimiento puede repetirse de II a I simplemente observando que II y I se intercambian por una reflexión. Por ejemplo, definiendo $d = -N - M - P$, $c = m - N + n$, etc. Luego, $\dim(N_{\lambda}^I) = \dim(N_{\lambda}^{II})$. Lo interesante radica en que el procedimiento puede repetirse en regiones obtenidas por deformación de I y II como I' y II' de la figura 5, con lo que se respondería negativamente al problema de Kac.

TEOREMA 6. Hay dos tambores de Jordan con las mismas áreas y perímetros, no congruentes e isoespectrales.

CAPÍTULO 3

El operador de Sturm-Liouville $(-\frac{1}{k(x)})\Delta_x$ en una región de Jordan

3.0. El contorno de ciertas regiones planas. Las regiones planas D que consideraremos las supondremos *acotadas*. En este Capítulo 3, D será una región de Jordan por lo que su área $|D|$ = medida plana de Lebesgue, es finita y positiva. Una región de Jordan se dirá *perimetrizable* si su contorno J tiene longitud finita, $\langle J \rangle = \langle J \rangle < \infty$.

DEFINICIÓN 1. De una región de Jordan D se dirá que posee la *propiedad S_ε* si el conjunto abierto $A(t) := \{p \in D : \text{dist}(p, \partial D) < t\}$, $t > 0$, es tal que su área $|A(t)| = O(t^\varepsilon)$, para cierto $\varepsilon \in (0,1]$ fijo y $t \rightarrow 0$

Una región de Jordan perimetrizable tiene la propiedad S_1 . Obsérvese que una región de Jordan puede no tener la propiedad S_ε para ningún $\varepsilon \in (0,1]$. En efecto, dado $\varepsilon \in (0,1)$ hay regiones de Jordan con $|J| = 0$, $\langle J \rangle = \infty$, tales que $|A(t)| \geq M|\log t|^{-\varepsilon}$.

Nuestro objetivo principal es probar el

TEOREMA 1. Sea D una región de Jordan con la propiedad S_ε y $k(x) \in \mathcal{L}_\alpha(D)$. Entonces, los autovalores del problema de Dirichlet para el operador de Sturm-Liouville verifican, para $n \rightarrow \infty$, $\lambda_n \int_D k(p) dp \sim 4\pi n$.

De este teorema se deduce el, (cf. **0.3.2**),

TEOREMA 2. Sea D una región de Jordan y $k(x) \in \mathcal{L} = \mathcal{L}_\alpha(D)$.

Si el contorno J tiene dimensión de Minkowski $\mathbf{d} < 2$ entonces los autovalores del problema $\Delta u + \lambda k(x)u = 0, u \in \mathcal{S}(D)$, verifican $\lambda_n \int_D k(x) dx \sim 4\pi n$.

En efecto, este teorema sigue del T. 1 y el siguiente T. 3.

TEOREMA 3. Si $\mathbf{d} \in [1,2)$ entonces dado $\varepsilon > 0 \exists t_0 = t_0(\varepsilon) < 1$ tal que $\forall t \in [0, t_0(\varepsilon))$ se verifica $|A(t)| \leq t^\eta$ cualquiera sea $\eta \in (0, 2 - \mathbf{d} - \varepsilon]$.

DEMOSTRACIÓN. Como el contorno tiene área 0 podemos suponer $0 < t < 1$. Por definición $\mathbf{d} = \overline{\dim}_B J := 2 + \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{\log |V(t)|}{|\log t|}$, (cf. **0.3.2**). Sea $A(t) = \{x \in D : \exists y \in$

$J: |x - y| < t$. Entonces $\mathbf{d} - 2 \geq \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{\log|A(t)|}{|\log t|}$. Supongamos que $t > 0$ es bastante pequeño de manera que $(0 <) |A(t)| < 1$. La desigualdad $\overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{\log|A(t)|}{|\log t|} \leq \mathbf{d} - 2$ implica $\frac{\log|A(t)|}{|\log t|} < \mathbf{d} - 2 + \varepsilon$ si $t < t_0(\varepsilon)$. Por tanto, $\log|A(t)| < (-\mathbf{d} + 2 - \varepsilon)\log t$. Luego, $|A(t)| \leq t^{2-\mathbf{d}-\varepsilon}$. En consecuencia, $|A(t)| \leq t^\eta$, QED.

3.1. El núcleo de Green $G_k(p, q; \lambda)$ del operador $-(\Delta + \lambda k)$ para $\lambda < 0$. Es decir, para $\lambda = -\chi^2 = -t$, $\chi > 0$. Dados λ , $k(q) \in Lip_+(D)$, $\mathcal{L}: = \Delta + \lambda k$ es la perturbación de Δ por el sumando $\lambda k(q)$. Luego $G_k(p, q; \lambda)$ será el núcleo de Green de $-\mathcal{L}$.

Sea $\{\phi_n\}$ la familia de autofunciones del operador de Sturm-Liouville, (§1.9), $\phi_n = \phi_n(\cdot) = \phi_n(\cdot; k)$, ortonormales respecto al peso k . Como

$$-(\Delta + \lambda k)\phi_n = (\lambda_n - \lambda)k\phi_n,$$

el núcleo de Green $G_k(p, q; \lambda)$ deberá satisfacer la relación:

$$\int_D G_k(p, q; \lambda)\phi_n(q)k(q)dq = \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n - \lambda}.$$

O sea, respecto al sistema $\{\phi_n(q)\}$ y el peso k , deberá valer: $c_n(G_k) = \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n - \lambda}$.

DEFINICIÓN 1. $G_k(p, q; \lambda): = \sum \phi_n(p)\phi_n(q)/(\lambda_n - \lambda)$.

Para $\lambda = 0$ tenemos, según esta definición, $G_k(p, q; 0): = \sum \phi_n(p)\phi_n(q)/\lambda_n$, por lo que $G_k(p, q; 0) = G(p, q)$, el núcleo de Green del operador $-\Delta$, (ver (9) §1.9). Entonces

$$(1) \quad G_k(p, q; \lambda) = G(p, q) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(p)\phi_n(q)/(\lambda_n(\lambda_n - \lambda)) = G(p, q) + F_k(p, q; \lambda).$$

En vista de (10) §1.9, $F_k(p, q; \lambda)$ es acotada en $\overline{D} \times \overline{D}$.

$G_k(p, q; \lambda)$ es simétrica y define un operador Hilbert-Schmidt en $L^2(D)$,

DEFINICIÓN 2. $(G_t^{(1)}u)(p): = \int_D G_k(p, q; -t)u(q)dq$.

De las definiciones resultan, para todo p y todo n ,

$$(2) \quad c_n(G_k) = \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n - \lambda}, \quad c_n(F_k) = \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n - \lambda}, \quad c_n(G) = \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n}.$$

DEFINICIÓN 3. $(F_t f)(p): = \int_D F_k(p, q; -t)f(q)dq$.

El operador $G_t^{(1)}$ puede escribirse como la suma de dos operadores:

$$(3) \quad G_t^{(1)} = G_0^{(1)} + F_t.$$

$G_0^{(1)}$ es el operador G del teorema 1, §1.0, continuo de $L^2(D)$ en $C_0(\bar{D})$. Más aún, vale el

TEOREMA 1. $G_0^{(1)}$ es completamente continuo de $L^2(D)$ en $C_0(\bar{D})$.

En efecto, esto sigue de una aplicación del teorema de Arzelá-Ascoli en vista de

$$(4) \quad \left| \int_D (G(p, q) - G(p', q))u(q) dq \right| \leq \|u\|_2 \left(\int_D |G(p, q) - G(p', q)|^2 dq \right)^{1/2}$$

y del siguiente

LEMA 1. Sea $d(p, p') := \left(\int_D |G(p, q) - G(p', q)|^2 dq \right)^{1/2}$ para $p, p' \in \bar{D}$. Entonces

$$(5) \quad \sup\{d(p, p') : |p - p'| \leq \delta\} \rightarrow 0 \quad \text{para } \delta \rightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN. $d(p, p')$ es una pseudométrica en \bar{D} que verifica $\lim_{p \rightarrow p_0} d(p, p_0) = 0$

para todo $p_0 \in \bar{D}$. En efecto, esto se ve descomponiendo

$$\int_D = \int_{D \cap \{|p_0 - q| < \varepsilon\}} + \int_{D \cap \{|p_0 - q| \geq \varepsilon\}} = I_1 + I_2.$$

Usando *vi*) de §1.0 vemos que $I_1 = o(1)$ para $\varepsilon \rightarrow 0$. Recurriendo al Teorema de Lebesgue de la convergencia dominada deducimos que $I_2 \rightarrow 0$ para $p \rightarrow p_0$.

Luego, dados $\eta > 0$ y $p_0 \in \bar{D}$, existe $r(p_0) > 0$ tal que $p \in B_{r(p_0)}(p_0) \Rightarrow d(p, p_0) < \eta$.

Un argumento de compacidad permite ahora deducir la existencia de un $r > 0$ tal que para todo $p' \in \bar{D}$: $|p - p'| < r \Rightarrow d(p, p') < 2\eta$. De esto se deduce (5), QED.

Tenemos también y con $M_0 = 2C\sqrt{\|k\|_\infty}$ (cfr. *vii*) Teorema 1 §1.0), que

$$\begin{aligned} \left| \sum_1^\infty \left(\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2} - \frac{\phi_n^2(p')}{\lambda_n^2} \right) \right| &\leq \sum \left| \frac{\phi_n(p) + \phi_n(p')}{\lambda_n} \right| \left| \frac{\phi_n(p) - \phi_n(p')}{\lambda_n} \right| \leq \\ &\leq M_0 \left(\sum \left| \frac{\phi_n(p) - \phi_n(p')}{\lambda_n} \right|^2 \right)^{1/2} \leq M_0 \sqrt{\|k\|_\infty} \left(\int_D |G(p, q) - G(p', q)|^2 dq \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\sum \left| \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n} \right|^2 \in C_0(\bar{D})$. Del teorema de Dini sigue que

$$(6) \quad \sum_N^\infty \left| \frac{\phi_n}{\lambda_n} \right|^2 \downarrow 0, \text{ uniformemente para } N \rightarrow \infty.$$

Podemos deducir entonces que vale el

TEOREMA 2. $F_k(p, q; \lambda) = \sum \frac{\lambda \phi_n(p)}{\lambda_n} \frac{\phi_n(q)}{\lambda_n - \lambda} \in C(\bar{D} \times \bar{D})$. Además $F_k(p, q; \lambda) = 0$ si $p \in \partial D$ ó $q \in \partial D$.

F_t , que definimos como $F_t f(\cdot) = \int_D F_k(\cdot, q; -t) f(q) dq$, es un operador acotado de $L^2(D)$ en $L^\infty(D)$. Del Teorema 2 sigue que F_t es un operador *completamente continuo* de $L^2(D)$ en $C_0(\bar{D})$. Vale entonces el

TEOREMA 3. $G_t^{(1)}$ es un operador completamente continuo de $L^2(D)$ en $C_0(\bar{D})$.

3.2. Propiedades del núcleo de Green de $-\mathcal{L}$. Recordemos nuestras *hipótesis*: $\lambda = -t < 0$, D de Jordan arbitraria, k en $Lip_{loc}(D)$ con $inf_D(k) > 0$. Por estar en Lip_{loc} , k es acotada. Es decir, $k \in Lip_+(D)$.

TEOREMA 1. Para el núcleo $G_k(p, q; \lambda)$ valen las siguientes propiedades i)-vi)

i) Si $u \in C_0(\bar{D})$ y, en el sentido de $D'(D)$, vale $\mathcal{L}u = (\Delta + \lambda k)u = \phi \in L^2(D)$, entonces para todo $p \in \bar{D}$,

$$(1) \quad u(p) = -G_t^{(1)} \phi = - \int_D G_k(p, q; \lambda) \phi(q) dq$$

ii) $G_k(p, q; \lambda) = G_k(q, p; \lambda)$ para todo $(p, q) \in D \times D$.

iii) Si $\phi \in L^2(D)$ y $u(p) := -\left(G_t^{(1)} \phi\right)(p)$, $p \in \bar{D}$, entonces $u \in C_0(\bar{D})$. Además, en el sentido de las distribuciones en D : $\mathcal{L}u = \phi$.

iv) Para cierta constante $c_1 \geq diam D$ vale

$$-\|F_k\|_\infty \leq G_k(p, q; \lambda) \leq \log \frac{c_1}{|p-q|}.$$

v) $\int_D |G_k(p, q; \lambda)|^2 k(q) dq$ y $\int_D |G_k(p, q; \lambda)|^2 dq$ son uniformemente acotadas en $p \in \bar{D}$.

vi) $G_k(\cdot, \cdot; \lambda) \in L^2(D \times D; k(p).k(q))$.

DEMOSTRACIÓN. De la definición de G_k sigue ii). Del Teorema 2 §3.1 y vi) Teorema 1, §1.0 sigue iv). iv) implica v) y v) implica vi).

Veamos iii). Si $u := -G_t^{(1)} \phi$ entonces por Teorema 3 §3.1, $u \in C_0(\bar{D})$. De (3) §3.1

obtenemos: $u(p) = -\sum c_n \left(\frac{\phi}{k}\right) \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n - \lambda}$, donde la serie converge uniformemente, (cf. (6)

§3.1). Como $-(\Delta + \lambda k)\phi_n = (\lambda_n - \lambda)k\phi_n$, obtenemos, en $D'(D)$,

$$(2) \quad \mathcal{L}u = -(\Delta + \lambda k)(-u) = \sum \frac{\lambda_n - \lambda}{\lambda_n - \lambda} \phi_n k \cdot c_n \left(\frac{\phi}{k} \right) = k \cdot \sum \phi_n c_n \left(\frac{\phi}{k} \right) = k \frac{\phi}{k} = \phi.$$

i) Sean $\phi = \mathcal{L}u$, $v = -G_t^{(1)} \phi$. Por iii), $\mathcal{L}v = -\mathcal{L} \int G_k \phi dq = \phi$ en $D'(D)$.

Por tanto, $\mathcal{L}[v - u] = 0$. Como $v - u \in C_0(\bar{D})$, de la siguiente Proposición 1 obtenemos $v = u$, QED.

PROPOSICIÓN 1. Sea μ una constante real, $\Phi \in C_0(\bar{D})$ y $(\Delta + \lambda k + \mu)\Phi = 0$ ($D'(D)$). Entonces $\Phi \in \mathcal{S}(D)$ y si $\lambda k + \mu \leq 0$, $\Phi = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos, $-\Delta\Phi = (\lambda k + \mu)\Phi \in L^\infty$. Por tanto $E * (\lambda k + \mu)\Phi \in C^1$ (Cap. 0) lo que implica que $\Phi \in C^1$ y $(\lambda k + \mu)\Phi \in L^\infty \cap Lip_{loc}$. Nuevamente del Capítulo 0 obtenemos $\Phi \in C^2$. En consecuencia, $\Phi \in \mathcal{S}(D)$ y $-(\Delta + \lambda k)\Phi = \mu\Phi$ en sentido ordinario. Si además $\lambda k + \mu \leq 0$, del Teorema 2, § 0.4.1, de unicidad y continuidad, obtenemos $\Phi = 0$, QED.

NB. La Proposición 1 expresamente dice que el espacio nulo en $D'(D)$ del operador $\Delta + \lambda k$, $\lambda \leq 0$, posee en común con $C_0(\bar{D})$ solamente a la función cero.

PROPOSICIÓN 2. Un núcleo G_k que satisface iii) y vi) para toda $\phi \in C_0^\infty(D)$ es único con esas propiedades.

DEMOSTRACIÓN. Sean A y B dos núcleos que satisfacen la hipótesis. Para $\phi \in C_0^\infty(D)$ se tiene $u = -\int A\phi$, $w = -\int B\phi$ ambas en $C_0(\bar{D})$. De $(\Delta + \lambda k)(v - w) = 0$, por la Proposición 1, obtenemos $u = w$. Luego, $\int (A - B)\phi dq = 0$, por lo que $(A - B)(p, \cdot; \lambda) = 0$ (L^2). Por tanto, $A = B$ a. e. , QED.

En consecuencia, si por otro método puede hallarse un núcleo A_k que verifica iii), vi) y por ejemplo que $A_k \geq 0$, esta misma propiedad la gozará el núcleo G_k .

DEFINICIÓN 1. Definimos el dominio del operador diferencial $-(\Delta + \lambda k)$ en D , D de Jordan, $\lambda \leq 0$, como

$$(1) \quad D_{\Delta + \lambda k}(D) = \left\{ u \in C_0(\bar{D}) : (\Delta + \lambda k)u \in L^2(D) \right\} = \left\{ u \in C_0(\bar{D}) : \Delta u \in L^2(D) \right\}.$$

Es decir, $D_{\Delta + \lambda k} = D_\Delta$. El operador diferencial $\Delta + \lambda k$ en la región de Jordan D con dominio $D_{\Delta + \lambda k}$ es un operador cerrado. Además es biunívoco, pues si $u \in D_{\Delta + \lambda k}$, $(\Delta + \lambda k)u = 0$ entonces, por la Proposición 1, $u = 0$. Por tanto, existe $(\Delta + \lambda k)^{-1}$. Sigue entonces que este es también un operador *cerrado*.

TEOREMA 2. Si $\lambda = -t < 0$ entonces $(\Delta + \lambda k)D_\Delta = L^2$ y para toda $v \in L^2(D)$,

$$(2) \quad ((\Delta + \lambda k)^{-1}v)(p) = -\left(G_t^{(1)}v\right)(p) = -\int_D G_k(p, q; -t)v(q)dq.$$

DEMOSTRACIÓN. Por (1), $(\Delta + \lambda k)D_\Delta \subset L^2$. $(\Delta + \lambda k)D_\Delta \supset L^2$: *iii*) del Teorema 1 dice precisamente que $u = -\left(G_t^{(1)}v\right)(p) \in D_\Delta$ y que $\mathcal{L}u = v$, QED.

En otras palabras, $-G_t^{(1)}$ es el operador de Green de $(\Delta + \lambda k)$ y $-G_k(p, q; \lambda)$ es su núcleo de Green.

PROPOSICIÓN 3. Son equivalentes las proposiciones a) y b) para $\lambda = -t < 0$:

$$a) \Phi \in L^2, \Phi = \mu G_t^{(1)}\Phi, \quad b) \Phi \in \mathcal{S}, -(\Delta + \lambda k)\Phi = \mu\Phi,$$

c) si $\mu \leq |\lambda|k$, $\lambda < 0$ y vale a) entonces $\Phi = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar la equivalencia para $\mu \neq 0$.

$b) \Rightarrow a)$. Sea $\Phi \in \mathcal{S}(D)$. Si $(\Delta + \lambda k)\Phi = -\mu\Phi$, de *i*) T.1 obtenemos $\Phi = G_t^{(1)}(\mu\Phi)$. Por tanto, $\Phi = \mu G_t^{(1)}(\Phi)$.

$a) \Rightarrow b)$. Sea $\Phi \in L^2$ y $\Phi = G_t^{(1)}(\mu\Phi)$. De *iii*) T.1 sigue que $\Phi \in C_0(\bar{D})$ y también que $(\Delta + \lambda k)\Phi = -\mu\Phi$ ($D'(D)$). De la Proposición 1 sigue que $\Phi \in \mathcal{S}(D)$ y que $-(\Delta + \lambda k)\Phi = \mu\Phi$ vale en sentido ordinario, QED.

DEFINICIÓN 3. $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{R}(D)$ es por definición el rango del operador $G_t^{(1)}$.

Por el Teorema 2, $\mathfrak{R}(D) = D_{\Delta + \lambda k}(D)$.

3.3. Aproximación al núcleo de Green $G_k(p, q; \lambda)$ por la función de Kelvin K_0 .

Sean D, k, λ como en el §3.2. Recordemos que para $p \in D, q \in \bar{D}$,

$$F_k(p, q; \lambda) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{(\lambda_n - \lambda)\lambda_n}, \quad G_k(p, q; \lambda) = G(p, q) + F_k(p, q; \lambda)$$

donde $F_k(p, q; \lambda) \in C(\bar{D} \times \bar{D})$. También tenemos,

$$(1) \quad Y_k(p, q; \lambda) := \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\phi_n(p)| \cdot |\phi_n(q)|}{(\lambda_n - \lambda)\lambda_n} \in C(\bar{D} \times \bar{D})$$

Como $(\Delta_q + \lambda k(q))\phi_n = (\lambda - \lambda_n)k(q)\phi_n$ y $\Delta_q G(p, q) = -\delta_p$, en $D'(q \in D)$, resulta que

$$(2) \quad \begin{aligned} & (\Delta_q + \lambda k(q))(-G_k(p, q; \lambda)) = -(\Delta_q + \lambda k)(G(p, q) + F_k(p, q; \lambda)) = \\ & = \delta_p - \lambda k \left[G(p, q) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{\lambda_n} \right] = \delta_p. \end{aligned}$$

O sea, $-\mathcal{L}(G_k(p, \cdot; \lambda)) = \delta_p$. ([...] = 0 vale aún en $L^2(D, k)$ como vimos en §1.9.)

Sea K_0 la función de Kelvin: $K_0(r) := \int_1^\infty e^{-rt}(t^2 - 1)^{-1/2} dt$, que satisface

(3) $K_0(r) = -\log r + (1 - I_0(r)) \log r + P(r)$ con $P(z)$ e $I_0(z)$ enteras en z^2 ,

$$K_0(r) \leq e^{-\frac{r}{2}} K_0(r/2).$$

TEOREMA 1. Para $t > 0$ vale $0 < -K_0'(t) \leq C_0 \frac{e^{-t/2}}{t}$.

DEMOSTRACIÓN. $-K_0'(t) = \int_1^\infty e^{-ut} \frac{u}{(u^2-1)^{1/2}} du \leq e^{-t/2} \int_1^\infty e^{-\frac{ut}{2}} \frac{u}{(u^2-1)^{1/2}} du$

Haciendo el cambio de variable $x = ut$ tenemos

$$-K_0'(t) \leq \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} \int_t^\infty e^{-\frac{x}{2}} \frac{x}{(x^2-t^2)^{1/2}} dx \leq \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} \int_t^\infty e^{-\frac{x}{2}} \frac{x^{1/2}}{(x-t)^{1/2}} dx = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} \int_0^\infty e^{-\frac{v+t}{2}} \frac{\sqrt{v+t}}{\sqrt{v}} dv.$$

Pero

$$\sup_t \int_0^\infty e^{-\frac{v+t}{2}} \frac{\sqrt{v+t}}{\sqrt{v}} dv \leq \max(e^{-x/2} x^{1/2}) \int_0^1 v^{-1/2} dv + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} x^{1/2} dx = C_0 < \infty.$$

Luego, $-K_0'(t) \leq \frac{e^{-t/2}}{t} C_0$,

QED.

De (3) obtenemos

(4) $K_0(|x|) = -\log|x| + Q(|x|)$ donde $Q(r) \in C^1([0, \infty))$, $Q(|x|) \in C^1(R^2)$.

Entonces, la función en q , para $p \in D$, $\frac{1}{2\pi} K_0(\chi|p - q|)$ es tal que

(5) $\frac{1}{2\pi} K_0(\chi|p - q|) + \frac{1}{2\pi} \log|p - q| \in C(\bar{D})$,

y se sabe que en $D'(R^2)$ vale

(6) $-(\Delta_q - \chi^2) \frac{1}{2\pi} K_0(\chi|p - q|) = \delta_p$.

DEFINICIÓN 1. Para $\lambda = -\chi^2 < 0$, $w > 0$, definimos

$$\begin{aligned} H_k^w(p, q; \lambda) &:= -G_k(p, q; \lambda) + \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w|p - q|) = \\ &= -F_k(p, q; \lambda) + \left\{ \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w|p - q|) - G(p, q) \right\}. \end{aligned}$$

Escribiremos cuando no haya lugar a confusión $H(p, q; \lambda)$, o simplemente H , en lugar de $H_k^w(p, q; \lambda)$. Por (5), $H(p, \cdot; \lambda)$ es continua y acotada en \bar{D} .

De la definición de G en §1.0 y, por ejemplo, de la fórmula (4), se deduce la siguiente

PROPOSICIÓN 1. $H_k^w(p, q; -\chi^2) \in C(D \times D \times (0 < \chi < \infty) \times (0 < w < \infty))$.

De (2) y (6) siguen las siguientes relaciones (8) donde $\mathcal{L} \equiv \Delta_q + \lambda k(q)$,

$$(7) \quad G_k(p, q; \lambda) = \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w |p - q|) - H_k^w(p, q; \lambda) = G(p, q) + F_k(p, q; \lambda)$$

$$(8) \quad \begin{cases} H_k^w(p, q; \lambda) = H_k^w(q, p; \lambda), & (p, q) \in D \times D \\ \mathcal{L}(H) = -\lambda(w^2 - k(q)) \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w |p - q|) & \text{en } D' (q \in D) \\ H_k^w(p, \tilde{q}; \lambda) = \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w |p - \tilde{q}|), & (p, \tilde{q}) \in D \times \partial D \end{cases}$$

Es sólo necesario verificar la segunda igualdad que aislamos en el siguiente

TEOREMA 2. $\mathcal{L}(H) = \chi^2(w^2 - k(q)) \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w |p - q|)$.

DEMOSTRACIÓN. De (2) y (6)-(7) obtenemos, respectivamente,

$$\Delta_q G_k = -\delta_p + k(q) \chi^2 G_k,$$

$$\Delta_q G_k = -\delta_p + \chi^2 w^2 \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w |p - q|) - \Delta_q H.$$

Luego, eliminando $-\delta_p$ sigue que,

$$(\Delta_q - \chi^2 k)H = \chi^2 w^2 \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w |p - q|) - k(q) \chi^2 G_k - \chi^2 kH; \text{ por tanto,}$$

$$\mathcal{L}(H) = \chi^2 w^2 \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w |p - q|) - k \chi^2 (G_k + H) \quad \text{QED.}$$

3.4. Acotación de la función $H_k^w(p, q; -\chi^2)$. En lo que sigue de este capítulo supondremos que vale la siguiente (Def. 3, §3.3):

HIPÓTESIS A. $k(q) \in \mathcal{L} = \mathcal{L}_\alpha(D)$.

Es decir $k \in Lip_+(D)$ y para cierto $M(p) \in L^1(D)$ vale $\sup_{q \in D} \frac{|k(p) - k(q)|}{|p - q|^\alpha} = M(p) < \infty$.

Tenemos entonces la siguiente estimación de $\mathcal{L}(H_k^w)$ y para $w = \sqrt{k(p)}$,

TEOREMA 1. $\mathcal{L}(H_k^{\sqrt{k(p)}}) = O(1)M(p)\chi^{2-\alpha}$.

DEMOSTRACIÓN. Por Teorema 2 §3.3 tenemos,

$$\mathcal{L}\left(H_k^{\sqrt{k(p)}}\right) = \chi^2(k(p) - k(q)) \frac{1}{2\pi} K_0\left(\chi \sqrt{k(p)} |p - q|\right)$$

Luego, por estar k en \mathcal{L} ,

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}\left(H_k^{\sqrt{k(p)}}\right) \right| &= \chi^{2-\alpha} \frac{|k(p) - k(q)|}{|p - q|^\alpha} \cdot \left\{ \frac{1}{k(p)^{\alpha/2}} \left(\chi \sqrt{k(p)} |p - q|\right)^\alpha \frac{1}{2\pi} K_0\left(\chi \sqrt{k(p)} |p - q|\right) \right\} = \\ &= \chi^{2-\alpha} \frac{|k(p) - k(q)|}{|p - q|^\alpha} \cdot r(p, q; \lambda) \leq \chi^{2-\alpha} M(p) \cdot r(p, q; \lambda) \quad . \end{aligned}$$

$t^\alpha K_0(t)$ es una función acotada en $(0, \infty)$ que tiende a cero para $t \rightarrow 0$. Luego,

$$0 \leq r(p, q; \lambda) = \frac{1}{k(p)^{\alpha/2}} \left(\chi \sqrt{k(p)} |p - q| \right)^\alpha \frac{1}{2\pi} K_0 \left(\chi \sqrt{k(p)} |p - q| \right) \leq C < \infty$$

En consecuencia, $|\mathcal{L}(H)| \leq CM(p)\chi^{2-\alpha}$,

QED.

Llamemos $R := \sup_{D \times D \times (0 < \chi < \infty)} r(p, q; -\chi^2) \in (0, \infty)$. Por lo visto, $R < \infty$. Sean $0 < \beta < \alpha$, $\mathbf{a}(\chi; p) \equiv \mathbf{a}(\chi) := \gamma \chi^{-\beta}$, $\gamma = \gamma(p)$ una constante a definir. Entonces, de la demostración del Teorema 1 obtenemos para $u(q) = H_k^w(p, q; \lambda) + \mathbf{a}(\chi)$,

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(u) &= \mathcal{L}(H + \mathbf{a}(\chi)) = \mathcal{L}(H) + \lambda k(q) \mathbf{a}(\chi) = \\ &= \chi^{2-\alpha} \frac{k(p)-k(q)}{|p-q|^\alpha} r(p, q; \lambda) - \chi^2 k(q) \mathbf{a}(\chi) = \chi^{2-\beta} \left[\frac{k(p)-k(q)}{|p-q|^\alpha} r(p, q; \lambda) - k(q) \gamma \right] =: f(q). \end{aligned}$$

Sea $h > 0$ y definamos $\gamma = \mathbf{a}(\chi) \chi^\beta := \frac{M(p)R}{h \inf k(q)} (> 0)$. Si χ es tal que $\chi^{\alpha-\beta} \geq h$

tenemos $f(q) \leq 0$. Pero en $\tilde{q} \in \partial D$, $H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, \tilde{q}; \lambda) + \mathbf{a}(\chi) > 0$. Luego, o bien $u \geq 0$,

o por b) del principio general de máximo (§0.4.2) tenemos $\min_{\bar{D}}(H + \mathbf{a}(\chi)) =$

$\min_{\partial D}(H + \mathbf{a}(\chi)) \geq 0$. Obtenemos entonces $H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, q; \lambda) \geq -\gamma/\chi^\beta$ para todo

$q \in D$ y por tanto para todo $(p, q) \in D \times D$, que es la segunda desigualdad del siguiente

TEOREMA 2. Sea $l(p) := \text{dist}(p, \partial D)$. Sea $\gamma = \gamma(p) := \frac{M(p)R}{h \inf k(q)}$, $p, q \in D$, donde

$\chi \geq h^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$, h fijo positivo y $0 < \beta < \alpha$. Vale

$$(2) \quad \gamma \chi^{-\beta} + \frac{1}{2\pi} K_0(\chi \sqrt{k(p)} l(p)) \geq H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, q; \lambda) \geq -\gamma \chi^{-\beta}.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos la primera desigualdad. Pongamos en (1), $\mathbf{a}(\chi; p) := -\gamma \chi^{-\beta}$. En este caso, $f(q) \geq 0$. Queremos demostrar que se verifica

$$(3) \quad H + \mathbf{a}(\chi) \leq \frac{1}{2\pi} K_0(\chi \sqrt{k(p)} l(p))$$

Si $\max_{\bar{D}}(H + \mathbf{a}(\chi)) \leq 0$ no hay nada que probar. En caso contrario, por el principio general de máximo, $\max_{\partial D}(H + \mathbf{a}) = \max_{\bar{D}}(H + \mathbf{a})$. Pero si $\tilde{q} \in \partial D$,

$$\begin{aligned} H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, \tilde{q}; \lambda) + \mathbf{a}(\chi) &\leq H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, \tilde{q}; \lambda) = \frac{1}{2\pi} K_0(\chi \sqrt{k(p)} |p - \tilde{q}|) \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} K_0(\chi \sqrt{k(p)} l(p)). \end{aligned}$$

Esta última cota resulta de la monotonía de K_0 y es independiente de $q \in D$. Por tanto

vale (3). Luego, $H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, q; \lambda) \leq \gamma \chi^{-\beta} + \frac{1}{2\pi} K_0(\chi \sqrt{k(p)} l(p))$, QED

TEOREMA 3. Sean $0 < \beta < \alpha (\leq 1)$, $p \in D$, $l(p) = \text{dist}(p, \partial D)$. Entonces valen

i) $H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, p; -\chi^2) \in C((p, \chi) \in D \times (0, \infty))$,

y si $\chi \geq h^{\frac{1}{\alpha-\beta}} (> 0)$,

ii) $-\frac{M(p)R}{h \inf k} \chi^{-\beta} \leq H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, p; -\chi^2) \leq \frac{M(p)R}{h \inf k} \chi^{-\beta} + \frac{1}{2\pi} K_0(\chi \sqrt{k(p)} l(p))$.

DEMOSTRACIÓN. i) sigue de la Proposición 1, §3.3. Usando nuevamente esta proposición y (2) se obtiene ii), QED.

3.5. La función $F(p; \lambda)$. Para demostrar, siguiendo a Carleman, el teorema de Weyl del problema clásico de Dirichlet para el operador de Sturm-Liouville con peso $k(x) \in \mathcal{L}(D)$, D una región de Jordan, estudiaremos primero la función $F(p; \lambda) := F_k(p, p; \lambda)$, (cf. §3.3). Integrando respecto de p a

(1) $k(p) \int_D G^2(p, q) k(q) dq = \sum \frac{\phi_n^2(p) k(p)}{\lambda_n^2}$

obtenemos $\sum \frac{1}{\lambda_n^2} = \int_{D \times D} G^2(p, q) k(q) k(p) dq dp$.

Luego, $\sum \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$, $\sum_{1 < n} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \infty$.

Entonces, para infinitos valores de n vale:

$\frac{1}{\lambda_n^2} \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n$. Definimos,

$Q := \{n: \frac{1}{\lambda_n^2} \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n\}$

y para $n \in Q$, $R_n := \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{2}$. Si $\lambda \in \Gamma_n := \{\lambda: |\lambda| = R_n\}$, vale $\lambda_{n+1} \leq 2R_n = 2|\lambda|$.

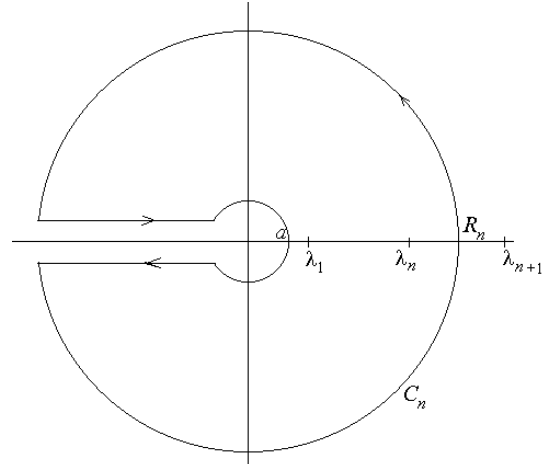
Como $1/(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \leq (\lambda_{n+1})^2$ tenemos

(2) $\max_h \left| \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda} \right| \leq \max_h \left| \frac{\lambda_h}{\lambda_h - R_n} \right| \leq \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - R_n} = \frac{2\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \leq 2\lambda_{n+1}^3 \leq 16|\lambda|^3$.

Luego, si $\lambda \in \Gamma_n$: $0 < \left| \frac{1}{(\lambda_m - \lambda)\lambda_m} \right| \leq \frac{1}{\lambda_m^2} \max_h \left| \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda} \right| \leq 16 \frac{|\lambda|^3}{\lambda_m^2}$.

Se deduce entonces que $F(p; \lambda) = O(|\lambda|^4)$ para $p \in \bar{D}$ fijo, $\lambda \in \Gamma_n$, $n \in Q$. En efecto,

como $F(p; \lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(p)}{(\lambda - \lambda_n) \lambda_n}$, de (1) sigue



$$(3) \quad |F(p; \lambda)| \leq 16|\lambda|^4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi_m^2(p)}{\lambda_m^2} \leq C|\lambda|^4.$$

Por otra parte, de (3) y (7) §3.3 y para $w = \sqrt{k(p)}$ obtenemos,

$$\begin{aligned} F(p; \lambda) &= \left\{ \frac{1}{2\pi} K_0(\chi\sqrt{k(p)}|p-q|) - G(p, q) \right\}_{q=p} - H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, p; \lambda) = \\ &= -\frac{\log(\chi\sqrt{k(p)})}{2\pi} + d + H(p, p) - H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, p; \lambda), \end{aligned}$$

donde d es una constante (cf. (5) §3.3) y $H(p, \cdot)$ es la función armónica del núcleo de Green G . Vale entonces el siguiente teorema, (cf. Teor. 3, §3.4),

TEOREMA 1. Sea $\rho = \frac{R}{h \inf k}$. Si $0 < \beta < \alpha$, $\chi^{\alpha-\beta} \geq h$, entonces

$$F(p; \lambda) = \sum \frac{\phi_n^2(p)}{(\lambda_n - \lambda)(\lambda_n/\lambda)} = \left[-\frac{\log \chi}{2\pi} + d + H(p, p) \right] - \frac{\log k(p)}{4\pi} - H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, p; \lambda),$$

$$\text{con} \quad \left| H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, p; \lambda) \right| \leq \rho M(p) \chi^{-\beta} + \frac{1}{2\pi} K_0(\chi\sqrt{k(p)}l(p)).$$

3.6. La función $\phi(p; s)$. Definimos, para $n \in Q$, la curva C_n como en la figura y donde $a \in (0, \lambda_1)$. Sea s un número complejo con $\text{Re } s > 6$. Estudiaremos para estos la función

$$\begin{aligned} (1) \phi(p; s) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{F(p; \lambda)}{\lambda^s} d\lambda = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{-1}{\lambda^s} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda \phi_j^2(p)}{\lambda_j(\lambda - \lambda_j)} d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_j \leq R_n} \frac{\phi_j^2(p)}{\lambda_j^s}, \end{aligned}$$

(cf. (6), §3.1). La integral sobre Γ_n en (1) es $o(\lambda_n^{-1})$ pues $|F(p; \lambda)| = O(1)|\lambda|^4$. Luego, para $\text{Re } s > 6$,

$$(2) \quad -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n \cup \Gamma_n} F(p; \lambda) \frac{d\lambda}{\lambda^s} \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j^2(p)}{\lambda_j^s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_j \leq R_n} \frac{\phi_j^2(p)}{\lambda_j^s}, \quad n \rightarrow \infty, n \in Q.$$

$$\begin{aligned} \text{Pero,} \quad - \int_{C_n \cup \Gamma_n} \frac{F(p; \lambda)}{\lambda^s} d\lambda &\rightarrow \int_a^a F(p; t e^{-i\pi}) \frac{e^{-i\pi}}{(t e^{-i\pi})^s} dt + \int_{-\pi}^{\pi} F(p; a e^{i\varphi}) \frac{a e^{i\varphi}}{(a e^{i\varphi})^s} id\varphi + \\ &+ \int_a^{\infty} F(p; t e^{i\pi}) \frac{e^{i\pi}}{(t e^{i\pi})^s} dt = \int_a^{\infty} F(p; -t) t^{-s} (e^{is\pi} - e^{-is\pi}) dt + \int_{-\pi}^{\pi} F(p; a e^{i\varphi}) (a e^{i\varphi})^{1-s} id\varphi. \end{aligned}$$

Luego, como $\text{Re } s > 6$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n \setminus \Gamma_n} \frac{F(p; \lambda)}{\lambda^s} d\lambda = \frac{\text{sen } s\pi}{\pi} \int_a^\infty F(p; -t) t^{-s} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi F(p; ae^{i\varphi}) (ae^{i\varphi})^{1-s} d\varphi.$$

El último término define una función Z_0 ,

$$(3) \quad 2\pi \cdot Z_0(p; s) = \int_{-\pi < \varphi < \pi} F(p; ae^{i\varphi}) e^{(1-s)\log(ae^{i\varphi})} d\varphi = \\ = \int_{-\pi < \varphi < \pi} e^{(2-s)\log(ae^{i\varphi})} \sum_1^\infty \frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n (\lambda_n - ae^{i\varphi})} d\varphi = \sum \frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2} \int_{-\pi < \varphi < \pi} \frac{\lambda_n e^{(2-s)\log(ae^{i\varphi})}}{\lambda_n - ae^{i\varphi}} d\varphi.$$

La última integral, si s varía en un compacto K , es en módulo uniformemente acotada en n y s . Además define una función entera de s (cf. (6) §3.1).

Luego, la última serie converge uniformemente en $p \in \bar{D}$ y $s \in K$. Por tanto $Z_0(p; s)$ es una *función continua* en $(p, s) \in \bar{D} \times C$ y *analítica entera* en s para cada $p \in \bar{D}$.

Tenemos ahora (cf. §3.3 y T. 1, §3.5), para $F(p; \lambda) = F_k(p, p; \lambda)$ el

TEOREMA 1. Si $\text{Re } s > 6$ entonces

$$(4) \quad \phi(p; s) := \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{F(p; \lambda)}{\lambda^s} d\lambda = \sum_{j=1}^\infty \frac{\phi_j^2(p)}{\lambda_j^s} = \frac{\text{sen } s\pi}{\pi} \int_a^\infty F(p; -t) t^{-s} dt + Z_0(p; s),$$

donde $Z_0(p; s)$ es analítica entera en s para cada $p \in \bar{D}$.

TEOREMA 2. Para cada $p \in D$ y con $Z(p; s)$ holomorfa en $\text{Re } s > 1 - \alpha/2$, vale:

$$(5) \quad \phi(p; s) = \frac{1}{4\pi(s-1)} + Z(p; s).$$

DEMOSTRACIÓN. La serie en (4) es igual a $-\sum_1^\infty \frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2} \left[\int_a^\infty \frac{t^{1-s}}{1+t/\lambda_n} dt \right]$. Esta es una función holomorfa en $\text{Re } s > 2$, pues el corchete es uniformemente acotado en n y s para $\text{Re } s \geq 2 + \varepsilon > 2$ y holomorfo en s allí.

Por otra parte se tiene (cf. T.1 §3.5),

$$(6) \quad F(p; \lambda) = \left[-\frac{\log \chi}{2\pi} + d + H(p, p) - \frac{\log k(p)}{4\pi} \right] - H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, p; \lambda).$$

Luego, para $\text{Re } s > 2$,

$$(7) \quad \int_a^\infty F(p; -t) t^{-s} dt = \\ = \left[-\int_a^\infty \frac{\log \sqrt{t}}{2\pi t^s} dt + \left(d + H(p, p) - \frac{\log k(p)}{4\pi} \right) \int_a^\infty \frac{dt}{t^s} \right] - \int_a^\infty \frac{H(p, p; -t)}{t^s} dt$$

$$= L(p; s) - \int_a^\infty \frac{H(p, p; -t)}{t^s} dt.$$

El corchete $L(p; s)$, luego de las integraciones, se reduce a:

$$(8) \quad L(p; s) = \left(\frac{\log \sqrt{a}}{2\pi(1-s)} - \frac{1}{4\pi(1-s)^2} - \frac{d + H(p, p)}{1-s} + \frac{\log k(p)}{4\pi(1-s)} \right) a^{1-s}.$$

Si en el T.1 §3.5 se elige $h < a^{\frac{\alpha-\beta}{2}}$ entonces dicho teorema se aplica en $t = \chi^2 \geq a$. En consecuencia la función $Z_1(p; s) := \int_a^\infty \frac{H(p, p; -t)}{t^s} dt$ es, para cada $p \in D$, una función holomorfa en $\operatorname{Re} s > 1 - \beta/2$ pues K_0 es una función positiva, monótona decreciente, que crece como $\log \frac{1}{x}$ para $x \downarrow 0$ y decrece exponencialmente para $x \uparrow \infty$.

Como $\beta < \alpha$ es arbitraria, $\phi(p; s)$ es prolongable a $\operatorname{Re} s > 1 - \alpha/2$ y vale allí

$$(9) \quad \phi(p; s) = \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi} L(p; s) + \left(-\frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi} Z_1(p; s) + Z_0(p; s) \right) = \frac{T}{s-1} + Z(p; s)$$

donde T es el residuo en $s=1$ de la función meromorfa $\frac{\operatorname{sen}(s\pi)}{\pi} L(p; s)$, $s \in \mathbf{C}$, que tiene un único polo en \mathbf{C} . Este residuo vale

$$T = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi} L(p; s) = \lim_{s \rightarrow 1} -\frac{\operatorname{sen} s\pi}{4\pi^2(s-1)} a^{1-s} = \frac{1}{4\pi}.$$

Luego, $Z(p; s) := \left\{ \frac{\operatorname{sen}(s\pi)}{\pi} L(p; s) - \frac{1}{4\pi(s-1)} \right\} + (\dots)$, es para cada $p \in D$, holomorfa en

$\operatorname{Re} s > 1 - \alpha/2$, por lo que tenemos $\phi(p; s) = \frac{1}{4\pi(s-1)} + Z(p; s)$, QED.

3.7. Integración de las funciones $H(p, p)t^{-s}$ y $H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, p; -t)t^{-s}$. El objetivo es integrar estas funciones sobre $D \times (a, \infty)$ respecto de la medida $k(p)dp \times dt$.

Supondremos a partir de este momento que además de la Hipótesis A vale la siguiente

HIPÓTESIS B. D es una región de Jordan con la propiedad S_ε , (Def. 1, §3.0).

TEOREMA 1. Sea $k(x) \in \mathcal{L}_\alpha(D)$ y D una región de Jordan con la propiedad S_ε .

Entonces,

a) $H(p, p) \in L^1(D; k)$,

b) $\theta_0(p; s) := \int_a^\infty H(p, p)t^{-s} dt$ es tal que $(\operatorname{sen} s\pi) \int_D \theta_0(p; s)k(p)dp$ es entera.

DEMOSTRACIÓN. a) Veamos que $H(p, p) \in L^1(D)$. De vi) Teor. 1, §1.0, deducimos que existe un número $M \geq \text{diam } D$ tal que $|H(p, q)| \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{M}{|p-q|}$. Si $q \in \partial D$ vale

$$|H(p, q)| \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{M}{l(p)}.$$
 Luego,

$$(1) \quad \int_D |H(p, p)| dp \leq \frac{1}{2\pi} \int_D \log \frac{M}{l(p)} dp.$$

La última integral es igual a

$$(2) \quad \int_D dp \int_{l(p)}^M \frac{dt}{t} = \int_0^M \frac{dt}{t} \int_D I_{\{t > l(p)\}} dp = \int_0^M |\{p \in D : t > l(p)\}| \frac{dt}{t} = \\ = \int_0^M |\{p : \text{dist}(p, \partial D) < t\}| \frac{dt}{t} = O(1) \int_0^M t^{\varepsilon-1} dt < \infty.$$

b) Tenemos $\int_a^\infty H(p, p) t^{-s} dt = H(p, p) \frac{a^{1-s}}{s-1}$. Integrando esta última expresión sobre D obtenemos una función holomorfa en $\text{Re } s > 1$. Luego, $a^{1-s} \frac{\text{sen } s\pi}{s-1} \int_D H(p, p) k(p) dp$ se prolonga a una función entera, QED.

TEOREMA 2. Sea $k(x) \in \mathcal{L}_\alpha(D)$ y D una región de Jordan con la propiedad S_ε . Si $\delta < \frac{\inf\{\alpha, \varepsilon\}}{2}$ entonces

$$i) \int_D dp \int_a^\infty \frac{|H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, p; -t)|}{t^{1-\delta}} dt < \infty,$$

ii) $\theta_1(p; s) := \int_a^\infty H_k^{\sqrt{k(p)}}(p, p; -t) t^{-s} dt$ es tal que $(\text{sen } s\pi) \int_D \theta_1(p; s) k(p) dp$ define una función holomorfa en $\text{Re } s > 1 - \delta$.

DEMOSTRACIÓN. i) Por Hipótesis B, $A(u) = |\{p : l(p) < u\}| \leq Bu^\varepsilon$. Usando T. 1, §3.5, con $2\delta < \beta < \alpha$ y recordando que $M(p) \in L^1$, tenemos

$$\int_D dp \int_a^\infty \frac{|H(p, p; -t)|}{t^{1-\delta}} dt \leq \int_D dp \int_a^\infty \frac{\rho M(p)}{t^{1-\delta+\beta/2}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_D dp \int_a^\infty K_0(\sqrt{tk(p)}l(p)) \frac{dt}{t^{1-\delta}} = \\ = O(1) + \int_D dp \int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta}} \int_{l(p)}^\infty \left(-K_0'(\sqrt{tk(p)}u) \right) \sqrt{tk(p)} du.$$

Por el T. 1, §3.3, la triple integral no supera a

$$\int_D dp \int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta}} \int_{l(p)}^\infty \frac{c}{u} e^{-\frac{u}{2}\sqrt{t \inf k}} du = \int_D dp \int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta}} \int_0^\infty \frac{c}{u} e^{-\frac{u}{2}\sqrt{t \inf k}} I_{\{l(p) < u\}} du.$$

Cambiando el orden de integración y usando la Hipótesis B, resulta,

$$\int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta}} \int_0^\infty \frac{c}{u} e^{-\frac{u\sqrt{t \inf k(p)}}{2}} A(u) du \leq BC \int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta}} \int_0^\infty \frac{1}{u^{1-\varepsilon}} e^{-\frac{u\sqrt{t \inf k(p)}}{2}} du.$$

Sea $v = \frac{u \sqrt{t \inf k(p)}}{2}$. La última integral doble es, salvo factor constante, menor o igual a

$$\int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta}} \int_0^\infty \frac{e^{-v}}{v^{1-\varepsilon} t^{\varepsilon/2}} dv = O(1) \int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta+\varepsilon/2}} < \infty.$$

ii) De i) sigue que $\int_D \theta_1(p; s) k(p) dp$ es holomorfa en $\operatorname{Re} s > 1 - \delta$, QED.

3.8. Comportamiento asintótico de los autovalores del operador bidimensional de Sturm-Liouville. El teorema de H. Weyl en la versión de T. Carleman.

Probaremos el T. 1 anunciado en el §3.0, (ver §0.3.1).

TEOREMA 1. Sea D una región de Jordan con la propiedad S_ε y $k(x) \in \mathcal{L} = \mathcal{L}_\alpha(D)$.

Entonces, para los autovalores del operador de Sturm-Liouville $-\frac{1}{k(q)} \Delta_q$ y $n \rightarrow \infty$, vale

$$\lambda_n \int_D k(p) dp \sim 4\pi n.$$

DEMOSTRACIÓN. Vimos que para $\operatorname{Re} s > 6$ y d constante vale, (cf. (4) y (7), §3.6),

$$\begin{aligned} (1) \quad \phi(p; s) &= \frac{\operatorname{sen} \pi s}{\pi} \int_a^\infty F(p; -t) t^{-s} dt + Z_0(p; s) = \\ &= \left[-\frac{\log \sqrt{k(p)a}}{2\pi} + d - \frac{1}{4\pi(s-1)} \right] a^{1-s} \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi(s-1)} + \\ &\quad + \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi} \int_a^\infty (H(p, p) - H(p, p; -t)) \frac{dt}{t^s} + Z_0(p; s) \end{aligned}$$

Como $\frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi(s-1)} = -1 + (s-1)[\dots]$ obtenemos

$$\begin{aligned} (2) \quad \phi(p; s) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^s} = \\ &= \frac{1}{4\pi(s-1)} + [(\log k(p))Z_4(s) + Z_3(s) + Z_0(p; s)] + \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi} (\theta_0(p; s) - \theta_1(p; s)), \end{aligned}$$

donde Z_3 y Z_4 son analíticas enteras y $\theta_0 - \theta_1$ representa la última integral en (1),

(véase Ts. 1 y 2, §3.7). Recordemos que $\sum_1^\infty \lambda_n^{-2} < \infty$.

Integrando (2) respecto de $k(p) dp$ obtenemos,

$$\begin{aligned} (3) \quad \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-s} &= \int_D \phi(p; s) k(p) dp = \\ &= \frac{D}{4\pi(s-1)} + \int_D ((\log k(p))Z_4(s) + Z_3(s) + Z_0(p; s)) k(p) dp + \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi} \int_D (\theta_0 - \theta_1) k dp = \end{aligned}$$

= (por (3) §3.6 y T.1 §3.7) =

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\int kdp}{4\pi(s-1)} - \frac{sen s\pi}{\pi} \int \theta_1(p; s)k(p)dp + \text{entera en } s + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{1}{\lambda_n^2} \int_{(-\pi, \pi)} \frac{\lambda_n e^{(2-s)\log(ae^{iv})}}{\lambda_n - ae^{iv}} dv \\
 &= \frac{\int kdp}{4\pi(s-1)} - \frac{sen s\pi}{\pi} \int \theta_1(p; s)k(p)dp + \text{analítica entera en } s = \\
 &= \frac{\int_D kdp}{4\pi(s-1)} + g(s)
 \end{aligned}$$

donde $g(s)$ es holomorfa en $\text{Re } s > 1 - \delta$, (cf. T.2 §3.7).

Un teorema de Landau sobre series de Dirichlet con coeficientes positivos permite afirmar que la abscisa de convergencia de la serie (3) es $s = 1$, (cf. Capítulo 0).

Se deduce entonces que para $\text{Re } s > 1$ vale,

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \frac{\frac{1}{4\pi} \int_D kdp}{s-1} + g(s).$$

Definamos: $N(x) = 0$ si $x < \lambda_1$, $N(x) = n$ si $\lambda_n \leq x < \lambda_{n+1}$.

Entonces, la serie (4) puede escribirse como $\int_a^{\infty} x^{-s} dN(x)$, (aun si λ_j es múltiple). Una

aplicación del teorema tauberiano de Ikehara (cf. Cap. 0) nos da entonces

$$(5) \quad \frac{N(x)}{x} \rightarrow \frac{\int_D k(p)dp}{4\pi}, \quad x \rightarrow \infty.$$

En particular, (cf. §2.2), $\frac{N(\lambda_n)}{\lambda_n} = \frac{n}{\lambda_n} \rightarrow \frac{\int_D kdp}{4\pi}$ para $n \rightarrow \infty$. QED.

COROLARIO 1. i) Si D es una región de Jordan cuyo contorno J tiene dimensión box $\mathbf{d} < 2$ y $k(x) \in \mathcal{L}_\alpha(D)$ entonces vale la tesis del Teorema 1.

ii) Si D es una región de Jordan parametrizable y $k(x) \in \mathcal{L}_\alpha(D)$ entonces vale la tesis del Teorema 1.

DEMOSTRACIÓN. i) Del Teor. 3, §3.0, sigue que $\forall \eta: \eta < 2 - \mathbf{d}$, $D \in S_\eta$.

ii) En este caso la dimensión de Minkowski es 1 y $D \in S_1$, QED.

COROLARIO 2. Sea D una región de Jordan cuyo contorno J tiene dimensión box

$\mathbf{d} < 2$ y $k(x) \in \mathcal{L}_\alpha(D)$. La función $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} - \frac{\frac{1}{4\pi} \int_D k dp}{s-1} \equiv \int_a^\infty \frac{1}{x^s} dN(x) - \frac{A}{s-1}$ es holomorfa en $\operatorname{Re} s > d = 1 - \frac{\inf(\alpha, (2-\mathbf{d}))}{2}$. Para $k \equiv 1$ vale $d = \mathbf{d}/2$.

DEMOSTRACIÓN. Del Teor. 3, §3.0 y el Teor. 2, §3.7 sigue que $\theta_1(p; s)$ es holomorfa en $\operatorname{Re} s > d$ y por tanto $g(s)$ lo es también. Si $k = 1$ entonces $\alpha = 1$ por lo que $\frac{\inf(\alpha, (2-\mathbf{d}))}{2} = 1 - \frac{\mathbf{d}}{2}$, QED.

3.9. La conjetura de Weyl-Berry modificada. Continuamos en esta sección los comentarios del §2.3. La conjetura de Weyl para el problema de Dirichlet del Laplaciano bidimensional y D una región de Jordan dice que

$$(1) \quad N(\lambda) = A\lambda - W\lambda^{\frac{1}{2}} + o\left(\lambda^{\frac{1}{2}}\right),$$

donde A y W son constantes positivas. Esto vale si $J = \partial D$ es suficientemente regular, ((1), §2.3). En este caso la dimensión topológica, la de Hausdorff y la de Minkowski (box) de J son todas iguales a 1.

Berry conjetura que si J no es una curva regular y H es su dimensión de Hausdorff debe valer

$$(2) \quad N(\lambda) = A\lambda - W\lambda^{\frac{H}{2}} + o\left(\lambda^{\frac{H}{2}}\right).$$

Pero esto no es siempre cierto. La conjetura de Weyl-Berry modificada propone que si \mathbf{d} es la dimensión de Minkowski de J como $\mathbf{d} \geq H \geq 1$ vale, para $d = \mathbf{d}/2$,

$$(3) \quad N(\lambda) = A\lambda - W\lambda^d + o(\lambda^d).$$

Lapidus hace plausible esta conjetura probando que (cf. [La], fórmula (1.8) y T.2, §2.3),

$$(4) \quad N(\lambda) - A\lambda = O(\lambda^{\frac{\mathbf{d}}{2} + \varepsilon}) \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Sobre la plausibilidad de la conjetura de Weyl-Berry modificada para la ecuación de Sturm-Liouville vale el siguiente resultado.

TEOREMA 1. Sea D una región de Jordan cuyo contorno J tiene dimensión box $\mathbf{d} < 2$ y $k(x) \in \mathcal{L}_\alpha(D)$. Si para el problema de Dirichlet de la ecuación de Sturm-Liouville en D existe m tal que $0 < m < 1$ y vale

$$(5) \quad N(\lambda) - A\lambda = -W\lambda^m + o(\lambda^m), \quad (W \neq 0, \lambda \rightarrow \infty),$$

entonces $m \leq \frac{2-\inf(\alpha, 2-d)}{2} = d$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que para $0 < d < m < 1$ valga

$$\delta(\lambda) := N(\lambda) - A\lambda = -W\lambda^m + o(\lambda^m).$$

Entonces, si $K(x) = x^{-\sigma}$, $1 > \sigma > m$, $B > C \rightarrow \infty$, se tiene $\int_C^B K(x)d\delta(x) =$
 $= (K\delta)(B) - (K\delta)(C) - \int_C^B \delta(x)dK(x) = o(1) + \sigma \int_C^B \delta(x)x^{-1-\sigma} dx$.

Luego, $\int_C^B K(x)d\delta(x) \rightarrow 0$ y $\int_C^B x^{-(\sigma+it)}d\delta(x) \rightarrow 0$ si $s = \sigma + it$ pertenece a un compacto contenido en $Re s > m$. Por tanto, $g(s) = \int_{1+}^{\infty-} x^{-s}d\delta(x)$ es una función holomorfa en $1 > \sigma > m$. Pero $\int_{1+}^{\infty-} K(x)d\delta(x) = \sigma \int_{1+}^{\infty} \delta(x)x^{-1-\sigma} dx$. La última integral es tal que $|\int_{1+}^{\infty} \delta(x)x^{-1-\sigma} dx| \rightarrow \infty$ cuando $\sigma \downarrow m$. Luego, $g(s)$ no es prolongable a $\sigma \geq m$.

Pero esto contradice el hecho de que la función $g(s) = \int_{1+}^{\infty-} \lambda^{-s}d(N(\lambda) - A\lambda)$ es holomorfa en $Re s > d$ según el Corolario 2, §3.8. Luego, si vale (5) entonces $d \geq m$. Por tanto,

$$(6) \quad N(\lambda) - A\lambda = O(\lambda^m) = O(\lambda^d).$$

Obsérvese que si $k \equiv 1$ entonces $\alpha = 1$ y $d = \mathbf{d}/2$, QED.

PROPOSICIÓN 1. Si vale (6) entonces $\#\{j: \lambda_j = \lambda_n\} = O(n^d)$, ($d < 1$).

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\lambda_n < \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+p} < \lambda_{n+p+1}$. Sabemos por el §2.2 que $p = p(n) = o(n)$. Sea $\lambda = \lambda_{n+1}$ Entonces, usando (6),

$$p = N(\lambda + 0) - N(\lambda - 0) = O(\lambda^d) = O(n^d).$$

3.10. Comentarios. Sea D una región de Jordan arbitraria y sea $T: D \rightarrow B = B_1(0)$ una transformación conforme que se extienda continua y biunívocamente de \bar{D} sobre \bar{B} . Un teorema de Caratheodory nos asegura la existencia de una tal T . Por tanto, T^{-1} existe y es continua de \bar{B} sobre \bar{D} y conforme de B sobre D . El problema

$$(I) \quad \Delta_{xy}v + \lambda kv = 0, \quad v|_{D=0}, \quad x, y \in D, \quad k = k(x, y),$$

se transforma en el siguiente donde $f^2 = f^2(\xi, \eta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$, (cf. §2.0),

$$(II) \quad \Delta_{\xi\eta}v + \lambda(kf^2)v = 0, \quad v|_{B=0}, \quad \xi, \eta \in B, \quad k = k(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).$$

Si $(kf^2)(\xi, \eta) \in \mathcal{L}_\alpha(B)$ entonces vale el teorema de Weyl para el problema (II) pues B es perimetrizable y por tanto vale para el problema (I) pues $\int_B kf^2 d\xi d\eta = \int_D k dx dy$. Pero si $k(x, y) \in \mathcal{L}_\alpha(D)$ entonces $0 < kf^2 \in Lip_{loc}$, pero no sabemos si está lejos de 0 e ∞ . Para esto es necesario y suficiente que f lo esté.

3.11. La ecuación lineal autoadjunta de tipo elíptico. Nos referimos a la ecuación (17) en la sinopsis del trabajo de H. Weyl que como vimos se reduce al estudio de la ecuación (17') la cual estudiaremos bajo la siguiente

HIPÓTESIS C. D es una región de Jordan que posee la propiedad S_ε y $k, m \in \mathcal{L} = \mathcal{L}_\alpha(D)$.

El problema de Dirichlet se escribe como

$$(1) \quad -\Delta v + kv = \mu mv, \quad v = 0 \text{ en } J = \partial D.$$

Dado que $0 < \alpha < \gamma \leq 1 \Rightarrow \mathcal{L}_\gamma \subset \mathcal{L}_\alpha$ no es más general considerar k y m en distintas clases \mathcal{L} . Esbozaremos una demostración del siguiente

TEOREMA 1. Los autovalores del problema (1) se comportan asintóticamente como

$$\frac{n}{\mu_n} \sim \frac{\iint_D m(p) dp}{4\pi}.$$

Es decir, como los del problema de Dirichlet para la ecuación

$$(2) \quad -\Delta v = \lambda mv,$$

que verifican $\frac{n}{\lambda_n} \sim \frac{\iint_D m(p) dp}{4\pi}$.

El operador diferencial del primer miembro de (1) se escribe como $-(\Delta + (-1)k)$ que tiene un inverso K :

$$(3) \quad Kv := G_1^{(1)} v = \int_D G_k(p, q; -1) v(q) dq = -(\Delta - k)^{-1} v,$$

$$K : L^2(D) \rightarrow K(L^2) = D_\Delta \subset C_0(\bar{D}),$$

como vimos en el párrafo §3.2.

Los autovalores μ de la ecuación

$$(4) \quad -(\Delta + (-1)k)\psi = \mu m\psi,$$

coinciden con los autovalores del operador $\widehat{K}\Psi := \int_D \widehat{G}(p, q)\Psi(q) dq$, donde

$$(5) \quad \widehat{G}(p, q) = \sqrt{m(p)} G_k(p, q; -1) \sqrt{m(q)}.$$

En efecto, si la autofunción de (4) la escribimos como $\psi_j = \Psi_j/\sqrt{m}$, tenemos

$$(6) \quad \widehat{K}\Psi_j := \int_D \widehat{G}(p, q)\sqrt{m(q)}\psi_j(q)dq = \frac{1}{\mu_j}\sqrt{m(p)}\psi_j(p) = \frac{1}{\mu_j}\Psi_j(p).$$

Las Proposiciones 1 y 3, §3.2, pueden redemostrarse con $\mu m(q)$ en lugar de μ y para $\lambda < 0$ dando lugar al

LEMA 1. i) Sea μ una constante real, $\psi \in C_0(\overline{D})$. Si $(\Delta_q + \lambda k(q) + \mu m(q))\psi(q) = 0$, $D'(D)$, entonces $\psi \in \mathcal{S}(D)$. Si además $\lambda k + \mu m \leq 0$ entonces $\psi = 0$.

ii) Sea $\lambda = -1$. $\psi \in L^2$, $\psi = \mu K(m\psi)$ si y sólo si $\psi \in \mathcal{S}$, $-(\Delta - k)\psi = \mu m\psi$.

iii) Si $\mu \leq k/m$ y $L^2(D) \ni \psi = \mu K(m\psi)$ entonces $\psi = 0$.

De iii) sigue ahora que los autovalores de \widehat{K} son tales que $\mu > \inf(\frac{k}{m}) > 0$. El sistema de autofunciones $\{\Psi_j; j = 1, 2, \dots\}$ normalizado respecto de la medida de Lebesgue es un sistema ortonormal completo en $L^2(D)$. Luego, el sistema $\{\psi_j = \Psi_j/\sqrt{m}\}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2(D; m)$, normalizado respecto de $m(p)dp$, (cf. Teor. 1 §1.9 y [He], Ch. 3).

Si $F \in L^2(D)$ tenemos el desarrollo en norma-2: $F = \sum_1^\infty C_j(F)\Psi_j$. Luego para f tal que $F(q) = f(q)\sqrt{m(q)}$ se tiene el siguiente desarrollo: $f = \sum_1^\infty C_j(F)\psi_j = \sum_1^\infty c_j(f)\psi_j$, $c_j(f) = \int f \psi_j m dq$, en $L^2(D; m)$.

Además, del Lema 1 sigue que $\{\psi_j\} \subset \mathcal{S}(D)$ es un sistema (normalizado) de autofunciones de (1) para su correspondiente conjunto de autovalores $\{\mu_j\}$. Para $\lambda < 0$,

$$(7) \quad G(p, q) = -(2\pi)^{-1} \log|p - q| - H(p, q), \quad G_k(p, q; \lambda) = G(p, q) + F_k(p, q; \lambda).$$

Por tanto, de (5) resulta,

$$(8) \quad \widehat{G}(p, q) = \sqrt{m(p)}\{G(p, q) + F_k(p, q; -1)\}\sqrt{m(q)} = \\ = \widetilde{G}(p, q) + \sqrt{m(p)}F_k(p, q; -1)\sqrt{m(q)} = \widetilde{G}(p, q) + \widetilde{F}(p, q),$$

donde, (cf. Teor. 2, §3.1),

$$(9) \quad \widetilde{F}(p, q) = \sqrt{m(p)m(q)}F_k(p, q; -1) = -\sqrt{m(p)m(q)} \sum \frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{(\lambda_n+1)\lambda_n}.$$

Los valores propios χ_n del operador de núcleo $\widetilde{G}(p, q) = \sqrt{m(p)}G(p, q)\sqrt{m(q)}$ son los recíprocos de los autovalores de la ecuación (2). Por el Teorema 1 §3.8 sabemos que

$n\chi_n \rightarrow \frac{\iint_D m(p)dp}{4\pi}$. Para demostrar el Teorema 1 de este párrafo bastará entonces probar

que los valores propios del operador con núcleo $\tilde{F}(p, q)$ son $o\left(\frac{1}{n}\right)$, (cf. T. VI, sinopsis).

Para ello, en virtud del T. IV, sinopsis, bastará ver que si $\{l_n\}$ es la familia de valores

propios del operador Q con núcleo $\frac{\sqrt{k(p)k(q)}}{\sqrt{m(p)m(q)}}\tilde{F}(p, q) = -\sqrt{k(p)k(q)}\sum \frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{(\lambda_n+1)\lambda_n}$

entonces vale $nl_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Ahora bien, siendo $\{\sqrt{k(p)}\phi_n(p); n = 1, 2, \dots\}$ un

sistema ortonormal completo, resulta que los valores propios de Q son $l_n = -\frac{1}{(\lambda_n+1)\lambda_n}$,

que corresponden a las autofunciones $\sqrt{k(p)}\phi_n(p)$. En consecuencia,

$$nl_n = -\frac{n}{(\lambda_n+1)\lambda_n} = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{QED.}$$

Otra manera de reducir el estudio del comportamiento asintótico de los autovalores de (1) a los de la ecuación (2) puede verse en [La], Lemma 4.4.

BIBLIOGRAFÍA

- [A] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press, (1975).
- [AG] ACHIESER, N. I. und GLASMANN, I.M., *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert Raum*, Akademie Verlag, Berlin, (1968).
- [B] BENEDEK, A., *Sobre el problema de Dirichlet*, Notas de Álgebra y Análisis nº2, Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, (1968).
- [Bo] BORG, G., Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, *Acta Math.*, 78, 1-96, (1946).
- [BR] BIRKHOFF G., ROTA G-C., *Ordinary Differential Equations*, Blaisdell, (1978).
- [C] CARLEMAN, T., *L'Intégral de Fourier et questions qui s'y rattachent*, Uppsala, (1944).
- [Ca] CARLEMAN, T., Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, *Åttonde skan. matematiker kongressen i Stockholm*, 34-44, (1934).
- [Co] COULSON, C. A., *Ondas*, Madrid-Buenos Aires, (1944).
- [CH] COURANT, R., HILBERT, D., *Methods of Mathematical Physics*, I, Interscience, (1953).
- [Cw] CONWAY, J. H., Can you hear the shape of a drum?, second lecture of *The Sensual (quadratic) Form*, The Carus Math. Monographs, M. A. A., (1997).
- [Eu] EULER, L., De motu vibratorio cordarum inaequaliter crassarum, *Novi Comm. Petrop.*, T. IX, 246-304, (1764).
- [Eu] EULER, L., Sobre el movimiento vibratorio de la cuerda dotada de sección variable, (latín, 1772), *Novi Comm. Petrop.*, T. XVII, 432-448.
- [F] FALCONER, K., *Fractal Geometry*, Wiley, (1990).
- [GWW] GORDON, C., WEBB, D.L. and WOLPERT, S., One can't hear the shape of a drum, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 27, 134-138, (1992).
- [H] HÖRMANDER, L., *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, (1963).
- [He] HELLWIG, G., *Partial differential equations, an introduction*, Blaisdell Pub. Co., New York (1964).
- [HP] HILLE, E., PHILLIPS, R. S., *Functional Analysis and Semi-Groups*, AMS, Coll. Pub. Vol. XXXI, (1957).
- [I] IKEHARA, S., An extension of Landau's theorem in the analytic theory of numbers, *J. Math. and Phys. MIT* (2) 10, p. 1-12, (1931).
- [K] KAC, M., Can one hear the shape of a drum?, *Am. Math. Monthly*, 73, nº4, 1-23, (1966).

- [Ke] KELLOG, O., On the derivatives of harmonic functions on the boundary, Trans. Am. Math. Soc., vol 33, n°2, 486-510, (1931).
- [Ko] KOREVAAR, J., *Tauberian Theory*, Springer, (2004).
- [L] LI, YI-SHEN, On an inverse eigenvalue problem for a second order differential equation with boundary dependence on the parameter, Acta Math. Sinica, 15, 375-381, (1965).
- [La] LAPIDUS, M. L., Fractal drum, inverse spectral problem for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl-Berry conjecture, T.A.M.S., 325, p. 465-529, (1991).
- [Mo] MOTHWURF, W., Über Saiten mit nur harmonischen Obertönen, Monatshefte für Math., 40, 93-96, (1933).
- [Mt] MATTILA, P., *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press, (1995).
- [P] PETROVSKY, I. G., *Lectures on Partial Differential Equations*, Intersc. Pub., New York, (1957).
- [Pa] PANZONE, R., Sobre algunos problemas inversos y un teorema de Euler concerniente a la cuerda vibrante, Anales Acad. Cs. Exactas, Fís. y Nat., Buenos Aires, n° 36, 73-90, (1984).
- [RN] RIESZ, F., SZ.-NAGY B., *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Akadémiai Kiadó, Budapest, (1953).
- [S] SCHWARTZ, L., *Théorie des Distributions*, I, II, Hermann, Paris, (1951).
- [Sa] SANTALÓ, L. A., *Vectores y Tensores*, Eudeba, Buenos Aires, (1973).
- [Sc] SCHECHTER, M., *Modern Methods in Partial Differential Equations, an Introduction*, Mc Graw-Hill, (1977).
- [Sy] SEELEY, R. T., A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of \mathbf{R}^3 , Adv. in Math. 29, 244-269, (1978).
- [SZ] SAKS, S., ZYGMUND, A., *Analytic Functions*, Warszawa, (1952).
- [Ti] TITCHMARSH, E. C., *Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations*, II, Oxford, (1970).
- [Tr] TREVES F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, (1975).
- [W] WEYL, H., Göttinger Nachrichten, com., Febr. 1911.
- [W] WEYL, HERMANN, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, Math. Ann., 71, 441-479, (1912).
- [We] WEINBERGER, H. F., *A first course in Partial Differential Equations*, Blaisdell, (1965).
- [Wi] WIDDER, D. V., *An Introduction to Transform Theory*, Academic Press, New York and London, (1971).

ÍNDICE ALFABÉTICO

a.e. = c.d. = casi doquier	0.2	Operador elíptico	0.4
Arco de curva C^n	1.1	Principio de reflexión (Schwarz)	A.1
Arco de Jordan C^n	1.1	Principio general de máximo	0.4.2
Autovalor	0.1	Problema P) (Kac)	2.1
Condiciones de Cauchy-Riemann	2.0	Propiedad S_ε	3.0
Conjetura Weyl-Berry	2.3, 3.9	Propiedades núcleo de Green	1.0, 3.2
Contador	2.2	Región de Jordan perimetrizable	3.0
Contorno de regiones planas	3.0	Remanente	2.3
Cuerdas isoespectrales	2.1	Segundo lema de Hopf	0.4
Derivación	0.2, 0.4.2	Series de Dirichlet	0.6
Dimensión box	0.3.2	Solución clásica	0.3
Dimensión de Minkowski	0.3.2	Solución del problema P)	Ap. Cap. 2
Dominio del operador diferencial	3.2	Solución fundamental para Δ	0.2
Dominio estándar regular	1.1	Suena como un tambor	2.0
Ecuación lineal autoadjunta		T. de H. Weyl (a la Carleman)	3.8
de tipo elíptico	0.1, 3.11	T. de preparación de Weierstrass	0.5
Fórmula de H. Weyl	0.1	T. desarrollo en autofunciones	1.9
Función de Green	1.0	Tambor isoespectral	2.1
Función de Kelvin	3.3	Tambor, tambor circular	2.0
Función $F(p; \lambda)$	3.5	Teorema de conmutación	
Función $\phi(p; s)$	3.6	de derivada e integral	0.2
Lema de Hopf	0.4	Teorema de Hardy-Littlewood	0.10
Lema de Weyl	0.2.5	Teorema de Ikehara	0.6.1
Membranas circulares	2.0	Teorema de Landau	0.6
Membranas isoespectrales	2.0	Teorema de Lax-Milgram	0.7
Núcleo de Green para Δ en una		Teorema de reflexión (armónicas)	A.1
región de Jordan	1.0	Teoremas de máximo y mínimo	0.4
Núcleo de Green para $\Delta + \lambda k$	3.1	Transformaciones conformes	2.0
Operador de Sturm-Liouville		Una desigualdad numérica	0.9
bidimensional	0.3.1	Valor propio	0.1, 0.8

SÍMBOLOS

C^0, C^j	0.2.2	$X(u)$	1.1
$Lip_+(A)$	0.2.5	$\ \cdot\ _k$	1.9
$Lip_{loc}(A)$	0.2.5	$\phi_n = \phi_n(p; k)$	1.9
$\mathcal{S}(D)$	0.3.1	$B_\eta(p)$	1.15
$\mathcal{U}(D)$	0.3.1	$ D $	2.0
$dim_B = dim_{box}$	0.3.2	$N(\lambda)$	2.2
K_0	3.3	$\langle J \rangle$	2.3
$-\frac{1}{k(x)}\Delta_x$	0.3.1, 0.4.2	$A(t)$	3.0
$D'(D)$	0.4.2	$F_k(p, q; \lambda)$	3.1
$E(x)$	0.2	$G_k(p, q; \lambda)$	3.1
$s(a; x)$	0.2	$G_t^{(1)}(\cdot)$	3.1
$\sigma(f)$	0.2	\mathcal{L}	3.1
$\mathcal{I}(A), \mathcal{I}_\alpha(A)$	0.3, 3.4	D_Δ	3.2
$G(p, q)$	1.0	$H_k^w(p, q; -\chi^2)$	3.3, 3.4
$H(p, q)$	1.0	$F(p; \lambda)$	3.5
$S_\eta(p)$	1.1	$\phi(p; s)$	3.6
$\Sigma_\eta(p)$	1.1		

NOTAS DE LÓGICA MATEMÁTICA, ISSN 0078-2017

1. 2. 3. MONTEIRO, Antonio et VARSAVSKY, Oscar. Algèbres de Heyting monadiques. MONTEIRO, Antonio. Normalité dans les algèbres de Heyting monadiques. VARSAVSKY, Oscar. Quantifiers and equivalence relations. (1974) 46 pp.
4. SIKORSKI, Roman. Algebras de Boole. (1968) 84 pp.
5. SIKORSKI, Roman. Teorías matemáticas formalizadas. (1968) 60 pp.
6. 7. MONTEIRO, Antonio. Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositionnel classique. MONTEIRO, Antonio. Algèbres monadiques. (1974) 39 pp.
8. PORTE, Jean. La logique mathématique et le calcul mécanique. 2^e ed. (1972) 106 pp.
9. 10. 11. BRIGNOLE, Diana. Equational characterization of Nelson algebras. MONTEIRO, Antonio. Generalisation d'un théorème de R. Sikorski sur les algèbres de Boole. MONTEIRO, Antonio. Construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole monadiques I. (1974) 56 pp.
12. DIEGO, Antonio. Sobre álgebras de Hilbert. (1965) 89 pp.
13. PORTA, Horacio. Sur un théorème de Skolem. (1964) 8 pp.
14. MONTEIRO, Luiz et PICCO, Darío. Les réticulés de Morgan et l'opération de Sheffer. (1964) 7 pp.
15. MONTEIRO, Antonio. Construction des algèbres de Nelson finies. (1964) 11 pp.
16. DIEGO, Antonio and SUAREZ, Alberto. Two sets of axioms for Boolean algebras. (1964) 12 pp.
17. MONTEIRO, Luiz et GONZALEZ COPPOLA, Lorenzo. Sur une construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes. (1964) 17 pp.
18. MARONNA, Ricardo. A characterization of Morgan lattices. (1964) 4 pp.
19. MONTEIRO, Luiz. Sur les algèbres de Heyting trivalentes. (1964) 23 pp.
20. BRIGNOLE, Diana et MONTEIRO, Antonio. Caractérisation des algèbres de Nelson par des égalités. (1964) 14 pp.
21. MONTEIRO, Antonio. Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes. (1964) 20 pp.
22. MONTEIRO, Luiz. Axiomes indépendants pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentes. (1964) 7 pp.
23. 24. 25. CIGNOLI, Roberto. Boolean elements in Lukasiewicz algebras I. CIGNOLI, Roberto and MONTEIRO, Antonio. Boolean elements in Lukasiewicz algebras II. MONTEIRO, Luiz. Sur les algèbres de Lukasiewicz injectives. (1974) 15 pp.
26. CHATEUBRIAND, Osvaldo et MONTEIRO, Antonio. Les algèbres de Morgan libres. (1969) 9 pp.
27. CIGNOLI, Roberto. Moisil algebras. (1970) 47 pp.
28. MAKINSON, David. Aspectos de la lógica modal. (1971) 131 pp.
29. 30. MONTEIRO, Antonio. L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques I - II. (1974) 148 pp.
31. ITURRIOZ, Luisa. Algèbres de Heyting trivalentes involutives. (1974) 146 pp.
32. MONTEIRO, Luiz. Algebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas. (1974) 113 pp.
33. CIGNOLI, Roberto. Topological representation of Lukasiewicz and Post algebras. (1974) 20 pp.
34. 35. ABAD, Manuel. Notes on n-valued Post algebras. 18 pp. ABAD, Manuel and MONTEIRO, Luiz. On free L-algebras. (1987) 20 pp.
36. ABAD, Manuel. Estructura cíclica y monádica de un álgebra de Lukasiewicz n-valente. (1988) 124 pp.
37. ABAD, Manuel and MONTEIRO, Luiz. Monadic symmetric Boolean algebras. (1988) 30 pp.
38. Proceedings of the IX Latin American symposium on mathematical logic (Part 1). (1993) 190 pp.
39. Proceedings of the IX Latin American symposium on mathematical logic (Part 2). (1994) 197 pp.
40. MONTEIRO, Antonio. Unpublished papers, I. (1996) 120 pp.

NOTAS DE MATEMÁTICA DISCRETA, ISSN 0326-1336

1. CHIAPPA, Raúl A. Palabras circulares equilibradas. Grafos adjuntos. (1982) 125 pp.
2. CHIAPPA, Raúl A. Recuento y enumeración de caminos y de cadenas elementales. (1994) 43 pp.

VOLÚMENES DE HOMENAJE, ISSN 0328-2600

1. Homenaje al Dr. Rodolfo A. Ricabarra. (1995).

OTROS TÍTULOS

1. Actas de las X Jornadas de la Unión Matemática Argentina. (1957) 72 pp.

Publicaciones del Instituto de Matemática

ACTAS DEL CONGRESO DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO, ISSN 0327-9170

1. ACTAS DEL PRIMER CONGRESO "Dr. ANTONIO A. R. MONTEIRO". (1991).
2. ACTAS DEL SEGUNDO CONGRESO "Dr. ANTONIO A. R. MONTEIRO". (1993).
3. ACTAS DEL TERCER CONGRESO "Dr. ANTONIO A. R. MONTEIRO". (1995).
4. ACTAS DEL CUARTO CONGRESO "Dr. ANTONIO A. R. MONTEIRO". (1997).
5. ACTAS DEL QUINTO CONGRESO "Dr. ANTONIO A. R. MONTEIRO". (1999).
6. ACTAS DEL SEXTO CONGRESO "Dr. ANTONIO A. R. MONTEIRO". (2001).
7. ACTAS DEL SEPTIMO CONGRESO "Dr. ANTONIO A. R. MONTEIRO". (2003).
8. ACTAS DEL OCTAVO CONGRESO "Dr. ANTONIO A. R. MONTEIRO". (2005).
9. ACTAS DEL NOVENO CONGRESO "Dr. ANTONIO A. R. MONTEIRO". (2007).
10. ACTAS DEL DÉCIMO CONGRESO "Dr. ANTONIO A. R. MONTEIRO". (2009).

MONOGRAFÍAS DE MATEMÁTICA, ISSN 0077-0450

1. RICABARRA, Rodolfo A. Conjuntos ordenados y ramificados. (1958) 357 pp.
2. RIBENBOIM, Paulo. Théorie des groupes ordonnés. (1963) 112 pp.
3. MOUSINHO LEITE LOPES, María Laura. Conceitos fundamentais da geometria. (1962) 120 pp.

NOTAS DE ÁLGEBRA Y ANÁLISIS, ISSN 0078-2009

1. ALEXITS, George. Séries trigonométriques. (1966) 186 pp.
2. BENEDEK, Agnes. Sobre el problema de Dirichlet. (1969) 63 pp.
3. BAUER, Heinz. Representaciones sobre conjuntos convexos compactos. (1971) 57 pp.
4. BENEDEK, Agnes, GÜICHAL, Edgardo and PANZONE, Rafael. On certain non harmonic Fourier expansions as eigenfunction expansions of non regular Sturm-Liouville systems. (1974) 52 pp.
5. BENEDEK, Agnes, MURPHY, Eduardo y PANZONE, Rafael. Cuestiones del análisis de Fourier: convergencia en media de algunas series ortogonales. (1976) 123 pp.
6. DIEGO, Antonio. Lecciones de programación lineal. (1977) 123 pp.
7. GÜICHAL, Edgardo N. Sobre un problema de Sturm-Liouville con condiciones de contorno irregulares. (1978) 78 pp.
8. BENEDEK, Agnes and PANZONE, Rafael. Null series: two applications. (1979) 47 pp.
9. BENEDEK, Agnes and PANZONE, Rafael. On inverse eigenvalue problems for a second order differential equation with parameter contained in the boundary conditions. (1980) 13 pp.
10. BENEDEK, Agnes and PANZONE, Rafael. On Sturm-Liouville problems with the square-root of the eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. (1981) 62 pp.
11. PANZONE, Rafael. Lecciones preliminares de análisis funcional. (1983) 196 pp.
12. TORREA HERNANDEZ, José Luis. Integrales singulares vectoriales. Algunas aplicaciones de una versión actualizada de un resultado de A. Benedek, A. P. Calderón y R. Panzone. (1984) 64 pp.
13. BENEDEK, Agnes y PANZONE, Rafael. Problemas de contorno, I. Lecciones sobre métodos y resultados básicos de la teoría de Sturm-Liouville y algunas de sus generalizaciones. (1985) 145 pp.
14. MENNICKEN, Reinhard and MÖLLER, Manfred. Boundary eigenvalue problems. (1986) 100 pp.
15. BENEDEK, Agnes, FERNANDEZ STACCO, Edgardo y PANZONE, Rafael. Lecciones complementarias de análisis superior. (1987) 113 pp.
16. PANZONE, Pablo A. On the product of distributions. (1990) 73 pp.
17. PANZONE, Rafael. Guía de estudio para el curso: Variable compleja y funciones especiales. (1991) 118 pp.
18. BENEDEK, Agnes y PANZONE, Rafael. Un sistema numérico de base real para los números complejos. (2000) 38 h.
19. BENEDEK, Agnes y PANZONE, Rafael. Remarks on a theorem of A. Pleijel and related topics, I. (2005) 29 h.
20. BENEDEK, Agnes y PANZONE, Rafael. Remarks on a theorem of A. Pleijel and related topics, II. (2007) 101 pp.
21. ASSEM, Ibrahim, CAPPÀ, Juan Angel, PLATZECK, María Inés y VERDECCHIA, Melina. Módulos inclinantes y álgebras inclinadas. (2008) 109 pp.

NOTAS DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA, ISSN 0325-8963

1. LAROTONDA, Angel R. Notas sobre variedades diferenciables. (1980) 116 pp.

(continúa en el interior)