NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS

3

HEINZ BAUER

# REPRESENTACIONES SOBRE CONJUNTOS CONVEXOS COMPACTOS

1971
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS es una colección destinada principalmente a reunir los trabajos de investigación, notas de curso, conferencias, seminarios, realizados en la Universidad Nacional del Sur en el campo del Algebra y del Análisis.

Esta publicación no tendrá un carácter periódico. Los fascículos —cada uno de los cuales contendrá en general un solo trabajo— serán numerados en forma continuada.

Las Universidades, Academias, Sociedades Científicas y los Editores de Revistas de Matemática quedan invitados a canjear sus publicaciones por las del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Toda la correspondencia relativa a esta colección debe ser dirigida a:

Publicaciones
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS est une collection destinée principalement à réunir les travaux de recherches, notes de cours, conférences, séminaires, réalisés dans l'Université Nationale du Sud dans le domaine de l'Algèbre et de l'Analyse.

Cette publication n'aura pas un caractère périodique. Les fascicules —chacun desquels aura en général un seul travail— seront numérotés d'une façon continuée.

Les Universités, les Académies, les Sociétés Savantes et les Editeurs de Revues de Mathématiques sont instamment priés d'echanger leurs publications con re celles de l'Institut de Mathématique de l'Université Nationale du Sud.

Toute la correspondance relative à cette collection doit être adressée à:

Publicaciones
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

# REPRESENTACIONES SOBRE CONJUNTOS CONVEXOS COMPACTOS

por

HEINZ BAUER

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
INSTITUTO DE MATEMATICA
BAHIA BLANCA - 1970

# REPRESENTACIONES SOBRE CONJUNTOS CONVEXOS COMPACTOS

## 1. INTRODUCCION.

Ejemplos: a) Consideremos un triángulo de vértices a, b y c, y sea $x_o$ un punto cualquiera del mismo. Entonces existen $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$, unívocamente determinados, tales que

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \text{y con } x_o = \alpha a + \beta b + \gamma c.$$

Construímos $\mu = \alpha\varepsilon_a + \beta\varepsilon_b + \gamma\varepsilon_c$, donde $\varepsilon_a$, $\varepsilon_b$, $\varepsilon_c$ son medidas de masa total 1 concentradas en los puntos a, b y c, respectivamente.

Se verifica para esta medida que, si $x=(x_1,x_2)$ pertenece al triángulo, se tiene:

$$\int x_i \, d\mu = \alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i = (x_o)_i \ , \ i=1,2 \ \text{ y, por lo tanto}$$

$$\int x \, d\mu = x_o .$$

b) Consideremos en $R^n$ $(n \geq 2)$ la esfera abierta $\Delta$ de centro O y radio a. Indiquemos con X el conjunto de las funciones $h_o(x)$ armónicas en $\Delta$ tales que $h_o \geq 0$ en $\Delta$ y $h_o(o)=1$. (Observemos que si fuera $h_o(o)=o$, se deduce del teorema del valor medio que $h_o$ es idénticamente nula en $\Delta$ ). X es un conjunto convexo y es compacto en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.

Para cada $z \in \partial\Delta = \Delta^*$ definamos la función $h_z \in X$ por

$$h_z(x) = a^{n-2} \frac{a^2 - |x|^2}{|x - z|^n} .$$

Como las funciones $h_o \in X$ son no negativas y sus integrales sobre las superficies esféricas de radio $r < a$ son uniformemente acotadas, esas funciones son transformadas de

Poisson de medidas de probabilidad $\mu(dz)$ sobre $\Delta^*$ ,es decir

$$h_o(x) = \int h_z(x)\ \mu(dz). \qquad (+)$$

(Ver, G. Weiss: Análisis armónico en varias variables, Cursos y Seminarios de Matemática, Universidad de Buenos Aires, 1960, pag. 95, donde se prueba el resultado análogo para semiespacios en lugar de esferas).

Un punto $x_o$ es punto extremal de un convexo C si $C-\{x_o\}$ es convexo; indicaremos con Ex(C) el conjunto de los puntos extremales de C. En nuestro caso, teniendo en cuenta que la representación (+) es única, es fácil ver que las funciones $h_z$ son puntos extremales de X, y que todo punto extremal de X es alguna función $h_z$, es decir que $Ex(X) = \{h_z\colon z \in \Delta^*\}$ .

Asignando a X la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, la aplicación $z \to h_z$ es un homeomorfismo $\phi$ de $\Delta^*$ sobre Ex(X). Luego podemos definir, para cada medida $\mu$ en $\Delta^*$ una medida $\mu'$ en Ex(X) por $\mu'(\phi(A)) = \mu(A)$.

Para cada $x \in \Delta$ se tiene, por consiguiente:

$$h_o(x) = \int h_z\ \mu'(dh_z), \qquad \text{o sea} \qquad h_o = \int h_z\ d\ \mu'.$$

En los dos ejemplos considerados tenemos un conjunto convexo compacto X tal que todo $x \in X$ es el baricentro de una medida de probabilidad $\mu$ soportada por Ex(X).

El objeto de este curso es examinar la posibilidad de obtener este tipo de representación para puntos de un conjunto convexo compacto arbitrario. Los dos problemas básicos son la existencia y la unicidad de la medida cuyo baricentro es un punto dado.

## 2. BARICENTROS DE MEDIDAS Y PUNTOS EXTREMALES.

Sea $E$ un espacio vectorial, localmente convexo, Hausdorff y $X \subset E$ un subconjunto convexo compacto. Indicamos con $E'$ el conjunto de todas las formas lineales contínuas sobre $E$ y con $A = A(X)$ el conjunto de todas las funcionales afines contínuas definidas sobre $X$; es decir, funcionales lineales sobre segmentos (para todo $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in R$ tales que $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ y $\alpha+\beta = 1$, si $\ell \in A$ se tiene: $\ell(\alpha x+\beta y) = \alpha\ell(x)+\beta\ell(y)$).

Observemos que $E'+R_{/X} \subset A$. Por lo tanto, como $E'$ separa puntos de $E$ entonces $A$ separa puntos de $X$.

Dado un conjunto compacto $T$ notaremos con $C(T)$ el conjunto de todas las funciones contínuas sobre $T$. Además indicamos con $M_+(T)$ el conjunto de todas las medidas de Radon positivas sobre $T$ (es decir, $M_+(T)$ es el conjunto de todas las formas lineales contínuas no negativas definidas sobre $C(T)$. Consideraremos el subconjunto de $M_+$ formado por aquellas medidas de masa total 1: lo indicaremos con $M_+^1$.

Dada $\mu \in M_+^1$ ¿cuándo diremos que $x_o \in X$ es el baricentro de $\mu$?.

Veamos primero un caso particular. Sea $\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_{a_i}$ donde con $\varepsilon_{a_i}$ indicamos las masas unitarias concentradas sobre los puntos $a_i \in T$; $\alpha_i \in R$, $\alpha_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ tales que $\sum \alpha_i = 1$; en este caso, el baricentro de $\mu$, $x_\mu$, es

$$x_\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

Sea ahora $\ell \in A$; se tiene $\ell(x_\mu) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell(a_i) = \int \ell d\mu = \mu(\ell)$, y entonces, para toda funcional $\ell \in A$ resulta $\ell(x_\mu) = \mu(\ell)$.

Además, como $A$ separa puntos de X, $x_\mu$ está unívocamente determinado.

Generalizando este concepto podemos dar la siguiente definición: "Un punto $x_o \in X$ se denomina BARICENTRO de $\mu \in M_+^1(X)$ si $\ell(x_o)=\mu(\ell), \forall\ \ell \in A$ y escribiremos $x_o = \int x\, d\mu = x_\mu$ .

TEOREMA. Toda medida $\mu \in M_+^1(X)$ tiene un baricentro.

Demostración. Sea $E=\{\mu \mid \mu=\sum_{i=1}^n \alpha_i\ \varepsilon_{a_i},\ \alpha_i \geq 0, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n \alpha_i=1\}$.

$E$ es el conjunto de todas las medidas discretas en $M_+^1(X)$, y es denso en $M_+^1(X)$ respecto de la topología débil.

Para cada $f \in C(X)$ definamos $\tilde{f} : M_+^1(X) \to R$ por $\tilde{f}(\nu)=\nu(f)$. La aplicación $\tilde{f}$ es contínua, es decir, que para todo ultrafiltro $U$ de $M_+^1(X)$, $\tilde{f}(U)$ es una base de ultrafiltro en R tal que, si lím $U = \mu$, entonces lím $\tilde{f}(U) = \text{lím}_U\ \nu\ (f) = \mu(f)$. En particular, si $\ell \in A$, $\lim_U \nu(\ell) = \mu(\ell)$.

La aplicación $\phi: E \to X$ dada por $\phi(\nu)=x_\nu$ es contínua, de donde, por ser X compacto, para todo ultrafiltro $U$ en $E$ existe $\lim \phi(U) = x_o$ . Por lo tanto, para cualquier $\ell \in A$ se tiene:

$$\lim \ell(\phi(U)) = \lim_U \ell(x_\nu) = \lim_U \nu(\ell) = \ell(x_o) ,$$

y comparando con la igualdad anterior resulta:

$$\mu(\ell) = \ell(x_o) ,\ \forall\ \ell \in A,$$

o sea que $x_o$ es el baricentro de $\mu$ .

DEFINICION. Dado un conjunto convexo X se dice que $x_o \in X$ es un punto extremal de X si el conjunto $X - \{x_o\}$ es convexo.

Esto equivale a decir que $x_o$ no es interior a ningún segmento que une dos puntos del convexo X. Notaremos con Ex(X) el conjunto de todos los puntos extremales de X.

TEOREMA. Un punto $x_o \in Ex(X)$ si y sólo si la única medida $\mu \in M_+^1(X)$ para la que se verifica $x_\mu = x_o$ es $\mu = \varepsilon_{x_o}$.

Demostración. Sea $x_o \in Ex(X)$ y consideremos $\mu \in M_+^1(X)$ tal que $x_\mu = x_o$; probaremos que $\mu = \varepsilon_{x_o}$. Indiquemos con $S_\mu$ el soporte de $\mu$ y observemos que $\mu = \varepsilon_{x_o}$ es equivalente a decir que $S_\mu \subset \{x_o\}$. Supongamos, por el contrario, que $S_\mu \setminus \{x_o\} \neq \phi$, y sea $x_1 \in S_1 \setminus \{x_o\}$ ;por ser E un espacio de Hausdorff localmente convexo, existen entornos convexos, compactos y disjuntos $V_o$ y $V_1$ de $x_o$ y $x_1$ en X. Entonces $\mu(V_1) > o$, pues $x_1 \in S_\mu$ ; también $1 - \alpha = \beta > o$, pues $\beta = \mu(X - V_1) \geqslant \mu(V_o) > 0$.

Definamos

$$\mu_1 = \frac{1}{\alpha}(1_{V_1} \cdot \mu) \quad , \quad \mu_2 = \frac{1}{\beta}(1_{X-V_1} \cdot \mu) \quad ,$$

donde, si W es un subconjunto medible de X, $(1_W \cdot \mu)(f) = \int_W f d\mu$.

Con estas definiciones, $\mu_1, \mu_2 \in M_+^1(X)$ , siendo además $\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ .

Notemos con $x_i^*$ los baricentros correspondientes a las medidas $\mu_i$ (i=1,2), es decir $x_i^* = x_{\mu_i}$ (i=1,2); luego, para toda $\ell \in A$ tendremos:

$$\alpha\mu_1(\ell) + \beta\mu_2(\ell) = \mu(\ell)$$

o lo que es equivalente: $\ell(\alpha x_1^* + \beta x_2^*) = \ell(x_o)$ .

Como A separa puntos de X debe ser $x_o = \alpha x_1^* + \beta x_2^*$ , y por ser $x_o \in Ex(X)$ esto implica que $x_1^* = x_2^* = x_o$ lo cual es absurdo porque hemos supuesto que $x_1^* \in V_1$ y $x_o \notin V_1$. Por lo tanto $S_\mu \subset \{x_o\}$ **y de aquí** $\mu = \varepsilon_{x_o}$.

Es fácil probar la otra implicación.

## 3. PRINCIPIO DEL MINIMO.

Consideremos el espacio lineal E, localmente convexo y Hausdorff y un subconjunto convexo compacto $X \subset E$.

Una función u definida sobre X se dice cóncava si dados $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in R$, $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha+\beta = 1$, se verifica:

$$\alpha u(x) + \beta u(y) \leq u(\alpha x+\beta y) .$$

DEFINICION. Un subconjunto $F \subset X$ se dice cara de X si para todo segmento $[a,b] \subset X$ $(a \neq b)$ tal que $(a,b) \cap F \neq \emptyset$ se verifica $(a,b) \subset F$.

Indicamos con $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las caras cerradas no vacías de X.

Ejemplos. 1) $X \in \mathcal{F}$ ;

2) Sea $F_u = \{x \in X \mid u(x)=\inf u(X)\}$ siendo u una función cóncava semicontínua inferiormente. (Recordemos que u es semicontínua inferiormente en $x_o$ si dado $\lambda < u(x_o)$ existe un entorno abierto $U(x_o)$ tal que $\lambda < u(x)$ para todo $x \in U(x_o)$; o lo que es equivalente, $\{x \mid \lambda < u(x)\}$ es abierto en X). Sea $m = \inf u(x)$ y consideremos los conjuntos $\{x \mid u(x) \leq m + 1/n\}$ . Estos conjuntos forman una sucesión decreciente de cerrados y, por lo tanto,

$$\cap_n \{x \mid u(x) \leq m+\frac{1}{n}\} = \{x \mid u(x)=m\} \neq \phi$$

siendo además compacto, luego cerrado. De esta forma $F_u$ es un subconjunto cerrado no vacío de X. Consideremos el segmento $[a,b] \subset X$, $(a \neq b)$ y sea $x \in (a,b) \cap F_u$; entonces $x = \alpha a+\beta b$ , con $\alpha, \beta \in R$, $\alpha, \beta>0$ y $\alpha+\beta = 1$; luego:

$$u(x) = u(\alpha a+\beta b) \geq \alpha u(a)+\beta u(b) \geq \alpha u(x)+\beta u(x) = u(x) .$$

Por lo tanto debe ser $u(a)=u(b)=u(x)$ y entonces $a,b \in F_u$.

Sea ahora $a' \in (a,b)$, y supongamos, por ejemplo, que $x \in (a',b)$; entonces, repitiendo el razonamiento anterior aplicado al segmento $[a',b]$, deducimos que $a' \in F_u$, de donde $(a,b) \subset F_u$ y, por consiguiente $F_u$ es una cara de X.

3) Dado $x_0 \in X$, $\{x_0\} \in \mathcal{F}$ si y sólo si $x_0 \in Ex(X)$. Por lo tanto $Ex(X)$ es el conjunto de todas las caras cerradas minimales de X.

TEOREMA. Para toda función cóncava u inferiormente semicontínua definida sobre X existe $x_0 \in Ex(X)$ tal que $u(x_0) = \inf u(x)$.

NOTA. Como siempre es posible definir una función cóncava sobre el convexo X, el teorema asegura, en particular, que si $X \neq \emptyset$, entonces $Ex(X) \neq \emptyset$.

Demostración. Ordenemos $\mathcal{F}$ por inclusión; de esta manera $\mathcal{F}$ es inductivo inferiormente, ya que si $\{F_\alpha\}$ es una sucesión decreciente de caras, entonces $\cap F_\alpha$ es un cerrado no vacío que además es una cara de X. Por el lema de Zorn, existe un elemento minimal $F_0$. Veamos que $F_0$ pertenece a $Ex(X)$. Supongamos que $F_0$ contiene dos puntos por lo menos y probemos que entonces $F_0$ no es una cara minimal. Sean $x,y \in F_0 \in \mathcal{F}$, tales que $x \neq y$; entonces existe $\ell \in A$, tal que $\ell(x) \neq \ell(y)$. Definamos: $F' = \{ x \in F_0 \mid \ell(x) = \inf \ell(F_0) \}$ .

$F'$ es un cerrado no vacío del convexo X y, por lo tanto, (ejemplo 2)), $F' \in \mathcal{F}$ . Como $F' \subset F_0$, siendo $F' \neq F_0$, entonces $F_0$ no es minimal, en contradicción con lo supuesto. Luego debe ser $x = y$ y, por lo tanto, $F_0 = \{x\} \in Ex(X)$, de acuerdo con el ejemplo 3).

CONSECUENCIAS.

1) Teorema de Krein-Milman: La cápsula convexa cerrada del conjunto de puntos extremales del convexo compacto X, es el convexo X; $\overline{\text{conv}(Ex(X))} = X$.

Demostración. Sea $Y = \overline{\text{conv}\ (Ex(X))}$; $Y$ es un subconjunto de $X$ convexo y compacto y, además, $Ex(X) \subset Y \subset X$. Sea $u$ una función inferiormente semicontínua y cóncava; por el principio del mínimo se tiene $\inf u(Y) = \inf u(X)$; luego $Y = X$ ya que si $Y \subset X$ e $Y \neq X$, dado $x \in X-Y$, podemos encontrar una funcional $\ell \in E'$ tal que $\ell(x) < \alpha \leqslant \ell(y)$ para todo $y \in Y$, de donde resultaría $\inf \ell(X) < \inf \ell(Y)$.

2) Si $Y$ es un subconjunto cerrado de $X$, entonces:

$$\overline{\text{conv}\ (Y)} = \{x_\nu \mid \nu \in M_+^1(Y)\} .$$

Demostración. Consideremos la aplicación $\phi : M_+^1(Y) \longrightarrow X$ definida por: $\phi(\nu) = x_\nu$ ; $\phi$ es una transformación afín, pues si $\alpha,\beta \in R$ , $\alpha \geqslant 0$ , $\beta \geqslant 0$ con $\alpha+\beta = 1$ , para toda aplicación $\ell \in A$ tenemos:

$$\ell(\alpha x_{\nu_1} + \beta x_{\nu_2}) = \alpha\nu_1(\ell) + \beta\nu_2(\ell) = (\alpha\nu_1 + \beta\nu_2)(\ell)$$

por lo tanto:

$$\phi(\alpha\nu_1 + \beta\nu_2) = \alpha x_{\nu_1} + \beta x_{\nu_2} = \alpha\phi(\nu_1) + \beta\phi(\nu_2) .$$

Además $\phi$ es contínua en la topología débil. Consideremos una **red** $\nu_\alpha \in M_+^1(Y)$ convergente a $\nu \in M_+^1(Y)$ en la topología débil. Entonces, para toda aplicación $\ell \in A$, se tiene $\nu_\alpha(\ell) \longrightarrow \nu(\ell)$ , luego $\ell(x_{\nu_\alpha}) \longrightarrow \ell(x_\nu)$ para toda $\ell \in A$ . Por lo tanto $x_{\nu_\alpha}(\ell) \to x_\nu(\ell)$ para toda $\ell \in A$.

El conjunto $\phi(M_+^1(Y)) = \{x_\nu \mid \nu \in M_+^1(Y)\}$

es convexo compacto y, por ser $x_{\varepsilon_y} = y$ , resulta $Y \subset \phi(M_+^1(Y))$.

Luego: $\overline{\text{conv}\ (Y)} \subset \phi(M_+^1(Y)) = Z.$

Supongamos que $\overline{\text{conv}}\,(Y) \neq Z$; entonces existe $\nu \in M_+^1(Y)$ tal que $x_\nu \notin \overline{\text{conv}}\,(Y)$. Por lo tanto existe $\ell \in E'$ tal que

$$\ell(x_\nu) > \sup \ell\,(\overline{\text{conv}\,(Y)}) ,$$

lo cual es imposible, por ser:

$$\ell(x_\nu) = \nu(\ell) = \int \ell\, d\nu \leqslant \sup \ell(Y)\nu(1) = \sup \ell(Y) \leqslant \sup \ell(\overline{\text{conv}\,(Y)})$$

Debe ser entonces: $= \phi(M_+^1(Y)) = \overline{\text{conv}\,(Y)}$ .

<u>Corolario 1</u>. Sea $Y$ un subconjunto cerrado de $X$. Entonces:

$\overline{\text{conv}}\,(Y) = X$ si y sólo si $Ex(X) \subset Y$.

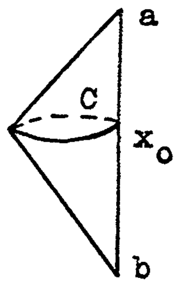
<u>Demostración</u>. $\Longleftarrow$) Es una consecuencia inmediata del teorema de Krein-Milman.

$\Longrightarrow$) Si $x_0 \in Ex(X)$, por la consecuencia 2), existe $\nu \in M_+^1(Y)$ tal que $x_\nu = x_0$; pero entonces resulta: $\nu = \varepsilon_{x_0} \in M_+^1(Y)$ y, en consecuencia $x_0 \in Y$.

<u>Corolario 2</u>. Supongamos que $Ex(X)$ es un conjunto cerrado. Entonces para todo $x_0 \in X$, existe $\mu \in M_+^1(E_x(X))$ tal que $x_\mu = x_0$.

Este corolario es una consecuencia inmediata del anterior.

<u>Observación</u>. $Ex(X)$ puede no ser un conjunto cerrado; consideremos, por ejemplo, el conjunto $X$ dado por el gráfico. Los puntos extremales de $X$ son todos los puntos de la circunferencia $C$, menos el punto $x_0$, que pertenece al segmento de extremos $a$ y $b$, que también son extremales, es decir:




$$Ex(X) = [C - \{x_0\}] \cup \{a\} \cup \{b\}$$

y $Ex(X)$ no es cerrado.

<u>Observación al teorema de Krein-Milman.</u>

Sea $X = M_+^1(T)$ , siendo $T$ un espacio compacto. En este caso $Ex(M_+^1(T)) = \{\varepsilon_t \mid t \in T\}$ , y toda medida $\mu \in M_+^1(T)$ puede ser aproximada por medidas elementales $\varepsilon_t$ con $t \in T$.

## 4. FUNCIONES CONCAVAS SEMICONTINUAS.

Sea $E$ un espacio lineal localmente convexo y Hausdorff, y $X$ un subconjunto de $E$ convexo y compacto.

Sea $K = K(X)$ el conjunto de todas las funciones cóncavas, contínuas definidas sobre $X$, es decir si $u \in K$, resulta: para $x_i \in X$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\alpha_i \in R$ tales que $\alpha_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ con $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(x_i) \leqslant u\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) .$$

$K$ es un cono convexo, siendo $-K = -K(X)$ el conjunto de todas las funciones convexas contínuas definidas sobre $X$; además es $A = K \cap (-K)$.

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ es el baricentro de la medida $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_{x_i}$ y entonces, para $u \in K$, se tiene:

$$\int u \, d\mu \leqslant u(x_\mu) .$$

LEMA. Sea $u$ una función definida sobre $X$, cóncava y superiormente semicontínua. Entonces se verifica:

$$u = \inf \{ \ell \mid u \leqslant \ell, \ \ell \in \mathrm{restr}_X(R+E') \} .$$

Demostración: El conjunto

$$F = \{ (x, \lambda) \in E \times R, \ x \in X \mid \lambda \leqslant u(x) \} ,$$

es convexo y cerrado. Dado $x_0 \in X$, sea $\lambda_0 > u(x_0)$; entonces existe una forma lineal $L \in (E \times R)'$ tal que:

$$\sup L(F) < \alpha < L(x_0, \lambda_0).$$

Ahora bien: $L(x,\lambda) = L(x,0) + \lambda L(x,1) = \ell(x) + \lambda\beta$ siendo $\ell$ una forma lineal contínua definida sobre $E$; además $\ell(x) + \lambda\beta < \alpha$ para todo $(x,\lambda) \in F$, y como $\lambda$ puede ser $-\infty$ no puede ser $\beta < 0$ ya que en este caso sería $\ell(x) + \lambda\beta > \alpha$ para algún valor de $\lambda$ ; debe ser, por lo tanto, $\beta \geqslant 0$. Pero entonces es $\beta > 0$, ya que si fuese $\beta = 0$, por ser $\ell(x_o) + \lambda\beta < \alpha < \ell(x_o) + \lambda_o\beta$ resultaría $\ell(x_o) < \ell(x_o)$.

Definamos la forma **afín** $\ell_o = \frac{\alpha - \ell}{\beta}$ ; $\ell_o \in E' + R$, siendo $\ell_o(x_o) < \lambda_o$ y $\ell_o(x) > u(x)$ para todo $x \in X$; en efecto:

$$\ell_o(x_o) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}\,\ell(x_o) < \frac{\ell(x_o) + \lambda_o\beta}{\beta} - \frac{1}{\beta}\,\ell(x_o) = \lambda_o$$

mientras que

$$\ell_o(x) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}\,\ell(x) > \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta}(-\alpha + \lambda\beta) = \lambda, \text{para todo } \lambda \leqslant u(x);$$

en particular, para $\lambda = u(x)$, tenemos $\ell_o(x) > u(x)$ para todo $x \in X$. Por lo tanto $u = \inf\{\ell \mid \ell > u, \ell \in \text{restr}_X(E'+R)\}$ .

Observación: Para una función u cóncava superiormente semicontínua, definimos la integral superior de la siguiente manera:

$$\int^* u\,d\mu = \inf\left\{\int \phi\,d\mu \mid \phi \in C(X),\ \phi \geqslant u\right\} .$$

Corolario. Sea u una función superiormente semicontínua y cóncava, definida sobre X, y sea $\mu \in M_+^1(X)$ . Entonces:

$$\int^* u\,d\mu \leqslant u(x_\mu) .$$

Demostración: Sea $\ell \in \text{restr}_X(E'+R)$ tal que $\ell > u$, entonces:

$$\int^* u\,d\mu \leqslant \int \ell\,d\mu = \mu(\ell) = \ell(x_\mu) .$$

Por lo tanto:

$$\int^* u\,d\mu \leqslant u(x_\mu) .$$

Este corolario vale también para funciones cóncavas inferiormente semicontínuas. Pero la demostración no es tan sencilla.

## 5. TEOREMA DE HAHN-BANACH CON CONDICIONES LATERALES.

El teorema de Hahn-Banach clásico dice que si $E$ es un espacio lineal y $M$ un subespacio lineal de $E$, dada una forma lineal $f$ definida sobre $E$ tal que $f \leqslant p$, donde $p$ es sublineal, existen extensiones $F$ de $f$ sobre $E$ tales que $F \leqslant p$.

Consideremos ahora un subconjunto arbitrario $S$ del espacio $E$.

DEFINICION. Una extensión lineal $F$ de $f$ se denomina $(S,p)$-maximal si verifica:

1) $F \leqslant p$,

2) Si $G$ es otra extensión lineal de $f$ tal que $G \leqslant p$, entonces la condición $G \geqslant F$ sobre $S$ implica $G = F$.

Observemos que si $M \supset S$ estamos en las condiciones del teorema de Hahn-Banach enunciado anteriormente.

TEOREMA DE HAHN-BANACH (Vincent-Smith). Sea $E$ un espacio lineal, $p$ una forma sublineal definida sobre $E$, $M$ un subespacio de $E$, $f$ una forma lineal definida sobre $M$ dominada por $p$, y $S$ un subconjunto arbitrario de $E$. Entonces existen extensiones $(S,p)$-maximales de $f$ sobre $E$.

Demostración: Observemos que los casos $S = \emptyset$ o $S \subset M$ se reducen al teorema de Hahn-Banach clásico. Además podemos suponer ahora que $E$ es generado por $M$ y $S$. Si no lo fuera se aplica nuevamente el teorema de Hahn-Banach clásico para extender las funcionales definidas en el subespacio generado por $M$ y $S$ a todo $E$. Consideremos el conjunto

$\mathcal{F} = \{(M', f') \mid M'$ es un subespacio lineal de $E$, $M \subset M'$, $f' \leqslant p$, siendo $f'$ una extensión lineal de $f$, $(M' \cap S, p)$-maximal $\}$.

Pongamos $(M', f') \leqslant (M'', f'')$ si $M' \subset M''$.

Entonces $\mathcal{F}$ es un conjunto ordenado y superiormente inductivo. Por el lema de Zorn existe en $\mathcal{F}$ un elemento maximal, $(M_0, f_0)$ donde

$$M_0 = \bigcup_\alpha M_\alpha \ , f_0 = f_\alpha \text{ sobre } M_\alpha ; \ (M_0, f_0) \in \mathcal{F} .$$

Suponiendo $M_0 \neq E$, sea $x_1 \in E - M_0$, y sea $M_1$ el subespacio generado por $M_0$ y $x_1$; entonces cualquier elemento de $M_1$ se representa como $y = x + \lambda x_1$ con $x \in M_0$, y cualquier funcional lineal $f_1$ en $M_1$ que coincida con $f_0$ en $M_0$ está dada por:

$$f_1(x + \lambda x_1) = f_1(x) + \lambda f_1(x_1) = f_0(x) + \lambda\alpha ,$$

donde hemos supuesto $\alpha = f_1(x_1)$. Veamos ahora cuales de estas extensiones verifica $f_1(y) \leqslant p(y)$ para $y \in M_1$.

Si $f_1$ está mayorada por $p$, tomando, en particular, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ tendremos:

$$f_0(x) + \alpha \leqslant p(x + x_1) , \quad f_0(x) - \alpha \leqslant p(x - x_1);$$

luego:

$$f_0(x) - p(x - x_1) \leqslant \alpha \leqslant p(x_1 - x) + f_0(x) ,$$

y por lo tanto:

$$\sup_{x \in M_0} [f_0(x) - p(x - x_1)] \leqslant \alpha \leqslant \inf_{x \in M_0} [p(x_1 - x) + f_0(x)] .$$

El intervalo definido por estas desigualdades no es vacío, porque si $x, x' \in M_0$, se tiene:

$$f_0(x) - f_0(x') = f_0(x-x') \leqslant p(x-x') = p(x-x_1+x_1-x') \leqslant$$
$$\leqslant p(x-x_1) + p(x_1-x') ,$$

de donde:

$$f_0(x) - p(x-x_1) \leqslant f_0(x') + p(x_1-x'),$$

y por lo tanto el supremo del primer miembro es menor o igual que el ínfimo del tercer miembro. Eligiendo $\alpha = = \inf [p(x_1-x) + f_0(x)]$ , la funcional $f_1$ resultante es extensión de $f_0$ y, como se deduce facilmente de lo expuesto, es $(S \cap M_1, p)$-maximal. Pero entonces $(M_0, f_0)$ no sería maximal; debe ser, entonces, $M_0 = E$.

Veremos ahora una generalización del resultado anterior. Notemos $\mathcal{E} = \{F \mid F$ extensión lineal de $f$, $F \leqslant p\}$.

Dado un subespacio $M'$ de $E$ que contiene a $M$ pongamos $\mathcal{E}_{M'}$ para indicar el conjunto de las restricciones a $M'$ de las extensiones lineales de $f$:

$$\mathcal{E}_{M'} = \mathrm{restr}_{M'}$$

Es evidente que $\mathcal{E}_{M'}$ es un conjunto convexo.

Dado un subconjunto arbitrario $S \subset E$, notemos $M(S)$ el subespacio generado por $M$ y $S$.

<u>PROPOSICION</u>. Existen extensiones $F$ de $f$, $(S,p)$-maximales tales que:

$$\mathrm{restr}_{M(S)} F \in \mathrm{ex}(\mathcal{E}_{M(S)}).$$

<u>Demostración</u>. Sea

$F = \{(M', f');\ M'$ subespacio lineal de $E'$; $M' \supset M$, $f' \leq p$ tal que $f'$ es extensión lineal de $f$; $f'$ es $(M' \cap S, p)$-maximal y $f' \in ex(E_{M'})\}$ .

El conjunto $F$ es no vació porque $(M, f) \in F$, y es superiormente inductivo; luego, por el lema de Zorn, existe un elemento maximal $(M_o, f_o)$ donde: $M_o = \bigcup_\sigma M_\sigma$; $f_o = f_\sigma$ sobre $M_\sigma$ siendo $(M_\sigma, f_\sigma) \in F$; entonces: $f_o$ es una extensión de $f$ que es $(M_o \cap S, p)$-maximal. Veamos que $f_o \in ex(E_{M_o})$. En efecto, sean $\lambda, \beta \in R$ $\lambda \geq 0$ , $\beta \geq 0$ , con $\lambda+\beta = 1$ tales que para $g$, $h \in E_{M_o}$ se tenga: $f_o = \lambda g+\beta h$ ; luego para $x \in M_\sigma$ se tiene

$$f_o(x) = \lambda g(x) + \beta h(x) = f_\sigma(x).$$

Pero $f_\sigma$ es una extensión de $f$ a $M_\sigma$ y $f_\sigma \in ex(E_{M_\sigma})$, luego para todo $\sigma$ se tiene: $f_\sigma = g = h$ sobre $M_\sigma$; luego: $f_o = g = h$ sobre $M_o$ o sea $f_o \in ex(E_{M_o})$.

Veamos que $M_o = M(S)$; si así no fuera existe $x_1 \in S$ tal que $x_1 \notin M_o$; entonces la aplicación $f_1(x+tx_1) = f_o(x) + t\alpha$, por lo probado anteriormente, es una extensión de $f_o$ al subespacio $M_1$ generado por $M_o$ y $x_1$ dominada por $p$ si tomamos $\alpha = f_1(x_1) = \inf_{x \in M_o} [f_o(x) + p(x_1-x)]$ . Veamos que $f_1 \in ex(E_{M_1})$.

En efecto, supongamos que:

$$f_1 = \lambda g + \beta h \quad \text{para } h,\ g \in E_{M_1} \quad ;\ \lambda, \beta \geq 0\ ,\ \text{con } \lambda+\beta = 1$$

Entonces para todo $y \in M_1$, o sea para $y = x+tx_1$ con $x_1 \in M_o$, se tiene:

$$f_1(y) = f_1(x+tx_1) = \lambda g(x+tx_1) + \beta h(x+tx_1) =$$
$$= \lambda g(x) + \beta h(x) + \lambda g(tx_1) + \beta h(tx_1)$$

o sea:

$$f_o(x) + t\alpha = \lambda g(x) + \beta h(x) + t(\lambda g(x_1) + \beta h(x_1));$$

tomando, en particular, $t = 0$, resulta $f_o(x) = g(x) = h(x)$ para todo $x \in M_o$ por ser $f_o$ extremal del conjunto $E_{M_o}$; luego se tiene: $\alpha = \lambda g(x_1) + \beta h(x_1)$; pero como $g(x_1) \leq \alpha$, $h(x_1) \leq \alpha$, debe ser $\alpha = g(x_1) = h(x_1)$; por lo tanto resulta: $f_1 = g = h$ sobre $M_1$ o sea $f_1 \in ex(E_{M_1})$. Luego $f_o$ no sería maximal. Por lo tanto debe ser $M_o = M(S)$.

Definimos:

$$\tilde{p}(x) = \inf_{y \in M} [f(y) + p(x-y)].$$

<u>LEMA</u>. $\tilde{p}$ es una aplicación sublineal sobre E tal que $\tilde{p} \leq p$ y $\tilde{p} = f$ sobre M. Toda extensión F de f dominada por p está también dominada por $\tilde{p}$.

<u>Demostración</u>: Dados $x_1$, $x_2 \in E$ y $\varepsilon > 0$, elijamos $y_1, y_2 \in M$ tales que:

$$\tilde{p}(x_1) \geq f(y_1) + p(x_1-y_1) - \varepsilon \quad , \quad \tilde{p}(x_2) \geq f(y_2) + p(x_2-y_2) - \varepsilon .$$

Entonces:

$$\tilde{p}(x_1) + \tilde{p}(x_2) \geq f(y_1+y_2) + p(x_1+x_2-(y_1+y_2)) - 2\varepsilon \geq$$
$$\geq \tilde{p}(x_1+x_2) - 2\varepsilon ,$$

lo cual prueba que $\tilde{p}$ es sublineal. Además, si $x \in M$,

$$f(x) = f(x) + p(x-x) \leq f(y) + p(x-y)$$

para todo $y \in M$, de donde $f(x) = \tilde{p}(x)$. Por último, si $F$ es una extensión de $f$ tal que $F(x) \leq p(x)$ tenemos:

$$F(x) = F(y) + F(x-y) \leq f(y) + p(x-y)$$

para todo $y \in M$, y por lo tanto $F(x) \leq \tilde{p}(x)$.

Corolario 1: Sea $S = \{x_o\}$, entonces para toda extensión $(S,p)$-maximal $F$ de $f$ se tiene: $F(x_o) = \tilde{p}(x_o)$.

Demostración: Es suficiente considerar el caso en que $x_o \notin M$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe una extensión lineal $F$ de $f$ tal que $F \leq p$ y $F(x_o) = \tilde{p}(x_o)$; luego $F$ es una extensión $(S,p)$-maximal. Por otra parte si $G$ es una de $f$, $(S,p)$-maximal, entonces $G \leq \tilde{p}$ sobre $E$, pero por ser $\tilde{p}(x_o) = F(x_o)$ resulta $G(x_o) \leq F(x_o)$ y como $G$ es una extensión $(S,p)$-maximal de $f$ es $F(x_o) = G(x_o)$, luego $G(x_o) = \tilde{p}(x_o)$.

Corolario 2. Sea $S$ un subconjunto arbitrario y $x_o \in S$; entonces existe por lo menos una extensión lineal $(S,p)$-maximal $F$ de $f$ tal que $F(x_o) = \tilde{p}(x_o)$.

Demostración: Sea $f_o$ una extensión $(\{x_o\},p)$-maximal de $f$ al subespacio $M_1$ generado por $M$ y $x_o$. Entonces $f_o(x_o) = \tilde{p}(x_o)$, y basta tomar como $F$ cualquier extensión $(S,p)$-maximal de $f_o$.

Observación. Podemos suponer que $S$ es un cono convexo que contiene a $M$; en efecto, si $C(S)$ es el cono generado por $S$,

**las siguientes condiciones son equivalentes:**

1) $F$ es una extensión de $f$, $(S,p)$-maximal.
2) $F$ es una extensión de $f$, $(C(S),p)$-maximal.
3) $F$ es una extensión de $f$, $(C(S\cup M),p)$-maximal.

TEOREMA DE UNICIDAD. Sea $S$ un cono convexo tal que $M\subset S$; entonces todas las extensiones de $f$, lineales y $(S,p)$-maximales, coinciden sobre $S$ (y por lo tanto en el subespacio generado por $S$: $S-S$) si y sólo si $\tilde{p}$ es aditiva sobre $S$.

Demostración: Supongamos que todas las extensiones de $f$, $(S,p)$-maximales coinciden sobre $S$; entonces por el corolario 2, para todo $x\in S$, existe una extensión $F_x(x)$ de $f$ $(S,p)$-maximal tal que $F_x(x)=\tilde{p}(x)$. Pero ahora todas las extensiones $(S,p)$-maximales de $f$ coinciden sobre $S$, por lo tanto toda extensión $(S,p)$-maximal $F$ de $f$ verifica $F(x)=\tilde{p}(x)$ para todo $x\in S$ y, por lo tanto $\tilde{p}(x)$ es aditiva sobre $S$.

Recíprocamente consideremos el subespacio lineal generado por $M$ y $S$: $M(S)$ y observemos que como $M\subset S$ entonces $M(S)$ coincide con el espacio generado por $S$: $S-S$. Definamos sobre $S-S$ una aplicación $\tilde{f}$ de la siguiente manera:

$$\tilde{f}(x-y)=\tilde{p}(x)-\tilde{p}(y) \text{ para todo } x,y\in S.$$

Probaremos ahora que $\tilde{f}$ es lineal sobre $S-S$. Dados $x,y,x_1,y_1$ $\subset S$, tenemos:

$$\tilde{f}(x-y+x_1-y_1)=\tilde{f}(x+x_1)-\tilde{f}(y+y_1)=\tilde{f}(x)+\tilde{f}(x_1)-\tilde{f}(y)-\tilde{f}(y_1)=$$
$$=\tilde{f}(x-y)+\tilde{f}(x_1-y_1).$$

Si $\lambda \geqslant 0$,

$$\tilde{f}(\lambda(x-y)) = \tilde{f}(\lambda x)-\tilde{f}(\lambda y) = \lambda[\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)] = \lambda \tilde{f}(x-y).$$

Si $\lambda < 0$ ,

$$\tilde{f}(\lambda (x-y)) = \tilde{f}(-\lambda(y-x)) = -\lambda\tilde{f}(y-x) = -\lambda[\tilde{f}(y)-\tilde{f}(x)] =$$

$$= \lambda[\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)] = \lambda\tilde{f}(x-y).$$

Además $\tilde{f}$ está dominada por $\tilde{p}$ sobre S-S. En efecto, si $x,y \in S$:

$$\tilde{f}(x-y) = \tilde{p}(x)-\tilde{p}(y) \leqslant \tilde{p}(x-y).$$

Cualquier extensión de f dominada por p estará también dominada por $\tilde{f}$ sobre S, por consiguiente el conjunto de las extensiones (S,p)-maximales de f coincide con el conjunto de las extensiones de $\tilde{f}$ dominadas por p; luego las extensiones (S,p)-maximales de f coinciden sobre S (y por lo tanto también sobre S-S) con $\tilde{f}$.

## 6. CONJUNTOS BORDE. RELACION DE ORDEN DE BISHOP-DE LEEUW.

Sea X un subconjunto convexo compacto de un espacio lineal E, localmente convexo y de Hausdorff.

Dada una función real f definida y acotada sobre X consideraremos todas las funciones u, cóncavas, contínuas sobre X ($u \in K$) tales que $u \geqslant f$ y definamos la siguiente función:

$$\hat{f} = \inf \{ u \in K \mid u \geqslant f \} = \inf \{ \ell \in A \mid \ell \geqslant f \}$$

De acuerdo con la definición, $\hat{f}$ es la menor función superiormente semicontínua, cóncava, mayor o igual que f.

Además resulta: $f \leqslant \hat{f}$ y si $f \leqslant g$ también es $\hat{f} \leqslant \hat{g}$. Por otra parte, la transformación $f \longrightarrow \hat{f}$ es sublineal, ya que se verifica: 1) $\widehat{f + g} \leqslant \hat{f} + \hat{g}$;

2) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, es $(\widehat{\lambda f}) = \lambda(\hat{f})$.

A partir de $\hat{f}$ introducimos una nueva función: $\check{f} = -(\widehat{-f})$.

$\check{f}$ resulta una función inferiormente semicontínua y convexa, siendo además la mayor de las funciones convexas dominadas por f.

Se tiene además: $\check{f} \leqslant f \leqslant \hat{f}$.

Notemos: $M_x = \{ \mu \in M_+^1(x) \mid x_\mu = x \}$.

LEMA. **Para toda función contínua f sobre X, se verifica que:**

$$\{ \mu(f) \mid \mu \in M_x \} = [\check{f}(x), \hat{f}(x)]$$

Demostración. Sea $\mu \in M_x$ y consideremos una transformación afín $\ell \in A$ tal que $\ell \geqslant f$; luego es: $\mu(f) \leqslant \mu(\ell)$ pues $\mu \in M_+^1(x)$ pero $\mu(\ell) = \ell(x)$, o sea $\mu(f) \leqslant \ell(x)$; por lo tanto

$$\mu(f) \leqslant \inf \{ \ell(x) \mid \ell \geqslant f \} = \hat{f}(x).$$

Como también es $\mu(-f) \leqslant \widehat{-f}(x)$ y es: $\mu(f) \geqslant -(\widehat{-f}(x)) = \check{f}(x)$

resulta $\mu(f) \in [\check{f}(x), \hat{f}(x)]$ .

Recíprocamente, consideremos $\alpha \in [\check{f}(x), \hat{f}(x)]$ . Para $\lambda \in \mathbb{R}$, fijo, la aplicación $\phi : \lambda f \longrightarrow \lambda\alpha$ es una forma lineal sobre el espacio generado por f, tal que $\phi \leqslant \hat{f}(x)$. En efecto, si $\lambda \geqslant 0$, como $\alpha \leqslant \hat{f}(x)$ es $\lambda\alpha = \phi(\lambda f) \leqslant \widehat{\lambda f}(x)$. Si $\lambda \leqslant 0$ por ser $-\alpha \leqslant -\check{f}(x) = (\widehat{-f})(x)$ es: $-\alpha\lambda \geqslant (\widehat{-\lambda f})(x)$

Por otra parte, la aplicación $g(x) \longrightarrow \hat{g}(x)$ como se vió antes es sublineal y, por lo tanto, por el teorema de Hahn-Banach existe una forma lineal $\mu$ sobre $C(X)$ tal que $\mu(f) = \alpha$ y $\mu(g) \leqslant \hat{g}(x)$, para toda $g \in C(X)$. Además $\mu \in M_+(x)$ ya que si $g \leqslant 0$, por ser $0 \in A$ se tiene $\hat{g} \leqslant \hat{0} = 0$; por lo tanto también es $\hat{g}(x) \leqslant 0$ y entonces $\mu(g) \leqslant 0$. Pero entonces, si $\ell \in A$ es $\mu(\ell) \leqslant \hat{\ell}(x) = \ell(x)$ para toda $\ell \in A$ , y como $-\ell \in A$ resulta $\mu(-\ell) = -\mu(\ell) \leqslant -\ell(x)$, luego $\mu(\ell) = \ell(x)$ para toda $\ell \in A$ ; en particular para $\ell = 1$ y, por consiguiente, $\mu \in M_x$ .-

<u>DEFINICION</u>. Sea f una función convexa contínua sobre X; denominamos conjunto borde para la función f, al conjunto: $B_f = \{x \in X \mid f(x) = \hat{f}(x)\} = \{f = \hat{f}\}$.

<u>TEOREMA</u>. $\bigcap_{f \in -K} B_f = Ex(X)$.

<u>Demostración</u>. Sea $x \in Ex(X)$. Entonces $[\check{f}(x), \hat{f}(x)] = \{f(x)\}$ ya que si $x \in Ex(X)$, la única medida $\mu \in M_+^1(X)$ para la cual es $x = x_\mu$ es $\mu = \varepsilon_x$ , luego:

$$\{\mu(f) \mid \mu \in M_x\} = \{\varepsilon_x(f)\} = \{f(x)\} \quad ;$$

por lo tanto, para toda $f \in C(X)$ es $\hat{f}(x) = \check{f}(x) = f(x)$; en particular, esto vale para toda $f \in -K$ , luego $x \in \bigcap_{f \in -K} B_f$.

Recíprocamente, supongamos que $x \notin Ex(X)$; entonces existen $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ tales que: $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ con $o < \alpha < 1$; pero siendo $x_1 \neq x_2$ existe $\ell \in A$ tal que $\ell(x_1) \neq \ell(x_2)$ siendo además $\ell(x) = \alpha\ell(x_1) + (1-\alpha)\ell(x_2)$.

La igualdad

$$\ell^2(x) = \alpha\ell^2(x_1)+(1-\alpha)\ell^2(x_2)-\alpha(1-\alpha)[\ell(x_1)-\ell(x_2)]^2$$

permite deducir que: $\ell^2 \in -K$ y $\ell^2(x) < \alpha\ell^2(x_1)+(1-\alpha)\ell^2(x_2)$;

tomando $f = \ell^2 \in -K$, tenemos entonces:

$$f(x) < \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2) \leq \alpha\hat{f}(x_1)+(1-\alpha)\hat{f}(x_2) \leq \hat{f}(x) ;$$

por lo tanto $x \notin B_f$, y con mayor razón, $x \notin \bigcap_{f\in -K} B_f$.

Observemos que cada conjunto borde $B_f$ es un conjunto $G_\delta$ es decir, es intersección numerable de abiertos. En efecto:

$$B_f = \{f=\hat{f}\} = \bigcap_{n\geq 1} \{\hat{f}-f < 1/n\}.$$

Por lo tanto, los conjuntos $B_f$ son medibles para toda medida.

<u>DEFINICION</u>. Una función convexa $u$, se dice estrictamente convexa, si para todo $x,y \in X$, $x \neq y$ y todo $\alpha \in R$ tal que $o < \alpha < 1$, se verifica:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y).$$

<u>LEMA</u>. Si existe una función contínua estrictamente convexa definida sobre $X$, entonces $Ex(X)$ es un conjunto borde.

<u>Demostración</u>. Supongamos que $x \notin Ex(X)$. Existen entonces $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ y $\alpha \in R$, $o < \alpha < 1$ tal que $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$.

Dada una función $u$ estrictamente convexa definida sobre $X$, resulta:

$$u(x) < \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2) \leq \alpha\hat{u}(x_1)+(1-\alpha)\hat{u}(x_2) \leq u(x);$$

luego, $x \notin B_u$. Por lo tanto, por el teorema anterior, $\mathcal{E}x(X) = B_u$.

TEOREMA (M. Hervé). Existe una función contínua estrictamente convexa sobre X, si y sólo si X es metrizable.

Demostración. Si X es metrizable y compacto, contiene una sucesión numerable densa, y por lo tanto una base numerable de abiertos $\mathcal{D}$ .

Sea J la familia de los pares $\{U,V\}$ tales que $U,V \in \mathcal{D}$, $\overline{V} \subset U$; observemos que J es numerable. Para cada $\{U,V\} \in J$ existe una función contínua $g$ tal que $0 \leqslant g \leqslant 1$, $g(x) = 1$ si $x \in \overline{V}$, $g(x) = 0$ si $x \notin U$. Esta familia de funciones separa puntos de X; luego el álgebra $M$ que genera es uniformemente densa en $C(X)$ por el teorema de Stone-Weierstrass. Además $M$ contiene una subálgebra $M_o$ numerable y también densa en la topología de la convergencia uniforme.

Luego $C(X)$ admite una base numerable de abiertos $\{V_n\}$ . Poniendo $V_n' = V_n \cap A(X)$ y eliminando los $V_n'$ vacíos resulta que $\{V_n'\}$ es una base numerable de abiertos de $A(X)$. Si en cada $V_n'$ se elige una función afín $\ell_n$, la sucesión $\{\ell_n\}$ es numerable y densa en $A$ , y por lo tanto es separadora, pues si $x_1 \neq x_2$ existe $\ell \in A$ tal que $\ell(x_1) \neq \ell(x_2)$, y eligiendo n tal que

$$|\ell_n(x) - \ell(x)| < \frac{|\ell(x_1) - \ell(x_2)|}{3}$$

para todo $x \in X$ se tendría

$$|\ell_n(x_1) - \ell_n(x_2)| \geq \frac{1}{3} |\ell(x_1) - \ell(x_2)| > 0.$$

Si suponemos $\ell_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$ podemos obtener una sucesión $(\ell_n) \in A$ tal que $\|\ell_n\| = 1$.

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ell_n^2$ converge uniformemente y define una función $u \in -K$, que es estrictamente convexa. En efecto, dados $x_1, x_2 \in X$; $x_1 \neq x_2$ sea $\alpha \in R$, $0 < \alpha < 1$ y consideremos

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 .$$

Existe un $n \geq 1$ tal que $\ell_n(x_1)$ es distinto de $\ell_n(x_2)$, entonces:

$$\ell_n^2 (x) < \alpha \ell_n^2 (x_1) + (1 - \alpha)\ell_n^2(x_2)$$

y por lo tanto

$$u(x) < \alpha\, u(x_1) + (1 - \alpha)u(x_2).$$

En consecuencia hemos definido sobre X una función estrictamente convexa.

Recíprocamente, dada la función u contínua estrictamente convexa, definamos una nueva función

$$w: X \times X \longrightarrow R$$

de la siguiente manera:

$$w(x,y) = \tfrac{1}{2}(u(x) + u(y)) - u(\tfrac{1}{2}(x + y)) \text{ para } (x,y) \in X\times X.$$

Consideremos el conjunto diagonal

$$\Delta = \{ (x,x) : x \in X \} .$$

Como w es contínua en X x X y es estrictamente positiva fuera de $\Delta$, es fácil ver, usando la compacidad de X, que la familia de conjuntos

$$V_n = \{ (x,y) : w(x,y) < 1/n \}$$

es base de una uniformidad tal que la topología uniforme correspondiente es equivalente a la topología original de X. Pero un espacio de Hausdorff uniforme cuya uniformidad tiene base numerable es metrizable (ver Kelley, General Topology), y esto completa la demostración.

<u>Corolario</u>. Si X es metrizable, Ex(X) es un $G_\delta$ .

<u>Demostración</u>. Si X es metrizable existe una función contínua estrictamente convexa definida sobre X; entonces, por el lema anterior, Ex(X) es un conjunto borde y, en consecuencia, un conjunto $G_\delta$ .

<u>Relación de Bishop-de Leeuw.</u>

Consideremos el conjunto $M_+ = M_+(X)$ de todas las medidas positivas definidas sobre X; vamos a definir una relación de orden sobre él: "Sean $\mu, \nu \in M_+$ : diremos que $\nu \prec \mu$ si $\mu(u) \leqslant \nu(u)$ para toda $u \in -K$".

" $\prec$ " es una relación de orden, que se denomina relación de orden de Bishop-deLeeuw. En efecto, es evidente que $\mu \prec \mu$ para toda $\mu \in M_+$, siendo además transitiva, como es fácil de verificar. Veamos que es antisimétrica: sean $\mu, \nu \in M_+$ tales que $\mu \prec \nu$ y $\nu \prec \mu$; probemos que $\mu = \nu$ .

En efecto, por hipótesis es:

$$\mu(u) \leqslant \nu(u) \leqslant \mu(u) \quad \text{para toda } u \in -K ,$$

luego $\mu = \nu$ sobre $K-K$ ; veamos que $\mu = \nu$ sobre C, para lo cual es suficiente probar que $K-K$ es denso en C(X).

<u>LEMA</u>. $K-K$ es denso en C(X).

<u>DEMOSTRACION</u>. $K-K$ es un subespacio lineal de C(X) que separa puntos de X y, además $K-K$ contiene las constantes. Si probamos que $K-K$ es un reticulado, aplicando el teorema de Stone-Weierstrass resultará $K-K$ denso en X.

Sean entonces u, v $\in K$. Tenemos:

$$|u-v| = \sup(u-v, v-u) = \sup(u+v-2v, u+v-2u) = u+v-2\inf(u,v).$$

Por lo tanto: $\inf(u,v) = \frac{1}{2}[(u+v) - |u-v|]$; como $u+v \in K$, e: $\inf(u,v) \in K$ resulta $|u-v| \in K-K$, luego $\inf(u,v) \in K-K$.

Análogamente, $\sup(u,v) \in K-K$ ya que:

$$\sup(u,v) = \tfrac{1}{2}[(u+v) + |u-v|].$$

Luego $K-K$ es un reticulado; por lo tanto, $K-K$ es denso en C(X).

<u>LEMA</u>. Sea $\mu \in M_x$ y $x \in X$. Entonces se verifica $\varepsilon_x \prec \mu$ si y sólo si $\mu \in M_x$, es decir, $\mu$ es una medida de probabilidad, de masa total 1, cuyo baricentro es x.

<u>Demostración</u>. $\longleftarrow$ : Sea $\mu \in M_x$ ; entonces, para toda función contínua f, se verifica: $\mu(f) \in [\underset{\smile}{f}(x), \hat{f}(x)]$ ; si $u \in -K$ resulta:

$$\varepsilon_x(u) = u(x) = \underset{\smile}{u}(x) \leqslant \mu(u). \text{ Luego: } \varepsilon_x \prec \mu.$$

$\longrightarrow$ : Si $\varepsilon_x \prec \mu$ se tiene $\varepsilon_x(u) = u(x) \leqslant \mu(u)$ para toda $u \in -K$ . Además para toda $v \in K$ se tiene $-v \in -K$ ; luego: $\varepsilon_x(-v) = -v(x) \leqslant \mu(-v)$ para toda $v \in K$.

En particular para toda función afín $\ell \in A$ se verifica: $\ell(x) = \mu(\ell)$, siendo entonces $\mu(1) = 1$; luego $\mu \in M_+^1$ y, por la igualdad anterior, $x_\mu = x$; por lo tanto $\mu \in M_+^1$ .

LEMA. Sea $\mu \in M_+$ y $\nu$ una forma lineal sobre $C(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $\nu \in M_+$ y $\mu \prec \nu$;

2) $\nu \leqslant \hat{\mu}$ sobre $C(X)$ siendo $\hat{\mu}(f) = \mu(\hat{f}) = \int \hat{f}\, d\mu$.

Demostración.

1) $\longrightarrow$ 2). Sea $f \in C(X)$ y $v \in K$ tal que $v \geqslant f$; entonces

$$\nu(f) \leqslant \nu(v) \leqslant \mu(v) = \int v\, d\mu ;$$

luego: $\nu(f) \leqslant \int \hat{f}\, d\mu = \hat{\mu}(f)$.

2) $\longrightarrow$ 1). Sea $\nu \leqslant \hat{\mu}$ sobre $C(X)$; entonces para toda $f \in C(X)$ se tiene $\nu(f) \leqslant \hat{\mu}(f)$. Como por hipótesis es $\mu \geqslant 0$, para $f \leqslant 0$ resulta $\nu(f) \leqslant 0$; luego $\nu \in M_+$. Además si $v \in K$, es

$$\nu(v) \leqslant \hat{\mu}(v) = \mu(\hat{v}) = \mu(v);$$

por lo tanto: $\mu(v) \leqslant \nu(v)$ para $v \in -K$ , o sea que $\mu \prec \nu$ .

## 7. MEDIDAS BORDE. TEOREMA DE EXISTENCIA.

El conjunto Ex(X) puede tener propiedades de medibilidad y topológicas complicadas; hay ejemplos en los cuales Ex(X) no es universalmente medible (no es boreliano). Por ello no puede usarse en general medidas concentradas en Ex(X), y debe introducirse el concepto de medida borde.

**DEFINICION.** Una medida $\mu \in M_+$ se dice una medida borde si está concentrada en todo conjunto borde. Es decir si $\mu(X - B_f) = 0$ para toda $f \in -K$ .

**Observaciones.**

1) Si X es metrizable, Ex(X) es un conjunto borde, luego $\mu$ es una medida borde si y sólo sí está concentrada en el conjunto de los puntos extremales de X.

2) $\mu$ es una medida borde si y sólo si $\mu(X - B_f) = 0$, o sea si y sólo si $\int f\, d\mu = \int \hat{f}\, d\mu$; o lo que es equivalente $\mu = \hat{\mu}$ sobre $-K$ (y entonces $\mu = \hat{\mu}$ sobre $C(X)$).

**TEOREMA.** Una medida $\mu \in M_+(X)$ es una medida borde si y sólo si $\mu$ es un elemento maximal respecto de la relación de orden de Bishop-de Leeuw.

**Demostración.** Sea $\mu$ una medida borde. Queremos probar que es maximal o sea $\mu = \nu$ para toda $\nu \in M_+$ tal que $\mu \prec \nu$ .

Por el lema anterior $\mu \prec \nu$ si y sólo si $\nu \leqslant \hat{\mu}$ sobre $C(X)$; por lo tanto, si $u \in -K$ resulta:

$$\nu(u) \leqslant \hat{\mu}(u) = \mu(\hat{u}) = \mu(u),$$

pues $\mu$ es una medida borde. Luego para toda $u \in -K$ es $\nu(u) \leqslant \mu(u)$ o sea $\nu \prec \mu$; por lo tanto $\mu = \nu$ .

Recíprocamente, supongamos que $\mu \in M_+$ es maximal;

esto significa que $\mu$ es la única forma lineal definida sobre $C(X)$ que es mayorada por la forma sublineal $\hat{\mu}$ ; entonces, por el teorema de Hahn-Banach, $\mu(f) = \hat{\mu}(f)$ para toda $f \in C(X)$, de donde, por la observación 2), $\mu$ es una medida borde.

TEOREMA DE EXISTENCIA. (Choquet-Meyer). Sea X un compacto convexo; entonces para todo $x \in X$ existe por lo menos una medida borde $\mu \in M_+^1$ tal que $x_\mu = x$.

Demostración. Aplicamos el teorema de Hahn-Banach a: $E=C(X)$, $M = A(X)$, $f(x) = \delta_x = \operatorname{restr}_A \varepsilon_x$ siendo la forma sublineal definida por: $p(q) = \hat{q}(x)$ para toda $q \in C(X)$, $S = -K(X)$.

Observemos que $\delta_x \leqslant p$ sobre $A(X)$; en efecto, si $\ell \in A(X)$ se tiene:

$$\delta_x(\ell) = \ell(x) = \hat{\ell}(x) = p(\ell).$$

Por el teorema de Hahn-Banach existe una extensión lineal $(S,p)$-maximal $\mu$ de $\delta_x$. Veremos ahora que $\mu$ es la medida buscada. Observemos que: $\hat{\varepsilon}_x(f) = \varepsilon_x(\hat{f}) = \hat{f}(x) = p(f)$.

Como $\mu$ está dominada por p sobre $C(X)$, tenemos $\mu \leqslant \hat{\varepsilon}_x$; por el último lema del párrafo 6, esto equivale a $\varepsilon_x \prec \mu$, de donde, por el penúltimo lema del párrafo 6, $\mu \in M_+^1$ y $x_\mu = x$.

Probaremos que $\mu$ es maximal, en el orden de Bishop-deLeeuw, de donde resultará que $\mu$ es una medida borde. Sea $\nu \in M_+$, $\nu \succ \mu$. Entonces $\nu \geqslant \mu$ sobre S. Además $\nu \leqslant \hat{\mu}$, de donde

$$\nu(f) \leqslant \hat{\mu}(f) = \mu(\hat{f}).$$

Sea $h \in K$, $h \geqslant \hat{f}$, $h(x) \leqslant \hat{f}(x) + \varepsilon$. Aplicando el primer lema del párrafo 6, obtenemos:

$$\mu(\hat{f}) \leqslant \mu(h) \leqslant \hat{h}(x) = h(x) \leqslant \hat{f}(x) + \varepsilon.$$

Luego, $\mu(\hat{f}) \leq \hat{f}(x) = p(x)$, y combinando con la desigualdad precedente, resulta que $\nu \leq p$. Pero entonces, $\nu = \mu$ porque $\mu$ es $(S,p)$-maximal. Por lo tanto, $\mu$ es maximal en el orden de Bishop-deLeeuw, como queríamos probar.

Corolario. (Teorema de Choquet). Sea $X$ un conjunto convexo compacto metrizable; entonces todo $x \in X$ es el baricentro de una medida $\mu \in M_+^1$ tal que sop $\mu = Ex(X)$.

Demostración. Si $X$ es metrizable, $Ex(X)$ es un conjunto borde. Además, por el teorema de existencia, para todo $x \in X$, existe $\mu \in M_+^1$ tal que $x_\mu = x$ y $\mu$ es una medida borde y por la observación 1) esto equivale a decir que sop $\mu = Ex(X)$.

Observación.

1) Demostración directa del corolario. Sea $f \in C(X)$; como $\{\mu(f) : \mu \in M_x\} = [\check{f}(x), \hat{f}(x)]$, para $\mu \in M_x$ es

$$\mu(f) \leq \mu(\hat{f}) \leq \hat{f}(x).$$

Podemos elegir $\mu \in M_x$ tal que $\mu(f) = \hat{f}(x)$. Pero por ser $X$ un conjunto compacto convexo metrizable, aplicando el teorema de Hervé $f$ puede tomarse contínua estrictamente convexa; por lo tanto $\mu(f) = \mu(\hat{f}) = \hat{f}(x)$ y de aquí resulta: $\mu(\hat{f} - f) = 0$ lo que equivale a decir que $\mu(X - B_f) = 0$. Pero $B_f = Ex(X)$, luego sop $\mu = Ex(X)$.

2) Toda medida borde $\mu \in M_x$ es una extensión $(S,p)$-maximal de $\delta_x$. En efecto, dada $\mu \in M_+^1$ por definición de baricentro tenemos que para toda $\ell \in A$ es $\mu(\ell) = \ell(x)$; por lo tanto $\mu$ es una extensión de $\delta_x$ y además

$$\mu(f) \leq \mu(\hat{f}) \leq \hat{f}(x), \text{ para toda } f \in C(X).$$

Es decir, $\mu \leq_{\rho} p$ (recordemos que en el teorema de unicidad la forma sublineal p se define por $p(f) = \hat{f}(x)$ para toda $f \in C(X)$). Veamos que $\mu$ es $(S,p)$-maximal; en efecto, sea $\nu$ otra extensión lineal de $\delta_x$, $\nu \leqslant p$ y supongamos que $\nu \geqslant \mu$ sobre $S = -K$. Por ser $\nu \leqslant p$ es $\nu(f) \leqslant \hat{f}(x) = \hat{\varepsilon}_x$ o lo que es equivalente $\varepsilon_x \prec \nu$ pero entonces $x_\nu = x$; luego $\nu \in M_x$ y $\nu \geqslant \mu$ sobre S, es decir $\mu \prec \nu$. Pero, por el teorema anterior $\mu$ es maximal en la relación "$\prec$"; luego es $\mu = \nu$.

<u>TEOREMA</u>. Una medida borde $\mu$ tiene soporte contenido en todo conjunto $A \supset Ex(X)$, siendo A un $K_\sigma$ (es decir, A es unión numerable de compactos).

<u>Demostración</u>. Dada $\mu \in M_+$ debemos probar que $\mu(X - A) = 0$, o, lo que es equivalente, que para todo conjunto compacto $K \subset X - A$, se tiene: $\mu(K) = 0$.

Sea $A = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ y sea K un compacto tal que $K_n \cap K = \emptyset$; por el lema de Uryshon, para cada $n \geqslant 1$ existe una función $f_n$, $f_n \in C(X)$, $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, tal que $f_n(x) = 1$, para todo $x \in K$ y $f_n(x) = 0$, para todo $x \in K_n$. De esta manera obtenemos una sucesión $(f_n)_{n \geqslant 1}$ de funciones contínuas que podemos suponer decreciente, por lo tanto, si $f = \lim f_n$, tendremos: $f(x) = 0$ para $x \in K_n$ $(n \geqslant 1)$ mientras que $f(x) = 1$ para $x \in K$; por lo tanto $f(x) = 0$ sobre A y además $1_K \leqslant f$. Veamos que $\mu(f) = 0$, lo cual resulta del siguiente

<u>LEMA</u>. Sea $(f_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión de funciones contínuas positivas sobre X; supongamos además que la sucesión es decreciente y que para todo $x \in Ex(X)$ es $\lim f_n(x) = 0$. Entonces, para toda medida borde $\mu$ se tiene:

$$\lim \mu(f_n) = 0.$$

<u>Demostración</u>. $\mu$ es una medida borde, si y sólo si $\mu = \hat{\mu}$ ; en particular, si $h \in C(X)$, $h \geqslant 0$, tenemos:

$$\mu(-h) = \mu(-\hat{h}) = \inf \{\mu(u) : \mu \in K, u \geqslant -h\} ;$$

Luego, si $\varepsilon > 0$ existe $u \in K$, $u \geqslant -h$, tal que: $\mu(u) - \mu(-h) < \varepsilon$. Poniendo $v = \sup(-u, o)$, tendremos $o \leqslant v \leqslant h$, $\mu(h) - \mu(v) < \varepsilon$.

Utilizando este hecho, podemos construir una sucesión $g_n$ de funciones convexas contínuas tales que $o \leqslant g_n \leqslant f_n$, $g_{n+1} \leqslant g_n$, y $\mu(f_n) - \mu(g_n) < \varepsilon$. En efecto, supongamos definida $g_1, g_2, \ldots, g_n$, y sea $g_{n+1} \in -K$ tal que

$$o \leqslant g_{n+1} \leqslant \inf(g_n, f_{n+1})$$

y

$$\mu(\inf(g_n, f_{n+1})) - \mu(g_{n+1}) < \varepsilon + \mu(g_n) - \mu(f_n).$$

Por ser

$$g_n + f_{n+1} = \inf(g_n, f_{n+1}) + \sup(g_n, f_{n+1}) \leqslant \inf(g_n, f_{n+1}) + f_n$$

tenemos

$$\mu(f_{n+1}) - \mu(g_{n+1}) \leqslant \mu(\inf(g_n, f_{n+1})) - \mu(g_{n+1}) + \mu(f_n) - \mu(g_n) < \varepsilon .$$

Como $\lim f_n(x) = 0$ para $x \in Ex(X)$ entonces $g = \lim g_n = o$ sobre $Ex(X)$; y $g$ es una función convexa semicontínua superiormente, por lo tanto $g$ toma su máximo sobre $Ex(X)$ y debe ser $g \leqslant 0$, pero para todo $n \geqslant 1$ se tiene $g_n \geqslant 0$, luego $g \equiv 0$.

Esto implica que $\lim \mu(g_n) = o$, o sea: $o \leqslant \lim \mu(f_n) < \varepsilon$ y por ser $\varepsilon$ arbitrario resulta $\lim \mu(f_n) = o$, para toda $\mu \in M_+$

De esta forma queda demostrado el teorema, pues resulta

$$\mu(f) = \int_K f \, d\mu = o,$$

y entonces $\mu(K) = o$, de donde sop $\mu \subset A$.

Observación. 1) Si X no es metrizable, Ex(X) no es en general un conjunto borde. Se puede encontrar una medida borde $\mu$ tal $\mu(Ex(X)) = o$.

2) Usando la versión más fuerte de nuestro teorema de Hahn-Banach, se puede probar por el mismo método:

TEOREMA DE VINCENT-SMITH. Para cada $x \in X$ existe por lo menos una medida borde $\mu \in M_+^1$ con $x$ como baricentro tal que $\mu \in Ex(M_x)$.

Para X finito dimensional, toda tal $\mu \in Ex(M_x)$ que sea medida borde tiene un soporte finito que consiste en puntos afinmente independientes. Este teorema, por lo tanto, generaliza un teorema de Caratheodory.

## 8. SIMPLECES. TEOREMA DE UNICIDAD.

DEFINICION. Un conjunto convexo $X$ es un simplex si para cada $x \in X$ existe una única medida borde $\mu$ que tiene a $x$ como baricentro.

Ejemplos.

1) Los simpleces n-dimensionales (con vértices $x_0, x_1, \ldots, x_n$ afinmente independientes):

$$X = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \geqslant 0 , \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\} \quad ;$$

si $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$, entonces la medida $\lambda$ concentrada en los puntos extremales $x_i$ tal que $\lambda(x_i) = \lambda_i$ es una medida borde, tiene a $x$ como baricentro, y es la única medida con esas propiedades.

2) Sea $T$ un espacio compacto y consideremos $X = M_+^1(T)$. Entonces $Ex(X) = \{\varepsilon_t : t \in T\}$. En efecto, sean $\mu, \nu \in M_+^1(T)$ y $0 < \alpha < 1$ tales que $\varepsilon_t = \alpha\mu + (1-\alpha)\nu$, entonces $\operatorname{sop} \mu = \operatorname{sop} \nu \subset \operatorname{sop} \varepsilon_t = \{t\}$, de donde $\mu = \nu = \varepsilon_t$ ; luego $\varepsilon_t \in Ex(X)$.

Recíprocamente, sea $\mu \in Ex(X)$ y veamos que $\mu = \varepsilon_t$ para algún $t \in T$, o lo que es lo mismo, $\operatorname{sop} \mu = \{t\}$. Suponiendo lo contrario, sean $t_1, t_2 \in \operatorname{sop} \mu$, $t_1 \neq t_2$. Entonces existe un abierto $V$ tal que $t_1 \in V$, $t_2 \notin V$, $0 < \mu(V) < 1$.

Pongamos: $\nu_1 = 1_V \mu / \mu(V)$, $\nu_2 = 1_{\complement V} \mu / \mu(\complement V)$, $\alpha = \mu(V)$;

con estas definiciones, $\mu = \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$, $0 < \alpha < 1$, de donde resulta que $\mu$ no es extremal, en contradicción con lo supuesto.

Por otra parte, $T$ es homeomorfo a $Ex(X)$. En efecto, sea

$\phi : T \longrightarrow Ex(X)$ la aplicación definida por $\phi(t) = \varepsilon_t$. Entonces $\phi$ es contínua, porque si $\mathcal{U}$ es un filtro en $T$ convergente a un punto $t_o$, para toda $f \in C(T)$ resulta

$$\text{lím}\ f(\mathcal{U}) = f(t_o);$$

luego, $\text{lím}_{\mathcal{U}}\ \varepsilon_t(f) = \text{lím}_{\mathcal{U}}\ f(t) = f(t_o)$, de donde resulta

$$\text{lím}_{\mathcal{U}}\ \varepsilon_t = \varepsilon_{t_o}.$$

Además $\phi$ es biunívoca y transforma cerrados en cerrados por ser $T$ compacto; luego $\phi$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, identificando $t$ con $\varepsilon_t$, podemos suponer $T \subset X$, $T = Ex(X)$.

Como $Ex(X)$ es compacto, por el tercer teorema del párrafo 7, toda medida borde tiene soporte en $Ex(X) = T$, y esto permite identificar las medidas borde en $X$ con medidas en $T$. Sea ahora $\nu$ un punto de $X = M_+^1(T)$ que es el baricentro de una medida borde $\mu \in M_+^1(X)$. Entonces:

$$\nu = \int \varepsilon_t\ \mu(dt)$$

donde la integral debe entenderse en sentido débil, es decir, como equivalente a

$$\ell(\nu) = \int \ell(\varepsilon_t)\ \mu(dt) = \mu(\ell)$$

para toda $\ell \in E'$, donde $E$ es el espacio de las medidas de Radon sobre $T$ (la integral se extiende sobre los puntos $\varepsilon_t$ de $Ex(X)$ porque $\mu(X - Ex(X)) = 0$). Tomando, en particular, $\ell_f(\nu) = \nu(f)$, donde $f$ es una función contínua arbitraria, tenemos: $\nu(f) = \ell_f(\nu) = \int \ell_f(\varepsilon_t)\ \mu(dt) = \int \varepsilon_t(f)\ \mu(dt) =$

$$= \int f(t)\ \mu(dt) = \mu(f).$$

Luego $\mu$ coincide con $\nu$ y está, por consiguiente, unívocamente determinada, lo cual prueba que $X$ es un simplex.

APLICACION DEL TEOREMA DE UNICIDAD DEL PARRAFO 5.

PROPOSICION. Sea $X$ un convexo compacto y $x \in X$; entonces existe una única medida borde $\mu$ tal que $x_\mu = x$ sí y sólo si $p(f) = \hat{f}(x)$ es una aplicación aditiva sobre $-K$ .

Demostración. De la demostración del teorema de existencia resulta que toda extensión $(S,p)$-maximal de $\delta_x$, donde $S = -K$ , es una medida borde con $x$ como baricentro.

Recíprocamente, toda medida borde $\mu$ con $x_\mu = x$ es extensión $(S,p)$-maximal de $\delta_x$. (Ver observación 2, pág.31).

Del teorema de unicidad del parrafo 5 deducimos, entonces, que existe una única medida borde $\mu$ tal que $x_\mu = x$ si y sólo si $\tilde{p}(f)$ es aditiva sobre $S = -K$ . Pero si $f \in C(X)$, $\ell \in A$, se tiene:

$$\delta_x(\ell) + \widehat{(f-\ell)}(x) = \ell(x) + \widehat{(f-\ell)}(x) = \hat{\ell}(x) + \widehat{(f-\ell)}(x) \geq$$

$$\geq \widehat{(\ell + f - \ell)}(x) = \hat{f}(x),$$

de donde $\tilde{p}(f) \geq p(f)$.

Como la desigualdad contraria es siempre válida, obtenemos

$$\tilde{p}(f) = p(f) = \hat{f}(x).$$

Por consiguiente, es indistinto decir que $\tilde{p}(f)$ es aditiva sobre $-K$ , o que lo es $\hat{f}(x)$, lo que completa la demostración.

<u>TEOREMA DE UNICIDAD</u> (Choquet-Meyer): Si $X$ es un convexo compacto, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $X$ es un simplex;

ii) dado cualquier $x \in X$, la aplicación $f \longrightarrow \hat{f}(x)$ es aditiva sobre $-K$ ;

iii) si $\mu$ es una medida borde tal que $x_\mu = x$, entonces $\mu(f) = \hat{f}(x)$ para toda $f \in -K$ ;

iv) si $f \in -K$ , entonces $\hat{f}$ es una aplicación afín (es decir que $\hat{f} \in A$ ).

<u>Demostración</u>.

<u>i) $\longleftrightarrow$ ii)</u>. Es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

<u>i) $\longrightarrow$ iii)</u>. Por el corolario 2) del teorema de Hahn-Banach, con $S = -K$ , $p(f) = \tilde{p}(f) = \hat{f}(x)$, para cada $f \in -K$ , existe una medida borde $\mu \in M_x$ , tal que $\mu(f) = \hat{f}(x)$. Pero por ser $X$ un simplex, existe una única medida borde en $M_x$ , y esta verifica iii).

<u>iii) $\longrightarrow$ iv)</u>. Sea $f \in -K$, $x, y \in X$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, y sean $\mu$ , $\nu$ medidas borde pertenecientes a $M_x$ y $M_y$ , respectivamente. Entonces $\lambda = \alpha\mu+(1-\alpha)\nu$ es una medida borde tal que $x_\lambda = \alpha x + (1-\alpha)y$, y por iii) tenemos, para $f \in -K$,

$$(\alpha\mu + (1-\alpha)\nu)(f) = \hat{f}(\alpha x + (1-\alpha)y),$$

$$\alpha\mu(f) + (1-\alpha)\nu(f) = \alpha\hat{f}(x) + (1-\alpha)\hat{f}(y).$$

Como los primeros miembros son iguales, esto prueba que la aplicación $x \longrightarrow \hat{f}(x)$ pertenece a $A$ si $f \in -K$.

La demostración quedará terminada si probamos que:

iv) $\longrightarrow$ i); para ello necesitamos el siguiente:

LEMA. Si f es una función real afin definida en X y superiormente semicontínua, el conjunto de las funcionales $\ell \in A$ tales que $\ell > f$ es inferiormente filtrante (es decir, si $\ell_1, \ell_2 \in A$, $\ell_1 > f$, $\ell_2 > f$, entonces existe $\ell \in A$, $\ell > f$, $\ell \leqslant \ell_1$, $\ell \leqslant \ell_2$).

Demostración. Como $\ell_1$ y $\ell_2$ están superiormente acotadas, podemos suponer que $\ell_1 \leqslant 0$, $\ell_2 \leqslant 0$. Definamos en E x R los conjuntos compactos

$$K_i = \{(x,\lambda) : x \in X,\ \ell_i(x) \leqslant \lambda \leqslant 0\} \quad i=1,2.$$

Sean además:

$$Q = \{(x,\lambda) : x \in X,\ \lambda \leqslant f(x)\},$$
$$Q' = \{(x,\lambda) : x \in X,\ \lambda > f(x)\}.$$

Por ser f afín, Q y Q' son convexos; es evidente que Q es cerrado y que $K_i \subset Q'$, $i = 1,2$.

El conjunto

$$\mathrm{conv}(K_1 \cup K_2) = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 : x_i \in K_i, i=1,2,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\},$$

está contenido en Q' y es compacto por ser imágen del compacto $[0,1] \times K_1 \times K_2$ por la función contínua $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Entonces existe un hiperplano en E x R que separa a Q de $\mathrm{conv}(K_1 \cup K_2)$, y esto equivale a decir que existe $\ell \in A$, tal que $\ell > f$ y $\ell \leqslant \ell_i$, $i = 1,2$.

Corolario. Para toda función real q definida sobre X, afín, acotada y superiormente semicontínua, y para toda $\mu \in M_+^1$, se tiene

$$\mu(q) = q(x_\mu).$$

Demostración. Usando el lema anterior, el primer lema del párrafo 4 y la compacidad de X, podemos aplicar el teorema de Beppo Levi para deducir que

$$\mu(q) = \int q \, d\mu = \int^{*} q \, d\mu = \inf \{ \int \ell \, d\mu : \ell \in A, \ \ell > q \} =$$

$$= \inf \{ \ell (x_\mu) : \ell \in A \ ; \ \ell > q \} =$$

$$= \hat{q}(x_\mu) = q(x_\mu).$$

Fin de la demostración del teorema.

<u>iv) $\longrightarrow$ i)</u>. Para $f \in -K$, $\hat{f}$ verifica las condiciones del corolario por iv), luego $\mu(\hat{f}) = \hat{f}(x)$. Como $\mu = \hat{\mu}$ sobre $-K$, se tiene

$$\mu(f) = \hat{\mu}(f) = \mu(\hat{f}) = \hat{f}(x).$$

Por consiguiente, $\mu$ está unívocamente determinada sobre $-K$, y también sobre $C(X)$ por ser $K-K$ denso en $C(X)$.

## 9. SIMPLECES Y CONOS RETICULADOS.

Sea E un espacio vectorial de Hausdorff, localmente compacto y sea $C \subset E$ un cono convexo punteado, es decir, un subconjunto de E que verifica:

1) Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$;

2) Si $x \in C$ y $\lambda \geq o$, entonces $\lambda x \in C$;

3) $C \cap -C = \{o\}$, o sea que C no contiene rectas.

Se dice que C es un cono convexo punteado con base si existe un hiperplano H tal que H intersecta cada rayo de C en un único punto distinto del origen. En tal caso diremos que $B = C \cap H$ es una base de C.

Observaciones.

1) Los conos no tienen una única base; si B es una base de C, existe una funcional contínua $\ell$ que no se anula en $C-\{o\}$ tal que $B = \{x \in C : \ell(x) = 1\}$ . Basta cambiar $\ell$ por $k\ell$ , $k \neq o$ para obtener bases distintas de B.

2) Si B es base de C, entonces $C = \{\lambda x : x \in B, \lambda \geq o\}$; para $y \in C$, $y \neq o$, la representación $y = \lambda x$, $x \in B$ es única. En efecto, si $y = \lambda x = \lambda_1 x_1$, con $x, x_1 \in B$, entonces $x$ y $x_1$ están en el mismo rayo, y como B contiene un único punto de cada rayo, debe ser $x = x_1$ y por lo tanto $\lambda = \lambda_1$ . Si $\ell$ es cualquier funcional que determina a B según la observación anterior, entonces $\lambda = \ell(y)$.

3) Si B y B' son bases de C determinadas por funcionales $\ell$ y $\ell'$, respectivamente, entonces $\phi(x) = (1/\ell'(x))x$ y $\phi'(x) = (1/\ell(x))x$ son aplicaciones contínuas de B en B' y de B' en B, respectivamente, tales que $\phi'(\phi(x)) = x$ para $x \in B$, $\phi(\phi'(x)) = x$ para $x \in B'$. Luego, dos bases de un

mismo cono convexo punteado son homeomorfas.

4) Diremos que C es un cono convexo con base compacta si tiene alguna base compacta (en tal caso, por la última observación, cualquier otra base será también compacta).

5) Todo subconjunto convexo X de E puede ser pensado como la base de un cono convexo punteado en E x R. En efecto, si $X' = X \times \{1\}$, entonces X' es isomorfo a X y es base del cono convexo punteado $C = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda X'$.

Ejemplo.

Sea G un dominio de $R^n$ $(n \geqslant 2)$. Consideremos el espacio $E = C(G)$ de las funciones contínuas sobre G con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, y sea C el conjunto de las funciones armónicas no negativas sobre G. Es inmediato verificar que C es un cono convexo punteado. Observemos que si $h \in C$ y h se anula en algún punto de G, entonces h es idénticamente nula. Sea

$$H = \{ f \in C(G) \ : \ f(x_o) = 1 \}$$

donde $x_o$ es un punto de G. H es un hiperplano y

$$B = H \cap C = \{ h \in C(G) \ ; \ h \geqslant o, h \text{ es armónica}, h(x_o)=1 \}$$

es una base compacta de C. En efecto, si $h \in C$, $h \neq o$, entonces $\lambda h \in B$ si y sólo si $\lambda = 1/h(x_o)$; por lo tanto cada rayo de C corta a B en un único punto. La compacidad de B resulta de un conocido teorema de la teoría de funciones armónicas.

Si E es un espacio lineal y C es un cono convexo punteado en E, diremos que $x \leqslant y$ si $x - y \in C$. De esta manera queda definido en E un orden (parcial) tal que si $x \leqslant y$, enton ces:

a) $x+z \leqslant y+z$, para todo $z \in E$;

b) $\lambda x \leqslant \lambda y$, para todo $\lambda \geqslant 0$.

Con esta definición $E$ es un espacio lineal ordenado tal que $C = \{x \in E: x \geqslant 0\} = E_+$. Recíprocamente, si $E$ es un espacio lineal ordenado (es decir, munido de un orden parcial que verifica a) y b)), entonces $E_+$ es un cono convexo punteado.

Si $x \in E$, el conjunto de los elementos que siguen a $x$ es $C_x = x + C$. Luego, si $x,y \in E$, $z$ será el supremo de $x$ e $y$ ($z = x \vee y$) si y sólo si $C_z = C_x \cap C_y$.

Diremos que un cono convexo punteado $C$ es un cono reticulado si $C$ es un reticulado con respecto al orden definido por $C$ sobre $E$.

Ejemplos: Si $C$ es un cono circular en $R^3$ y $x,y$ son dos puntos incomparables de $C$, entonces $C_x \cap C_y$ no es un cono circular; luego no puede haber ningún $z$ tal que $C_z=C_x \cap C_y$, y por lo tanto $C$ no es un cono reticulado. En cambio, si $C$ es un cono triangular, entonces $C_x \cap C_y$ es siempre un cono triangular congruente con $C$; llamando $z$ a su vértice, se tendrá $z = x \vee y$. Por lo tanto, en este caso, $C$ es un cono reticulado.

TEOREMA. Sea $C$ un cono convexo punteado en un espacio lineal $E$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $C$ es un cono reticulado;

ii) $C$ es un cono superiormente reticulado;

iii) $C$ es un cono inferiormente reticulado;

iv) $C - C$ es un reticulado vectorial.

Demostración. Es evidente que i) $\longrightarrow$ ii) y que iv) $\longrightarrow$ i). Veamos que ii) $\longrightarrow$ iii). Dados $x,y \in C$, sea $z = x+y - x \vee y$. Como $x + y \geq x$, $x+y \geq y$, se tiene $x+y \geq x \vee y$, de donde $z \in C$. Además $x \vee y \geq y$, de donde $x - z = x \vee y - y \in C$, o sea que $z \leq x$; analogamente $z \leq y$. Supongamos que $t \leq x$, $t \leq y$; entonces, poniendo $s = x + y - t$, resulta $s \geq y$, $s \geq x$, y por lo tanto $s \geq x \vee y$. Luego

$$t = x + y - s \leq x + y - x \vee y = z.$$

Por consiguiente, $z = x \wedge y$, y esto prueba que $C$ es inferiormente reticulado. Análogamente se prueba que iii)$\rightarrow$ii), mostrando que $x + y - x \wedge y = x \vee y$.

ii) $\longrightarrow$ iv). Sean $x, y \in C - C$; entonces $x = c - c'$, $y = d-d'$, siendo $c,c',d,d' \in C$. Pongamos $h = c' + d'$; entonces $x+h \in C$, $y+h \in C$. Por ii) existe en $C$, $z = (x + h) \vee (y + h)$, y es fácil probar que $z-h \in C - C$ y $z-h = x \vee y$. Usando iii) se prueba análogamente que si $w=(x+h) \wedge (y+h)$, entonces $w-h \in C - C$, y $w-h = x \wedge y$, y esto completa la demostración.

TEOREMA DE DESCOMPOSICION DE RIESZ.

Sea $E$ un reticulado vectorial y $C = E_+$. Entonces, dados $x,c_1,\ldots,c_n \in C$ tales que $x \leq c_1+c_2+\ldots+c_n$, existen $c_1',c_2',\ldots,c_n' \in C$ que verifican

$$x=c_1'+c_2'+\ldots+c_n' \ , \quad o \leq c_i' \leq c_i, 1 \leq i \leq n.$$

Demostración. Demostraremos el teorema para $n=2$; el caso general se deduce fácilmente por inducción.

Sean $c_1,c_2,x \in C$ tales que $x \leq c_1+c_2$, y definamos

$c_1'=x \wedge c_1$, $c_2'=x - c_1'$; entonces $x=c_1'+c_2'$, $o \leq c_1' \leq c_1$, y sólo falta ver que $o \leq c_2' \leq c_2$; pero $c_2'=x-c_1' \geq x-x=o$, y

$c_2'=x-c_1'=x-(x\wedge c_1)=x+(-x\vee -c_1)=o\vee(x-c_1)\leqslant o\vee c_2=c_2.$

Nuestro teorema final necesita de dos lemas preparatorios.

LEMA 1. Sea $C$ un cono convexo punteado con base compacta $X$. Si $f_o$ es una función real definida sobre $X$, entonces existe una única extensión positivamente homogénea $f$ de $f_o$ a $C$ y $f_o$ es convexa si y sólo si $f$ es subaditiva.

Demostración. Si $c\in C$, $c\neq o$, hay una única representación $c=\lambda x$, $\lambda>o$, $x\in X$. Entonces la función $f(o)=o$, $f(c)=\lambda f(x)$ es la extensión indicada, y es fácil probar la unicidad. Si $f$ es subaditiva, $x,y\in X$, $o\leqslant\alpha\leqslant 1$, entonces

$$f_o(\alpha x+(1-\alpha)y)=f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant f(\alpha x)+f((1-\alpha)y)=\alpha f_o(x)+(1-\alpha)f_o(y),$$

es decir, que $f_o$ es convexa. Recíprocamente, suponiendo que $f_o$ es convexa, sean $x$, $y\in C-\{o\}$; entonces $x=\lambda x_1$, $y=\mu y_1$, $\lambda>o$, $\mu>o$, $x_1,y_1\in X$, y se tiene

$$f(x+y)=(\lambda+\mu)f_o\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x_1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}y_1\right)\leqslant(\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}f_o(x_1)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}f_o(y_1)\right)=$$

$$=f(x)+f(y);$$

luego $f$ es subaditiva.

LEMA 2. Sea $X$ un convexo compacto, $x\in X$ y sea $M_x^d$ el conjunto de las medidas de probabilidad discretas que tienen a $x$ como baricentro. Entonces para toda $f\in C(X)$ se verifica

$$\sup_{\mu\in M_x^d}\mu(f)=\hat{f}(x).$$

Demostración. Por el primer lema del párrafo 6, bastará probar que dada $\mu\in M_+^1$, $f\in C(X)$ y $\varepsilon>o$, existe $\nu\in M^d$ tal que $x_\mu = x_\nu$ y $\nu(f) \geq \mu(f) - \varepsilon$ .

Sea $\{U_i\}_{i=1}^n$ un cubrimiento finito por compactos convexos tales que si $x_1, x_2 \in U_i$, entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Tal cubrimiento existe por ser f contínua, X compacto y localmente convexo y, además, porque todo espacio compacto de Hausdorff es regular. Definamos:

$V_1 = U_1, \ldots\ldots, V_i = U_i - \cup_{k=1}^{i-1} U_k, \; i = 2, \ldots, n.$

Los $V_i$ son borelianos disjuntos tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ .

Si $\mu(V_i) > o$, pongamos $\mu_i = (1/(V_i))(1_{V_i}\mu)$; entonces $\mu_i \in M_+^1$ y tiene soporte en $V_i \subset U_i$, de donde, como $U_i$ es convexo, $x_i = x_{\mu_i} \in U_i$. Sea $\nu = \sum \mu(V_i)\varepsilon_{x_i}$ , donde la suma se extiende sobre los índices i tales que $\mu(V_i) > o$; $\nu$ es una medida de probabilidad discreta, o sea que $\nu \in M^d$ . Además, dada $\ell \in A(X)$, se tiene:

$\nu(\ell) = \sum \mu(V_i)\, \ell(x_i) = \sum \mu(V_i)\, \mu(\ell) = \mu(\ell)$,

de donde $x_\nu = x_\mu$ . Por último,

$$\mu(f) - \nu(f) = \sum \left(\int_{V_i} f d\mu - \int_{V_i} f(x_i) d\mu\right) = \sum \int_{V_i} (f - f(x_i)) d\mu \leq$$
$$\leq \varepsilon \sum \mu(V_i) = \varepsilon .$$

<u>TEOREMA</u>. (Choquet) Sea C un cono convexo punteado con base compacta X. Entonces X es un simplex si y sólo si C es un cono reticulado.

<u>DEMOSTRACION</u>. Por el teorema de unicidad de Choquet-Meyer, X es un simplex si y sólo si para toda $u_o \in -K$, la aplicación $\hat{u}_o(x)$ es affn; como $\hat{u}_o(x)$ es una función cóncava, decir

que es afín equivale a decir que es convexa.

Supongamos que $C$ es un cono reticulado. Sea $u_o \in -K$, $u$ la extensión positivamente homogénea de $u_o$ a $C$, y $f$ la extensión positivamente homogénea de $\hat{u}_o$ a $C$. Probaremos que $f$ es subaditiva, de donde resultará por el lema 1 que $\hat{u}_o$ es convexa y, por consiguiente, que $X$ es un simplex.

Usando el lema 2, tenemos

$$\hat{u}_o(x) = \sup_{\mu\in M_x^d} \mu(u_o) = \sup_{\substack{\alpha_i\geq 0,\, \sum\alpha_i=1 \\ x_i\in X,\, \sum\alpha_i x_i=x}} \sum_{i=1}^n \alpha_i\, u_o(x_i) = \sup_{\substack{y_i\in C \\ \sum y_i=x}} \sum_{i=1}^n u(y_i).$$

Luego para todo $x \in C$, será $f(x) = \sup\limits_{\substack{x_i\in C \\ \sum x_i=x}} \sum\limits_{i=1}^n u(x_i)$;

en particular, si $x,y \in C$,

$$f(x+y) = \sup_{\substack{z_i \in C \\ \sum z_i=x+y}} \sum_{i=1}^n u(z_i).$$

Como $o \leqslant x \leqslant x+y = \sum\limits_{i=1}^n z_i$, por la propiedad de descomposición de Riesz, existen $x_i \in C$ tales que $o \leqslant x_i \leqslant z_i$, $\sum x_i = x$. Poniendo $y_i = z_i - x_i$ se tendrá $y_i \geqslant o$, o sea que $y_i \in C$, y además $\sum y_i = \sum z_i - \sum x_i = x+y-x=y$. Luego teniendo en cuenta que $u$ es subaditiva, por ser $u_o$ convexa:

$$f(x+y) = \sup_{\substack{x_i,y_i \in C \\ \sum x_i = x \\ \sum y_i = y}} \sum_{i=1}^n u(x_i+y_i) \leqslant \sup_{\substack{x_i,y_i \in C \\ \sum x_i = x \\ \sum y_i = y}} \sum_{i=1}^n [\, u(x_i)+u(y_i)\, ]$$

$$= \sup_{\substack{x_i \in C \\ \sum x_i = x}} \sum_{i=1}^{n} u(x_i) + \sup_{\substack{y_i \in C \\ \sum y_i = y}} \sum_{i=1}^{n} u(y_i) = f(x) + f(y),$$

y con esto queda probada la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que X es un simplex. Indiquemos con $M_b$ el conjunto de las medidas borde no negativas sobre X, y definamos la aplicación $\phi : M_b \longrightarrow C$ de la siguiente manera

$\phi(\mu) = \lambda \; x_{\mu}$ , donde $\lambda = \mu(1)$, $\mu_1 = \mu/\mu(1)$, si $\mu \neq 0$,

$\phi(0) = 0$.

Por el teorema de existencia de Choquet-Meyer, y por ser X un simplex, $\phi$ está bien definida, y es biunívoca en $M_b \cap M_+^1$ , de donde resulta fácilmente que es una biyección entre $M_b$ y C. Además, para toda $\ell \in E'$, se tiene $\ell(\phi(\mu)) = \mu(\ell)$, de donde se deduce que $\phi$ es aditiva y positivamente homogénea. Pero entonces $\phi$ es un isomorfismo de orden entre $M_b$ y C. Como $M_b$ es un cono reticulado, también lo es C, como queríamos probar.

## 10. APLICACIONES.

Sea $(A,\cdot)$ un semigrupo aditivo abeliano con elemento neutro o. Dada una función $f\colon A \longrightarrow R$ definamos:

$$\Delta_n^f : A^{n+1} \longrightarrow R \qquad (n \geq o)$$

de la siguiente manera:

$$\Delta_o^f(x)=f(x) \ ; \ \Delta_{n+1}^f(x,a_1,\ldots,a_{n+1})= \Delta_n^f(x,a_1,a_2,\ldots,a_n) -$$

$$- \Delta_n^f(x+a_{n+1},a_1,\ldots,a_n).$$

DEFINICION. Una función $f\colon A \longrightarrow R$ se dice monótona de orden infinito si $\Delta_n^f \geq 0$, para todo $n \geq 0$.

Sea $E=R^A$ con la topología de la convergencia puntual. La aplicación $f \longrightarrow f(0)$ es lineal y contínua sobre $E$; por lo tanto el conjunto

$$H = \{f \in E : f(0) = 1\}$$

es un hiperplano cerrado. Ahora bien, si $f$ es una función monótona de orden infinito, para $x=o$ se tiene:

$$\Delta_1^f(o,a) = f(o) - f(a) \geq o$$

por lo tanto: $f(o) \geq f(a) \geq o$, para todo $a \in A$.

Sea $C$ el conjunto de las funciones monótonas de orden infinito. $C$ es un cono y el conjunto $X=C \cap H$, es una base. Además $X \subset [o,1]^A \subset E$, y como $[o,1]^A$ es compacto y $H$ cerrado resulta $X$ cerrado y, entonces, compacto.

DEFINICION. Una función $\phi\colon A \longrightarrow R$ se dice exponencial sobre A si verifica:

i) $\phi(x+y) = \phi(x)\,\phi(y)$ para todo $x,y \in A$.

ii) $o \leq \phi(x) \leq 1 = \phi(o)$ para todo $x \in A$.

De esta forma $\phi$ resulta un homomorfismo de A en R.

**LEMA**. Si $\phi$ es exponencial sobre A, entonces $\phi \in X$.

**Demostración**. Por ser $\phi$ exponencial sobre A es: $\phi(o) = 1$; por lo tanto es suficiente probar que $\phi \in C$, es decir que $\phi$ es monótona de orden infinito. Probaremos entonces que para todo $n \geq o$ es $\Delta^{\phi}_n(x) \geq o$; en efecto, para n=1 se tiene:

$$\Delta^{\phi}_1(x,a_1)=\phi(x)-\phi(x+a_1)=\phi(x)-\phi(x)\phi(a_1)=\phi(x)(1-\phi(a_1))$$

y por ser $\phi(x) \geq o$, $\phi(a_1) \leq 1$ es $\Delta^{\phi}_1(x,a_1) \geq o$.

Veamos que $\Delta^{\phi}_n(x,a_1,\ldots,a_n) \geq o$.

Por ser $\phi(a_i) \leq 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$ y $\phi(x) \geq o$, basta probar que:

$$\Delta^{\phi}_n(x,a_1,\ldots a_n) = \phi(x)\prod_{i=1}^{n}(1-\phi(a_i)).$$

Es evidente que esto vale para n=1. Supongamos que vale para n-1; entonces

$$\Delta^{\phi}_n(x,a_1,\ldots,a_n)= \Delta^{\phi}_{n-1}(x,a_1,\ldots,a_{n-1})- \Delta^{\phi}_{n-1}(x+a_n,a_1,\ldots,a_{n-1})=$$

$$= \phi(x)\prod_{i=1}^{n-1}(1-\phi(a_i)) - \phi(x+a_n)\prod_{i=1}^{n-1}(1-\phi(a_i))=$$

$$= \phi(x)\prod_{i=1}^{n}(1-\phi(a_i)) \geq 0$$

Por lo tanto, $\phi \in X$.

Queremos determinar el conjunto de puntos extremales de X.

Probaremos que $x \in Ex(X)$ si y sólo si cuando $x=x_1+x_2$ con $x_1,x_2 \in C$ resulta $x_1 = \lambda x$, para algún $\lambda \geq o$.

En efecto, sea $x \in Ex(X)$ y supongamos que $x=x_1+x_2$ siendo $x_1,x_2 \in C$; por ser $x_1,x_2 \in C$ existen $\mu$, $\lambda \in R$, $\mu$, $\lambda \geq o$

tales que: $x_1 = \lambda x_1'$ , $x_2 = \mu x_2'$ siendo $x_1', x_2' \in X$; luego:

$x = \lambda x_1' + \mu x_2'$; y por lo tanto, $x = (\lambda+\mu)(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} x_1' + \frac{\mu}{\lambda+\mu} x_2')$

o sea: $$\frac{1}{\lambda+\mu} x = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} x_1' + \frac{\mu}{\lambda+\mu} x_2'$$

pero como, $\frac{1}{\lambda+\mu} x \in X$ y también $x \in X$ es: $\lambda + \mu = 1$. Entonces queda: $x = \lambda x_1' + \mu x_2'$ siendo $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ y $x \in Ex(X)$; Luego $x_1' = x_2' = x$ y entonces $x_1 = \lambda x_1' = \lambda x$.

Recíprocamente, supongamos que de $x = x_1 + x_2$ para $x_1, x_2 \in C$ resulta: $x_1 = \lambda x$ para algún $\lambda \geqslant 0$, y sean $a_1, a_2 \in X$ tales que $x = \alpha a_1 + (1-\alpha) a_2$ siendo $\alpha \in R$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Entonces existe $\lambda > 0$, tal que $\alpha a_1 = \lambda x$. Pero $a_1, x \in X$; luego $\alpha = \lambda$ o sea $x = a_1$. Por lo tanto $x \in Ex(X)$.

<u>TEOREMA</u>. $Ex(X) = \{\phi : \phi$ es exponencial sobre $A\}$ .

<u>Demostración</u>. Sea $\phi \in Ex(X)$; dados $x, y \in A$ consideremos las funciones $\phi_1(x) = \phi(x+y)$ , $\phi_2(x) = \phi(x) - \phi(x+y)$;

entonces $\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)$ siendo $\phi_1, \phi_2 \in C$, ya que:

$$\Delta^{\phi_1}_n (x, a_1, \ldots, a_n) = \Delta^{\phi}_n (x+y, a_1, \ldots, a_n) \geqslant 0,$$

$$\Delta^{\phi_2}_n (x, a_1, \ldots, a_n) = \Delta^{\phi}_n (x, a_1, \ldots, a_n) - \Delta^{\phi}_n (x+y, a_1, \ldots, a_n) =$$

$$= \Delta^{\phi}_{n+1} (x, a_1, \ldots, a_n, y) \geqslant 0.$$

Luego $\phi_1, \phi_2 \in C$ y $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Pero por hipótesis $\phi$ es extremal; luego existe $\lambda \geqslant 0$ tal que $\phi_1 = \lambda\phi$ y por ser

$\phi(0)=1$ es $\lambda = \phi_1(0)= \phi(y)$. Pero entonces

$$\phi(x+y) = \phi_1(x) = \lambda\phi(x) = \phi(y)\ \phi(x)$$

y por lo tanto, $\phi$ es exponencial sobre A.

Recíprocamente, supongamos que $\phi$ es exponencial sobre A. Dado $a \in A$, para toda función f definida sobre A definiremos una transformación $\ell_a : E \longrightarrow R$ de la siguiente manera:

$$\ell_a(f) = f(a+a) - 2f(a)\phi(a) + \phi^2(a).$$

$\ell_a$ es afín; en efecto, sean $\alpha, \beta \geq 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$, f,g funciones definidas sobre A, entonces:

$$\ell_a(\alpha f+\beta g)=(\alpha f+\beta g)(a+a)-2(\alpha f+\beta g)(a)\phi(a)+\phi^2(a) =$$

$$=\alpha f(a+a)+\beta g(a+a)-2\alpha f(a)\phi(a)-2\beta g(a)\phi(a)+\phi^2(a) =$$

$$=\alpha[f(a+a)-2f(a)\phi(a)+\phi^2(a)]+\beta[g(a+a)-2g(a)\phi(a)+\phi^2(a)] =$$

$$= \alpha\ell_a(f) + \beta\ell_a(g).$$

Además $\ell_a$ es contínua para la convergencia puntual; en efecto, dada una sucesión $(f_n)$ que converge puntualmente a f se tiene:

$$\ell_a(f_n)=f_n(a+a)-2f_n(a)\phi(a)+\phi^2(a) \longrightarrow f(a+a)-2f(a)\phi(a)+\phi^2(a) =$$

$$= \ell_a(f),$$

o sea $\ell_a(f_n) \longrightarrow \ell_a(f)$; por lo tanto $\ell_a$ es contínua y entonces $\ell_a \in A$.

Además se verifica: i) $\ell_a(\phi) = 0$

ii) Si $\psi \in Ex(X)$ entonces $\ell_a(\psi) \geq 0$.

En efecto, i) es inmediata; en cuanto a ii), si $\psi \in Ex(X)$, por lo probado antes $\psi$ es exponencial; luego

$$\ell_a(\psi) = \psi(a+a) - 2\psi(a)\phi(a) + \phi^2(a) = \psi^2(a) - 2\psi(a)\phi(a) + \phi^2(a) =$$

$$= (\psi(a) - \phi(a))^2 \geqslant 0.$$

Dado que $\ell_a \geqslant 0$ sobre Ex(X), se deduce del principio del mínimo que $\ell_a \geqslant 0$ sobre X.

Sea H un subconjunto finito no vacío de A; definamos

$$\ell_H = \sum_{a \in H} \ell_a.$$

Por ser H finito resulta $\ell_H \in A(X)$ siendo también $\ell_H \geqslant 0$ sobre X y $\ell_H(\phi) = 0$.

Consideremos ahora, $\ell = \sup\{\ell_H : H \subset A;\ H \text{ finito}\}$. Por ser supremo de funciones contínuas $\ell$ es una función inferiormente semicontinua y $\ell$ es "afin" (como función real extendida que también puede tomar el valor $+\infty$ ). En efecto, sean f, g funciones definidas sobre A y sea $\alpha \in R$ tal que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Veamos que

$$\ell(\alpha f + (1-\alpha)g) = \alpha\ell(f) + (1-\alpha)\ell(g).$$

De la definición de $\ell$ se tiene:

$$\ell(\alpha f + (1-\alpha)g) \leqslant \alpha\ell(f) + (1-\alpha)\ell(g).$$

Sean H, G finitos, no vacíos. Se tiene:

$$\alpha \ell_H(f) + (1-\alpha)\,\ell_G(g) \leq \alpha \ell_{G\cup H}(f) + (1-\alpha)\ell_{G\cup H}(g) =$$

$$= \ell_{G\cup H}(\alpha f + (1-\alpha)g) \leq \ell(\alpha f + (1-\alpha)g).$$

En consecuencia:

$$\alpha \ell(f) + (1-\alpha)\ell(g) \leq \ell(\alpha f + (1-\alpha)g);$$

Luego $\ell$ es "afín".

En particular, $\ell$ es cóncava y es no negativa sobre X; además, $\ell(\phi)=0$, y por consiguiente: $\inf_{\psi \in X} \ell(\psi) = 0$.

Pero entonces, por el principio del mínimo, existe $\psi_0 \in Ex(X)$ tal que $\ell(\psi_0)=0$.

Para cada $a \in A$, $\ell_a(\psi)$ es una funcional no negativa dominada por $\ell$. Luego

$$0 = \ell_a(\psi_0) = (\psi_0(a) - \phi(a))^2;$$

por lo tanto $\phi(a) = \psi_0(a)$ para todo $a \in A$, es decir, que $\phi = \psi_0$, lo cual prueba que $\phi$ es extremal.

Es evidente que las condiciones que definen las funciones exponenciales se preservan por límites puntuales; luego se deduce del teorema que $Ex(X)$ es cerrado. Por otra parte, dado $x \in A$, la funcional $\ell(f) = f(x)$ es lineal y contínua; por lo tanto podemos aplicar el teorema de Choquet para deducir que existe una medida $\mu$ con soporte en el conjunto de las funciones exponenciales tal que

$$f(x) = \int \phi(x)\,\mu(d\phi);$$

pero no se sabe si tal medida es única.

Observación. Si $f \in C$ existe $\mu \in M_+(Ex(X))$ tal que

$$f(x) = \int_{exp} \phi(x)\mu(d\phi)$$

ya que si $f \in C$, para algún $\lambda \in R$, $\lambda \geqslant o$, es $\lambda f \in C$.

Caso especial.

Consideremos el semigrupo abeliano respecto a la suma $A = R_+$.

TEOREMA. Toda función exponencial $\phi$ definida sobre $R_+$ es de la forma $\phi_t$ con $t \in [o,\infty]$ siendo:

$$\phi_t(x) = e^{-tx} \qquad \text{para } o \leqslant t < +\infty$$

y si $t=\infty$ es

$$\phi_\infty(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x=o \\ o \text{ si } x\neq o \end{cases} .$$

Demostración.

Primer caso: $\phi$ no es contínua en o. Esto equivale a decir que $\lim_{x \to o} \phi(x) = \alpha = \sup_{x > o} (\phi(x)) < 1$ $(o \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Luego $\phi(x) \leqslant \alpha$ pero para $x > o$ es:

$$\phi(x) = \phi(\underbrace{\tfrac{x}{n}+\dots+\tfrac{x}{n}}_{n \text{ veces}}) = \phi^n(\tfrac{x}{n}) \leqslant \alpha^n \text{ para todo n, luego}$$

$\phi(x) = o$.

Segundo caso. $\phi$ es contínua en $x=o$. Como

$$\phi(x) - \phi(x+a) = \phi(x)(1-\phi(a))$$

si $\phi$ es contínua en $a=o$, $\phi$ es contínua a derecha.

Sea $\alpha = \phi(1)$; luego $\phi(n) = \phi(\underbrace{1+\dots+1}_{n \text{ veces}}) = \alpha^n$.

Pero entonces $\alpha = \phi(1) = \phi(\frac{n}{n}) = (\phi(1/n))^n$ y, por lo tanto,

$\phi(1/n) = \alpha^{1/n}$. Luego:

$$\phi(m/n) = \alpha^{m/n} = e^{(m/n)\lg\alpha} = e^{(m/n)(-t)}$$

y por lo tanto

$$\phi(x) = e^{-tx}.$$

<u>Consecuencia</u>. Por lo visto anteriormente resulta:

$$Ex(X) = \{\phi_t(x) : o \leqslant t \leqslant +\infty\}.$$

Ahora bien, por ser la aplicación $t \longrightarrow \phi_t$ una biyección contínua de $[o,+\infty]$ en $Ex(X)$, resulta un homeomorfismo. Luego, $Ex(X)$ es homeomorfo a $[o,\infty]$. Por lo tanto, para toda $f \in C$ existe $\mu \in M_+([o,\infty])$ tal que:

$$f(x) = \int \phi_t(x)\,\mu(dt) = \int e^{-tx}\,\mu(dt)$$

para todo $x \in R_+$, siendo esta la forma general de una función monótona de orden infinito.

Si $\mu \in M_+([o,\infty])$ es $\mu = \mu' + \rho\varepsilon_{+\infty}$ siendo $\rho$ una constante positiva $\rho = \mu(\{+\infty\})$ y $\mu' \in M_+(R_+)$. Por lo tanto:

$$f(x) = \int e^{-tx}\mu'(dt) + \rho e^{-\infty x}$$

cualquiera que sea $x \in R_+$; y, entonces, $f(x)$ es contínua si y sólo si $\rho = o$, lo que es equivalente, si y sólo sí $\mu$ es una medida sobre $R_+$.

<u>DEFINICION</u>. Una función $f : R_+ \longrightarrow R$ se dice completamente monótona si $f \in C^\infty$, siendo además $(-1)^n f^{(n)} \geqslant 0$ para todo $n \geqslant o$.

Toda función completamente monótona es monótona de orden $\infty$. En efecto, por el teorema del valor medio tenemos

$$\Delta_n^f(x,a_1) = f(x) - f(x+a_1) = -a_1\, f'(x+\theta_1 a_1)$$

siendo $o < \theta_1 < 1$; luego por la definición es $\Delta_1^f \geqslant o$.

Además

$$\Delta_n^f(x,a_1,\ldots,a_n) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i \ f^{(n)}(x+\sum_{i=1}^{n}\theta_i a_i) \geqslant o,$$

siendo $o < \theta_i < 1$, luego $\Delta_n^f \geqslant o$.

La función

$$f(x) = \int e^{-tx}\,\mu(dt),$$

donde $\mu \in M_+(R_+)$ se denomina la <u>Transformada de Laplace</u> de la medida $\mu$.

<u>Observación</u>. En ciertos casos en que se quiere probar la unicidad de $\mu$, es difícil probar que el cono es un reticulado.

Se tienen las siguientes equivalencias:

1) $f(x) = \int e^{-tx}\,\mu(dt)$ siendo $\mu \in M_+(R_+)$.

2) f es contínua en o y monótona de orden infinito.

3) f es completamente monótona.

Sabemos que 1) $\longleftrightarrow$ 2), y, por el teorema anterior 3) $\longrightarrow$ 2). Probemos entonces que 1) $\longrightarrow$ 3). Como $\mu$ es una medida finita, las funciones $t^n e^{-tx}$ son integrables por ser acotadas. Luego podemos derivar bajo el signo integral para deducir que $f \in C^\infty$ y

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \int t^n e^{-tx}\,\mu(dt).$$

Por lo tanto, $(-1)^n f^{(n)}(x) \geqslant o$, o sea, que f es completamente monótona.