NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS

6

ANTONIO DIEGO

ISSN 0078-2009

LECCIONES DE PROGRAMACION LINEAL

1977
INMABB - CONICET
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA — ARGENTINA

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS (*)

N°6

ISSN 0078-2009

LECCIONES DE PROGRAMACION LINEAL

ANTONIO DIEGO

INMABB - CONICET

1977

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

PREFACIO

La Programación Lineal fué introducida en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur por el Profesor Dr. Antonio Diego en el año 1972. Sus clases, concebidas como integrantes de un curso básico, fueron sin embargo ensayadas con alumnos en su mayor parte graduados, hecho que se evidencia en la densidad de las lecciones que siguen. No obstante, los pre-requisitos se reducen esencialmente a elementos de la teoría de Matrices y de Espacios Vectoriales.

De las lecciones dictadas por el autor en los años 1972 y 1973, surgieron estas notas que fueron tomadas por la Prof. Lic. Aurora Germani de Pousa, colaborando en la redacción final el Prof. Lic. Raúl Chiappa.

Para mí es una profunda satisfacción poder presentar al público de habla española esta obra que introduce en un tema importante de la Matemática Aplicable. Es un producto de la clara mente de nuestro querido y talentoso amigo Antonio Diego quien falleció antes de dar término a la redacción de este trabajo.

Quiero agradecer finalmente a la señora de Pousa la gentileza que ha tenido al reemplazarme en la mayor parte de las tareas de coordinación en la edición del presente volumen.

Rafael Panzone
Bahía Blanca, Febrero 1977

INDICE

INTRODUCCION

A. NOTACION MATRICIAL.

Es útil muchas veces precisar el conjunto de índices cuando tratamos con sucesiones finitas de n números o con matrices de m × n números; por ejemplo, el cuadro:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r \\ s \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} & \end{array}$$

define una matriz de 2 filas por 3 columnas relativas a los conjuntos de índices $I = \{r,s\}$; $J = \{\alpha,\beta,\gamma\}$. Donde este hecho se quiera destacar escribiremos A_{IJ} en lugar de A.

Queremos poner énfasis en el hecho que A es, más bien que un cuadro de números, una función $A: I \times J \to R$ $(A(i,j) = a_{ij} \in R)$.

Además de las operaciones de suma de matrices y producto de una matriz por un número, definimos

$$\langle A_I . B_I \rangle = \sum_{i\in I} a_i b_i \quad \text{(producto escalar de vectores).}$$

$$A_{IS} . B_{SJ} = C_{IJ} \quad , \quad C_{IJ} = \sum_{s\in S} a_{is} b_{sj} \quad \text{(producto de matrices)}$$

La matriz 1_{II}, matriz unidad sobre I, es la que tiene elementos δ_{ij} :

$$\delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \;;\; \delta_{ii} = 1 \quad (i,j \in I).$$

La inversa de una matriz A_{IJ} : $(A_{IJ})^{-1} = B_{JI}$ verifica: $(A_{IJ})^{-1}A_{IJ} = 1_{JJ}$; $A_{IJ}(A_{IJ})^{-1} = 1_{II}$ (donde I , J son conjuntos de índices con $|I| = |J|$).

B. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. VARIABLES Y SOLUCIONES BASICAS.

Sea : (1) $A_{MN}X_N = B_M$

un sistema lineal con variables (incógnitas) x_i , $i \in N = \{1,2,\dots,n\}$.

Multiplicando por una matriz T_{SM} obtenemos el sistema: $(T_{SM}A_{MN})X_N = T_{SM}B_M$ que es consecuencia del anterior-y equivalente al mismo si T_{SM} es regular-pues multiplicando por $(T_{SM})^{-1}$ se pasa al primero.

Observemos que el conjunto de índices de las ecuaciones es M en el primer sistema y S en el segundo.

Supongamos que una submatriz A_{MI} de A_{MN} es regular y sea $J = N-I$, siendo $|I| = |M| = m$:· $A_{MN}X_N = A_{MI}X_I + A_{MJ}X_J = B_M$, multiplicando por $(A_{MI})^{-1}$ se tiene:

$$1_{II}X_I + (A_{MI})^{-1}A_{MJ}X_J = (A_{MI})^{-1}B_M$$

o sea: (2) , $X_I + X^o_{IJ}X_J = X^o_I$

donde $X^o_{IJ} = (A_{MI})^{-1}A_{MJ}$; $X^o_I = (A_{MI})^{-1}B_M$.

Las columnas A_i , $i \in I$, de la matriz A_{MI} constituyen una base de R^m , $m = |M|$; debido a esto las variables x_i , $i \in I$, se dicen BASICAS. La igualdad (2) presenta las soluciones del sistema (1) explicitando las variables básicas en función de las NO-BASICAS o SECUNDARIAS ; x_j , $j \in J$. En términos de las variables no-básicas las soluciones son:

$$X_N = (X^o_I - X^o_{IJ}X_J, X_J) \text{ donde } X_J \text{ es arbitrario.}$$

La solución básica correspondiente a $X_J = 0_J$ es: $X^o_N = (X^o_I, 0_J) = X^o$.

Dado $I \subset N$ tal que A_{MI} es regular, vemos que la solución básica $X^o = (X^o_I, 0_J)$ es la única solución del sistema (1) tal que $x_j = 0$ si $j \notin I$.

El sistema (2) se escribe en la forma:

$$(3) \qquad X^o_{IN}X_N = X^o_I$$

donde $X^o_{IN} = (X^o_{II}, X^o_{IJ}) = (A_{MI})^{-1}A_{MN}$; $X^o_{II} = 1_{II}$ y $X^o_I = (A_{MI})^{-1}B_M$.

Agregando a la matriz A_{MN} la columna B_M se obtiene la matriz: $A_{MN_o} = (B_M, A_{MN})$, $N_o = \{0,1,2,\ldots,n\}$, donde el índice o corresponde a la columna B_M. Si análogamente consideramos $X^o_{IN_o} = (X^o_I, X^o_{IN})$ se tiene que: $X^o_{IN_o} = (A_{MI})^{-1}A_{MN_o}$, o sea : $A_{MI}X^o_{IN_o} = A_{MN_o}$.

Esta última relación indica que x^o_{ij} es la componente según el vector A_i de la base $\{A_i\}_{i\in I}$ de R^m - constituída por las columnas de la matriz A_{MI} - del vector columna A_j, $j \in N_o$, de la matriz A_{MN_o} (donde $A_o = B_M$).

PROPOSICION 1. Sean dados el sistema: (*) $A_{MN}X_N = B_M$ y el conjunto $I \subset N$ ($J = N-I$).

a) El conjunto $\{A_i\}_{i\in I}$ es linealmente independiente si y sólo si existe a lo sumo una solución del sistema (*) tal que $X_J = 0_J$.

b) Si $|I| = |M| = m$, la existencia de una única solución X^o del sistema tal que $X_J^o = 0_J$ implica que X^o es solución básica relativa a la base $\{A_i\}_{i\in I}$ de R^m.

c) Si el sistema lineal $X_I + X_{IJ}^o X_J = X_I^o$ es equivalente al sistema (*) y $m = |I|$, entonces A_{MI} es regular:

$$X_I^o = (A_{MI})^{-1} B_M \quad ; \quad X_{IJ}^o = (A_{MI})^{-1} A_{MJ} \ .$$

DEMOSTRACION.

a) La existencia de, a lo sumo, una solución X_N del sistema (*) tal que $X_J = 0_J$ equivale a la afirmación de que el sistema $A_{MI}X_I = 0_M$ tiene solamente la solución nula 0_I; o sea $\sum_{i\in I} A_i x_i = 0$ implica $x_i = 0 \ \forall \ i \in I$. Esto quiere decir que el conjunto $\{A_i\}_{i\in I}$ es linealmente independiente.

b) Por a), el conjunto $\{A_i\}_{i\in I}$ es una base de R^m, luego A_{MI} es regular. La única solución del sistema (*) con $X_J^o = 0_J$ es: $X^o = ((A_{MI})^{-1}B_M, 0_J)$ que es la solución básica relativa a la base $\{A_i\}_{i\in I}$.

c) Dado que la única solución del sistema: $X_I + X_{IJ}^o X_J = X_I^o$, $X_J = 0_J$ es $X^o = (X_I^o, 0_J)$, ésta es la única solución del sistema equivalente $A_{MN}X_N = B_M$, $X_J = 0$. Por b) X^o es solución básica relativa a I, luego A_{MI} es regular y el sistema (*) puede ponerse como: $X_I + (A_{MI})^{-1}A_{MJ}X_J = (A_{MI})^{-1}B_M$, que es equivalente a $X_I + X_{IJ}^o X_J = X_I^o$. Poniendo $X_J = 0_J$ vemos que: $X_I^o = (A_{MI})^{-1}B_M$ y restando obtenemos: $(A_{MI})^{-1}A_{MJ}X_J = X_{IJ}^o X_J$ para cualquier X_J ; esto implica : $(A_{MI})^{-1}A_{MJ} = X_{IJ}^o$.

C. PIVOTAJE.

Sea E : $E_i = 0$, $i \in M$, un sistema de ecuaciones lineales donde

$$E_i = \sum_{j\in N} a_{ij} x_j - b_i \ .$$

Si $a_{ij} \neq 0$ es posible eliminar la variable x_j de todas las ecuaciones excepto la de índice i, donde aparecerá con coeficiente 1. Es decir, podemos pasar al sistema equivalente E' : $E_i' = 0$, $i \in M$, donde:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \mathcal{E}'_i &= \frac{1}{a_{ij}}\,\mathcal{E}_i \\ \mathcal{E}'_h &= \mathcal{E}_h - \frac{a_{hj}}{a_{ij}}\,\mathcal{E}_i \qquad h \neq i \end{aligned}$$

Esta operación que lleva $\mathcal{E}$ a la forma equivalente $\mathcal{E}'$ se dice PIVOTAJE en el elemento a_{ij} (el PIVOTE).

El efecto del pivotaje, el de aislar la variable x_j, puede pensarse también como el que resulta de reemplazar el valor x_j obtenido de la ecuación $\mathcal{E}_i = 0$ (esto es prácticamente la ecuación $\mathcal{E}'_i = 0$) en las restantes ecuaciones $\mathcal{E}_h = 0$, $h \neq i$ (dando las ecuaciones $\mathcal{E}'_h = 0$).

Una convención - cuya utilidad se apreciará en lo que sigue - consiste en asignar el índice $j \in N$ a la ecuación $\mathcal{E}'_i = 0$, $i \in M$ del sistema $\mathcal{E}'$, obtenido del sistema $\mathcal{E}$ por pivotaje en a_{ij}; observando que para evitar repetición en los índices de las ecuaciones, los conjuntos M y N deberán ser disjuntos, excepto que el sistema ya tenga variables aisladas, en cuyo caso el índice de la ecuación coincidirá con el índice de la variable aislada. De este modo en lugar de (4) tendremos:

$$(4')\qquad \begin{aligned} \mathcal{E}'_j &= \frac{1}{a_{ij}}\,\mathcal{E}_i \\ \mathcal{E}'_h &= \mathcal{E}_h - \frac{a_{hj}}{a_{ij}}\,\mathcal{E}_i \qquad h \neq i \end{aligned}$$

La ecuación $\mathcal{E}'_j = 0$ tendrá la variable x_j aislada en el sistema $\mathcal{E}'$. En general una ecuación podrá estar indicada por j cada vez que x_j aparezca aislada en el sistema.

Para aplicar esta convención y practicar el pivotaje consideremos el sistema $A_{MN}X_N = B_M$ cuya matriz $A_{MN_o} = (B_M, A_{MN})$ se indica en el primer cuadro siendo $M = \{\alpha,\beta,\gamma\}$; $N = \{1,2,3,4,5\}$

		0	1	2	3	4	5
(I)	α	1	2	-1^*	0	3	0
	β	0	1	4	-2	0	1
	γ	0	2	1	-1	0	0
(II)	2	-1	-2	1	0	-3	0
	β	4	9	0	-2	12	1
	γ	1	4	0	-1^*	3	0

		0	1	2	3	4	5
(III)	2	-1	-2	1	0	-3	0
	β	2	1	0	0	6	1^*
	3	-1	-4	0	1	-3	0
(IV)	2	-1	-2	1	0	-3	0
	5	2	1^*	0	0	6	1
	3	-1	-4	0	1	-3	0
(V)	2	3	0	1	0	9	2
	1	2	1	0	0	6	1
	3	7	0	0	1	21	4

Obsérvese que el único efecto del pasaje del cuadro (III) al (IV) es sobre el índice de la fila del pivote. Los cuadros (IV) y (V) proveen sistemas explícitos, por ejemplo a partir de (V) obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} x_2 \quad\quad &+ 9x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 \quad\quad\quad &+ 6x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 &+ 21x_4 + 4x_5 = 7 \end{aligned}$$

El pivotaje en $a_{ij} \neq 0$, $i \in M$, $j \in N$ actúa entonces sobre la matriz A_{MN_0} del sistema, transformando A_{MN_0} en $A'_{M'N_0}$; $M' = M-i+j$ de acuerdo con la transformación

$$(4'') \qquad \begin{aligned} a'_{jk} &= \frac{a_{ik}}{a_{ij}} \\ a'_{hk} &= a_{hk} - \frac{a_{hj}}{a_{ij}} a_{ik} \qquad h \neq i \end{aligned}$$

La resolución de un sistema lineal puede realizarse por medio de sucesivos pivotajes (con ventajas considerables en relación con la utilización de determinantes). En sistemas pequeños esto es prácticamente lo que se hace - a veces en forma desordenada - al aplicar los procedimientos de sustitución o eliminación (ambos equivalentes a pivotajes).

La utilización del pivotaje - incluída la convención sobre la introducción de índices de columna como índices fila - es cómoda tanto notacionalmente como algorítmicamente.

Por aplicación reiterada del pivotaje podemos llevar el sistema $A_{MN}X_N = B_M$, a uno donde ninguna variable más puede ser aislada, esto es a un sistema:

$X^o_{HN}X_N = X^o_H$ donde ningún índice $j \in N\text{-}H$ pueda ser llevado por pivotaje a sustituir un índice de H.

Sea $I = H \cap N$, $S = H - I$, $J = N - I$; es facil ver que el sistema se escribe en la forma:

$$\begin{aligned} X_I + X^o_{IJ}X_J &= X^o_I \\ X^o_{SN}X_N &= X^o_S \end{aligned}$$

siendo $X^o_{SN} = 0_{SN}$.

El sistema será compatible si y sólo si $X^o_S = 0_S$, en cuyo caso el sistema inicial ha sido reducido a la forma explícita: $X_I + X^o_{IJ}X_J = X^o_I$.

NOTAS Y PROBLEMAS.

El pivotaje puede ser interpretado como una transformación lineal $t: R^m \rightarrow R^m$, inducida por un vector fijo $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in R^m$ con $a_i \neq 0$, que verifica $t(A) = e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)$. Así definida para cada $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in R^m$ será $tU = V$ siendo $V = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ donde:

$$(5) \qquad \begin{aligned} v_i &= \frac{u_i}{a_i} \\ v_h &= u_h - \frac{a_h}{a_i} u_i \qquad h \neq i \end{aligned}$$

A la transformación t le corresponde la matriz:

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & -\frac{a_1}{a_i} & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & -\frac{a_2}{a_i} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_i} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -\frac{a_m}{a_i} & \ldots & 1 \end{pmatrix} = T_i$$

Es decir la columna i de la matriz es: $(-\frac{a_1}{a_i}, -\frac{a_2}{a_i}, \ldots, \frac{1}{a_i}, \ldots, -\frac{a_m}{a_i})$ y las restantes columnas h ≠ i son $e_h = (\underbrace{0,0,\dots,1}_{h},0,\dots,0)$.

Observemos que t transforma ordenadamente la base de R^m constituída por los vectores $e_1,e_2,\dots,e_{i-1},A,e_{i+1},\dots,e_m$ en la base: $e_1,e_2,\dots,e_{i-1},e_i,e_{i+1},\dots,e_m$; t está entonces completamente definida por tal propiedad y es regular.

El pivotaje en $a_{ij} \neq 0$ definido sobre el sistema E del parágrafo C, actúa sobre las columnas de los coeficientes de cada variable y de los términos independientes (vectores de R^m) como la transformación t, definida en relación con el vector columna $A = A_j = (a_{1j},a_{2j},\dots,a_{ij},\dots,a_{mj})$ y el vector $e_i = (\underbrace{0,0,\dots,1}_{i},0,\dots,0)$ $(t(A_j) = e_i)$.

Se deduce que si una variable x_k , $k \neq j$, aparece solamente en una ecuación $E_h = 0$, $h \neq i$, y con coeficiente 1, ella continuará aislada en el sistema E'; de este modo la aplicación reiterada del pivotaje irá aumentando el número de variables aisladas.

PROBLEMA 1. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una base de R^m y A_j $(j \notin I)$ otro vector de R^m .

a) Probar que si $I' = I-i+j$, $\{A_i\}_{i\in I'}$ es una base de R^m si y sólo si la componente x^o_{ij} de A_j respecto de A_i es no-nula.

b) Probar que las componentes $X^o_I = (x_i)_{i\in I}, X'_{I'} = (x'_i)_{i\in I'}$ de un mismo vector X de R^m están relacionadas por:

$$x'_j = \frac{x^o_i}{x^o_j}$$

$$x'_h = x^o_h - \frac{x^o_{ih}}{x^o_{ij}}\, x^o_i \qquad h \neq i$$

PROBLEMA 2. Dada una matriz $A = A_{MM} = (a_{ij})$ de orden $m = |M|$, ampliémosla en la forma siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ 1' \\ 2' \\ \\ m' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & & m & 1' & 2' & & m' \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} = (A_{M'M}, 1_{M'M'})$$

$(M = \{1,2,\dots,m\}$; $M' = \{1',2',\dots m'\})$.

Probar que la matriz A es inversible si y sólo si efectuando sucesivos pivotajes es posible introducir todos los índices $i \in M$ como índices de filas. En tal caso la matriz final será de la forma: $(1_{MM'}, (A_{MM'})^{-1})$ e intercambiando M con M' se obtendrá la inversa de la matriz dada.

I. ALGORITMO SIMPLEX.

INTRODUCCION.

La programación matemática es la base teórica para la solución de problemas de planificación y control. Una de las ramas más desarrolladas de esta disciplina es la programación lineal. Veremos a continuación algunos problemas que muestran su conexión con la economía y la planificación industrial.

1. PROBLEMA DE TRANSPORTE: ([12])

Sean $a_1,a_2,\dots,a_r$, r centros productores de un mismo bien y $b_1,b_2,\dots,b_s$, s localidades consumidoras. Sea p_i la cantidad del producto en a_i y q_j la cantidad demandada del producto en b_j y supongamos $\sum_{i=1}^{r} p_i = \sum_{j=1}^{s} q_j$.

El costo del transporte, por unidad de producto, de a_i a b_j es c_{ij}.

Se plantea el problema de planificar el transporte de todo el producto de modo que el costo total sea mínimo.

Si x_{ij} es la cantidad del producto transportado de a_i a b_j se trata de:

$$\text{minimizar } \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

en el conjunto K de los $X = (x_{ij})$ que verifican las restricciones:

$$\sum_{j=1}^{s} x_{ij} = p_i \qquad i = 1,2,\dots,r$$

$$\sum_{i=1}^{r} x_{ij} = q_j \qquad j = 1,2,\dots,s$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,2,\dots,r \ ; \ j = 1,2,\dots,s \ .$$

2. PROBLEMA DE NUTRICION: ([15])

Se trata, en problemas de este tipo, de fabricar una mezcla a partir de ciertos ingredientes $I_1,I_2,\dots,I_n$ dados, cuyos costos unitarios $c_1,c_2,\dots,c_n$ se conocen. La mezcla debe satisfacer determinados requerimientos, que consisten en mantener el contenido de ciertos elementos $E_1,E_2,\dots,E_m$, presentes en los ingredientes, dentro de límites prefijados, y ser además, de costo mínimo.

Sean x_j la cantidad del ingrediente I_j que interviene en una unidad de la mezcla y a_{ij} la cantidad del elemento E_i (en cierta unidad) que contiene una unidad del ingrediente I_j.

Para cada i = 1,2,...,m debe verificarse:

$$r_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq s_i$$

(pudiendo ser $r_i = -\infty$ ó $s_i = +\infty$).

Con estas restricciones se plantea el problema de: minimizar $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, siendo naturalmente: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$; $x_i \geq 0$ $i = 1,2,\ldots,n$.

3. PROBLEMA DEL RESTAURANTE: ([13])

Para un período de n días consecutivos: 1,2,...,n , el encargado de un restaurante sabe de antemano que necesitará r_i servilletas el día i. El puede comprar servilletas nuevas (luego limpias) en cualquier momento a razón de : \$ a cada una, o mandar a lavar servilletas; esto puede hacerse por servicio regular o servicio urgente: el primero cobra \$ b por servilleta y demora p días; y el segundo cobra \$ c (c > b) por servilleta y demora q días (q < p). Las compras y las entregas de lavandería se hacen al comienzo de cada día. El encargado no posee servilletas inicialmente y trata de hacer de modo de gastar lo menos posible sin que le falten servilletas limpias ningún día.

Sean x_i el número de servilletas compradas, y_i el número de servilletas mandadas a lavar por servicio regular y z_i el número de servilletas mandadas a lavar por servicio urgente, el i-ésimo día.

Pongamos también s_i para indicar el número total de servilletas sucias al final del i-ésimo día.

Convengamos en que $y_i = z_i = s_i = 0$ si $i \leq 0$.

Se puede verificar que el planteo del problema es el siguiente:

$$\text{minimizar: } \sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i + cz_i)$$

con las restricciones:

$$\sum_{i=1}^{j} (x_i + y_{i-p} + z_{i-q}) \geq \sum_{i=1}^{j} r_i \quad , j = 1,2,\ldots,n$$

$$y_j + z_j + s_j - s_{j-1} = r_j \quad , j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_j \geq 0 \; ; \; y_j \geq 0 \; ; \; z_j \geq 0 \; ; \; s_j \geq 0 \quad , j = 1,2,\ldots,n$$

4. MODELO ECONOMICO

Un proceso de producción está dividido en varias líneas o ramas , sea $N = \{1,2,\ldots,n\}$ el conjunto de tales líneas.

Cada línea k es utilizada en la elaboración de un producto p_k,eventualmente $p_h = p_k$ (con $h \neq k$). Las líneas funcionan en forma independiente.

Un conjunto $M = \{1,2,\ldots,m\}$ de factores de producción intervienen en el proceso (materias primas, mano de obra, etc.).

Se planea la producción por un período de tiempo fijo - tomado como unidad de tiempo. Sean $b_1,b_2,\ldots,b_m$ las cantidades de cada factor de producción disponibles en la unidad de tiempo.

Cada línea k puede ser utilizada con una intensidad $x_k \geq 0$ en la elaboración del producto p_k (x_k puede indicar la fracción de tiempo en que la línea k es utilizada, o alguna otra cantidad como en el ejemplo que damos luego). Se conoce que el consumo del factor $j \in M$ cuando sólo funciona la línea k con intensidad 1, es $a_{jk} \geq 0$ y también se conoce el beneficio c_k (medido en una cierta unidad monetaria) que se obtiene de producir el bien p_k cuando sólo la línea k funciona con intensidad 1. Los consumos de cada factor son proporcionales a las intensidades de utilización de cada línea y se adicionan cuando las intensidades así lo hacen. En otras palabras, trabajando con intensidades $x_1,x_2,\ldots,x_n$ en las líneas 1,2,...,n se consume la cantidad $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i$ del factor j.

Poniendo $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$; $B = (b_1,b_2,\ldots,b_m)$; $A = (a_{ij})$ $i \in M$, $j \in N$; $C = (c_1,c_2,\ldots,c_n)$ se tiene el problema:

$$\text{maximizar } \langle C.X \rangle$$

en el conjunto de los $X \in R^n$ tales que: $AX \leq B$, $x_i \geq 0$ $i = 1,2,\ldots,n$.

NOTA. Aquí aceptamos que las intensidades pueden ser tan grandes como queramos. No ocurrirá esto en general; pero una restricción del tipo $x_i \leq M$ puede ser incluída en el modelo. Así la intensidad de actividad sería también considerada un factor de producción disponible en una cierta cantidad M, en la unidad de tiempo.

EJEMPLO. Interpretemos las líneas de producción como parcelas de tierra; los productos como granos de diversos tipos que han de ser cultivados, sembrando en cada parcela un único tipo de grano; los factores de producción como disponibilidad de mano de obra, semillas, maquinaria, etc.; la intensidad x_j como el número de hectáreas sembradas en la parcela j (una restricción del tipo $x_j \leq M$ debe ser impuesta si la parcela no es muy grande).

OBSERVACIONES.

a) Todo problema de programación (lineal o no) puede reducirse a optimizar el valor de una coordenada en un conjunto dado.

Consideremos, por ejemplo, el problema de maximizar $f(X)$ en un conjunto $K \subset R^n$. Poniendo:

$$z = f(X) \text{ y } K' = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n,z) \mid (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in K,\ f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = z\}$$

el problema es equivalente a maximizar z en K'.

También, el problema equivale al de maximizar z en el conjunto

$$K'' = \{(x,z) \mid x \in K \ ,\ z \leq f(x)\}$$

b) El siguiente problema puede ponerse como un problema de programación lineal:

Sean $L_1, L_2, \ldots, L_p$ funcionales lineales (incluyendo un sumando constante) y sea $f(X) = \min\limits_{1 \leq j \leq p} \{L_j(X)\}$. Sea K un conjunto de R^n; el problema consiste en maximizar $f(X)$ en K.

Introduciendo una variable auxiliar z, el problema puede ser puesto en la forma: maximizar z , en el conjunto $\{(X,z) \mid z \leq f(X) \ ,\ X \in K\}$.

Es claro que $z \leq f(X)$ equivale a las desigualdades: $z \leq L_j(X)$; $j = 1,2,\ldots,p$.

Se tiene así el problema de programación lineal: maximizar z en el conjunto de los (X,z) tales que: $z \leq L_1(X)$, $z \leq L_2(X)$,..., $z \leq L_p(X)$, $X \in K$.

ALGORITMO SIMPLEX.

A. Estudiaremos el problema: maximizar $L(X) = \langle C_N . X_N \rangle$ en el conjunto K de los $X = X_N \in R^n$ $(n = |N|)$ tales que:

$$(1) \qquad A_{MN}X_N = B_M \ , \ x_i \geq 0 \ , \forall\, i \in N$$

siendo el rango de A_{MN} igual a $m = |M|$.

Suponemos que el sistema lineal (1) está puesto en la forma equivalente:

$$(2) \qquad X_I + X^o_{IJ}X_J = X^o_I$$

y que los x^o_i , $i \in I$, son no-negativos.

La solución básica $X^o = (X^o_I, 0_J)$ es así un PROGRAMA (básico) del problema, es decir $X^o \in K$.

Introduciendo una nueva variable z, el problema puede plantearse así: maximizar z, en el conjunto K' de los puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \in R^{n+1}$ que verifican:

$$(1') \qquad \begin{array}{l} A_{MN}X_N = B_M \\ \langle C_N . X_N \rangle = z \\ x_i \geq 0 \ , \forall\, i \in N \end{array}$$

Utilizando (2) se tiene, para todo $X \in K$:

$$z = L(X) = \langle C_N X_N \rangle = \langle C_I X_I \rangle + \langle C_J X_J \rangle = \langle C_I (X^o_I - X^o_{IJ}X_J) \rangle + \langle C_J X_J \rangle = \langle C_I X^o_I \rangle + \langle (C_J - C_I X^o_{IJ}) X_J \rangle$$

y escribiendo $z^o = L(X^o) = \langle C_I X^o_I \rangle$; $\Delta_J = C_I X^o_{IJ} - C_J$; se tiene:

$$(3) \qquad z = z^o - \langle \Delta_J . X_J \rangle$$

El problema (1') se reduce entonces a:

maximizar z , en el conjunto K' definido por:

$$(2') \qquad \begin{array}{l} X_I + X^o_{IJ}X_J = X^o_I \\ z + \langle \Delta_J . X_J \rangle = z^o \\ x_i \geq 0 \ \ \forall\, i \in N \end{array}$$

A la primera igualdad le corresponderá (párrafo B - INTRODUCCION) la matriz: $X^o_{IN_o} = (X^o_I, X^o_{IN})$; análogamente a la segunda igualdad le podemos asociar la fila $\Delta_{N_o} = (\Delta_o, \Delta_N)$; $\Delta_o = z^o$, $\Delta_N = (\Delta_I, \Delta_J)$, $\Delta_I = 0_I$.

De esta manera para el sistema (2') tendremos asociada la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} X^o_{IN_o} \\ \\ \Delta_{N_o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^o_I & X^o_{IN} \\ \\ \Delta_o & \Delta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^o_I & 1_{II} & X^o_{IJ} \\ \\ z^o & 0_I & \Delta_J \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de esta matriz serán consignados en una tabla simplex T(I); la que contará además con dos columnas suplementarias, en la primera se indicarán los coeficientes C_I y en la segunda el conjunto de índices I que corresponden a las variables básicas. Es conveniente además en la primera tabla consignar los coeficientes C_N de la funcional a optimizar y el conjunto de índices N, lo que se hará en dos filas suplementarias, de esta manera la primera tabla simplex tendrá la forma

C_N			c_1	c_2		c_n
C_I	I	0	1	2	. . .	n
c_{i_1} . . . c_{i_m}	i_1 . . . i_m	$X^o_{IN_o}$				
		Δ_{N_o}				

Así por ejemplo, para I = {1,2,3} ; N = {1,2,3,4,5} consideremos la siguiente tabla simplex T(I)

(4)

C_N			c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
C_I	I	0	1	2	3	4	5
c_1	1	x^o_1	1	0	0	x^o_{14}	x^o_{15}
c_3	3	x^o_3	0	0	1	x^o_{34}	x^o_{35}
c_2	2	x^o_2	0	1	0	x^o_{24}	x^o_{25}
	Δ_{N_o}	z^o	0	0	0	Δ_4	Δ_5

TABLA (I)

CRITERIO DE OPTIMALIDAD. Si $\Delta_j \geq 0 \ \forall \ j \in J$, X^o es un programa optimal.
En efecto, todo $X \in K$ verifica (2) con $x_j \geq 0$ si $j \in J$. El valor z de la forma lineal en X es entonces:

$$z = z^o - \langle \Delta_J , X_J \rangle = z^o - \sum_j {}_J\Delta_j x_j \leq z^o \ .$$

Como z^o es el valor de la funcional en X^o, resulta X^o optimal.

B. De acuerdo con el criterio de optimalidad, si X^o no es optimal existe un $k \in J$ tal que $\Delta_k < 0$. El valor de la forma lineal podrá ser aumentado si hallamos una solución del sistema (2) con $x_j = 0$ para $j \in J\text{-}k$ y $x_k = t > 0$, pues en tal caso: $z = L(X) = z^o - \Delta_k t > z^o$.

Estudiemos entonces las soluciones $X = X(t)$ de este tipo. Poniendo $x_k = t \geq 0$ y $x_j = 0$ si $j \in J\text{-}k$, sea $X = X(t)$ la solución del sistema (2) para esos valores de las variables secundarias, entonces las componentes x_i de X serán:

$$(5) \qquad x_i = \begin{cases} x_i^o - x_{ik}^o t & \text{si } i \in I \\ t & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \in J\text{-}k \end{cases}$$

Observemos que $\Sigma = \{X(t) \mid t \geq 0\}$ es una semirrecta de origen X^o, y que $X = X(t) \in K$ si y sólo si $x_i = x_i^o - x_{ik}^o t \geq 0 \ \forall i \in I$. Esta relación se cumple automáticamente para los $i \in I$ tales que $x_{ik}^o \leq 0$. Cuando $x_{ik}^o > 0$ ella se cumple si y sólo si $t \leq \dfrac{x_i^o}{x_{ik}^o}$.

Pueden darse los siguientes casos: a) $x_{ik}^o \leq 0 \ \forall i \in I$. b) $x_{ik}^o > 0$ para algún $i \in I$.

En el caso a), $X(t) \in K$ para cualquier $t \geq 0$; dicho de otro modo la semirrecta Σ está contenida en K.

En el caso b), $X(t) \in K$ si y sólo si $0 \leq t \leq t_o = \min\limits_{i \mid x_{ik}^o > 0} \dfrac{x_i^o}{x_{ik}^o}$; poniendo $X' = X(t_o)$ vemos que $\Sigma \cap K = [X^o, X']$.

Puede ocurrir que $X^o = X'$; esto ocurre en el caso en que $t_o = 0$, que se presenta cuando y sólo cuando es $x_i^o = 0$ para algún $i \in I$, tal que $x_{ik}^o > 0$.

Por otra parte, el valor de la funcional $L(X)$ en $X(t)$ es: $L(X(t)) = z = z^o - \Delta_k t$, de modo que, sobre Σ, $L(X)$ aumenta con t si y sólo si $\Delta_k < 0$; siendo en el caso a) $\lim\limits_{t \to +\infty} L(X(t)) = +\infty$, lo que indica que el problema es IRRESOLUBLE; mientras que en caso b) obtenemos un nuevo valor: $L(X(t_o)) = L(X') \geq L(X^o)$.

Sea $j \in I$ con $x_{jk}^o > 0$ tal que: $t_o = \dfrac{x_j^o}{x_{jk}^o} = \min\limits_{i \mid x_{ik}^o > 0} \dfrac{x_i^o}{x_{ik}^o}$. Las coordenadas de X'

se obtienen llevando este valor de t_o a las igualdades (5); notando que $x'_j = 0$ se tiene:

$$(6) \quad x'_i = \begin{cases} x^o_i - x^o_{ik}\dfrac{x^o_j}{x^o_{jk}} & \text{si } i \in I\text{-}j \\ \dfrac{x^o_j}{x^o_{jk}} & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \notin I\text{-}j\text{+}k \end{cases}$$

La expresión (5) da las soluciones del sistema lineal (1) que se anulan en J-{k} (con $x_k = t \geq 0$), y de (6) es inmediato que la única solución del sistema (1) que se anula en J' = J-k+j es precisamente X'. Es decir: X', que es la solución básica correspondiente a I' = I-j+k, es la única solución del sistema (1) tal que $X_{J'} = 0_{J'}$.

Pivoteando el sistema lineal (2) respecto del elemento $x^o_{jk} > 0$ se obtiene el sistema referido a la base $\{A_i\}_{i \in I'}$:

$$X_{I'} + X'_{I'J'}X_{J'} = X'_{I'}$$

más aún si el pivotaje en el elemento x^o_{jk} es aplicado a todo el sistema lineal (2') obtenemos:

$$(2'') \quad \begin{array}{l} X_{I'} + X'_{I'J'}X_{J'} = X'_{I'} \\ z \quad + \langle \Delta_{J'} . X_{J'} \rangle = z' \end{array}$$

Consideremos, por ejemplo, la tabla T(I) dada en (4) (párrafo A), supongamos $\Delta_4 < 0$, $\Delta_4 < \Delta_5$ y $x^o_{14} > 0$, $x^o_{24} > 0$, $x^o_{34} \leq 0$; supongamos que es también $\dfrac{x^o_1}{x^o_{14}} < \dfrac{x^o_2}{x^o_{24}}$; el pivote es entonces x^o_{14} y pasamos a la siguiente tabla simplex T(I'), donde I' = I-1+4 = {4,3,2}

$C_{I'}$	I'	0	1	2	3	4	5
c_4	4	x'_4	x'_{41}	0	0	1	x'_{45}
c_3	3	x'_3	x'_{31}	0	1	0	x'_{35}
c_2	2	x'_2	x'_{21}	1	0	0	x'_{25}
		z'	Δ'_1	0	0	0	Δ'_5

TABLA T(I')

Resumiendo, en un problema de maximización el algoritmo simplex procede de la siguiente manera:

1°) Se estudian los coeficientes Δ_N de la tabla T(I):

α) Si $\Delta_j \geq 0$, $\forall j \in N$, $X^o = (X^o_I, 0_J)$ es un programa optimal y $z^o = L(X^o)$ es el valor máximo de la funcional L(X) en K. La tabla T(I) es entonces tabla final.

β) Si $\Delta_k < 0$, para algún k (un criterio práctico aconseja tomar $\Delta_k = \min_{1\leq j\leq n} \Delta_j$) se pasa a 2°).

2°) Se estudia la columna de índice k, de la tabla T(I):

α) Si $x^o_{ik} \leq 0$, $\forall i \in I$, la funcional L(X) crece según la semirrecta $\Sigma \subset K$ y entonces $\lim_{t\to+\infty} L(X(t)) = +\infty$. El problema no tiene máximo finito; siendo entonces irresoluble y entonces la tabla T(I) es tabla final.

β) En caso contrario, $x^o_{ik} > 0$ para algún $i \in I$; se determina $j \in I$ tal que: $\frac{x^o_j}{x^o_{jk}} = \min_{i|x^o_{ik}>0} \frac{x^o_i}{x^o_{ik}}$. Con pivote en x^o_{jk}, se transforma la tabla T(I) en la siguiente T(I').

3°) Se pasa a 1°) con I' en lugar de I.

EJERCICIO. Practicar el método simplex en los siguientes problemas:

1°) maximizar $(x_1-x_2+2x_3-x_4+3x_5+5x_6+5x_7+2x_8)$

con las condiciones:

$$\begin{array}{llllllllll}
x_1 & & & & + x_5 & - 3x_6 & + x_7 & + 3x_8 & = 2 \\
& x_2 & & & + 2x_5 & + 2x_6 & - x_7 & + 2x_8 & = 3 \\
& & x_3 & & - x_5 & + 2x_6 & - 2x_7 & - x_8 & = 2 \\
& & & x_4 & + 2x_5 & - x_6 & + x_7 & - x_8 & = 1
\end{array}$$

Como M = {1,2,3,4} = I , N = {1,2,3,4,5,6,7,8} , C_N = (1,-1,2,-1,3,5,5,2) la tabla simplex T(M) = T(I) es:

T(I)
I={1,2,3,4}

	C_N		1	-1	2	-1	3	5	5	2
C_I	I	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	1	0	0	0	1	-3	1	3
-1	2	3	0	1	0	0	2	2	-1	2
2	3	2	0	0	1	0	-1	2	-2	-1
-1	4	1	0	0	0	1	2^*	-1	1	-1
	Δ_{N_o}	2	0	0	0	0	-8	-5	-8	-2

Por ser $\Delta_i<0$ para algún $i\epsilon J=N-M$,la tabla T(M) correspondiente a la solución básica $X^o=(2,3,2,1,0,0,0,0)$ no es tabla final. Como mín $\Delta_i=-8=\Delta_5=\Delta_7$ elegimos uno de los índices 5 ó 7 para determinar el pivote $x^o_{jk}, j\epsilon M$. Supongamos k=5,por ser $\frac{x^o_4}{x^o_{45}}=\frac{1}{2}=\underset{x^o_{i5}>0}{\text{mín}}\{\frac{x^o_i}{x^o_{i5}}\}$ para la nueva tabla,T(I'),será I'=M-4+5={1,2,3,5} siendo el pivote x^o_{45}.Indicamos a continuación la tabla T(I') y las siguientes T(I"),....

T(I')
I'={1,2,3,5}

T(I")
I"={1,6,3,5}

T(I''')
I'''={1,6,3,5}

	C_N		1	-1	2	-1	3	5	5	2
C_I	I	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	$\frac{3}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
-1	2	2	0	1	0	-1	0	3^*	-2	3
2	3	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
3	5	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	Δ_{N_o}	6	0	0	0	4	0	-9	-4	-6
1	1	$\frac{19}{6}$	1	$\frac{5}{6}$	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{7}{6}$	6
5	6	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	1
2	3	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	-3
3	5	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}^*$	0
	Δ_{N_o}	12	0	3	0	1	0	0	-10	3
1	1	9	1	2	0	1	7	0	0	6
5	6	4	0	1	0	1	4	1	0	1
2	3	4	0	0	1	2	3	0	0	-3
5	7	5	0	1	0	2	6	0	1	0
	Δ_{N_o}	62	0	13	0	21	60	0	0	3

Por ser $\Delta_j \geq 0$ para todo $j \in N$, de acuerdo con el test de optimalidad la solución $X^o = (9,0,4,0,0,4,5,0)$ es la solución óptima del problema, siendo el máximo de la funcional $L(X^o) = 62$.

2°) maximizar $(x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + 5x_6 + 5x_7 + 2x_8)$

con las restricciones:

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & & & + x_5 - 3x_6 + x_7 - 3x_8 = 2 \\ & x_2 & & & + 2x_5 + 2x_6 - x_7 - 2x_8 = 3 \\ & & x_3 & & - x_5 + 2x_6 - 2x_7 + x_8 = 2 \\ & & & x_4 & + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 = 1 \end{array}$$

$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3,4,5,6,7,8$

En este caso tenemos $M = \{1,2,3,4\} = I$; $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; las tablas simplex correspondientes son las que transcribimos a continuación:

	C_N			1	-1	2	-1	3	5	5	2
	C_I	I	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T(I) I={1,2,3,4}	1	1	2	1	0	0	0	1	-3	1	-3
	-1	2	3	0	1	0	0	2	2	-1	-2
	2	3	2	0	0	1	0	-1	2	-2	1
	-1	4	1	0	0	0	1	1	-1	1^*	-1
	Δ_{N_o}		2	0	0	0	0	-7	-5	-8	0
T(I') I'={1,2,3,7}	1	1	1	1	0	0	-1	0	-2	0	-2
	-1	2	4	0	1	0	1	3	1	0	-3
	2	3	4	0	0	1	2	1	0	0	-1
	5	7	1	0	0	0	1	1	-1	1	-1
	Δ_{N_o}		10	0	0	0	8	1	-13	0	-8

Observemos que por ser $\Delta_6 = -13$; $\Delta_8 = -8$ la tabla T(I') correspondiente a la solución básica $X' = (1,4,4,0,0,1,0)$ no es tabla final para el problema; pero notemos que $x'_{i8} \leq 0$ para todo $i \in I'$; luego el problema es irresoluble y no existe una solución finita.

OBSERVACION.

Hemos considerado sólo el problema de maximización; esto es suficiente dado que un problema de minimización se transforma en uno de maximización cambiando el signo a la funcional.

De todos modos el algoritmo simplex puede aplicarse al caso de un problema de minimización, con cambios evidentes:

1°) Si $\Delta_j \leq 0$ para todo $j \in N$, el programa X^o es optimal (criterio de optimalidad para un problema de minimización).

2°) En el caso en que sea $\Delta_k > 0$ para algún $k \in J$, se estudia la columna de índice k, de la misma manera que para el caso de maximización, tomando de preferencia $\Delta_k = \max_{1 \leq j \leq n} \Delta_j$.

C. Puede ocurrir que, al aplicar el paso indicado en 2°) β) del algoritmo simplex: $T(I) \to T(I')$ se tenga $X^o = X'$ (esta situación se da si y sólo si $t_o = 0$).

Como $z' = z^o - \Delta_k t_o$ y es $\Delta_k < 0$, $X^o = X'$ si y sólo si $z^o = z'$.

Diremos que se ha producido un CICLO cuando una tabla T(I) se repite en el proceso de cálculo: $T(I) \to T(I') \to \ldots \to T(I^{(r)}) \to T(I)$. Como en cada paso $T(I^{(j)}) \to T(I^{(j+1)})$ el valor z de la funcional L(X) no disminuye, tendremos: $z^o \leq z' \leq \ldots \leq z^{(r)} \leq z^o$, luego $z^o = z' = \ldots = z^{(r)}$. Por lo observado se tiene $X^o = X' = \ldots = X^{(r)}$ y no hemos salido del punto X^o.

Veamos que si no se presenta ningún ciclo el algoritmo simplex concluye. En efecto, para el problema en cuestión hay a lo sumo tantas tablas T(I) como bases $\{A_i\}_{i \in I}$ de R^m se pueden obtener de la matriz A_{MN}, número éste menor o igual a $\binom{n}{m}$. Como suponemos que el algoritmo transcurre sin repetir tablas, en algún paso se dará una tabla final; caso contrario se presentará indefinidamente el caso 2°) β), y con ello un número arbitrariamente grande de tablas.

La experiencia acumulada en muchos años, muestra que la circulación no se ha presentado en ningún problema de programación lineal, que no haya sido preparado expresamente con la finalidad de provocar un ciclo. Un ejemplo de éste se transcribe a continuación.

EJEMPLO DE CIRCULACION.

Reproducimos a continuación el ejemplo dado por E. Beale ([1])

$$\text{minimizar } \left(-\frac{3}{4} x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2} x_6 + 6x_7\right)$$

con las restricciones:

$$\begin{array}{llllllll}
x_1 & & & + \frac{1}{4} x_4 & - 8x_5 & - x_6 & + 9x_7 & = 0 \\
& x_2 & & + \frac{1}{2} x_4 & - 12x_5 & - \frac{1}{2} x_6 & + 3x_7 & = 0 \\
& & x_3 & & & + x_6 & & = 1
\end{array}$$

$$x_i \geq 0 \ ; \ i = 1,2,3,4,5,6,7$$

A continuación indicamos una secuencia de 6 tablas que forman el ciclo.

Observemos que por ser éste un problema de minimización, la columna del pivote será elegida entre aquellas para las cuales es: $\Delta_j > 0$; tomamos entonces: $0 < \Delta_k = \max\limits_{1 \leq j \leq 7} \Delta_j$. Por otra parte en el caso que sea $t_o = \frac{x_i^o}{x_{ik}^o} = \frac{x_j^o}{x_{jk}^o}$, $x_{ik}^o > 0$, $x_{jk}^o > 0$ tomaremos como pivote el primer elemento positivo, entre los que se de la igualdad para t_o.

	C_N			0	0	0	$-\frac{3}{4}$	20	$-\frac{1}{2}$	6
	C_I	I	0	1	2	3	4	5	6	7
T(I)	0	1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$*	-8	-1	9
I = {1,2,3}	0	2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3
	0	3	1	0	0	1	0	0	1	0
	Δ_{N_o}		0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6
T(I')	$-\frac{3}{4}$	4	0	4	0	0	1	-32	-4	36
I'={4,2,3}	0	2	0	-2	1	0	0	4*	$\frac{3}{2}$	-15
	0	3	1	0	0	1	0	0	1	0
	Δ_{N_o}		0	-3	0	0	0	4	$\frac{7}{2}$	-33
T(I")	$-\frac{3}{4}$	4	0	-12	8	0	1	0	8*	-84
I"={4,5,3}	20	5	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$
	0	3	1	0	0	1	0	0	1	0
	Δ_{N_o}		0	-1	-1	0	0	0	2	-18

	C_N			0	0	0	$-\frac{3}{4}$	20	$-\frac{1}{2}$	6
	C_I	I	0	1	2	3	4	5	6	7
$T(I^{III})$ $I^{III}=\{6,5,3\}$	$-\frac{1}{2}$	6	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$
	20	5	0	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\frac{3}{16}$*
	0	3	1	$\frac{3}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$
		Δ_{N_o}	0	2	-3	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	3
$T(I^{IV})$ $I^{IV}=\{6,7,3\}$	$-\frac{1}{2}$	6	0	2*	-6	0	$-\frac{5}{2}$	56	1	0
	6	7	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$	0	1
	0	3	1	-2	6	1	$\frac{5}{2}$	-56	0	0
		Δ_{N_o}	0	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	-16	0	0
$T(I^V)$ $I^V = \{1,7,3\}$	0	1	0	1	-3	0	$-\frac{5}{4}$	28	$\frac{1}{2}$	0
	6	7	0	0	$\frac{1}{3}$*	0	$\frac{1}{6}$	-4	$-\frac{1}{6}$	1
	0	3	1	0	0	1	0	0	1	0
		Δ_{N_o}	0	0	2	0	$\frac{7}{4}$	-44	$-\frac{1}{2}$	0
$T(I^{VI})$ $I^{VI}= \{1,2,3\}$ $T(I^{VI})=T(I)$	0	1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9
	0	2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3
	0	3	1	0	0	1	0	0	1	0
		Δ_{N_o}	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6

D. REGLA PARA EVITAR LA CIRCULACION.

Hemos observado en el párrafo C, que un pasaje de la tabla T(I) a la tabla T(I'), con $I' = I-j+k$, por pivotaje en el elemento x^o_{jk}, si bien cambia la base $\{A_i\}_{i\in I}$ puede no cambiar la solución básica X^o. Esto ocurre si y sólo si $x^o_j = 0$ para algún $j \in I$; diremos en este caso que la solución básica X^o es DEGENERADA.

En el caso en que toda solución sea NO-DEGENERADA, es decir $x^o_i > 0$ para todo $i \in I$ cualquiera sea la tabla T(I), hay un solo pivote posible en cada columna A_k (con $\Delta_k < 0$) en cada una de las tablas. En este caso no se presentarán ciclos y suponiendo que el problema no es irresoluble, el algoritmo concluye.

Sin embargo, puede suceder que en una columna A_k (con $\Delta_k < 0$) se tenga:

$t_o = \min\limits_{x^o_{ik}>0} \frac{x^o_i}{x^o_{ik}} = \frac{x^o_j}{x^o_{jk}} = \frac{x^o_r}{x^o_{rk}}$, diremos en este caso, que se ha producido un

EMPATE entre los índices j y r. Puede verse entonces que la solución básica correspondiente al conjunto de índices $I' = I-j+k$ (si se toma por pivote x^o_{jk}) o al conjunto $I' = I-r+k$ (si se toma por pivote x^o_{rk}) es DEGENERADA - es decir $x'_i = 0$ para algún $i \in I'$ (utilizando las igualdades (6) se ve que $x'_r = 0$ si el pivotaje se realiza en x^o_{jk} y que $x'_j = 0$ si el pivote es x^o_{rk}).

Si bien, como hemos acotado anteriormente, la experiencia nos indica que el algoritmo simplex concluye sin que se presente la circulación, es necesario tener una regla que nos permita completar el algoritmo simplex y nos asegure que la circulación no se presentará en ningún caso. Este problema ya ha sido estudiado ([4] y [7]) y uno de sus resultados: LA REGLA DEL ORDEN LEXICOGRAFICO, que pasamos a estudiar, procede en un problema "modificado" del propuesto, como en el caso en que toda solución sea no-degenerada.

Consideremos (m+1)-uplas: $\bar{\alpha} = (\alpha_o, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$; $\bar{\beta} = (\beta_o, \beta_1, \dots, \beta_m)$ diremos que $\bar{\alpha}$ PRECEDE a $\bar{\beta}$ en el ORDEN LEXICOGRAFICO y notaremos $\bar{\alpha} \preccurlyeq \bar{\beta}$ si $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$, o bien si el menor $j \in \{0,1,2,\dots,m\}$ para el cual es $\alpha_j \neq \beta_j$ es uno tal que $\alpha_j < \beta_j$.

Dada una tabla simplex $T(I)$ con $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ consideremos los vectores

$$\bar{x}^o_i = (x^o_i, x^o_{i1}, x^o_{i2}, \dots, x^o_{im}) \quad \text{para } i \in I \text{ ,}$$

$$\bar{z}^o = (z^o, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m)$$

en particular si $T(I)$ es la tabla inicial $T(M)$, es decir si $I = M$ tendremos:

$$\bar{x}^o_i = \bar{b}_i = (b_i, \underbrace{0, \dots, 0, 1}_{i}, 0, \dots, 0)$$

$$\bar{z}^o = (z^o, 0, 0, \dots, 0)$$

Observemos que la tabla inicial $T(I)$ se puede escribir (reordenando las columnas si es necesario) de manera que $x^o_{i_j k} = 1$ si $j = k$; $x^o_{i_j s} = 0$ si $j \neq k$, siendo $x^o_{i_j} = b_j$; y entonces tendremos $T(I) = T(M)$.

Consideremos entonces una tabla $T(I)$, arbitraria, y supongamos que $\Delta_k < 0$; la elección del pivote x^o_{jk} se hará con la regla lexicográfica siguiente:

$$(7) \qquad \frac{1}{x^o_{jk}} \bar{x}^o_j = \underset{i | x^o_{ik} > 0}{\text{mínimo lexicográfico}} \left(\frac{1}{x^o_{ik}} \bar{x}^o_i \right)$$

Observemos que (7) implica $\dfrac{x^o_j}{x^o_{jk}} = \min\limits_{x^o_{ik}>0} \dfrac{x^o_i}{x^o_{ik}}$ y por lo tanto la elección del pivote x^o_{jk} mediante (7) corresponde a una posible elección del mismo cuando se aplica la regla habitual. Por otra parte el índice $j \in I$, así elegido, es único ya que no hay posibilidad de empate, en efecto, si fuera: $\frac{1}{x^o_{jk}} \bar{x}^o_j = \frac{1}{x^o_{rk}} \bar{x}^o_r$, para $k = 0,1,2,\ldots,m$, las filas: $(x^o_j, x^o_{j1}, x^o_{j2},\ldots,x^o_{jm})$, $(x^o_r, x^o_{r1}, x^o_{r2},\ldots,x^o_{rm})$ serían proporcionales, lo que es imposible pues X^o_{IM} es regular.

Veamos que la regla (7) evita la circulación y consecuentemente lleva a una tabla final:

a) $\bar{x}^o_j \succcurlyeq \bar{0}$, $\bar{x}^o_j \neq \bar{0}$ para todo $j \in I$ y toda tabla T(I).

En efecto: para la tabla inicial T(M) a) se verifica evidentemente.

Supongamos que vale para la tabla T(I) y veamos que también vale para la tabla T(I') con I' = I-j+k, siendo j elegido de acuerdo con la regla (7).

Las fórmulas del pivotaje en el elemento x^o_{jk}, dan como es fácil verificar:

$$\bar{x}'_k = \frac{1}{x^o_{jk}} \bar{x}^o_j$$

y para $i \neq k$:

$$\bar{x}'_i = \begin{cases} \bar{x}^o_i - \dfrac{x^o_{ik}}{x^o_{jk}} \bar{x}^o_j = x^o_{ik} \left(\dfrac{1}{x^o_{ik}} \bar{x}^o_i - \dfrac{1}{x^o_{jk}} \bar{x}^o_j\right) & \text{si } x^o_{ik} \neq 0 \\ \bar{x}^o_i & \text{si } x^o_{ik} = 0 \end{cases}$$

b) Si se pasa de la tabla simplex T(I) a la tabla simplex T(I') utilizando la regla (7) resulta:

$$\bar{z}' = (z', \Delta'_1, \ldots, \Delta'_m) \underset{\neq}{\succ} (z^o, \Delta^o_1, \ldots, \Delta^o_m) = \bar{z}^o$$

En efecto, las fórmulas del pivotaje en el elemento x^o_{jk}, aplicadas a la última fila de la tabla T(I) dan:

$$\bar{z}' = \bar{z}^o - \frac{\Delta_k}{x^o_{jk}} \bar{x}^o_j \underset{\neq}{\succ} \bar{z}^o$$

pues estamos suponiendo $\Delta_k < 0$.

Esto nos muestra que es imposible que se de un ciclo: T(I) → T(I') → ... →

$\rightarrow T(I^{(r)}) \rightarrow T(I)$ pues $\preccurlyeq$ es un orden lineal (ver problema 5, al final del capítulo) y por lo tanto $\bar{z}^o \prec \bar{z}' \prec \ldots \prec \bar{z}^{(r)} \prec \bar{z}^o$ es imposible.

Por último observemos que la regla del orden lexicográfico es aplicable directamente en las tablas T(I),pues precisamente en las primeras columnas de las mismas están consignadas las coordenadas de los vectores $\bar{x}_j^o$.

Usando el orden lexicográfico el ejemplo de circulación de Beale,dado anteriormente se resuelve a partir de la tabla T(M) , M = {1,2,3} , de la siguiente manera:

	C_N			0	0	0	$-\frac{3}{4}$	20	$-\frac{1}{2}$	6
	C_I	I	0	1	2	3	4	5	6	7
T(M) M={1,2,3}	0	1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9
	0	2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$ *	-12	$-\frac{1}{2}$	3
	0	3	1	0	0	1	0	0	1	0
		Δ_{N_o}	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6
T(I') I'={1,4,3}	0	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2	$-\frac{3}{4}$	$\frac{15}{2}$
	$-\frac{3}{4}$	4	0	0	2	0	1	-24	-1	6
	0	3	1	0	0	1	0	0	1*	0
		Δ_{N_o}	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	-2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{21}{2}$
T(I") I"={1,4,6}	0	1	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$
	$-\frac{3}{4}$	4	1	0	2	1	1	-24	0	6
	$-\frac{1}{2}$	6	1	0	0	1	0	0	1	0
		Δ_{N_o}	$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$

Observemos que en la tabla T(M) es $\Delta_4 = \max\limits_{j \in N} \Delta_j > 0$, pero como se produce empate en las filas de índices 1,2, consideramos los vectores $\frac{1}{x_{14}^o} \bar{x}_1^o$; $\frac{1}{x_{24}^o} \bar{x}_2^o$, y por ser $\frac{1}{x_{14}^o} \bar{x}_1^o = (0,4,0,0)$; $\frac{1}{x_{24}^o} \bar{x}_2^o = (0,0,2,0)$ es: $\frac{1}{x_{24}^o} \bar{x}_2^o \preccurlyeq \frac{1}{x_{14}^o} \bar{x}_1^o$, el pivote es el elemento x_{24}^o; por lo tanto I' = I-2+4 = {1,4,3}. Para la tabla T(I') es

$\Delta_6 = \max\limits_{1 \leq j \leq 7} \Delta_j > 0$ siendo $t_o = \frac{x_3'}{x_{36}'}$ no produciéndose empate; por pivotaje en el elemento x_{36}' obtenemos la tabla T(I"), con I" = {1,4,6}, que será tabla final pa ra el problema ya que $\Delta_j \leq 0$ para todo $j \in N$, luego la solución básica $(\frac{3}{4},0,0,1,0,1,0)$ es óptima y el mínimo de la funcional es $-\frac{5}{4}$. Notemos por último que hemos evitado la circulación y que el mínimo se obtuvo en sólo tres tablas: T(I) ; T(I') ; T(I").

NOTAS Y PROBLEMAS.

NOTA 1. Dado el problema P) maximizar $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ con las restricciones:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n$$

puede pensarse que se ha planteado el problema lexicográfico P_ℓ) asociado a P):

$$\text{maximizar } \bar{z} = \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j \text{ con las restricciones:}$$

$$(*) \qquad \begin{aligned} \sum a_{ij} \bar{x}_j &= \bar{b}_i \quad i = 1,2,\ldots,m \\ \bar{x}_j &\succ \bar{0} \quad j = 1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

siendo $\bar{x}_j = (x_j, x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jm})$; $\bar{b}_i = (b_i, \underbrace{0,\ldots,1}_{i}, 0,\ldots,0)$; $A_{MM} = 1_{MM}$.

El sistema vectorial (*) equivale a (m+1) sistemas lineales donde sólo varía el segundo miembro. Para este sistema vectorial se extiende facilmente la noción de solución básica.

Aplicamos a este problema el algoritmo simplex, utilizando la regla (7) y llegaremos a una solución sin circulación del problema P_ℓ).

NOTA 2. Otro enfoque es considerar para $\varepsilon > 0$ un problema-ε asociado, P_ε)

$$\text{maximizar } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ con las restricciones:}$$

$$A_{MN} X_N = B_M(\varepsilon)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n$$

donde $b_i(\varepsilon) = b_i + \varepsilon^i$; $i = 1,2,\ldots,m$; $A_{MM} = 1_{MM}$.

Si $X^o(\varepsilon)$ es la solución básica correspondiente a la tabla T(I), es:

$$X_I^o(\varepsilon) = A_{MI}^{-1} B_M(\varepsilon) = X_{IM}^o(\varepsilon) \text{ ; esto es, para } j \in I \text{ :}$$

$$x_j^o(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} x_{ji}^o(b_i+\varepsilon^i) = \sum_{i=1}^{m} x_{ji}^o b_i + \sum_{i=1}^{m} x_{ji}^o \varepsilon^i =$$

$$= x_j^o + x_{j1}^o\varepsilon + x_{j2}^o\varepsilon^2 + \ldots + x_{jm}^o\varepsilon^m \quad ,$$

y entonces la solución básica del problema - ε, correspondiente a la tabla T(I) se corresponde con la sucesión $(x_j^o, x_{j1}^o, \ldots, x_{jm}^o) = \bar{x}_j^o$ de los coeficientes del polinomio $x_j^o(\varepsilon)$.

Fijemos $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que el polinomio $x_j^o(\varepsilon)$ no tenga ceros en el intervalo $(0,\varepsilon]$ cualquiera sea $j \in I$ y cualquiera sea el conjunto de índices I (observemos que los polinomios $x_j^o(\varepsilon)$ no son idénticamente nulos, pues $\bar{x}_j^o = \bar{0}$ es imposible).

Dado $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}]$ (fijo) se aplica el método simplex al problema - ε, partiendo de la solución básica inicial $(b_1+\varepsilon, b_2+\varepsilon^2, \ldots, b_m+\varepsilon^m)$ que es no-degenerada. Por la hipótesis hecha sobre ε, las soluciones básicas del problema - ε son no-degeneradas y además se evita la circulación (ya que no hay posibilidad de empate).

Observemos que una tabla $T_\varepsilon(I)$ del problema - ε coincide con la tabla T(I) del problema original con excepción de la columna 0 (donde figuran los polinomios $x_j^o(\varepsilon)$ en lugar de x_j^o); por otra parte para $\varepsilon = 0$ es: $T_\varepsilon(I) = T(I)$. Además al llegar a una tabla final $T_\varepsilon(I)$ del problema - ε, la tabla T(I) es la tabla final del problema dado.

Resta observar que la regla de elección de la fila j en el problema - ε,

$$\frac{x_j^o(\varepsilon)}{x_{jk}^o} = \min_{x_{ik}^o>0} \frac{x_i^o(\varepsilon)}{x_{ik}^o} \quad ,$$

es equivalente a la regla del orden lexicográfico; en efecto:

a) $\dfrac{x_j^o(\varepsilon)}{x_{jk}^o} \leq \dfrac{x_i^o(\varepsilon)}{x_{ik}^o} \; \forall \; \varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}]$ equivale a: $\dfrac{1}{x_{jk}^o}\bar{x}_j^o \preccurlyeq \dfrac{1}{x_{ik}^o}\bar{x}_i^o$.

b) No se produce empate para ningún $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}]$; de lo contrario, después del pivotaje, se tendría una solución básica con una componente básica nula para un $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}]$, lo que contradice la hipótesis inicial sobre la elección de $\bar{\varepsilon}$.

De a) y b) resulta que $\bar{x}_j^o \prec \bar{x}_i^o$ si y sólo si $\dfrac{x_j^o(\varepsilon)}{x_{jk}^o} < \dfrac{x_i^o(\varepsilon)}{x_{ik}^o}$ para cualquier

$\varepsilon \in [0,\bar{\varepsilon}]$; en particular para el ε fijado.

NOTA 3. Dado el problema: maximizar $\langle C_N . X_N \rangle$ con las restricciones:

$$A_{MN} X_N = B_M$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in N ;$$

y una solución básica del mismo: $(X_I^o, 0_J)$ $(J = N-I)$, estudiando detenidamente los pasos indicados en el algoritmo simplex, surgen de inmediato las siguientes observaciones:

Conocidos los parámetros Δ_j, $j \in N$, si existe $\Delta_j > 0$ para algún $j \in J$ (lo que indica que $(X_I^o, 0_J)$ no es optimal) debemos determinar el vector A_k $(k \in J)$ que reemplazará al vector A_j $(j \in I)$ - de la base de R^m, $\{A_i\}_{i \in I}$ asociada a la solución $(X_I^o, 0_J)$ - para determinar la nueva base $\{A_i\}_{i \in I'}$, $I' = I-j+k$, y una nueva solución básica, asociada a ella, $(X_{I'}^o, 0_{J'})$ $(J' = N-I')$.

Es suficiente entonces conocer las componentes - respecto de la primera base - del vector B_M: x_i^o, $i \in I$; del vector A_k: x_{ik}^o $(i \in I)$ y los parámetros Δ_N ; pero no nos interesan las componentes x_{ij}^o $(i \in I)$ de los restantes vectores A_j $(j \in J-k)$ - recordemos que en cada iteración, el algoritmo simplex transforma todos los vectores A_j , $j \in N$.

Ahora bien, dada la base de R^m: $\{A_i\}_{i \in I}$, como la matriz A_{MI} es regular, si conocemos $(A_{MI})^{-1}$ obtenemos:

i) $(A_{MI})^{-1} B_M = X_I^o$;

ii) $(A_{MI})^{-1} A_{MN} = X_N^o$;

Por otra parte como $\Delta_N = Z_N - C_N$ donde $Z_N = C_I X_{IN}^o = C_I (A_{MI})^{-1} A_{MN}$, poniendo $\lambda_M = C_I (A_{MI})^{-1}$ tendremos:

iii) $\Delta_N = \lambda_M A_{MN} - C_N$.

Si suponemos $A_{MM} = 1_{MM}$, poniendo $P = N-M$ obtenemos: $A_{MN} = (1_{MM}, A_{MP})$ pero entonces: $X_{IN}^o = (A_{MI})^{-1} A_{MN} = ((A_{MI})^{-1}, (A_{MI})^{-1} A_{MP}) = (X_{IM}^o, X_{IP}^o)$ por lo tanto: $X_{IM}^o = (A_{MI})^{-1}$ y las igualdades i) , ii) , iii) pueden escribirse:

i') $X_{IM}^o B_M = X_I^o$

ii') $X^o_{IM}A_{MN} = X^o_{IN}$

iii') $\Delta_N = Z_N - C_N = \lambda_M A_{MN} - C_N$, siendo $\lambda_M = C_I X^o_{IM}$.

Como la tabla T(I) está formada por lascolumnas de la matriz $X^o_{IN_o} = (X^o_I, X^o_{IN})$ a la que se agrega la fila $\Delta_{N_o} = (z^o, \Delta_N)$ $(z^o = \langle C_I X^o_I \rangle)$, de las igualdades i'), ii') , iii') es inmediato que T(I) puede ser construída en cualquier iteración, a partir de la matriz $A_{MN_o} = (B_M, A_{MN})$, si conocemos X^o_{IM}.

Estas observaciones conducen a variantes del algoritmo simplex conocidas por el nombre de ALGORITMO SIMPLEX MODIFICADO o FORMA REVISADA DEL ALGORITMO SIMPLEX; estas variantes nos permiten trabajar con una tabla reducida en lugar de hacerlo con la tabla completa, una de estas variantes es la que pasamos a ver.

La tabla reducida correspondiente al conjunto $I = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ es la tabla (1) que se indica a continuación y en la que están indicados el vector X^o_I, la matriz X^o_{IM}, y en una columna adicional - que indicamos con el índice k - se consignarán las componentes x^o_{ik} $(i \in I)$ del vector A_k (obtenidas a partir del producto $X^o_{IM}A_k$) siendo k el índice para el cual es $\Delta_k = \min_{\Delta_j < 0} \Delta_j$. En una fila adicional estarán indicados el valor de la funcional $z^o = \langle C_I X^o_I \rangle$ y los parámetros λ_M

(1)

I	0	1	2	. . .	m	k
i_1						$x^o_{i_1k}$
i_2	X^o_I		X^o_{IM}			$x^o_{i_2k}$
.						.
.						.
.						.
i_m						$x^o_{i_mk}$
	z^o		λ_M			

Consideramos además la tabla auxiliar (2), formada por las columnas de la matriz A_{MN_o} , el vector C_N , y en la que indicaremos en filas adicionales los valores $\Delta^{(I)}_{N_o}$ correspondientes a la solución X^o_I.

(2)

	C_N	c_1	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n
	b_1	1	$\cdots$	0	a_{1m+1}	$\cdots$	a_{1n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots$			
	b_m	0	$\cdots$	1	$a_{m\,mn}$	$\cdots$	a_{mn}
$\Delta_{N_o}^{(M)}$	z^o			0	Δ_{m+1}		Δ_n
$\Delta_{N_o}^{(I)}$	z^o	Δ_1		Δ_m	Δ_{m+1}		Δ_n

Aplicamos el algoritmo simplex en la forma habitual, a partir de la tabla inicial ($I = M$, $X_I^o = B_M$, $X_{IM}^o = A_{MM} = 1_{MM}$).

Así,si en la iteración correspondiente al conjunto $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, existe $j \in J$ tal que $\Delta_j < 0$ se determina $\Delta_k = \underset{\Delta_j < 0}{\text{mín}} \Delta_j$, se calcula $X_{IM}^o A_k$ (las componentes de este vector se consignan en la columna k de la tabla (1)),se calcula $t_o = \underset{x_{ik}^o > 0}{\text{mín}} \frac{x_i^o}{x_{ik}^o}$ y se determina el vector A_j ($j \in I$) que será reemplazado por A_k. Obtendremos así el conjunto $I' = I-j+k$, para el cual debemos calcular $X_{I'M}^o$, $X_{I'}^o$, y los parámetros λ_M, a partir de estos últimos obtendremos los nuevos valores $\Delta_{N_o}^{(I')}$ (que serán consignados en una fila adicional en la tabla (2)) y se recomienza el proceso hasta llegar a una solución óptima o bien a determinar que el problema es irresoluble.

Observemos que $X_{I'M}^o$ se calcula usando como pivote el elemento x_{jk}^o.

Ahora bien,hemos visto (INTRODUCCION - NOTAS Y PROBLEMAS) que el pivotaje en el elemento x_{jk}^o puede ser considerado como una transformación lineal $t: R^m \to R^m$, inducida por el vector A_k, tal que $t(A_k) = e_j$, resulta entonces (ver PROBLEMA 7 siguiente) que la matriz $X_{I'M}^o$ puede obtenerse multiplicando X_{IM}^o por la matriz T_k asociada con dicha transformación.

En conexión con esto G.B. Dantzig y W. Orchards Hays ([8]) han desarrollado un algoritmo conocido con el nombre de FORMA DEL PRODUCTO DE LA MATRIZ INVERSA.

PROBLEMA 1. Supuesto que el programa básico $X^o = (X_I^o, 0_J)$ sea no-degenerado, es decir: $x_i^o > 0$ para todo $i \in I$, probar la recíproca del criterio de optimalidad. (Utilizar: $z = z^o - \langle \Delta_J X_J \rangle$).

PROBLEMA 2. Indicar un ejemplo donde se muestre que no vale la recíproca del criterio de optimalidad.

PROBLEMA 3. ¿En qué condiciones un programa no-degenerado conducirá por pivotaje en $x_{jk}^o > 0$ a uno degenerado?

PROBLEMA 4. Probar que si en la tabla T(I) es $\Delta_j > 0$ para todo $j \in J$, entonces el respectivo programa $X^o = (X_I, 0_J)$ es el único programa optimal del problema. (Utilizar $z = z^o - \langle \Delta_J X_J \rangle$ y la proposición 1, b), párrafo 2, Introducción). En cambio, si $\Delta_k = 0$ para algún $j \in J$ ($\Delta_j \geq 0$, $\forall$ $j \in J$) pueden existir otros programas optimales.

PROBLEMA 5. Probar que el orden lexicográfico es un orden lineal en R^{m+1}, que verifica:

a) Si $\bar{\alpha} \preccurlyeq \bar{\beta}$ entonces $\bar{\alpha} + \bar{\gamma} \preccurlyeq \bar{\beta} + \bar{\gamma}$ para todo $\bar{\gamma} \in R^{m+1}$

b) Si $\bar{\alpha} \preccurlyeq \bar{\beta}$ entonces $\lambda\bar{\alpha} \preccurlyeq \lambda\bar{\beta}$ para todo $\lambda \in R$, $\lambda \geq 0$.

PROBLEMA 6. Probar que $\bar{\alpha} \preccurlyeq \bar{\beta}$ si y sólo si, existe $\delta > 0$, tal que:

$$\alpha_o+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_m x^m \leq \beta_o+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\ldots+\beta_m x^m \text{ para todo } x \in (0,\delta].$$

PROBLEMA 7. Supuesto que la matriz A_{MI} tiene inversa $(A_{MI})^{-1}$ entonces si $I' = I-r+k$, la matriz $A_{MI'}$ tiene por inversa $(A_{MI'})^{-1} = T_k(A_{MI})^{-1}$, siendo T_k la matriz cuyas columnas son los vectores: $e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}, V_k, e_{r+1}, \ldots, e_m$ ($e_i = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{i},0,\ldots,0)$) y el vector V_k tiene componentes v_{ik} ($i \in I'$) dadas por:

$$v_{ik} = \begin{cases} \dfrac{-x_{ik}^o}{x_{rk}^o} & i \in I-r \\ \dfrac{1}{x_{rk}^o} & i = k \end{cases}$$

siendo x_{ik}^o ($i \in I$) las componentes del vector A_k en la base $\{A_i\}_{i \in I}$.

II. DETERMINACION DE UN PROGRAMA BASICO INICIAL.

INTRODUCCION.

Un problema de programación lineal de la forma siguiente:

$$\text{maximizar } (c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n)$$

en el conjunto K de los $X \in R^n$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que verifican:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ \\ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ \ldots \ , \ x_n \geq 0 \end{array}$$

se dirá que es un problema en FORMA ESTANDAR o NORMAL.

El método simplex se aplica a problemas en esta forma. Como por lo general un problema no se presenta en forma normal, él deberá ser transformado previamente a esta forma para proceder a la aplicación del método simplex. Para ello daremos los siguientes pasos:

1°) Toda desigualdad debe ser llevada a una igualdad introduciendo una nueva variable: si la desigualdad es del tipo $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\ldots+a_{jn}x_n \leq b_j$ con $b_j \geq 0$ introducimos una variable $x_j^* \geq 0$ tal que: $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\ldots+a_{jn}x_n+x_j^* = b_j$ para todo $X \in R^n$ que verifica: $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\ldots+a_{jn}x_n \leq b_j$; y si la desigualdad es del tipo: $a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n \geq b_k$ con $b_k \geq 0$ introducimos una variable $x_k^* \geq 0$ tal que: $a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n-x_k^* = b_k$ para todo $X \in R^n$ que verifica: $a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n \leq b_k$. Las variables x_j^* , x_k^* en estas condiciones se dicen variables de HOLGURA.

2°) Si una variable x_j no está restringida por la condición de no-negatividad $(x_j \geq 0)$; se reemplaza por la diferencia de dos variables no-negativas $(x_j'-x_j''$, $x_j' \geq 0$, $x_j'' \geq 0)$.

Así por ejemplo, pongamos en forma normal el problema:

$$\text{P)} \qquad \text{maximizar } (2x_1 + 3x_2 - 6x_3)$$

en el conjunto K de R^3 definido por:

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 6\,x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

de acuerdo con lo dicho anteriormente pasemos al problema:

$$P')\qquad \text{maximizar}\ (2x_1+3(x_2'-x_2'')-6(x_3'-x_3''))$$

en el conjunto K' definido por:

$$\begin{aligned} 4x_1 - (x_2'-x_2'') + 6(x_3'-x_3'') &= 1 \\ (x_2'-x_2'') + (x_3'-x_3'') + x_2^* &= 2 \\ x_1 - (x_2'-x_2'') - x_3^* &= 0 \\ x_1\geq 0, x_2'\geq 0, x_2''\geq 0, x_3'\geq 0, x_3''\geq 0, x_2^*\geq 0, x_3^*\geq 0 &\ . \end{aligned}$$

Observemos que la aplicación $\phi:R^7 \to R^3$, $\phi:(x_1,x_2',x_2'',x_3',x_3'',x_2^*,x_3^*) \to (x_1,x_2,x_3)$ aplica suryectivamente K' en K; y además la composición L o ϕ de ϕ y la funcional $L(x_1,x_2,x_3) = 2x_1+3x_2-6x_3$ definida sobre K es precisamente la funcional $L'(x_1,x_2',x_2'',x_3',x_3'',x_2^*,x_3^*)=2x_1+3x_2'-3x_2''-6x_3'+6x_3''+0x_2^*+0x_3^*$ definida sobre K'. Es inmediato que X' ϵ K' es solución óptima del problema P') si y sólo si ϕ(X) (X ϵ K') es solución óptima del problema P). Estas observaciones son válidas en general, no sólo para el problema del ejemplo.

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "L'"'] & K \arrow[d, "L"] \\ & R \end{tikzcd}$$

3°) La siguiente observación será de utilidad:

Sobre un conjunto K (fijo) consideremos los problemas:

a) maximizar $\langle C_N'.X_N\rangle$; b) maximizar $\langle C_N''.X_N\rangle$; c) maximizar $\langle C_N.X_N\rangle$; siendo $\langle C_N.X_N\rangle = \lambda\langle C_N'.X_N\rangle + \mu\langle C_N''.X_N\rangle$ $(\lambda,\mu \in R)$.

Suponiendo los problemas a) , b) , c) en forma normal, las tablas simplex T'(I), T''(I) de los problemas a) y b) coinciden excepto en las últimas filas que serán $(z',\Delta_1',\ldots,\Delta_n')$ para a) y $(z'',\Delta_1'',\ldots,\Delta_n'')$ para b) pues dependen de los coeficientes de las formas lineales $\langle C_N'.X_N\rangle$; $\langle C_N''.X_N\rangle$ respectivamente.

Lo mismo sucede con el problema c); para éste la última fila de la tabla T(I) es: $(\lambda z'+\mu z'',\lambda\Delta_1'+\mu\Delta_1'',\dots,\lambda\Delta_n'+\mu\Delta_n'')$ y las restantes filas coinciden con las de T'(I) y T''(I).

EL USO DE VARIABLES ARTIFICIALES.

A. Sea dado el siguiente problema en forma normal:

$$(1) \qquad \text{maximizar } \langle C_N . X_N \rangle$$

en el conjunto K, de los $X_N \in R^n$, $n = |N|$, definido por las restricciones:

$$A_{MN}X_N = B_M$$

$$x_i \geq 0 \quad , \forall\ i \in N.$$

Supongamos además que es $b_i \geq 0\ \forall\ i \in M$, lo que requiere, si no es éste el caso, multiplicar por (-1) aquellas ecuaciones donde el segundo miembro es negativo.

Algunas variables x_i , $i \in H \subset N$ se suponen aisladas, estas variables x_i, $i \in H$, son las variables de holgura que aparecen naturalmente al reducir un sistema de igualdades y desigualdades a la forma normal , como se vió en la introducción y aquellas que estén aisladas en algunas de las igualdades del sistema. Poniendo $T = N-H$, $S = M-H$ el sistema lineal del problema (1) puede ponerse en la forma:

$$X_H + A_{HT}X_T = B_H$$

$$A_{ST}X_T = B_S$$

Consideremos el conjunto $\tilde{K}$ de los $X \in R^{n+s}$, $X = (X_H, X_{\tilde{S}}, X_T)$ (siendo $\tilde{S}$ un nuevo conjunto de índices tal que $|\tilde{S}| = |S| = s$), que verifican las restricciones:

$$(2) \qquad \begin{aligned} X_H \qquad &+ A_{HT}X_T = B_H \\ X_{\tilde{S}} &+ A_{\tilde{S}T}X_T = B_{\tilde{S}} \\ x_i \geq 0 \ ,\forall\ i &\in N \cup \tilde{S} = \tilde{N} \end{aligned}$$

donde indicamos $B_{\tilde{S}}$ las componentes b_i, $i \in \tilde{S}$, del vector B_M, referidas al conjunto de índices $\tilde{S}$.

Las nuevas variables x_i, $i \in \tilde{S}$, se dirán variables ARTIFICIALES.

Es claro que K "coincide" con el conjunto $\tilde{K} \cap \{X \in R^{n+s} \mid X_{\tilde{S}} = 0_{\tilde{S}}\}$ más precisamente: $K = \{(X_H,X_T) \mid (X_H,0_{\tilde{S}},X_T) \in \tilde{K}\}$. Además todo programa básico $\tilde{K}$, $X = (X_H,X_{\tilde{S}},X_T)$ con $X_{\tilde{S}} = 0_{\tilde{S}}$ si existe, conduce al programa $(X_H,X_T) \in K$ (si tal solución no existe entonces $K = \phi$); por otra parte si $X = (X_H,X_{\tilde{S}},X_T)$ es el programa básico correspondiente a la base de R^{n+s}: $\{A_i \mid i \in \tilde{I} \subset \tilde{N}\}$ entonces (X_H,X_T) será un programa básico respecto del conjunto de vectores $\{A_i \mid i \in \tilde{I}-\tilde{S}\}$ (basta observar que si de un sistema en forma explícita se eliminan algunas ecuaciones, las restantes también determinan un sistema en forma explícita).

El problema de la determinación de una solución básica y más aún de una tabla inicial del problema (1) se puede resolver mediante el algoritmo simplex, para ello consideramos el siguiente problema auxiliar:

$$(3) \qquad \text{minimizar} \sum_{i \in \tilde{S}} x_i$$

en el conjunto $\tilde{K}$ definido por el sistema (2).

Como $\min_{\tilde{K}} \sum_{i \in \tilde{S}} x_i \geq 0$, pues $x_i \geq 0 \ \forall \ i \in \tilde{S}$ y es $\min_{\tilde{K}} \sum_{i \in \tilde{S}} x_i = 0$ si y sólo si $x_i = 0 \ \forall \ i \in \tilde{S}$; de acuerdo a lo observado anteriormente es: $\min_{\tilde{K}} \sum_{i \in \tilde{S}} x_i = 0$ si y sólo si $K \neq \phi$.

Por otra parte, de acuerdo a observaciones hechas en el capítulo anterior, este problema es equivalente al siguiente:

$$(3') \qquad \text{maximizar } \tilde{z} = \sum_{i \in \tilde{S}} (-x_i) \quad \text{en el conjunto } \tilde{K} .$$

Este último problema es el que usaremos como PROBLEMA AUXILIAR para la determinación de una solución básica inicial del problema (1). Este problema se utiliza a fin de unificar criterios para la elección de columnas al aplicar el algoritmo simplex (recordemos que el problema (1) también es de maximización).

Para $H = \{1,2,\ldots,h\}$, $\tilde{S} = \{n+1,\ldots,n+s\}$ la tabla inicial para el problema auxi liar es la siguiente:

TABLA $T(\tilde M)$

$\tilde M = H \cup \tilde S$

			H				$\tilde S$			T		
$C_{\tilde N}$			0	0	...	0	-1	...	-1	0	...	0
$C_{\tilde I}$	$\tilde I$	0	1	2	...	h	n+1	...	n+s	h+1	...	n
0	1	b_1	1	0	...	0	0	...	0	x^o_{1h+1}	...	x^o_{1n}
0	2	b_2	0	1	...	0	0	...	0	x^o_{2h+1}	...	x^o_{2n}
⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮		⋮
0	h	b_h	0	0	...	1	0	...	0	x^o_{hh+1}	...	x^o_{hn}
-1	n+1	b_{n+1}	0	0	...	0	1	...	0	x^o_{n+1h+1}	...	x^o_{n+1n}
⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮		⋮
-1	n+s	b_{n+s}	0	0	...	0	0	...	1	x^o_{n+sh+1}	...	x^o_{n+sn}
	$\Delta_{\tilde N}$	$\tilde z_o$	0	0	...	0	0	...	0	Δ_{h+1}	...	Δ_n

Aplicando el algoritmo simplex a la tabla $\tilde T(\tilde M)$ llegaremos a una tabla final $\tilde T(\tilde I)$ en la cual $\Delta_j \geq 0$ para todo $j \in \tilde N$, pues el caso irresoluble está descartado desde que $\sum_{i \in \tilde S} (-x_i) \leq 0$ en el conjunto $\tilde K$.

Suponiendo $K \neq \phi$, sea $\tilde T(\tilde I)$ una tabla para la cual sea $\tilde z^o = 0$, esto nos indica que estamos en el máximo de la funcional $\sum_{i \in \tilde S} (-x_i)$, con independencia de los valores de Δ_k, que podrán incluir valores negativos, ya que por pivotaje en elementos $x^o_{jk} \neq 0$, tales que $x^o_j = 0$ llegaremos a una solución básica optimal para el problema (3') (sin alterar el valor de la funcional) para la cual sea $\Delta_j \geq 0$, $\forall j \in \tilde N$.

OBSERVACION. Haciendo la hipótesis que en el problema (3') no se producirá circulación, podemos aplicar el algoritmo simplex a partir de la tabla $\tilde T(\tilde M)$ considerando solamente las columnas A_k con $k \notin \tilde S$ para las cuales sea $\Delta_k < 0$.

Dada la hipótesis de no-circulación obtendremos necesariamente una tabla final $\tilde T(\tilde I)$ en la que se puede presentar una de las situaciones siguientes:

a) $\tilde z^o < 0$ y $\Delta_j \geq 0 \, \forall j \notin \tilde S$

b) $\tilde z^o = 0$

Veamos que si se llega al caso a) es $K = \phi$. En efecto, consideremos los conjuntos de índices $S' = \tilde{S} \cap \tilde{I}$, $S'' = \tilde{S} - \tilde{I}$, si fuese $\Delta_j \geq 0 \;\forall\; j \in S''$ ($\Delta_h = 0$ si $h \in S'$) tendremos $\Delta j \geq 0 \;\forall\; j \in \tilde{N}$ y por el criterio de optimalidad $\tilde{z}^o$ es el máximo de la funcional $\sum_{i \in \tilde{S}} (-x_i)$, luego $K = \phi$ (ya que en K la funcional toma el valor 0). Por otra parte no puede ser que para algún $j \in S''$ sea $\Delta_j < 0$ ya que en ese caso podemos considerar una nueva funcional $z^* = \sum_{i \in S'} (-x_i) + M \sum_{j \in S''} (-x_j)$ ($M > 0$), para la cual es fácil obtener los valores Δ_j^* correspondientes

$$\Delta_j^* = \begin{cases} \Delta_j & \text{si } j \notin S'' \\ \Delta_j + M & \text{si } j \in S'' \end{cases}$$

siendo para valores de M suficientemente grandes $\Delta_j^* \geq 0 \;\forall\; j \in \tilde{N}$; pero entonces X^o es optimal para la nueva funcional, siendo el valor de ésta

$$z_o^* = \sum_{i \in S'} (-x_i^o) + M \sum_{j \in S''} (-x_j^o) = \tilde{z}^o$$

pues $x_j^o = 0$ si $j \in S''$ y entonces $z_o^* < 0$ y por lo dicho anteriormente es $K = \phi$.

El caso b): $z^o = 0$ indica en primer lugar que $K \neq \phi$ y además que la solución básica $X^o = (X_H^o, X_{\tilde{S}}^o, X_T^o)$ y la tabla $\tilde{T}(\tilde{I})$ obtenidas serán óptimas para el problema (3') con independencia de los valores Δ_k, que podrán tomar valores negativos, y del conjunto de índices $\tilde{I}$ que puede incluir elementos $j \in \tilde{S}$. Pero aún así, por ser $X_{\tilde{S}}^o = 0_{\tilde{S}}$, la solución básica $X^o = (X_H^o, X_{\tilde{S}}^o, X_T^o)$ da lugar a un programa $(X_H^o, X_T^o) \in K$ que, por lo observado anteriormente, no será necesariamente una solución básica para el problema (1).

Ahora bien, a partir de la tabla $\tilde{T}(\tilde{I})$ podemos obtener una solución básica y por lo tanto una tabla inicial T(I) para dicho problema, eliminando de la base $\{A_i\}_{i \in \tilde{I}}$ de R^{n+s}, aquellos vectores A_j, $j \in \tilde{S}$, que hubieran quedado, pivoteando en un elemento $x_{jk}^o \neq 0$, $k \notin \tilde{S}$, en cuanto sea posible. Es fácil advertir que tales pivotajes no alteran el programa básico X^o, desde que $x_j^o = 0$ si $j \in \tilde{S}$. Así seguimos hasta obtener una tabla $\tilde{T}(\tilde{I}')$ para la cual sea $\Delta_j \geq 0 \;\forall\; j \in \tilde{N}$.

De esta manera si existe $j \in \tilde{I}' \cap \tilde{S}$ será $x_{jk}^o = 0$ para todo $k \notin \tilde{S}$ y entonces la j-ésima fila puede ser eliminada de la tabla $\tilde{T}(\tilde{I}')$, ya que $x_{jk}^o = 0 \;\forall\; k \notin \tilde{S}$ se verifica si y sólo si la ecuación j-ésima del sistema original es combinación lineal de las restantes.

Eliminando de la tabla $\tilde{T}(\tilde{I}')$ los índices $j \in \tilde{I}' \cap \tilde{S}$, en las condiciones anterio res y las columnas correspondientes a índices $j \in \tilde{S}$, junto con la última fila (es decir la fila correspondiente a los Δ_j) obtenemos lo esencial de la tabla inicial $T(I)$ (siendo $I = \tilde{I}' - \tilde{S}$) para el problema de maximizar $\langle C_N X_N \rangle$ en K.

En efecto, del sistema lineal de restricciones definiendo $\tilde{K}$ (junto con las restricciones $x_j \geq 0 \ \forall \ j \in \tilde{N}$)

$$\text{(4)} \qquad \overset{o}{X}_{\tilde{I}'} = X_{\tilde{I}'} + \overset{o}{X}_{\tilde{I}'\tilde{J}'} X_{\tilde{J}'} \quad , \quad \tilde{J}' = \tilde{N} - \tilde{I}'$$

se pasa al sistema lineal definiendo K (junto con las restricciones $x_j \geq 0$ $\forall \ j \in N = \tilde{N} - \tilde{S}$) de la siguiente manera:

i) agregamos al sistema (4) la restricción $X_{\tilde{S}} = 0_{\tilde{S}}$.

ii) eliminamos del sistema así obtenido las variables x_j , $j \in \tilde{S}$.

Poniendo $S' = \tilde{S} \cap \tilde{I}'$, $S'' = \tilde{S} - \tilde{I}'$, $I = \tilde{I}' - \tilde{S}$, $J = N - I$, el sistema (4) se escribe en la forma:

$$\text{(5)} \qquad \begin{array}{lcllll} X^o_{I} & = & X_I & & + \ X^o_{IJ} X_J & + \ X^o_{IS''} \ X_{S''} \\ X^o_{S'} & = & & X_{S'} & & + \ X^o_{S'S''} X_{S''} \end{array}$$

lo que es fácil visualizar en el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\multicolumn{2}{c}{} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{22em}}^{\tilde{N}}} \\
\multicolumn{2}{c}{} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hspace{10em}}^{\tilde{S}}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hspace{10em}}^{N}} \\
\cline{3-6}
\multicolumn{2}{c|}{} & S'=\tilde{S}\cap\tilde{I}' & S''=\tilde{S}-\tilde{I}' & I=\tilde{I}'-\tilde{S} & J=N-I \\
\hline
\tilde{I}' & I & 0_{IS'} & X^o_{IS''} & 1_{II} & X^o_{IJ} \\
\cline{2-6}
 & S' & 1_{S'S'} & X^o_{S'S''} & 0_{S'I} & 0_{S'J} \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\hspace{5em}}} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\hspace{5em}}} \\
\multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hspace{16em}}_{\tilde{J}'=\tilde{N}-\tilde{I}'=S''\cup J}}
\end{array}$$

No hay en la segunda ecuación del sistema (5) otros términos de la forma $x^o_{jk} \ x_k$ ($j \in S'$, $k \notin \tilde{S}$) pues estamos suponiendo $x^o_{jk} = 0$ si $j \in S'$, $k \in \tilde{S}$.

Poniendo $X_{S'} = 0_{S'}$, $X_{S''} = 0_{S''}$ en el sistema (5), la segunda ecuación se convierte en una identidad pues $X^o_{S'} = 0_{S'}$ y la primera ecuación se transforma, una vez eliminados los términos correspondientes a $X_{S''}$ en:

$$(6) \qquad X_I^o = X_I + X_{IJ}^o X_J \quad ,$$

que es el sistema explícito correspondiente a la base $\{A_i\}_{i\in I}$, que define junto con las restricciones $x_j^o \geq 0$, para todo $j \in N$, el conjunto K.

EJERCICIOS. Veamos a continuación los siguientes problemas:

1) $$\text{maximizar } (2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4)$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned}
5x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 6 \\
3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \\
14x_1 + 4x_2 + 5x_3 -13x_4 &= 17 \\
5x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 5 \\
x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0 \ , \ x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Tenemos entonces: $N = \{1,2,3,4\}$; $H = \phi$ pues ninguna variable x_i , $i \in N$, aparece aislada; $M = \{1,2,3,4\}$. Consideremos el conjunto $\tilde{S} = \{5,6,7,8\}$ de los índices correspondientes a las variables artificiales; luego: $\tilde{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

El problema auxiliar es:

$$\text{maximizar } (-x_5 - x_6 - x_7 - x_8)$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned}
x_5 \qquad\qquad\qquad + 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 6 \\
x_6 \qquad\quad + 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \\
x_7 \quad + 14x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 13x_4 &= 17 \\
x_8 + 5x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 5 \\
x_i \geq 0 \ , \ \forall\, i \in \tilde{N} &
\end{aligned}$$

La tabla inicial para este problema: $\tilde{T}(\tilde{S})$, y las que se obtienen por pivotaje a partir de ella son las siguientes:

	$C_{\tilde N}$			-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
	$C_{\tilde I}$	$\tilde I$	0	5	6	7	8	1	2	3	4
TABLA T($\tilde S$) $\tilde S$={5,6,7,8}	-1	5	6	1	0	0	0	5	1	3	-3
	-1	6	4	0	1	0	0	3	1	1	-3
	-1	7	17	0	0	1	0	14	4	5	-13
	-1	8	5	0	0	0	1	5^*	1	2	-4
	$\Delta_{\tilde N_o}$		-32	0	0	0	0	-27	-7	-11	23
TABLA T($\tilde I$) $\tilde I$={5,6,7,1}	-1	5	1	1	0	0	-1	0	0	1	1
	-1	6	1	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$
	-1	7	3	0	0	1	$-\frac{14}{5}$	0	$\frac{6^*}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{9}{5}$
	0	1	1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$
	$\Delta_{\tilde N_o}$		-5	0	0	0	$\frac{27}{5}$	0	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$
TABLA T($\tilde I$') $\tilde I$'={5,6,2,1}	-1	5	1	1	0	0	-1	0	0	1	1^*
	-1	6	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{15}$	0	0	0	0
	0	2	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	$\Delta_{\tilde N_o}$		-1	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{31}{15}$	0	0	-1	-1
TABLA T($\tilde I$") $\tilde I$"={4,6,2,1}	0	4	1	1	0	0	-1	0	0	1	1
	-1	6	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{15}$	0	0	0	0
	0	2	4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{23}{6}$	0	1	1	0
	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	0	1	0
	Δ_{N_o}		0	1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{15}$	0	0	0	0

Por ser $\Delta_j \geq 0 \; \forall \; j \in \tilde N$, llegamos a la tabla final del problema de: maximizar $\sum_{i \in \tilde S} (-x_i)$ en el conjunto $\tilde K$. Como $\tilde z^o = 0$ resulta $K \neq \phi$.

Observemos que $6 \in S' = \tilde S \cap \tilde I'$ y es $x^o_{6k} = 0 \; \forall \; k \notin \tilde S$, por lo tanto eliminamos de la tabla y del sistema la ecuación correspondiente al índice 6; de esta manera el sistema primitivo se reduce a:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 \quad &= 4 \\ x_1 \quad + x_3 \quad &= 1 \end{aligned}$$

siendo la solución básica inicial: (1,4,0,1); el valor de la funcional $L(X) = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4$ en ese punto es $L(1,4,0,1) = -9$. Para este sistema tendremos las tablas simplex que transcribimos a continuación:

TABLA T(I)
$I = \{4,2,1\}$

TABLA T(I')
$I' = \{3,2,1\}$

C_N			2	-3	2	1
C_I	I	0	1	2	3	4
1	4	1	0	0	1*	1
-3	2	4	0	1	1	0
2	1	1	1	0	1	0
Δ_N		-9	0	0	-2	0
2	3	1	0	0	1	1
-3	2	3	0	1	0	-1
2	1	0	1	0	0	-1
Δ_N		-7	0	0	0	2

De acuerdo con esta tabla la solución $X^o = (0,3,1,0)$ es optimal para el problema inicial, pues $\Delta_j \geq 0$ para todo $j \in N$, por lo tanto - 7 es el máximo de la funcional $L(X)$.

2) Consideremos el conjunto K de R^3 definido por las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0 \;,\; x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

veamos que $K = \phi$.

Consideremos el sistema auxiliar que se obtiene a partir del sistema anterior, introduciendo las variables artificiales x_4, x_5, x_6. Se tiene entonces un conjunto $\tilde{K}$ de R^6 definido por las restricciones:

$$\begin{aligned} x_4 \quad\quad\quad + 3x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_5 \quad + x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_6 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0 \;,\; x_3 \geq 0 \;,\; x_4 \geq 0 \;,\; x_5 \geq 0 \;,\; x_6 &\geq 0 \;. \end{aligned}$$

Planteamos en $\tilde{K}$ el problema de: maximizar $(-x_4-x_5-x_6)$, para el cual tenemos las siguientes tablas :

	$C_{\tilde{N}}$			-1	-1	-1	0	0	0
	$C_{\tilde{I}}$	$\tilde{I}$	0	4	5	6	1	2	3
TABLA $T(\tilde{I})$ $\tilde{I}=\{4,5,6\}$	-1	4	4	1	0	0	3	1	-1
	-1	5	1	0	1	0	1^*	-1	4
	-1	6	3	0	0	1	-2	-1	-2
		$\Delta_{\tilde{N}_o}$	-8	0	0	0	-2	1	-1
TABLA $T(\tilde{I}')$ $\tilde{I}'=\{4,1,6\}$	-1	4	1	1	-3	0	0	4^*	-13
	0	1	1	0	1	0	1	-1	4
	-1	6	5	0	2	1	0	-3	6
		$\Delta_{\tilde{N}_o}$	-6	0	2	0	0	-1	7
TABLA $T(\tilde{I}'')$ $\tilde{I}''=\{2,1,6\}$	0	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	1	$-\frac{13}{4}$
	0	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{3}{4}$
	-1	6	$\frac{23}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	$-\frac{15}{4}$
		$\Delta_{\tilde{N}_o}$	$-\frac{23}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	0	0	$\frac{15}{4}$

Por ser $\Delta_j \geq 0$ para todo $j \in \tilde{N}$ resulta que la solución $(\frac{5}{4},\frac{1}{4},0,0,0,\frac{23}{4})$ es solución básica optimal para el problema auxiliar, siendo el valor máximo de la funcional $\tilde{L}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (-x_4-x_5-x_6) = \tilde{z}^o = -\frac{23}{4} < 0$, por lo tanto $\tilde{K} = \phi$.

3) Consideremos el problema:

$$\text{maximizar } (x_1+3x_2-2x_4+5x_5+5x_6-2x_7)$$

en el conjunto K definido por las restricciones:

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
x_1 & & +3x_3 & -x_4 & +x_5 & -x_6 & +x_7 & =1 \\
& x_2 & -2x_3 & +2x_4 & -x_5 & +2x_6 & +2x_7 & =6 \\
& & x_3 & -2x_4 & +x_5 & -2x_6 & +4x_7 & =2 \\
& & -x_3 & +x_4 & -x_5 & +2x_6 & +2x_7 & =5 \\
\end{array}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4,5,6,7$$

En este caso es $N = \{1,2,3,4,5,6,7\}$; $H = \{1,2\}$ es el conjunto de índices correspondientes a las variables aisladas; M = {1,2,3,4} ; S = {3,4} ; debemos entonces agregar dos variables artificiales, sean éstas: x_8 , x_9. Tenemos entonces $\tilde{S}$ = {8,9} ; $\tilde{N}$ = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Consideramos entonces el siguiente problema auxiliar:

$$\text{maximizar } (-x_8-x_9)$$

en el conjunto $\tilde{K}$ de R^9 definido por las restricciones:

$$\begin{array}{llllllllll}
x_1 & & & & + 3x_3 & - x_4 & + x_5 & - x_6 & + x_7 & = 1 \\
& x_2 & & & - 2x_3 & + 2x_4 & - x_5 & + 2x_6 & + 2x_7 & = 6 \\
& & x_8 & & + x_3 & - 2x_4 & + x_5 & - 2x_6 & + 4x_7 & = 2 \\
& & & x_9 & - x_3 & + x_4 & - x_5 & + 2x_6 & + 2x_7 & = 5 \\
& & & & & x_i \geq 0 & \forall i \in \tilde{N} & & &
\end{array}$$

Para este problema tenemos las siguientes tablas:

	$C_{\tilde{N}}$			0	0	-1	-1	0	0	0	0	0
	$C_{\tilde{I}}$	$\tilde{I}$	0	1	2	8	9	3	4	5	6	7
TABLA $\tilde{T}(\tilde{I})$ $\tilde{I}$= {1,2,8,9}	0	1	1	1	0	0	0	3	-1	1	-1	1
	0	2	6	0	1	0	0	-2	2	-1	2	2
	-1	8	2	0	0	1	0	1	-2	1	-2	4^*
	-1	9	5	0	0	0	1	-1	1	-1	2	2
		$\Delta_{\tilde{N}_o}$	-7	0	0	0	0	0	1	0	0	-6
TABLA $\tilde{T}(\tilde{I}')$ $\tilde{I}'$={1,2,7,9}	0	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0
	0	2	5	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	3	$-\frac{3}{2}$	3	0
	0	7	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1
	-1	9	4	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	2	$-\frac{3}{2}$	3^*	0
		$\Delta_{\tilde{N}_o}$	-4	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$	-3	0
TABLA $\tilde{T}(\tilde{I}'')$ $\tilde{I}''$={1,2,7,6}	0	1	$\frac{7}{6}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	0	2	1	0	1	0	-1	-1	1	0	0	0
	0	7	$\frac{7}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	0	1
	0	6	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	1	0
		$\Delta_{\tilde{N}_o}$	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Por ser $\Delta_j \geq 0 \ \forall \ j \in \tilde{N}$, ésta es la tabla final para el problema; además es $\tilde{z}^o = 0$ luego el problema original es resoluble y la solución $X^o = (\frac{7}{6},1,0,0,0,\frac{4}{3},\frac{7}{6})$ obtenida en la tabla $\tilde{T}(\tilde{I}'')$ es solución básica inicial del mismo. Para este problema la tabla T(I) correspondiente a esta solución básica es:

TABLA T(I)
I={1,2,7,6}

C_N			1	3	0	-2	5	5	-2
C_I	I	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	$\frac{7}{6}$	1	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	0
3	2	1	0	1	-1	1	0	0	0
-2	7	$\frac{7}{6}$	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	0	0	1
5	6	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	1	0
$\Delta_{\tilde{N}_o}$		$\frac{17}{2}$	0	0	-3	$\frac{17}{2}$	-7	0	0

Por ser $\Delta_j < 0$ para j = 3,5 esta tabla no es tabla final para el problema original; por pivotaje en $x^o_{15} = \frac{1}{2}$ llegaremos a la solución básica

$$X^o = (0,1,0,0,\frac{7}{3},\frac{5}{2},\frac{7}{6})$$

que es la solución óptima del problema, siendo el valor máximo de la funcional $z^o = \frac{149}{6}$.

B. EL *M*-METODO.

Otro procedimiento para determinar una solución básica inicial del problema (1) consiste en:

$$\text{maximizar } (\langle C_N . X_N \rangle - M \sum_{i \in \tilde{S}} x_i)$$

en el conjunto $\tilde{K}$ de R^{n+s} definido en (2), tomando *M* arbitrariamente grande.

Presentaremos el asunto desde un punto de vista más general:

Sea $\tilde{K}$ el conjunto definido por las restricciones lineales - en forma normal - de un problema que consiste en maximizar la funcional $L(X) = \langle C.X \rangle$ en el conjunto $K' \subset \tilde{K}$, siendo K' el conjunto de los programas de $\tilde{K}$ que maximizan la funcional $L'(X) = \langle C'.X \rangle$, suponiendo $\max_{\tilde{K}} L'(X) = \Lambda < +\infty$. De este modo tenemos la combinación de dos problemas de programación lineal: el primero consiste en maximizar L'(X) en $\tilde{K}$ y el segundo en maximizar L(X) en el conjunto K',

$K' = \tilde{K} \cap \{X \mid L'(X) = \Lambda\}$.

En lugar de resolver, en su orden, estos dos problemas se puede resolver el problema - M asociado: maximizar $z'' = (L(X) + M\ L'(X))$ en el conjunto $\tilde{K}$, para M supuesto arbitrariamente grande.

La idea es la siguiente: si $X \in \tilde{K}$ pero $X \notin K'$ y $X^o \in K'$ es: $L'(X) \leq L'(X^o)$ y entonces: $L(X) + M\ L'(X) < L(X^o) + M\ L'(X^o)$ si M es suficientemente grande, esto obliga a tomar sólo programas $X \in K'$ y, como en K', $L'(X)$ es constante, el valor de $L(X) + M\ L'(X)$ sólo depende del primer sumando y por lo tanto se debe maximizar $L(X)$ en K'.

Supongamos que aplicamos el algoritmo simplex al problema-M partiendo de un programa básico $X^o = (X^o_{\tilde{I}}, 0_{\tilde{J}})$ $(\tilde{J} = \tilde{N} - \tilde{I})$. En cada tabla, $\tilde{T}(\tilde{I})$, M sólo aparece en la fila $(z'', \Delta''_1, \Delta''_2, \ldots\ )$ siendo $z'' = z + Mz'$, $\Delta''_j = \Delta_j + M\Delta'_j$, $j \in \tilde{N}$ $(z = L(X)$, $\Delta_j = \sum_{i \in \tilde{I}} c_i x^o_{ij} - c_j$; $z' = L'(X)$, $\Delta'_j = \sum_{i \in \tilde{I}} c'_i x^o_{ij} - c'_j)$.

En la práctica es conveniente (omitiendo el factor M) sustituir la última fila, correspondiente a los coeficientes Δ''_j, $j \in \tilde{N}$, por dos filas consignando los valores: z', Δ'_j, $j \in \tilde{N}$ en la primera y z, Δ_j, $j \in \tilde{N}$ en la segunda, así:

$\Delta'_{\tilde{N}_o}$	z'	Δ'_1	Δ'_2	Δ'_3	$\cdots$
$\Delta_{\tilde{N}_o}$	z	Δ_1	Δ_2	Δ_3	$\cdots$

En cada paso del algoritmo simplex debemos comparar los valores Δ''_j entre sí y en particular con 0. Es fácil verificar que: $\alpha + \alpha' M < \beta + \beta' M$ para M arbitrariamente grande (más precisamente se verifica que existe $\bar{M}$ tal que: $\alpha + \alpha' M < \beta + \beta' M$ para todo $M > \bar{M}$) si y sólo si (α', α) es lexicográficamente menor que (β', β) $((\alpha', \alpha) \lessdot (\beta', \beta))$.

Una tabla final para el problema - M da una solución básica X^o del problema combinado.

En efecto, supongamos primero el caso en que $\Delta''_j \geq 0\ \forall\ j \in \tilde{N}$ (M arbitrariamente grande); esto significa en primer lugar que $\Delta'_j \geq 0\ \forall\ j \in \tilde{N}$ y por lo tanto X^o es un programa optimal del problema de maximizar $L'(X)$ en $\tilde{K}$, y en segundo lugar que si $\Delta'_j = 0$ entonces $\Delta_j \geq 0$. Fijado un valor de M que haga $\Delta''_j \geq 0\ \forall\ j \in \tilde{N}$, vemos que:

$$(7) \qquad L(X) + M\, L'(X) \leq L(X^o) + M\, L'(X^o) \qquad \text{para todo } X \in \tilde{K}$$

de acuerdo con el criterio de optimalidad. En particular la desigualdad (7) se verifica para todo $X \in K'$.

Como $L'(X) = L'(X^o)$ es : $L(X) \leq L(X^o)$ para todo $X \in K'$ y así X^o es un programa optimal del problema combinado.

El otro caso:existe k tal que $\Delta''_k < 0$ y $x^o_{jk} \leq 0$ para todo j no puede darse con $\Delta'_k < 0$ pues el problema de maximizar $L'(X)$ en $\tilde{K}$ se supone resoluble; luego debe ser $\Delta'_k = 0$ y $\Delta_k < 0$. Fijado $M > 0$ (arbitrario) vemos que $L(X) + M\, L'(X)$ tiende a $+\infty$ según una semirrecta de origen X^o contenida en $\tilde{K}$; pero según la misma semirrecta $L'(X) = L'(X^o) =$ constante (ya que $\Delta'_k = 0$) vemos entonces que:

$$\sup_{K'} L(X) = +\infty$$

NOTAS.

NOTA 1. Si la circulación no se presenta, hay sólo un número finito de tablas simplex y en cada una aparecen expresiones del tipo $\alpha + \alpha' M$; se puede tomar entonces un M_o tal que: $\alpha + \alpha' M \leq \beta + \beta' M$ para todo $M \geq M_o$ si y sólo si $(\alpha', \alpha) \preccurlyeq (\beta', \beta)$ para todas las expresiones de este tipo que aparecen en los cálculos. Esta observación permite precisar la expresión "M arbitrariamente grande" usada al comienzo. El algoritmo simplex aplicado al problema- M, cualquiera que sea $M \geq M_o$ conduce a una solución del problema combinado.

NOTA 2. Es fácil imaginar problemas combinados más generales y su solución por la vía indicada.

La aplicación del algoritmo simplex al problema:

$$\text{maximizar } (\langle C_N . X_N \rangle - M \sum_{i \in \tilde{S}} x_i) \text{ en el conjunto } \tilde{K} \text{ de } R^{n+s} ,$$

con las notaciones introducidas al comienzo de este párrafo, conduce a un método de una sola etapa para la resolución del problema de:

$$\text{maximizar } \langle C_N . X_N \rangle \text{ en el conjunto } K \text{ de } R^n .$$

En la tabla final $z' = 0$ indicará que $K \neq \phi$ y que la solución básica X^o será la solución optimal del problema, o bien se detectará que $\langle C_N X_N \rangle$ no tiene máximo finito en K.

Si la elección de la columna A_k, sigue la regla de tomar el valor mínimo de Δ''_j, o sea el mínimo lexicográfico de (Δ'_j,Δ_j), el caso $K = \phi$, si se presenta, se detectará sin necesidad de llegar hasta el final del cálculo; ya que procediendo de este modo llegaremos a una tabla para la cual es $\Delta'_j \geq 0$ para todo $j \in \tilde{N}$; si $z' \neq 0$ es $K = \phi$ y si $z' = 0$ la tabla da una solución del problema auxiliar.

Teniendo en cuenta lo dicho, es fácil deducir que si no hay circulación, es posible omitir en todo el cálculo, las columnas correspondientes a las variables artificiales.

Hay variantes de este método que consisten en partir con un valor moderado de *M* y aumentarlo a medida que avanza el cálculo ([14]) .

NOTA 3. Por razones obvias es aconsejable reducir el número de variables artificiales en la presentación del problema, apta para la iniciación del algoritmo simplex. Para ello sirve la técnica siguiente:

Supongamos que el sistema de restricciones contiene, además de ciertas igualdades, algunas desigualdades, siendo de la forma:

$$(8) \qquad \begin{array}{ll} f_j(X) = b_j & ;\ j \in M_1 \quad (b_j \geq 0) \\ f_i(X) \leq b_i & ;\ i \in M_2 \\ \quad x_k \geq 0 & \text{para todo } k \in N. \end{array}$$

Introduciendo variables de holgura $x^*_i \geq 0$ para todo $i \in M_2$ en el sistema de desigualdades se tiene:

$$(8') \qquad f_i(X) + x^*_i = b_i \quad ;\ i \in M_2$$

Poniendo $M_2^+ = \{i \in M_2 \mid b_i \geq 0\}$; $M_2^- = \{i \in M_2 \mid b_i < 0\}$ y $b_k = \min_{i \in M_2^-} b_i$, el sistema (8') se escribe en forma equivalente:

$$(9) \qquad \begin{array}{rcll} f_i(X) - f_k(X) - x^*_k + x^*_i & = & b_i - b_k & i \in M_2^- - k \\ - f_k(X) - x^*_k & = & - b_k & \\ f_i(X) \qquad\qquad\qquad + x^*_i & = & b_i & i \in M_2^+ \end{array}$$

De esta manera el sistema de restricciones (8) se reduce a un sistema de igualdades con segundos miembros no-negativos. El primer y el tercer conjunto de igualdades en el sistema (9) presenta en cada ecuación una variable de holgura x^*_i $(i \in M_2\text{-}k)$ como variable aislada del sistema. Resta solo introducir una variable artificial en cada una de las restantes ecuaciones (aquellas correspondientes a los índices $j \in M_1$ y la correspondiente al índice k) para comenzar con la aplicación del método simplex.

La técnica precedente puede aplicarse al caso en que el sistema de restricciones se presenta en forma explícita (o ha sido llevado a esta forma)

$$x_i + \sum_{j \in J} x^o_{ij} x_j = x^o_i \, , \quad i \in I \quad (J = N-I)$$

si todos los x^o_i son no-negativos, el algoritmo simplex puede aplicarse directamente; si no es así: sea $x^o_k = \min\limits_{x^o_i < 0} x^o_i$ y consideremos el sistema equivalente

$$x_i - x_k + \sum_{j \in J} (x^o_{ij} - x^o_{kj}) x_j = x^o_i - x^o_k \, , \quad i \in I-k$$

$$- x_k + \sum_{j \in J} x^o_{kj} \, x_j = - x^o_k$$

donde sólo resta introducir en la última ecuación una variable artificial.

EJERCICIOS.

4. Consideremos el problema:

$$\text{maximizar } (x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5)$$

con las restricciones:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
-2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & - & x_5 & \leq & -7 \\
- x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & - & 2x_5 & \leq & -2 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & \leq & 5 \\
- x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 2 \\
\end{array}$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3,4,5$$

introduciendo variables de holgura : x_6 , x_7 , x_8 en las tres primeras desigualdades obtenemos el sistema:

$$\begin{array}{llll}
x_6 & & & -2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = -7 \qquad (1)\\
& x_7 & & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -2 \qquad (2)\\
& & x_8 & + x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 5\\
& & & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2
\end{array}$$

por ser $\min\limits_{b_i < 0} b_i = -7$, multiplicamos la ecuación (1) por -1 y reemplazamos la ecuación (2) por la diferencia entre (2) y (1); así obtenemos:

$$\begin{array}{lll}
-x_6 & & + 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 7\\
-x_6 + x_7 & & + x_1 + 3x_2 + 4x_4 - x_5 = 5\\
& x_8 & + x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 5\\
& & - x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2
\end{array}$$

Introduciendo variables artificiales en aquellas ecuaciones donde no aparezcan variables aisladas y reordenando filas y columnas planteamos el problema - M asociado:

$$\text{maximizar}(x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5-M(x_9+x_{10}))$$

con las restricciones:

$$\begin{array}{lllll}
x_7 & & & & + x_1 + 3x_2 + 4x_4 - x_5 - x_6 = 5\\
& x_8 & & & + x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 5\\
& & x_9 & & - x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2\\
& & & x_{10} & + 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 7\\
& & & & x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
\end{array}$$

Las tablas $T_M(\tilde{I})$ correspondientes al problema son:

$C_{\tilde{N}}$			0	0	$-M$	$-M$	1	1	1	3	1	0
$C_{\tilde{I}}$	$\tilde{I}$	0	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
0	7	5	1	0	0	0	1	3	0	4	-1	-1
0	8	5	0	1	0	0	1	2	2	3	2	0
$-M$	9	2	0	0	1	0	-1	2	1^*	1	2	0
$-M$	10	7	0	0	0	1	2	1	3	1	1	-1

$C_{\tilde{N}}$			0	0	$-M$	$-M$	1	1	1	3	1	0
$C_{\tilde{I}}$	$\tilde{I}$	0	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
$\Delta'_{\tilde{N}_o}$		-9	0	0	0	0	-1	-3	-4	-2	-3	1
$\Delta_{\tilde{N}_o}$		0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-3	-1	0
0	7	5	1	0	0	0	1	3	0	4	-1	-1
0	8	1	0	1	-2	0	3	-2	0	1	-2	0
1	3	2	0	0	1	0	-1	2	1	1	2	0
$-M$	10	1	0	0	-3	1	5^*	-5	0	-2	-5	-1
$\Delta'_{\tilde{N}_o}$		-1	0	0	4	0	-5	5	0	2	5	1
$\Delta_{\tilde{N}_o}$		2	0	0	1	0	-2	1	0	-2	1	0
0	7	$\frac{24}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	4	0	$\frac{22}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$
0	8	$\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	1	0	$\frac{11}{5}$	1	$\frac{3}{5}$
1	3	$\frac{11}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	1	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$
1	1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	-1	0	$-\frac{2}{5}$	-1	$-\frac{1}{5}$
$\Delta'_{\tilde{N}_o}$		0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$\Delta_{\tilde{N}_o}$		$\frac{12}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	-1	0	$-\frac{14}{5}$	-1	$-\frac{2}{5}$

Por ser $z' = 0$, resulta $K \neq \phi$ y además hemos obtenido la base inicial para el problema planteado en primer término, ésta comprende los vectores A_7 , A_8 , A_3 , A_1. Eliminando las columnas correspondientes a las variables artificiales x_9 , x_{10} obtenemos la tabla inicial para el problema original y pivoteando en $x^o_{84} = \frac{11}{5}$ tendremos la siguiente tabla que será tabla final para el mismo.

C_N			0	0	1	1	1	3	1	0
C_I	I	0	7	8	1	2	3	4	5	6
0	7	4	1	-2	0	2	0	0	-2	-2
3	4	$\frac{2}{11}$	0	$\frac{5}{11}$	0	$\frac{5}{11}$	0	1	$\frac{5}{11}$	$\frac{3}{11}$
1	3	$\frac{23}{11}$	0	$-\frac{3}{11}$	0	$\frac{8}{11}$	1	0	$\frac{8}{11}$	$-\frac{4}{11}$
1	1	$\frac{3}{11}$	0	$\frac{2}{11}$	1	$-\frac{9}{11}$	0	0	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{1}{11}$
Δ_{N_o}		$\frac{32}{11}$	0	$\frac{14}{11}$	0	$\frac{3}{11}$	0	0	$\frac{3}{11}$	$\frac{4}{11}$

De acuerdo con la tabla la solución óptima es $X^o = (x_1^o,x_2^o,x_3^o,x_4^o,x_5^o,x_6^o,x_7^o) =$ $= (\frac{3}{11},0,\frac{23}{11},\frac{2}{11},0,0,4,0)$, siendo el máximo de la funcional $z^o = \frac{32}{11}$. Observemos que es $x_7 = 4 > 0$; esto significa que la restricción $-x_1+2x_2-3x_3+3x_4-2x_5 \leq -2$ no se verifica con igualdad; en cambio las desigualdades correspondientes a las variables de holgura x_6 , x_8 se verifican con igualdad pues $x_6 = x_8 = 0$.

5. Consideremos el problema:

$$\text{maximizar } (x_1+3x_2+x_3+x_4+2x_5)$$

en el conjunto K definido por las restricciones:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 5 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 5 \\
-x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\
4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & & & = & 4 \\
\multicolumn{11}{l}{x_i \geq 0 \quad , \quad i \in \{1,2,3,4,5\} = N}
\end{array}$$

Introduciendo las variables artificiales x_6 , x_7 , x_8 , x_9 obtenemos el problema - M asociado:

$$\text{maximizar } (x_1+3x_2+x_3+x_4+2x_5-M(x_6+x_7+x_8+x_9))$$

con las restricciones:

$$\begin{array}{cccccrcrcrcrcrcl}
x_6 & & & & + & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 5 \\
 & x_7 & & & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 5 \\
 & & x_8 & & - & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\
 & & & x_9 & + & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & & & = & 4 \\
\multicolumn{16}{c}{x_i \geq 0 \quad , \quad i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = \tilde{N}}
\end{array}$$

Tenemos entonces las siguientes tablas $T_M(\tilde{I})$:

$C_{\tilde{N}}$			$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	1	3	1	1	2
$C_{\tilde{I}}$	I	0	6	7	8	9	1	2	3	4	5
$-M$	6	5	1	0	0	0	2	1	1	1	1
$-M$	7	5	0	1	0	0	1	2	-3	3	2
$-M$	8	2	0	0	1	0	-1	1	-2	1	3
$-M$	9	4	0	0	0	1	4	2	-2	3^*	0
$\Delta_{\tilde{N}_o}$		-16	0	0	0	0	-6	-6	6	-8	-6
$\Delta_{\tilde{N}_o}$		0	0	0	0	0	-1	-3	-1	-1	-2
$-M$	6	$\frac{11}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	1
$-M$	7	1	0	1	0	-1	-3	0	-1	0	2
$-M$	8	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	3^*
1	4	$\frac{4}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0
$\Delta'_{\tilde{N}_o}$		$-\frac{16}{3}$	0	0	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{14}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	-6
$\Delta_{\tilde{N}_o}$		$\frac{4}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	-2
$-M$	6	$\frac{31}{9}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{19}{9}^*$	0	0
$-M$	7	$\frac{5}{9}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{9}$	$-\frac{13}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0	0
2	5	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{7}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{4}{9}$	0	1
1	4	$\frac{4}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0
$\Delta'_{\tilde{N}_o}$		-4	0	0	2	2	0	0	-2	0	0
$\Delta_{\tilde{N}_o}$		$\frac{16}{9}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{11}{9}$	$-\frac{19}{9}$	$-\frac{23}{9}$	0	0

Por pivotaje en el elemento $x^o_{63} = \frac{19}{9}$ obtenemos la tabla simplex correspondiente a $I = \{3,7,5,4\}$ en la que es : $\Delta'_j \geq 0 \;\forall\; j \in \tilde{N}$ y $z' \neq 0$. Resulta entonces $K = \phi$ y por lo tanto el problema inicial es irresoluble.

III. CONVEXOS Y POLIEDROS.

No vamos a hacer una exposición sistemática sobre convexos; nos limitaremos a establecer ciertas nociones y proposiciones básicas, evitando demostraciones que nos aparten de nuestro objetivo: el estudio geométrico de los poliedros. Es por ello que la exposición deja verificaciones al cuidado del lector; ellas constituyen los "problemas" de este capítulo. Estas nociones podrán ser ampliadas en, por ejemplo, [2] y [3].

A. Un POLIEDRO K, es el conjunto de los $X \in R^n$, $X = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ que verifican un sistema de inecuaciones lineales: $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\dots+a_{jn}x_n \le b_j$ $j = 1,2,\dots,m$.

Como los semiespacios $\{X \mid a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\dots+a_{jn}x_n \le b_j\}$ (imagen inversa por la función lineal - luego continua - $X \to f_j(X) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i$; del cerrado $(-\infty,b_j] \subset R$) son cerrados de R^n, y K es la intersección de un número finito de tales semiespacios, K resulta ser un cerrado de R^n.

Además K es un conjunto CONVEXO, esto es, tiene la propiedad de contener el segmento $[X,Y] = \{\alpha X+\beta Y \mid \alpha+\beta = 1 \ , \ \alpha \ge 0 \ , \ \beta \ge 0\}$ toda vez que contiene sus extremos X e Y. En efecto, si $X,Y \in K$, para todo $j = 1,2,\dots,m$ es $f_j(X) \le b_j$; $f_j(Y) \le b_j$; multiplicando por α , β y sumando, teniendo en cuenta la linealidad de f_j, se tiene: $f_j(\alpha X+\beta Y) \le \alpha b_j+\beta b_j = b_j$; en particular si $\alpha,\beta \ge 0$, $\alpha + \beta = 1$ resulta $[X,Y] \subset K$.

Una restricción $f_j(X) \le b_j$ se dice RIGIDA si para todos los $X \in K$ es: $f_j(X) = b_j$ (si la restricción es ya la igualdad $f_j(X) = b_j$, ella es rígida); caso contrario la restricción se dice FLEXIBLE.

Una restricción se dice SUPERFLUA si eliminada del sistema que define K, el sistema residual también define K; caso contrario la restricción se dice ESENCIAL.

Es claro que toda restricción superflua puede omitirse y que las restricciones rígidas pueden sustituirse por las igualdades correspondientes.

Veamos un ejemplo: sea $K \subset R^2$ definido por las restricciones:

(1) $x_1 + x_2 \leq 0$

(2) $2x_1 + 2x_2 \geq 0$

(3) $x_1 \leq 1$

(4) $x_2 \leq 1$

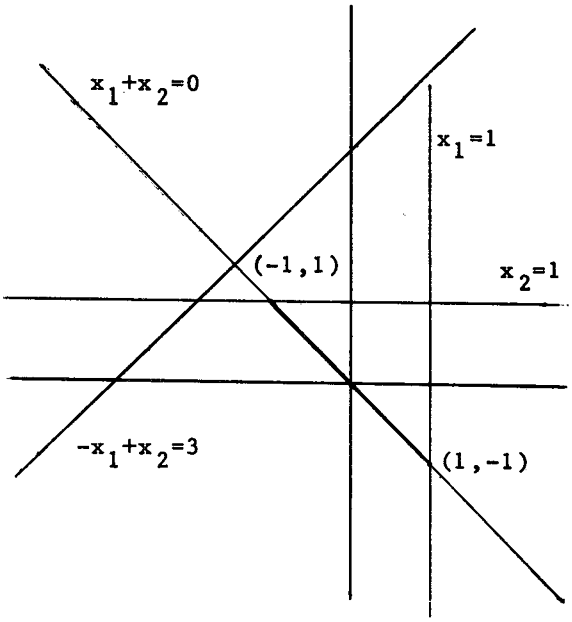
(5) $- x_1 + x_2 \leq 3$

Observemos que (1) y (2) son restricciones rígidas: (3) , (4) y (5) superfluas. $K = [(-1,1) ; (1,-1)]$ y puede definirse por las restricciones:

(1') $x_1 + x_2 = 0$

(3) $x_1 \leq 1$

(4) $x_2 \leq 1$



B. La menor variedad lineal - espacio lineal trasladado - que contiene a un conjunto K se dirá la VARIEDAD SOPORTE de K: (K) en notación. La dimensión de K será la dimensión de (K). En el ejemplo precedente, la variedad soporte es la recta $x_1 + x_2 = 0$.

PROPOSICION 1. $(K) = \{X \mid f_i(X) = b_i , \forall i \in I_K\}$, donde I_K es el conjunto de índices correspondientes a las restricciones rígidas, entre aquellas restricciones que definen K.

En efecto, es claro que $K \subset \{X \mid f_i(X) = b_i , \forall i \in I_K\}$ y como éste conjunto es una variedad lineal resulta $(K) \subset \{X \mid f_i(X) = b_i, \forall i \in I_K\}$.

Para probar la recíproca, consideremos el conjunto J de los índices correspondientes a las restricciones flexibles que definen K; probemos que existe un $Y \in K$ tal que $f_j(Y) < b_j, \forall j \in J$; en efecto, notemos que para cada $j \in J$ existe $Y^{(j)} \in K$ tal que $f_j(Y^{(j)}) < b_j$; si $|J| = p$ tomando $Y = \frac{1}{p} \sum_{j \in J} Y^{(j)}$ es $Y \in K$ y además $f_j(Y) < b_j, \forall j \in J$.

Sea ahora $Z \in \{X \mid f_i(X) = b_i, \forall i \in I_K\}$, la recta que une Z e Y contiene, próximo a Y, un punto $Y' \in K$ (como es fácil verificar). Como $Y, Y' \in K$ la recta que une Z e Y está contenida en (K) y entonces $Z \in K$. C.Q.D.

C. Un CONO (con vértice en 0) se define como un conjunto Q tal que si $U \in Q$ y $\lambda \geq 0$ entonces $\lambda U \in Q$ (es decir Q contiene las semirrectas de vectores directores U). Si además Q es un conjunto convexo, entonces es un CONO CONVEXO.

Dado el convexo K el CONO ASINTOTICO Q de K es el conjunto de vectores U tales que $X \in K$ implica $X + \lambda U \in K$ para cualquier $\lambda \geqslant 0$. Esto significa que Q está constituído por los vectores directores U de todas las semirrectas contenidas en K. Además Q es el mayor cono con la propiedad $X + Q \subset K$, $\forall$ $X \in K$.

Se verifica de inmediato que el cono asintótico de un convexo es un cono convexo.

PROPOSICION 2. Si K está definido por las restricciones:

$$(1) \quad f_i(X) = b_i \,, i \in I_K \quad ; \quad f_j(X) \leq b_j \,, j \in J$$

entonces el cono asintótico Q de K es: $Q = \{U \mid f_i(U) \leq 0, i \in I_K ; f_j(U) = 0, j \in J\}$. En consecuencia Q es un poliedro, un cono poliédrico.

Un cono Q se dice PROPIO si: $U \in Q$ y $-U \in Q$ sólo es posible con $U = 0$, un convexo K se dice PROPIO si su cono asintótico Q es propio.

El conjunto $S = \{U \mid U, -U \in Q\}$, esto es: $S = Q \cap -Q$ es un subespacio lineal y es el mayor subespacio lineal contenido en Q.

Si Q está definido por las restricciones: $f_i(U) = 0$, $i \in I_K$; $f_j(U) \leq 0$, $j \in J$ entonces $S = \{U \mid f_i(U) = 0 \ , \ i \in I_K \cup J\}$. Notemos que S está constituído por los vectores directores U de todas las rectas contenidas en K. S se suele llamar ESPACIO ASINTOTICO de K.

NOTA. El estudio de un convexo K puede reducirse al estudio de un convexo propio K_o como veremos en lo que sigue:

Sean Q el cono asintótico y $S = Q \cap -Q$ el espacio asintótico de un convexo K ; consideremos el espacio $S^{\perp}$, ortogonal a S respecto de un producto escalar $\langle X.Y \rangle$, es decir $S^{\perp} = \{X \mid \langle X.Y \rangle = 0 \ \forall \ Y \in S\}$. Indiquemos $Q_o = S^{\perp} \cap Q$; $K_o = S^{\perp} \cap K$ y sea π la proyección ortogonal sobre $S^{\perp}$.

PROPOSICION 3. Con las notaciones anteriores K_o es un convexo propio contenido en $S^{\perp}$ cuyo cono asintótico es Q_o; además $K = \pi^{-1}(K_o) = K_o + S$.

En particular podemos aplicar esta proposición a un poliedro K. Nótese que K_o

también es un poliedro, pues $S^{\perp}$ - como cualquier espacio lineal - está definido por un sistema (homogéneo) apropiado de ecuaciones lineales.

D. Un subconjunto convexo no vacío K_1, del convexo K, se dice una CARA de K si para $X,Y \in K$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta = 1$; de $\alpha X + \beta Y \in K_1$ se deduce $X,Y \in K_1$. Esto es; si un segmento $[X,Y]$ contenido en K corta a K_1 en un punto interior del segmento, sólo cuando el segmento está contenido en K_1.

PROPOSICION 4. Valen las siguientes propiedades:

i) K es cara de K.

ii) Si K_1 es cara de K_2 y K_2 es cara de K_3, entonces K_1 es cara de K_3.

iii) Si K_1 es cara de K_2 y K' es un convexo tal que $K_1 \cap K' \neq \phi$; $K_1 \cap K'$ es cara de $K_2 \cap K'$. En particular si K' es tal que $K_1 \subset K' \subset K_2$, K_1 es cara de K'.

iv) La intersección de caras de K, si no es vacía, es una cara de K.

Las caras de K que se reducen a un punto se dicen PUNTOS EXTREMALES o VERTICES de K.

Vamos a caracterizar las caras de K en término de las restricciones que lo definen, cuando K es un poliedro.

PROPOSICION 5. Si K es un convexo, L una funcional lineal que toma su máximo m en K, entonces $K_m = \{X \mid L(X) = m , X \in K\}$ es una cara de K.

La demostración es inmediata a partir de la definición de cara de K. Pero también se obtiene del punto iii) de la proposición 4, y del hecho que $\{X \mid L(X) = m\}$ es cara del semiespacio $\{X \mid L(X) \leq m\}$.

De la proposición 5 y del punto iv) de la proposición 4 resulta:

COROLARIO. Si ciertas desigualdades del conjunto de restricciones que definen K se transforman en igualdades, y con el sistema de restricciones así obtenido se define un conjunto K_1 no vacío, entonces K_1 es una cara de K. Toda cara de K se obtiene en esa forma.

En efecto, sea K_1 una cara de K y consideremos el conjunto de índices

$I_{K_1} = \{i \mid f_i(X) = b_i \forall X \in K_1\}$. Transformemos en igualdades aquellas restricciones definiendo K que corresponden a índices $i \in I_{K_1}$ y veamos que el sistema así obtenido define K_1.

Es claro que si $X \in K_1$, $f_i(X) = b_i, \forall i \in I_{K_1}$ y que las restantes restricciones definiendo K: $f_j(X) \leq b_j$, $j \notin I_{K_1}$ se verifican pues $K_1 \subset K$.

Recíprocamente, sea dado un X que verifica el nuevo sistema de restricciones y veamos que $X \in K_1$. Es claro que $X \in K$, pues las restricciones modificadas son más estrictas que las que definen K. Por otra parte podemos determinar un $Y \in K_1$ tal que $f_i(Y) < b_i, \forall i \notin I_{K_1}$ (por un argumento del todo similar al usado en la proposición 1, del párrafo B). Como en la recta que une X e Y hay puntos $Y^* \in K$, próximos a Y resulta que Y es interior al segmento $[X,Y^*]$ y además $Y \in K_1$, como K_1 es una cara de K, resulta $X \in K_1$. C.Q.D.

Una cara K_1 de un poliedro K es, como resulta de lo precedente, un poliedro contenido en K. El conjunto de restricciones rígidas relativas a K_1 es el que corresponde a los índices de I_{K_1}. Como $(K_1) = \{X \mid f_i(X) = b_i, i \in I_{K_1}\}$ se tiene que $K_1 = (K_1) \cap K$.

Dado $X^o \in K$ sea $I_{X^o} = \{i \mid f_i(X^o) = b_i\}$; toda restricción tal que $f_i(X^o) = b_i$ - es decir $i \in I_{X^o}$ - se dirá LIGADA a X^o (o que es ACTIVA para X^o).

La cara K_1 de K definida por $K_1 = \{X \mid f_i(X) = b_i , i \in I_{X^o}\} \cap K$ se dirá la cara ligada a X^o; ella es la menor cara de K que contiene a X^o.

E. Una consecuencia importante es el siguiente resultado:

PROPOSICION 6. Sea $X^o \in K$, X^o es un vértice de K si y sólo si el sistema lineal $f_i(X) = b_i$, $i \in I_{X^o}$ tiene solución única $(X = X^o)$.

Observemos que si X^o es un vértice y K_1 una cara de K; $X^o \in K_1$ si y sólo si $I_{K_1} \subset I_{X^o}$.

Además de los vértices, las aristas de un poliedro, es decir las caras de dimensión 1, son importantes en conexión con la programación lineal.

Toda arista K_1 de K puede obtenerse como intersección de K con una recta de la forma: (*) $\Sigma = \{X \mid f_i(X) = b_i \ , \ i \in I\}$

(siendo I un subconjunto del conjunto total de índices correspondientes a las restricciones que definen K). Basta tomar $I = I_{K_1}$.

Dado el vértice X^o de K, nos preguntamos que condiciones debe verificar el subconjunto I de I_{X^o} para que $K_1 = \Sigma \cap K$ sea una arista de K - incidente en X^o , necesariamente - si Σ es una recta de la forma (*).

Por ser $K_1 = \Sigma \cap K$ y Σ una variedad lineal tenemos que $(K_1) \subset \Sigma$. Para que K_1 sea una arista es necesario y suficiente que $\dim(K_1) = 1$; como $\dim \Sigma = 1$, esto ocurre si y sólo si $(K_1) \neq \{X^o\}$.

Sea D un vector director de Σ, es decir una solución no nula del sistema homogéneo $f_i(U) = 0$, $i \in I$. Es claro que $(K_1) \neq \{X^o\}$ equivale a decir que existe $t \neq 0$ tal que $X^o + tD \in K$.

Analicemos esta condición, que por lo que acabamos de ver equivale a afirmar que K_1 es arista.

PROPOSICION 7. Con las notaciones e hipótesis precitadas: K_1 es una arista de K - incidente en X^o, necesariamente - si y sólo si:

i) $f_j(D)$ se mantiene o bien no-negativo o bien no positivo para todo $j \in I_{X^o} - I$.

ii) Si para $j \in I_{X^o} - I$ la restricción correspondiente es una igualdad: $f_j(D) = 0$.

Supongamos primero que $X^o + tD \in K$ para un $t > 0$. Si $j \in I_{X^o} - I$ por ser: $f_j(X^o + tD) = f_j(X^o) + t\, f_j(D) \leq b_j$ y $f_j(X^o) = b_j$ resulta $t\, f_j(D) \leq 0$ y entonces $f_j(D) \leq 0$ (si fuera $X^o + tD \in K$ para un $t < 0$ se tendrá $f_j(D) \geq 0$, $\forall\, j \in I_{X^o} - I$).

Por otra parte si la restricción correspondiente al índice j es una igualdad se tendrá $f_j(D) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que valen i) (en la segunda alternativa $f_j(D) \leq 0$ pa ra todo $j \in I_{X^o}-I$) e ii). Las restricciones de $I_{X^o}-I$ valen para cualquier $t>0$ y lo mismo ocurre para $i \in I$ pues: $f_i(X^o+tD) = f_i(X^o) = b_i$. Para $j \notin I_{X^o}$ es $f_j(X^o) < b_j$, luego para $t > 0$ suficientemente pequeño, cualquiera sea $j \notin I_{X^o}$ será $f_j(X^o+tD) < b_j$.

Es fácil ver que la proposición puede reformularse en los siguientes términos:

PROPOSICION 7'. Sea $I \subset I_{X^o}$, e I contenga todo índice correspondiente a una restricción que sea una igualdad. Sea $\Sigma = \{X \mid f_i(X) = b_i \ , i \in I\}$ de dimensión 1 y D un vector director de Σ. $K_1 = \Sigma \cap K$ es una arista de K si y sólo si $f_j(D)$ se mantiene o bien no-negativo o bien no-positivo en todo $j \in I_{X^o}-I$.

Obsérvese que si K_1 es una arista, o una cara cualquiera, de K, el conjunto de índices $I = I_{K_1}$ contiene efectivamente todos los índices correspondientes a igualdades.

Consideremos una arista K_1 con el vector D verificando $f_j(D) \le 0$, para todo $j \in I_{X^o}-I$. Si para todo $i \notin I_{X^o}$ es $f_i(D) \le 0$, $X^o+tD \in K$ para todo $t \ge 0$ pues $f_i(X^o+tD) = f_i(X^o) + t\, f_i(D) < b_i$ si $i \notin I_{X^o}$; las restantes restricciones se satisfacen como se vió en la prueba de la proposición 7.

En este caso $K_1 = \{X^o+tD \ , \ t \ge 0\}$ es una arista infinita de K.

Si en cambio, para un $k \notin I_{X^o}$ es $f_k(D) > 0$, $X^o+tD \in K$ si y sólo si $f_i(X^o) + t\, f_i(D) \le b_i$ para los $i \notin I_{X^o}$ tales que $f_i(D) > 0$ (para los otros vale $f_i(X^o) + t\, f_i(D) \le b_i$ para todo $t \ge 0$); esto equivale a decir que t debe ser tal que:

$$t \le t_o = \min_{i \notin I_{X^o}, f_i(D)>0} \frac{b_i - f_i(X^o)}{f_i(D)}$$

En este caso K_1 es una arista finita de extremos X^o , X' , siendo $X' = X^o+t_oD$, es decir $K_1 = [X^o,X']$.

El problema de determinar los vértices de un poliedro K de R^n es un problema difícil. El mismo grado de dificultad tiene el problema de determinar las aristas incidentes en un vértice fijo de K. Piense en una pirámide de R^3, cuya base es un n-ágono plano: las aristas incidentes en el vértice cúspide se corresponden con los vértices del n-ágono base. Puede probarse, con algún trabajo previo que tal correspondencia se presenta en general.

No obstante, el problema es más simple en el caso particular en que el vértice X^o es NO-DEGENERADO. Tal denominación se utiliza para el caso en que I_{X^o} tiene n elementos, donde n es el número de variables x_i.

Volviendo a la definición de I_{X^o},esto significa que hay exactamente n ecuaciones $f_i(X) = b_i$ en el sistema lineal que determina X^o (ver proposición 6); o sea exactamente n hiperplanos, correspondientes a restricciones, contienen a X^o (tal es el caso de una pirámide de base triangular en R^3).

Es fácil verificar en tal caso que, para $k \in I_{X^o}$, el conjunto de índices $I = I_{X^o}-\{k\}$ origina un sistema (*) $f_j(U) = 0 \quad j \in I$, de indeterminación 1. Estos son los únicos subconjuntos $I \subset I_{X^o}$ en tales condiciones.

Sea $D^{(k)}$ $(k \in I_{X^o})$ una solución no nula del sistema (*); $\{D^{(k)}\ ,\ k \in I_{X^o}\}$ da una base de R^n; $D^{(k)}$ será un vector director de una arista si y sólo si la restricción correspondiente al índice k es una desigualdad $f_k(X) \leq b_k$.

Como podemos sustituir en la definición del poliedro K las restricciones rígidas por igualdades (si ya no eran igualdades) podemos afirmar, igualmente, que $D^{(k)}$ será paralelo a una arista incidente en X^o si y sólo si la restricción correspondiente $(f_k(X) \leq b_k)$ no es rígida. En particular se vé que si en K hay un vértice no-degenerado toda restricción rígida es necesariamente una igualdad. Resulta entonces:

PROPOSICION 8. En un vértice no-degenerado X^o, inciden exactamente n-m aristas, siendo n el número de variables y m el número de restricciones rígidas (necesariamente igualdades).

Obsérvese que n-m coincide con la dimensión de K.

F. Es fácil aplicar lo dicho anteriormente al caso en que el poliedro K es definido por un sistema de restricciones en forma normal: $A_{MN}\ X_N = B_M\ ,\ x_i \geq 0\ ,$ $i \in N$, donde suponemos que la característica de la matriz A_{MN} es $m = |M|$.

K es claramente propio, pues lo es el cono $\{X_N \mid x_i \geq 0 , i \in N\}$ que contiene a K. El cono asintótico de K es: $Q = \{X_N \mid A_{MN}X_N = 0 , x_i \geq 0 , i \in N\}$.

Las caras de K se obtienen como las soluciones X del sistema $A_{MN}X_N = B_M$, $x_i \geq 0$, $i \in N$ que tienen ciertas coordenandas prefijadas nulas, Sea $J' \subset N$; las soluciones del sistema $A_{MN}X_N = B_M$ con $X_{J'} = 0_{J'}$ que verifican $x_i \geq 0$, $i \in I' = N-J'$ constituyen una cara de K.

Esto es lo mismo que decir que una cara K_1 de K está constituída por los $X_N = (X_{I'}, 0_{J'})$, donde $X_{I'}$ es solución del sistema $A_{MI'}X_{I'} = B_M$, $x_i \geq 0$, $i \in I'$.

En particular $X^o \in K$ es un vértice de K si y sólo si $I^o = \{i \mid x_i^o > 0\}$ corresponde a columnas A_i linealmente independientes de la matriz A_{MN} pues en tal caso y sólo en tal caso $A_{MI^o}X_{I^o} = B_M$ tiene solución única $(X_{I^o}^o)$. Esto equivale a decir que X^o es una solución básica no-negativa del sistema lineal $A_{MN}X_N = B_M$, respecto de una base $\{A_i\}_{i \in I}$; $I \supset I^o$ (ver proposición 1, párrafo B, INTRODUCCION) y en consecuencia el sistema lineal $A_{MN}X_N = B_M$ se escribe en la forma equivalente:

$$X_I + X_{IJ}^o X_J = X_I^o \qquad (J = N-I)$$

Vamos a tratar de asociar con cada $k \in J$ una arista incidente en X^o. Preferimos trabajar con el sistema lineal puesto en la forma precedente, en lugar del sistema original $A_{MN}X_N = B_M$.

El sistema homogéneo $U_I + X_{IJ}^o U_J = 0_I$, $u_j = 0$ $j \in J-k$ tiene indeterminación 1. En efecto, poniendo $u_k = t$ se obtiene, considerando que $u_j = 0$ para $j \in J-k$, $u_i = -x_{ik}^o t$ para todo $i \in I$; sea D el vector cuyas componentes d_i $(i \in N)$ están definidas por:

$$d_i = \begin{cases} -x_{ik}^o & i \in I \\ 1 & i = k \\ 0 & i \in J-k \end{cases}$$

Según lo visto en el párrafo E - cuidadosamente trasladado a nuestro caso - D será vector director de una arista si y sólo si $d_i \geq 0$ para todo $i \in I-I^o$, esto es: $x_{ik}^o \leq 0$ para todos los índices $i \in I$ donde $x_i^o = 0$. (Se vió en el algoritmo simplex, que si éste no es el caso, $\{X^o+tD , t \in R\}$ corta a K sólo en el vértice X^o).

Si además ocurre $d_i = -x_{ik}^o \geq 0$ para todo $i \in I$, la arista es infinita. Caso contrario el otro vértice de la arista es: $X' = X^o + t_o D$, con

$$t_o = \min_{\substack{i \in I \\ d_i > 0}} \frac{0 - x_i^o}{-d_i} = \min_{x_{ik}^o > 0} \frac{x_i^o}{x_{ik}^o}$$

Una funcional lineal $L(X) = \langle C_N . X_N \rangle$, a maximizar en K, crecerá sobre la arista en consideración si y sólo si $L(D) = -\sum_{i \in I} c_i x_{ik}^o + c_k . 1 = -\Delta_k > 0$. De aquí resulta que, geométricamente, el algoritmo simplex (para un problema de maximización) consiste en la reiteración de pasajes de vértice a vértice, siguiendo cada vez una arista a lo largo de la cual la funcional crece. Pero observemos que algunos pasajes van de un vértice a él mismo, es el caso en que $t_o = 0$.

G. Hemos visto que $(K) = \{X \mid f_i(X) = b_i \ , \ i \in I\}$, donde I es el conjunto de índices correspondientes a restricciones rígidas. Si J es el conjunto de índices correspondientes a las restricciones flexibles de K entonces: $K = \{X \mid f_j(X) \leq b_j \ , \ j \in J\} \cap (K)$.

El interior relativo a (K) de un semiespacio $S^{(j)}$ de $(K) : S^{(j)} = \{X \mid f_j(X) \leq b_j\} \cap (K)$ es $\overset{o}{S}{}^{(j)} = \{X \mid f_j(X) < b_j\} \cap (K)$; luego el interior de K relativo a (K) es: $\overset{o}{K} = \bigcap_{j \in J} \{X \mid f_j(X) < b_j\} \cap (K)$ ya que $\overset{o}{\overbrace{\bigcap_{j \in J} S^{(j)}}} = \bigcap_{j \in J} \overset{o}{S}{}^{(j)}$. Revisando la demostración de la proposición 1 (párrafo B) se ve que $\overset{o}{K} \neq \phi$.

Estudiaremos a continuación algunas propiedades de la estructura ordenada de las caras de un poliedro K. Supondremos que $(K) = R^n$ lo que no es perder generalidad. De esta manera $K = \{X \mid f_j(X) \leq b_j \ , \ j \in J\}$ siendo todas las restricciones flexibles.

PROPOSICION 9. La restricción $f_j(X) \leq b_j$ es esencial si y sólo si existe $\bar{X} \in K$ tal que: $f_j(\bar{X}) = b_j$ y $f_i(\bar{X}) < b_i$, para todo $i \in J$, $i \neq j$.

En efecto; si $f_j(X) \leq b_j$ es una restricción esencial, existe $X' \in R^n$ tal que $f_i(X') \leq b_i$ para todo $i \in J$, $i \neq j$ y $f_j(X') > b_j$ (caso contrario la restricción $f_j(X) \leq b_j$ se podría eliminar). Como todas las restricciones son flexibles existe $Y \in K$ tal que $f_i(Y) < b_i$, para todo $i \in J$. Tomemos $\bar{X} \in [Y,X']$ tal que $f_j(\bar{X}) = b_j$, este punto cumple las condiciones requeridas.

Recíprocamente, sea $\bar{X} \in K$ tal que $f_j(\bar{X}) = b_j$, $f_i(\bar{X}) < b_i$, para todo $i \in J$, $i \neq j$. Estas últimas desigualdades $f_i(X) < b_i$, $i \in J$, $i \neq j$, se mantienen en un entorno $B(\bar{X},r)$ de $\bar{X}$ y en ese entorno no puede ser $f_j(X) \leq b_j$ (pues deduciríamos $f_j(X) \leq b_j$ en R^n), luego para algún $X' \in B(\bar{X},r)$ será $f_j(X') > b_j$. La existencia de X' verificando $f_i(X') < b_i$, para todo $i \in J$, $i \neq j$; $f_j(X') > b_j$, muestra que la restricción $f_j(X) \leq b_j$ es esencial.

Es claro que retirando las restricciones superfluas, podemos suponer - y así lo haremos - que K está definido sólo por las restricciones esenciales. La proposición muestra, en particular, la unicidad del conjunto de restricciones esenciales flexibles.

Para cada $j \in J$; $K_j = \{X \mid f_j(X) = b_j\} \cap K$ es una cara de K de dimensión n-1 , siendo n la dimensión de K. En efecto, por la proposición 9, existe $\bar{X}$ tal que $f_j(\bar{X}) = b_j$ y $f_i(\bar{X}) < b_i$ para todo $i \in J$, $i \neq j$, luego $(K_j) = \{X \mid f_j(X) = b_j\}$. La unión de las caras K_j, $j \in J$, constituye la frontera de K: $\partial K = K - \overset{o}{K}$.
Es claro que toda cara de K, diferente de K, es intersección de caras $K_j, j \in J$.

Sea $C(K)$ el conjunto de caras de K, ordenadas por inclusión. No es difícil probar las siguientes propiedades:

1) $C(K)$ es parcialmente ordenado, finito, con último elemento: K.

2) $C(K)$ es un reticulado condicionado inferiormente. Esto es:si $K_1,K_2,K_3 \in C(K)$ siendo $K_3 \subset K_1$; $K_3 \subset K_2$ entonces $K_1 \cap K_2 \in C(K)$ ($K_1 \cap K_2$ es la mayor cara de $C(K)$ que precede K_1 y K_2).

3) Si $K_1,K_2 \in C(K)$; $K_1 \subset K_2$ entonces $K_1 = \cap_j K_2^{(j)}$ donde $K_2^{(j)} \in C(K)$ y $K_2^{(j)}$ precede inmediatamente a K_2 (para todo j).

4) Existe d: $C(K) \to \{0,1,2,...\}$ tal que si $K_1,K_2 \in C(K)$ y $K_1 \subset K_2$; K_1 precede inmediatamente a K_2 si y sólo si $d(K_2)-d(K_1) = 1$.

5) Si $K_1,K_2 \in C(K)$; $K_1 \subset K_2$, el número de caras que siguen a K_1 y preceden inmediatamente a K_2 es mayor o igual a $d(K_2)-d(K_1)$. Si $d(K_2)-d(K_1) = 2$ el nú

mero de caras que siguen a K_1 y preceden inmediatamente a K_2 es igual a 2.

H. La combinación lineal $\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\ldots+\alpha_pA_p$ se dice una combinación POSITIVA de $A_1,A_2,\ldots,A_p$ si $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,p$. Si además $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ la combinación se dice CONVEXA.

El conjunto de todas las combinaciones positivas de $A_1,A_2,\ldots,A_p$ se denota: $\langle A_1,A_2,\ldots,A_p\rangle$. El conjunto de todas las combinaciones convexas de $A_1,A_2,\ldots,A_p$ se denota: $[A_1,A_2,\ldots,A_p]$.

Es fácil verificar que: $\langle A_1,A_2,\ldots,A_p\rangle$ es el menor cono que contiene a $A_1,A_2,\ldots,A_p$; y que $[A_1,A_2,\ldots,A_p]$ es el menor convexo que contiene a $A_1,A_2,\ldots,A_p$.

PROPOSICION 10. Si K es un poliedro propio, de cono asintótico Q:

1) K contiene por lo menos un vértice.

2) Si $V^{(1)},V^{(2)},\ldots,V^{(p)}$ son vértices de K y $D_1,D_2,\ldots,D_q$ los vectores directores de las aristas de Q, entonces:

$$K = [V^{(1)},V^{(2)},\ldots,V^{(p)}] + \langle D_1,D_2,\ldots,D_q\rangle .$$

3) $Q = \langle D_1,D_2,\ldots,D_q\rangle$.

DEMOSTRACION.

1) Tomando una cara K_1 de K de dimensión mínima, se ve que dim $K_1 = 0$, esto es: $K_1 = \{V\}$; V vértice de K. Si no fuese así puesto que $K_1 \neq (K_1)$, ya que K es propio, es $\partial K_1 \neq \phi$ y entonces existirá una cara $K_1' \subset K_1$ siendo dim $K_1'<$dim K_1.

2) Basta probar que $K \subset [V^{(1)},V^{(2)},\ldots,V^{(p)}] + \langle D_1,D_2,\ldots,D_q\rangle$.

Razonemos por inducción sobre la dimensión del poliedro.

Para $K = \{V\}$ es trivial.

Sea $X \in K$ y distingamos dos casos: a) $X \in \partial K$; b) $X \in \overset{o}{K}$.

En el caso a) tomemos una cara K_1 de K tal que $X \in K_1$, $K_1 \neq K$, luego dim $K_1 <$ dim K; aplicando la hipótesis inductiva X se expresa como suma de una combinación convexa de vértices de K_1 y una combinación positiva de los vectores directores de las aristas del cono asintótico Q_1 de K_1. Pero los vértices de K_1 son también vértices de K y como Q_1 es cara de Q los vectores directores de aristas de Q_1 lo son de aristas de Q por lo tanto $X \in [V^{(1)},V^{(2)},\dots,V^{(p)}] + \langle D_1,D_2,\dots,D_q \rangle$.

En el caso b) cortemos K con un plano π (variedad lineal de dimensión 2) que contenga a X. $\pi \cap K$ es un poliedro propio de π, esto quiere decir que su cono asintótico es un ángulo de amplitud menor que 180°. Es claro que podemos trazar una recta Σ cortando a ambos lados del ángulo (en puntos diferentes). En estas condiciones es inmediato que la recta que pasa por X paralela a Σ corta a K en dos puntos $X',X'' \in \partial K$; luego $X = \alpha X'+\beta X''$, $\alpha+\beta = 1$; $\alpha,\beta \geq 0$. Aplicando a X',X'' la conclusión del caso a) y utilizando la igualdad anterior se ve que $X \in [V^{(1)},V^{(2)},\dots,V^{(p)}] + \langle D_1,D_2,\dots,D_q \rangle$.

3) El cono asintótico Q es de por sí un poliedro cuyo único vértice es el punto 0; luego $Q = [0] + \langle D_1,D_2,\dots,D_q \rangle = \{0\} + \langle D_1,D_2,\dots,D_q \rangle = \langle D_1,D_2,\dots,D_q \rangle$.

COROLARIO. Para todo poliedro K se tiene:

$$K = [V^{(1)},V^{(2)},\dots,V^{(p)}] + \langle D_1,D_2,\dots,D_q \rangle + (S_1,S_2,\dots,S_r) .$$

($(S_1,S_2,\dots,S_r)$ indica el espacio generado por los vectores directores de rectas contenidas en K).

En efecto, ya vimos que $K = K_o+S$, donde S es un espacio lineal y K_o es un poliedro propio. Basta entonces tomar $V^{(1)},V^{(2)},\dots,V^{(p)}$; $D_1,D_2,\dots,D_q$ como en la proposición 10 pero en relación con K_o y $S_1,S_2,\dots,S_r$ vectores que generan S.

PROPOSICION 11. Si K es un poliedro y L una funcional lineal acotada superiormente en K, entonces L toma su valor máximo en K; y más precisamente en toda una cara de K. Si K es propio existe un vértice de K donde L toma su valor máximo.

En efecto, utilizando la igualdad del corolario, vemos que $L(D_i) \leq 0$ $i=1,2,\dots,q$ $L(S_h) = 0$ $h = 1,2,\dots,r$ (caso contrario se verá que L no es acotado superiormente).

Si $V^{(k)}$ es tal que $L(V^{(k)}) \geq L(V^{(i)})$, $i = 1,2,\dots,p$, como todo $X \in K$ se puede escribir

$$X=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i V^{(i)}+\sum_{j=1}^{q}\lambda_j D_j+\sum_{h=1}^{r}\mu_h S_h \quad (\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=1,\alpha_i\geq 0,i=1,2,\ldots,p;\lambda_j\geq 0,j=1,2,\ldots,q)$$

resulta:

$$L(X)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i L(V^{(i)})+\sum_{j=1}^{q}\lambda_j L(D_j)+\sum_{h=1}^{r}\mu_h L(S_h)\leq\sum_{i=1}^{p}\alpha_i L(V^{(i)})\leq L(V^{(k)})\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=L(V^{(k)}).$$

Utilizando la proposición 5, vista en el párrafo D, se ve que $\{X|L(X)=\max_{Y\in K} L(Y)\}$ es una cara de K. Si K es propio, $V^{(k)}$ es un vértice de K y L(X) toma su valor en ese vértice.

Hemos probado así una parte del siguiente teorema:

TEOREMA DE H. WEYL-MOTZKIN. Las siguientes propiedades de un convexo K son equivalentes:

1) K es un poliedro.

2) K es un convexo cerrado con un número finito de caras.

3) K es de la forma:

$$[V^{(1)},V^{(2)},\ldots,V^{(p)}] + \langle D_1,D_2,\ldots,D_q\rangle + (S_1,S_2,\ldots,S_r).$$

Si K es propio la propiedad 3) se reduce

3') K es de la forma: $[V^{(1)},V^{(2)},\ldots,V^{(p)}] + \langle D_1,D_2,\ldots,D_q\rangle$ donde los $V^{(i)}$ son vértices de K y los D_j son los vectores directores de aristas de Q.

Es fácil probar, y aún sin recurrir al teorema precedente que la imagen inversa, por la aplicación lineal $\phi: E \to F$, de un poliedro de F es un poliedro de E. Basta sustituir las restricciones: $f_i(X) \leq b_i$ en E, por las restricciones $g_i(X) \leq b_i$, donde $g_i = f_i \circ \phi$.

En cambio, no podemos probar tan fácilmente que la imagen directa por la aplicación ϕ de un poliedro de E es un poliedro de F. Utilizando el teorema de H. Weyl-Motzkin, ello es inmediato:

$$\text{Si} \quad K = [V^{(1)},V^{(2)},\ldots,V^{(p)}] + \langle D_1,D_2,\ldots,D_q\rangle + (S_1,S_2,\ldots,S_r)$$

se ve sin dificultad que:

$$\phi(K)=[\phi(V^{(1)}),\phi(V^{(2)}),\ldots,\phi(V^{(p)})]+\langle\phi(D_1),\phi(D_2),\ldots,\phi(D_q)\rangle+(\phi(S_1),\phi(S_2),\ldots,\phi(S_r))$$

luego $\phi(K)$ es un poliedro.

Tenemos entonces:

PROPOSICION 12. La imagen directa (imagen inversa) por una aplicación lineal ϕ: $E \to F$ de un poliedro de E (de F) es un poliedro de F (de E).

De aquí resulta:

COROLARIO. 1) Si K es un poliedro de E, $\lambda K = \{\lambda X , X \in K\}$ es un poliedro de E.

2) Si K_1, K_2 son poliedros de E, K_1+K_2 es un poliedro de E.

Para probar 2) basta notar que la aplicación ϕ: $E \times E \to E$, $\phi(X,Y) = X+Y$ es lineal, y que: K_1+K_2 es la imagen por ϕ de $K_1 \times K_2 = \pi_1^{-1}(K_1) \cap \pi_2^{-1}(K_2)$ (siendo π_1, π_2 la primera y segunda proyección de $E \times E$ en E) que es un poliedro de $E \times E$.

NOTAS Y PROBLEMAS.

A continuación vamos a indicar algunas propiedades de los conjuntos convexos que nos interesa destacar.

TEOREMAS DE SEPARACION DE CONVEXOS.

Consideremos un espacio $E \simeq R^n$, dados $X,Y \in E$, $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$; $Y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ indiquemos $\langle X.Y \rangle$ el producto escalar en E. Las funcionales de E se expresan en la forma $f(X) = \langle A.X \rangle$ para algún $A \in E$.

TEOREMA. Sea K un convexo de E tal que $0 \notin K$. Existe una funcional lineal f no nula, tal que $f(X) \geq 0$, para todo $X \in K$. Si además, K es cerrado, se puede determinar f de modo que $f(X) > 0$ para todo $X \in K$ (o lo que es equivalente $f(X) \geq \alpha > 0$ para todo $X \in K$ y un cierto α).

DEMOSTRACION. Consideremos en primer término el caso en que K es un convexo cerrado. Como $0 \notin K$, para todo $X \in K$ es $\|X\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2} > 0$. Sea $X^o \in K$ un punto de K a distancia mínima del origen, esto es: $\|X\| \geq \|X^o\|$, para todo $X \in K$. Tal punto existe si K es compacto, por el teorema de Weierstrass aplicado a la función: $X \to \|X\|$. Si K no es compacto, consideremos el compacto $K_r = K \cap \{X \mid \|X\| \leq r\} \neq \phi$ y el punto $X^o \in K_r$ que realiza el mínimo de $\|X\|$ en K_r; este punto realiza también el mínimo de K (desde que $\|X^o\| \leq \|X\|$ para todo $X \in K_r$ implica $\|X^o\| \leq \|X\|$, para todo $X \in K$).

Observemos que $X^o \neq 0$, y consideremos la funcional $\langle X^o.X\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^o x_i$.

Veamos que $\langle X^o.X\rangle \geq \|X^o\|^2$, o sea que $\langle X^o.(X-X^o)\rangle \geq 0$, para todo $X \in K$.

Dado $X \in K$ consideremos la recta Σ que une X y X^o, todo punto de la misma es de la forma: $X^o+t(X-X^o)$. El punto de Σ a distancia mínima de 0 es tal que $\langle (X^o+t(X-X^o)).(X-X^o)\rangle = 0$, por lo tanto corresponde a

$$t = t_o = \frac{-\langle X^o.(X-X^o)\rangle}{\|X-X^o\|^2} \quad ;$$

$|t_o| \leq 1$, como se ve inmediatamente (observemos que $\|X-X^o\|^2 \geq 2\|X^o\|^2-2\langle X^o.X\rangle$).

Veamos que $t_o \leq 0$; si fuese $t_o > 0$, $Y^o = X^o+t_o(X-X^o) = (1-t_o)X^o+t_oX \in K$ (Y^o sería combinación convexa de X^o y X desde que suponemos $0 < t_o \leq 1$) y además Y^o distaría menos del origen que X^o; por lo tanto debe ser $t_o \leq 0$, o sea $\langle X^o.(X-X^o)\rangle \geq 0$. La funcional buscada es: $f(X) = \langle X^o.X\rangle$ y $\alpha = \|X^o\|^2 > 0$.

Veamos ahora la primera parte del teorema. Para cada conjunto finito $F \subset K$ pongamos $Q_F = \{Y \mid \|Y\| = 1, \langle Y.A\rangle \geq 0, A \in F\}$. Q_F es un conjunto cerrado del compacto $S = \{Y \mid \|Y\| = 1\}$, además Q_F es no vacío, pues $[F] \subset K$ y $[F]$ es compacto, convexo (ver PROBLEMA 6) y no contiene al origen, lo que asegura - por lo probado en primer término - que para algún $Y \neq 0$:$\langle Y.X\rangle > 0$ para todo $X \in [F]$ (en particular para todo $A \in F$), es claro que se puede tomar $|Y| = 1$, o sea $Y \in S$.

Observemos que si F,F' son dos conjuntos finitos de K tales que $F \subset F'$ se tiene que $Q_F \supset Q_{F'}$ y entonces si $F = \bigcup_{i=1}^{p} F_i$, resulta $Q_F \subset \bigcap_{i=1}^{p} Q_{F_i}$

Los cerrados $Q_F \subset S$ tienen la propiedad de intersección finita; siendo S compacto existe $\bar{Y} \in \cap Q_F$ luego $\langle \bar{Y}.X\rangle \geq 0$ para todo $X \in K$ (observemos que entre los Q_F están los $Q_{\{X\}}$). La funcional buscada es entonces: $f(X) = \langle \bar{Y}.X\rangle$.

COROLARIO 1. Si K_1,K_2 son convexos disjuntos, existe una funcional f, no nula, que los separa; es decir: $\sup\limits_{X_1 \in K_1} f(X_1) \leq \inf\limits_{X_2 \in K_2} f(X_2)$.

Además si K_1 es compacto y K_2 es cerrado la separación es estricta; es decir:

$$\sup_{X_1 \in K_1} f(X_1) < \inf_{X_2 \in K_2} f(X_2)$$

La demostración se basa en el teorema anterior notando que $0 \notin K_2 - K_1$, y que $K_2 - K_1$ es un convexo cerrado cuando K_1 es compacto y K_2 cerrado (ver PROBLEMA 7).

PROBLEMA 1. K es convexo si y sólo si dados $A_1, A_2, \ldots, A_p \in K; X \in [A_1, A_2, \ldots, A_p]$ implica $X \in K$.

Dado un conjunto $K \subset R^n$, el menor convexo - en el orden de inducción - que lo contiene, existe y se indica: $[K]$: CAPSULA CONVEXA de K.

PROBLEMA 2. Si K es un conjunto de R^n, $[K]$ coincide con el conjunto de las combinaciones convexas de las partes finitas de K. Si $K = \cup_{i=1}^{s} K_i$, donde los K_i son convexos entonces:

$$[K] = [K_1, K_2, \ldots, K_s] = \{X \mid X = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i A_i \ , \ A_i \in K_i \ , \ \alpha_i \geq 0 \ , \ \sum \alpha_i = 1\}$$

PROBLEMA 3. Sea $f: R^n \rightarrow R^m$ una aplicación afín, es decir $f(X) = A_{MN}X_N + B_M$, entonces si $K \subset R^n$ es convexo; $f(K)$ es convexo de R^m y si $K' \subset R^m$ es convexo $f^{-1}(K')$ es convexo de R^n. (Debe notarse que una aplicación afín $f: R^n \rightarrow R^m$ puede también definirse como una aplicación que verifica $f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$, para todo $X, Y \in R^n$, para todo $\alpha, \beta : \alpha + \beta = 1$).

PROBLEMA 4. La clausura de un convexo es un convexo. El menor convexo cerrado que contiene a un conjunto K, coincide con $\overline{[K]}$: CAPSULA CONVEXA CERRADA DE K.

PROBLEMA 5. Si K es convexo, $X \in \bar{K}$ y $X^o \in \mathring{K}$ entonces $[X^o, X) = \{\alpha X^o + \beta X \ ; \ \alpha \geq 0, \beta > 0 \ ; \ \alpha + \beta = 1\}$ está contenido en $\mathring{K}$. En consecuencia el interior de un conjunto convexo es un convexo, y además $\overline{\mathring{K}} = \bar{K}$, $\mathring{\bar{K}} = \mathring{K}$ (si $\mathring{K} \neq \phi$) (ver [3]).

PROBLEMA 6. Si $K_1, K_2, \ldots, K_s$ son convexos compactos, la suma $K_1 + K_2 + \ldots + K_s$ y la cápsula convexa $[K_1, K_2, \ldots, K_s]$ son convexos compactos. En particular $[A_1, A_2, \ldots, A_s]$ es un convexo compacto.

Observemos que:

i) $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_s$ es compacto y convexo.

ii) La aplicación ϕ: $(R^n)^s \to R^n$ definida por: $\phi(X^{(1)},X^{(2)},\ldots,X^{(s)}) = = X^{(1)} + X^{(2)} + \ldots + X^{(s)}$ es continua.

iii) Si $P_s = \{\alpha \mid \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1 , \alpha_i \geq 0\}$ la aplicación ψ: $(R^n)^s \times P_s \to R^n$ definida por: $\psi(X,\alpha) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i X^{(i)}$ $(X = (X^{(1)},X^{(2)},\ldots,X^{(s)})$ es continua.

iv) La imagen del compacto $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_s$ por la aplicación ϕ es: $K_1 + K_2 + \ldots + K_s$ y la imagen del compacto $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_s \times P_s$ por la aplicación ψ es $[K_1,K_2,\ldots,K_s]$.

PROBLEMA 7. Si F es cerrado y K compacto, F+K es cerrado.

Pero observemos que la suma de dos cerrados puede no ser un cerrado.

PROBLEMA 8. Si K es convexo, $\overset{o}{K} \neq \phi$.

La demostración puede desarrollarse de la siguiente manera:

Un SIMPLEX de dimensión p es un conjunto de la forma $[A_o,A_1,\ldots,A_p]$ donde cada A_i no es combinación afín de los restantes A_j (es decir A_i no es de la forma: $\sum_{j \neq i} \alpha_j A_j$, $\sum_{j \neq i} \alpha_j = 1$, o lo que es equivalente: $A_1 - A_o$, $A_2 - A_o, \ldots, A_p - A_o$ son linealmente independientes). Se puede tomar un simplex $[A_o,A_1,\ldots,A_p] \subset K$, maximal. Se ve entonces $(A_o,A_1,\ldots,A_p) = (K)$ y que el interior de un simplex es no vacío.

PROBLEMA 9. Indicar un ejemplo de un convexo K, $0 \notin K$, tal que no exista ninguna funcional f que verifique $f(X) > 0$ para todo $X \in K$.

PROBLEMA 10. Indicar un ejemplo de dos convexos cerrados disjuntos que no se separan estrictamente.

IV. COMPATIBILIDAD Y DUALIDAD.

A. Sea E un espacio $E \simeq R^n$, y consideremos un cono cerrado $Q \subset E$, definiremos el cono DUAL de Q (respecto al producto escalar de E) como el conjunto $Q^* \subset E$:

$$Q^* = \{X \mid \langle X.Y \rangle \geq 0 \ , \forall \ Y \in Q\}$$

Es claro que Q^* es un cono cerrado, y además que $Q^{**} = (Q^*)^* = Q$.

EJEMPLOS.

1. Si Q es un subespacio de E, $Q^* = Q^\perp = \{X \mid \langle X.Y \rangle = 0 \ , \forall \ Y \in Q\}$.

2. Sean $X,Y \in R^n$; $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $Y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ y consideremos un subconjunto $I \subset N = \{1,2,\ldots,n\}$, definamos:

a) $X \leq^I Y$ si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in I$.

b) $X \leq_I Y$ si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in I$ y además $x_j = y_j$ para todo $j \notin I$.

La relación $X \leq^I Y$ es un preorden de R^n (es decir verifica: $X \leq^I X$ para todo $X \in R^n$; $X \leq^I Y$, $Y \leq^I Z \Rightarrow X \leq^I Z$) mientras que la relación $X \leq_I Y$ es un orden de R^n. Además son compatibles con las operaciones vectoriales de R^n (es decir $X \leq_I Y$ ($X \leq^I Y$) implica $X+Z \leq_I Y+Z$ ($X+Z \leq^I Y+Z$) para todo $Z \in R^n$, y además $X \leq_I Y$ ($X \leq^I Y$) implica $\lambda X \leq_I \lambda Y$ ($\lambda X \leq^I \lambda Y$) si $\lambda \geq 0$).

Valen además las siguientes propiedades:

i) $\langle X.Y \rangle \geq 0$ para $X \geq_I 0$, $Y \geq^I 0$.

ii) Si $\langle X.Y \rangle \geq 0$ para todo $X \geq_I 0$ entonces $Y \geq^I 0$; y si $\langle X.Y \rangle \geq 0$ para todo $Y \geq^I 0$ entonces $X \geq_I 0$.

Los conjuntos $Q = \{X \mid X \geq_I 0\}$; $P = \{Y \mid Y \geq^I 0\}$ son conos poliedrales de R^n; las propiedades i) , ii) expresan que $P^* = Q$ y $Q^* = P$.

Una propiedad que merece ser aislada es la siguiente:

(Q) Si para todo elemento X del cono Q, se verifica $\langle X.Y \rangle \geq \alpha$, α constante, entonces $Y \in Q^*$.

En efecto, si $X \in Q$ también $\lambda X \in Q$ para todo $\lambda > 0$, luego $\langle (\lambda X).Y \rangle \geq \alpha$ para todo $\lambda > 0$ y todo $X \in Q$, por lo tanto $\langle X.Y \rangle \geq \frac{\alpha}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$, entonces si $\lambda \to +\infty$ se obtiene $\langle X.Y \rangle \geq 0$ para todo $X \in Q$, luego $Y \in Q^*$.

B. TEOREMA DE COMPATIBILIDAD.

a) FORMA GEOMETRICA.

TEOREMA 1. Si Q es un cono poliédrico y K un poliedro, ambos no vacíos: $Q \cap K \neq \phi$ si y sólo si para todo $X \in Q^*$ existe $Y \in K$ tal que $\langle X.Y \rangle \geq 0$.

DEMOSTRACION. Probemos que $Q \cap K = \phi$ si y sólo si existe $X \in Q^*$ tal que $\langle X.Y \rangle < 0$ para todo $Y \in K$.

Supongamos que $Q \cap K = \phi$, el conjunto $Q+(-K)$ es un poliedro, luego un convexo cerrado. Como $0 \notin Q+(-K)$, por el Teorema de Separación de Convexos (NOTAS Y PROBLEMAS, III) existe X^o tal que $\langle X^o.(X-Y) \rangle > 0$, para todo $X \in Q$, $Y \in K$; o sea $\langle X^o.X \rangle > \langle X^o.Y \rangle$, para todo $X \in Q$, $Y \in K$, en particular para $Y^o \in K$ (fijo) es $\langle X^o.X \rangle > \langle X^o.Y^o \rangle$, para todo $X \in Q$; por la propiedad (Q) $X^o \in Q^*$, y para $X = 0$ resulta: $\langle X^o.Y \rangle < 0$, para todo $Y \in K$.

Recíprocamente, supongamos que existe $X^o \in Q^*$ tal que $\langle X^o.Y \rangle < 0$, para todo $Y \in K$. Por ser $X^o \in Q^*$ resulta $\langle X^o.X \rangle \geq 0$ para todo $X \in Q$, pero $\langle X^o.Y \rangle < 0$, para todo $Y \in K$, luego $Q \cap K = \phi$.

b) FORMA ANALITICA.

Sea $K \subset R^n$ el poliedro definido por el sistema de restricciones lineales:

$$(S) \quad \begin{cases} \langle A^{(j)}.X \rangle \leq b_j \quad , \quad j \in J \quad (J \subset \{1,2,\ldots,m\} = M) \\ \langle A^{(i)}.X \rangle = b_i \quad , \quad i \notin J \\ x_i \geq 0 \quad , \quad i \in I \quad (I \subset \{1,2,\ldots,n\} = N) \end{cases}$$

que podemos indicar brevemente en la forma:

$$AX \leq_J B \quad , \quad X \geq^I 0$$

donde A indica la matriz de m filas $A^{(i)}$ y n columnas (es decir: $A = A_{MN}$; el sistema será entonces: $A_{MN}X_N \leq_J B_M$, $X_N \geq^I 0_N$).

Consideremos el cono $Q = \{AX \mid X \geq^I 0\}$, el cual es un cono poliédrico de R^m pues es imagen por la aplicación lineal $X \to AX$ - de R^n en R^m - del cono

$\{X \mid X \geq^I 0\}$.

El cono dual de Q: Q^* es el conjunto de los $Y \in R^m$ tales que $\langle Y.(AX) \rangle \geq 0$ para todo $X \geq^I 0$; luego Q = $\{Y \mid YA \geq_I 0\}$ (ver propiedad ii), ejemplo 2, párrafo A).

TEOREMA 1'. $K \neq \phi$, es decir, el sistema (S) es compatible, si y sólo si para todo $Y \in R^m$ tal que $YA \geq_I 0$, $Y \geq^J 0$ se tiene: $\langle Y.B \rangle \geq 0$.

DEMOSTRACION. Supongamos $K \neq \phi$ y sea $X \in K$, esto es X verifica: $AX \leq_J B$, $X \geq^I 0$; luego para todo $Y \in R^m$, $Y \geq^J 0$ (ver propiedad i), ejemplo 2, párrafo A) es: $\langle Y.(AX) \rangle \leq \langle Y,B \rangle$. Como además es: $YA \geq_I 0$ y $X \geq^I 0$ resulta: $\langle (YA).X \rangle \geq 0$. Se tiene entonces: $\langle Y.B \rangle \geq 0$.

Veamos la recíproca. Sea $Q = \{AX \mid X \geq^I 0\}$ y $K_1 = \{Y \mid Y \leq_J B\}$; es claro que $Q \cap K_1 = K$. Si $K = \phi$, por el teorema anterior existe $Y^o \in Q^*$ tal que $\langle Y^o.Z \rangle < 0$ para todo $Z \in K_1$, es decir existe Y^o tal que $Y^oA \geq_I 0$ para el cual $\langle Y^o.Z \rangle < 0$ para todo $Z \leq_J B$. Poniendo $B-Z = W$, vemos que $\langle Y^o.B \rangle < \langle Y^o.W \rangle$ para todo $W \geq_J 0$ (siendo $\langle Y^o.B \rangle$ constante); utilizando la propiedad (Q) resulta $\langle Y^o.W \rangle > 0$ para todo $W \geq_J 0$ y entonces $Y^o \geq^J 0$ (propiedad ii), ejemplo 2, párrafo A), siendo para $W = 0$, $\langle Y^o.B \rangle < 0$. Vemos así que si $K = \phi$, la condición del teorema no es válida.

El siguiente cuadro resume el teorema para $J = \{1,2,\ldots,s\}$; $I = \{1,2,\ldots,r\}$

$$\begin{array}{c|ccccccc|ccc}
 & & I & & & & & & & & \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & & \\
 & \leq & \leq & & \leq & & & & & & \\
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_r & x_{r+1} & \cdots & x_n & & & \\
\hline
0 \leq y_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} & \leq & b_1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & J \\
0 \leq y_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sr} & a_{sr+1} & \cdots & a_{sn} & \leq & b_s & \\
y_{s+1} & a_{s+11} & a_{s+12} & \cdots & a_{s+1r} & a_{s+1\ r+1} & \cdots & a_{s+1n} & = & b_{s+1} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
y_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{mr+1} & \cdots & a_{mn} & = & b_m & \\
\hline
 & \geq & \geq & & \geq & = & & = & & & \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & &
\end{array}$$

En resumen: si con $\langle A^{(i)}.X \rangle$ indicamos el producto escalar de la fila i-ésima por la fila $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ y con $\langle Y.A_i \rangle$ indicamos el producto escalar de la columna $(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ por la columna A_i, para que el poliedro K definido por las desigualdades: $\langle A^{(j)}.X \rangle \leq b_j$, $j \in J$; las igualdades $\langle A^{(i)}.X \rangle = b_i$, $i \notin J$ y las desigualdades $x_i \geq 0$, $i \in I$, sea no vacío, es necesario y suficiente que cualquier sistema de números $y_1,y_2,\ldots,y_m$ que satisfaga las restricciones $\langle Y.A_i \rangle \geq 0$, $i \in I$; $\langle Y.A_j \rangle = 0$, $j \notin I$; siendo $y_j \geq 0$ si $j \in J$ verifique $\langle Y.B \rangle \geq 0$.

Obsérvese que cada y_j afectado a una fila con desigualdad $(\langle A^{(j)}.X \rangle \leq b_j)$ debe ser no-negativo, y a una fila con igualdad $(\langle A^{(j)}.X \rangle = b_j)$ arbitrario; además Y debe verificar la desigualdad $\langle Y.A_i \rangle \geq 0$ si $x_i \geq 0$ y la igualdad $\langle Y.A_j \rangle = 0$ si x_j es arbitrario.

C. TEOREMA DE DUALIDAD.

El teorema de dualidad de G.B. Dantzig, es el resultado más importante de la programación lineal.

Consideremos el problema:

$$P) \qquad \text{maximizar } z = \langle C.X \rangle$$

en el conjunto K de R^n definido por las restricciones:

$$AX \leq_J B$$

$$X \geq^I 0 \quad ;$$

se llama DUAL del problema P) al siguiente problema:

$$P^*) \qquad \text{minimizar } w = \langle Y.B \rangle$$

en el conjunto K^* de R^m definido por las restricciones:

$$YA \geq_I C$$

$$Y \geq^J 0 \ .$$

El cuadro adjunto sirve para expresar ambos problemas para $J = \{1,2,\ldots,s\}$ $I = \{1,2,\ldots,r\}$.

$$
\begin{array}{cc|ccccccc|cc}
 & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxx}}^{I}} & & & & & \\
 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\
 & & \leq & \leq & & \leq & & & & & \\
 & & x_1 & x_2 & \cdots & x_r & x_{r+1} & \cdots & x_n & & \\
\hline
 & 0 \leq y_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} & \leq & b_1 \\
 & 0 \leq y_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} & \leq & b_2 \\
J & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 0 \leq y_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sr} & a_{sr+1} & \cdots & a_{sn} & \leq & b_s \\
 & y_{s+1} & a_{s+11} & a_{s+12} & \cdots & a_{s+1r} & a_{s+1r+1} & \cdots & a_{s+1n} & = & b_{s+1} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & y_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{mr+1} & \cdots & a_{mn} & = & b_m \\
\hline
 & & & & & & & & & \multicolumn{2}{c}{\text{mín}\langle Y.B\rangle} \\
 & & \geq & \geq & & \geq & = & & = & & \\
 & & c_1 & c_2 & \cdots & c_r & c_{r+1} & \cdots & c_n & \multicolumn{2}{c}{\text{máx}\langle CX\rangle}
\end{array}
$$

Este cuadro leído en forma horizontal presenta las restricciones del problema $P)$ y en forma vertical las del problema $P^*)$. Decimos que la restricción $\langle A^{(j)}.X\rangle \leq b_j$ (ó $\langle A^{(j)}.X\rangle = b_j$) tiene por restricción dual: $y_j \geq 0$ (ó y_j arbitrario - lo que significa no restricción). La restricción $x_i \geq 0$ (ó x_i arbitrario) tiene por restricción dual: $\langle Y.A_i\rangle \geq c_i$ ($\langle Y.A_i\rangle = c_i$).

El problema $P^*)$, puesto en forma equivalente:

$$\text{maximizar } -w = \langle Y.(-B)\rangle$$

sujeto Y a las restricciones:

$$Y(-A) = (-A)^t Y \leq_I -C$$

$$Y \geq^J 0$$

tiene por dual el problema:

$$(P^*)^* \qquad \text{minimizar } \langle (-C).X \rangle$$

sujeto X a las restricciones:

$$X(-A)^t = (-A)X \geq_J -B$$

$$X \geq^I 0$$

pero este problema es equivalente al problema $P)$, dicho brevemente $(P^*)^* \equiv P)$ es decir los problemas $P)$ y $P^*)$ son duales uno del otro; lo que también puede verse en el cuadro precedente.

NOTA. Si una variable x_j del problema primal $P)$ no está sometida a restricción, puede ser reemplazada (como se vió) por la diferencia $x'_j - x''_j$, $x'_j \geq 0$, $x''_j \geq 0$, obteniéndose así un problema $P_1)$ equivalente a $P)$. Lo mismo ocurre si la restricción $\langle A^{(i)}.X \rangle = b_i$ es sustituída por las restricciones: $\langle A^{(i)}.X \rangle \leq b_i$, $\langle -A^{(i)}X \rangle \leq -b_i$; o bien si la restricción $\langle A^{(i)}.X \rangle \leq b_i$ es llevada a la igualdad $\langle A^{(i)}.X \rangle + x^*_i = b_i$ mediante la introducción de la variable de holgura $x^*_i \geq 0$.

En cada uno de los tres casos el problema dual adopta una forma diferente. En el primer caso $P^*)$ y $P^*_1)$ difieren solamente en lo siguiente: mientras el problema $P^*)$ tiene la restricción $\langle Y.A_j \rangle = c_j$ correspondiente a la variable x_j arbitraria, el problema $P^*_1)$ tiene las restricciones: $\langle Y.A_j \rangle \geq c_j$;$\langle Y.(-A_j) \rangle \geq -c_j$ correspondientes a las variables $x'_j \geq 0$, $x''_j \geq 0$. Es claro que los problemas $P^*)$ y $P^*_1)$ son equivalentes.

Se puede ver que lo mismo ocurre en los otros dos casos.

El teorema de dualidad es una consecuencia directa del siguiente resultado:

TEOREMA 2. Sea K una matriz antisimétrica de orden n ($k_{ij} = -k_{ji}$, para todo i,j). Existe una solución $\bar{X}$ del sistema:

$$KX \geq_I 0$$

$$X \geq^I 0$$

tal que para todo $i \in I$ se verifica: $(K\bar{X} + \bar{X})_i > 0$.

DEMOSTRACION. Nótese en primer término que por la antisimetría de K es:

$$KX = - XK$$

Para cada vector $e^{(i)} = (\underbrace{0,\dots,0,1}_{i},0,\dots,0) \in R^n$, $i \in I$, planteamos el sistema:

$$KX \geq_I e^{(i)}$$

$$X \geq^I 0$$

Caben dos posibilidades:

a) El sistema es compatible: sea $X^{(i)}$ una solución.

b) El sistema es incompatible: por el teorema de compatibilidad existe un $X^{(i)}$ tal que: $X^{(i)}(-K) \geq_I 0$, $X^{(i)} \geq^I 0$ siendo $\langle X^{(i)}.(-e^{(i)})\rangle < 0$. O sea existe un $X^{(i)}$ tal que $KX^{(i)} \geq_I 0$, $X^{(i)} \geq^I 0$ y $\langle X^{(i)}.e^{(i)}\rangle > 0$.

De a) y b) resulta que para cada $i \in I$, existe una solución $X^{(i)}$ del sistema $KX \geq_I 0$, $X \geq^I 0$ (nótese que $e^{(i)} \geq_I 0$) tal que: o bien $x_i^{(i)} > 0$ en el caso b) (pues $\langle X^{(i)}.e^{(i)}\rangle = x_i^{(i)}$); o bien: $(KX^{(i)})_i > 0$ en el caso a) (pues $(KX^{(i)})_i \geq$ $\geq e_i^{(i)} = 1 > 0$).

Tomando $\bar{X} = \sum_{i \in I} X^{(i)}$ se tiene la solución requerida.

TEOREMA DE DUALIDAD. Dados los conjuntos K y K^* correspondientes a los problemas P) y P^*) respectivamente caben dos posibilidades:

a) Si K y K^* son ambos no vacíos se verifica:

1) $\langle C.X\rangle \leq \langle B.Y\rangle$ para todo $X \in K$, $Y \in K^*$; en particular ambos problemas son equivalentes.

2) Existen $\bar{X} \in K$, $\bar{Y} \in K^*$ tales que $\langle C.\bar{X}\rangle = \langle \bar{Y}.B\rangle$, esto es:

$$\max_K \langle C.X\rangle = \langle C.\bar{X}\rangle = \langle \bar{Y}.B\rangle = \min_{K^*} \langle Y.B\rangle$$

3) Es posible determinar $\bar{X}$, $\bar{Y}$ de modo que:

i) $(B - A\bar{X} + \bar{Y})_j > 0$, para todo $j \in J$

ii) $(\bar{Y}A - C + \bar{X})_i > 0$, para todo $i \in I$

b) Si uno de los problemas P) ó P^*) es resoluble el otro también lo es.

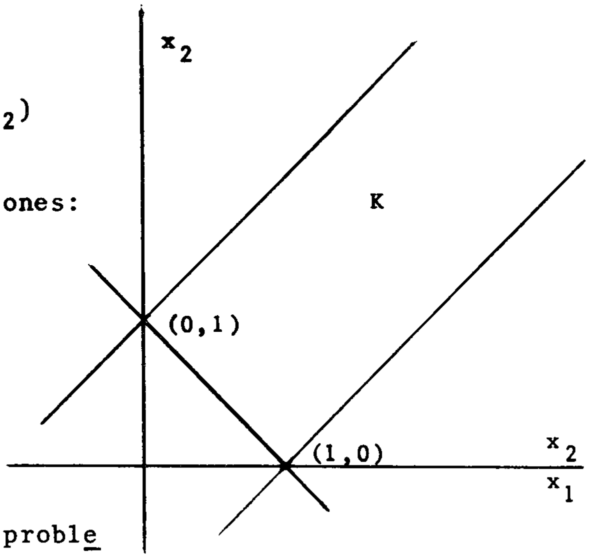
Antes de entrar en la demostración de este teorema veamos un ejemplo donde constataremos las afirmaciones hechas en él y que nos servirá para referencias ulteriores.

Consideremos el problema:

P) maximizar $z = (-x_1 - x_2)$

en el poliedro K definido por las restricciones:

$$-x_1 - x_2 \leq -1$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

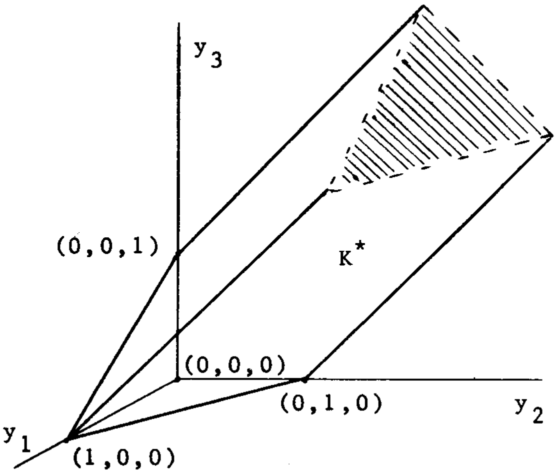


Vemos que las soluciones óptimas para este problema son los puntos $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ del segmento de extremos (1,0) ; (0,1); donde la funcional vale (-1).

El problema dual es el siguiente:

P^*) minimizar $(-y_1 + y_2 + y_3)$

$$-y_1 - y_2 + y_3 \geq -1$$
$$-y_1 + y_2 - y_3 \geq -1$$
$$y_1 \geq 0 \ , \ y_2 \geq 0 \ , \ y_3 \geq 0$$



Los vértices de K^* son: (0,0,0) ; (1,0,0) ; (0,1,0) ; (0,0,1).

Las aristas infinitas de K^* tienen por vector director D = (0,1,1).

La forma lineal toma el valor 2 en D y crece por las aristas infinitas.

Por lo tanto el mínimo lo toma en el vértice $\bar{Y}$ = (1,0,0) y es: (-1).

Así entonces es claro que $\bar{Y} = (1,0,0) \in K^*$ y cualquier $\bar{X} \in [(0,1),(1,0)] \subseteq K$ verifican 2) y por lo tanto 1). Además para $\bar{Y} = (1,0,0)$ y cualquier $\bar{X} \in ((0,1),(1,0))$ es:

$$\bar{Y}A - C + \bar{X} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

y se verifica 3 ii); pero para los extremos del intervalo, es decir $\bar{X}$ = (1,0) ó

$\bar{X} = (0,1)$ resulta $(\bar{Y}A - C + \bar{X})_2 = 0$ en el primer caso y $(\bar{Y}A - C + \bar{X})_1 = 0$ en el segundo. Lo mismo sucede para el caso 3 i) ya que si $\bar{Y} = (1,0,0)$ y $\bar{X} \in [(0,1),(1,0)]$ es:

$$B - A\bar{X} + \bar{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

y entonces para todo punto interior del intervalo $[(0,1),(1,0)]$ se verifica 3i) pero esto no ocurre con sus extremos, ya que para $x_1 = 0$ es: $(B - A\bar{Y} + \bar{X})_2 = 0.$ y para $x_2 = 0$ es: $(B - A\bar{X} + \bar{Y})_3 = 0.$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE DUALIDAD.

a) 1) Sean $X \in K$, $Y \in K^*$, entonces:

$$\langle Y.B \rangle - \langle C.X \rangle = \langle Y.B \rangle - \langle C.X \rangle + YAX - YAX = \langle Y.(B-AX) \rangle + \langle (YA-C).X \rangle$$

De: $Y \geq^J 0$; $B-AX \geq_J 0$ y de: $YA-C \geq_I 0$; $X \geq^I 0$ se obtiene (ver i) ejemplo 2, párrafo A) : $\langle Y.B \rangle - \langle C.X \rangle \geq 0$.

2) , 3) Probar que la igualdad $\langle C.X \rangle = \langle Y.B \rangle$ se alcanza para algún $\bar{X} \in K$, $\bar{Y} \in K^*$, equivale a probar la compatibilidad del siguiente sistema en las variables X , Y:

$$(S) \qquad \begin{cases} AX \leq_J B & X \geq^I 0 \\ YA \geq_I C & Y \geq^J 0 \\ \langle B.Y \rangle - \langle C.X \rangle \leq 0 & \end{cases}$$

La aplicación del teorema de compatibilidad a este sistema conduce a la prueba de 2) ya que por lo demostrado en 1) tendríamos $\langle B.\bar{Y} \rangle = \langle C.\bar{X} \rangle$ para algún $\bar{X} \in K$, $\bar{Y} \in K^*$. Esto es perfectamente natural, pero no da más trabajo que la demostración que sigue, que utiliza el teorema 2, con la ventaja que al proceder de este modo obtendremos también 3).

Consideremos el sistema homogéneo (S'), obtenido a partir de (S), introduciendo una variable auxiliar $t \geq 0$ tal que si $t = 1$, (S') coincide con (S).

$$(S')\qquad \left\{\begin{array}{lll} tB & - AX \geq_J 0 & X \geq^I 0 \, , \, t \geq 0 \\ -tC + YA & \geq_I 0 & Y \geq^J 0 \, , \, t \geq 0 \\ -\langle Y.B \rangle + \langle C.X \rangle \geq 0 & & \end{array}\right.$$

cuya matriz K se puede escribir en la forma:

$$K = \begin{pmatrix} 0_{MM} & -A & B \\ A^t & 0_{NN} & -C \\ -B & C & 0 \end{pmatrix}$$

siendo 0_{MM} ; 0_{NN} matrices nulas de orden m y n respectivamente. Así K es una matriz antisimétrica. Introduciendo el índice o para la variable t sea $I_o = J \cup I \cup \{o\}$. Si ponemos $\xi = (Y,X,t) = (y_1,\ldots,y_m,x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$ el sistema (S') puede escribirse en la forma:

$$K\xi \geq_{I_o} 0 \qquad \xi \geq^{I_o} 0 \, .$$

Por el teorema 2, existe una solución ξ^o del sistema (S') tal que: $(K\xi^o+\xi^o)_i > 0$; esto significa que si $\xi^o = (X^o,Y^o,t^o)$, X^o,Y^o,t^o serán soluciones del sistema (S') tales que:

$$(*)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (t^oB - AX^o + Y^o)_j > 0 & j \in J \\ (Y^oA - t^oC + X^o)_i > 0 & i \in I \\ (\langle C.X^o\rangle - \langle B.Y^o\rangle + t^o) > 0 & \end{array}\right.$$

Veamos que $t^o > 0$. En efecto, si $t^o = 0$, X^o,Y^o verifican el sistema:

$$\begin{array}{ll} AX^o \leq_J 0 & X^o \geq^I 0 \\ Y^oA \geq_I 0 & Y^o \geq^J 0 \\ \langle C.X^o\rangle - \langle B.Y^o\rangle > 0 & \end{array}$$

pero esto equivale a afirmar la incompatibilidad del sistema:

$$AX \leq_J B \qquad X \geq^I 0$$

$$YA \geq_I C \qquad Y \geq^J 0$$

que es compatible, pues por hipótesis K y K^* son no vacíos.

Visto que $t^o > 0$, $\bar{X} = \frac{1}{t^o}.X^o$, $\bar{Y} = \frac{1}{t^o}.Y^o$ son soluciones del sistema (*S*), por lo tanto $\bar{X}$, $\bar{Y}$ verifican el punto 2). Por otra parte a partir de las desigualdades (*) $\bar{X}$, $\bar{Y}$ también verifican el punto 3).

b) Supongamos $K \neq \phi$ y $\langle C.X \rangle \leq m$ para todo $X \in K$ y probemos que $K^* \neq \phi$; esto significa por a) 1) que P^*) es resoluble.

Para probar que $K^* \neq \phi$, mostremos que para todo X tal que $X \geq^I 0$, $AX \geq_J 0$ se tiene $\langle C.X \rangle \leq 0$ (por el teorema 1', aplicado al sistema $YA \geq_I C$, $Y \geq^J 0$).

Sea $X^o \in K$; esto es: $X^o \geq^I 0$; $AX^o \leq_J B$ y sea X tal que $X \geq^I 0$, $AX \leq_J 0$; entonces para todo $\lambda > 0$ se tiene: $\lambda X + X^o \geq^I 0$; $A(\lambda X + X^o) \leq_J B$, esto es: $\lambda X + X^o \in K$ para cualquier $\lambda > 0$. Pero entonces $\langle C.(\lambda X + X^o) \rangle \leq m$ para todo $\lambda > 0$ y por lo tanto $\langle C.X \rangle \leq \frac{m - \langle C.X^o \rangle}{\lambda}$ y como λ es arbitrario resulta que $\langle C.X \rangle \leq 0$.

PROPOSICION 1. Si $\bar{X} \in K$, $\bar{Y} \in K^*$; las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\bar{X}$, $\bar{Y}$ son programas optimales de *P*) y P^*) respectivamente.

b) $\langle C.\bar{X} \rangle = \langle \bar{Y}.B \rangle$.

c) $\langle \bar{Y}.(B-A\bar{X}) \rangle = \langle (C-\bar{Y}A).\bar{X} \rangle = 0$

d) $(A\bar{X})_i < b_i$ implica $\bar{y}_i = 0$; y si $j \in I, \bar{x}_j > 0$ implica $c_j = (\bar{Y}A)_j$.

e) Si $i \in J$; $\bar{y}_i > 0$ implica $(A\bar{X})_i = b_i$; y $(\bar{Y}A)_j > c_j$ implica $\bar{x}_j = 0$.

DEMOSTRACION.

Que a) $\Leftrightarrow$ b) resulta del punto a) del teorema de dualidad.

b) $\Leftrightarrow$ c) se obtiene de la igualdad: $\langle \bar{Y}.B \rangle - \langle C.\bar{X} \rangle = \langle \bar{Y}.(B-A\bar{X}) \rangle + \langle (\bar{Y}A-C).\bar{X} \rangle$ observando que los dos sumandos del segundo miembro son no-negativos.

c) $\Leftrightarrow$ d) , e) resulta desarrollando los productos escalares $\langle \bar{Y}.(B-A\bar{X}) \rangle$;

$\langle (C-\bar{Y}A).\bar{X} \rangle$ y notando que los sumandos $y_i(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)$ para el primero $(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i)x_j$ para el segundo son no-negativos.

Es conveniente verbalizar el contenido de esta proposición.

Si tenemos un programa $\bar{X}$ del problema P) y queremos saber si es optimal, podemos tratar de determinar un programa $\bar{Y}$ del problema dual P^*) para el cual sea $\langle \bar{Y}.B \rangle = \langle C.\bar{X} \rangle$. Si lo conseguimos sabremos que $\bar{X}$ es optimal de P).

La utilización del punto d) puede ser útil para la determinación de un programa $\bar{Y}$; ya que a) establece que para cada restricción no-ligada a $\bar{X}$ (es decir, una restricción que no se convierte en igualdad al sustituir X por $\bar{X}$ en ella) se obtiene una restricción ligada a $\bar{Y}$ (es decir, una que se convierte en igualdad).

Nótese que la no-restricción de una variable puede (y debe) ser considerada como una restricción no-ligada; la restricción dual correspondiente es una igualdad y por lo tanto ligada a todo $Y \in K^*$. Puede entonces procurarse la determinación de los $Y \in R^m$ tales que $y_i = 0$ si $(A\bar{X})_i < b_i$ y $c_j = (YA)_j$, si $j \in I$ y $\bar{x}_j > 0$, o bien si $j \notin I$.

Hecho esto se tratará de ver si alguno de tales $Y \in R^m$ pertenece a K^* (es decir verifica las restantes restricciones); si la respuesta es afirmativa $\bar{X}$ será un programa optimal para el problema P).

Es claro que cuanto más restricciones no-ligadas a $\bar{X}$ haya, más ecuaciones tendremos para determinar Y. El caso extremo , que llamaremos CASO SIMPLE, ocurre cuando el sistema planteado tiene solución única o es incompatible.

Si $\bar{Y}$ es la única solución del sistema, restará sólo verificar si es $\bar{Y} \in K^*$; si el sistema es incompatible $\bar{X}$ no será un programa optimal para P).

Veamos que el caso simple se presenta cuando $\bar{X}$ es un vértice no-degenerado de K.

Sean $\bar{J} = \{j \mid (A\bar{X})_j < b_j\}$; $\bar{I}$ el conjunto de los índices i tales que $\bar{x}_i > 0$ y de los $i \notin I$, es decir $\bar{I} = \{i \in I \mid \bar{x}_i > 0\} \cup \{i \mid i \notin I\}$.

El sistema:

$$(YA)_i = c_i \quad i \in \bar{I}$$

$$y_j = 0 \quad j \in \bar{J}$$

que puede ponerse en la forma equivalente:

$$Y_{J_o} A_{J_o \bar{I}} = C_{\bar{I}}$$

$$Y_{\bar{J}} = 0$$

donde $J_o = M-\bar{J}$ $(A = A_{MN})$, tiene indeterminación $d = |J_o| - r(A_{J_o \bar{I}})$.

Dado $\bar{X} \in K$, decir que $\bar{X}$ es vértice de K equivale a decir que el sistema: $(AX)_j = b_j$, $j \in J_o$; $x_i = 0$, $i \in I-\bar{I}$ tiene solución única $\bar{X}$, pero esto equivale a que el sistema: $A_{J_o \bar{I}} X_{\bar{I}} = B_{J_o}$ tiene solución única $\bar{X}_{\bar{I}}$; luego si $\bar{X}$ es un vértice de K debe ser $r(A_{J_o \bar{I}}) = |\bar{I}|$.

Por lo tanto $d = |J_o| - |\bar{I}| = (|J_o| + |N-\bar{I}|) - |N|$ = n° de restricciones ligadas a $\bar{X}$ - n° de variables x_i.

Tenemos entonces el siguiente resultado.

PROPOSICION 2. Para un vértice $\bar{X}$ de K, la indeterminación del sistema de igualdades, en las variables y_i,correspondiente a las restricciones no-ligadas a $\bar{X}$ coincide con la diferencia entre el número total de restricciones ligadas a $\bar{X}$ y el número total de variables x_i. El caso simple se presenta entonces si y sólo si $\bar{X}$ es no-degenerado.

En particular, si K y K^* son no-vacíos, basta que exista una solución optimal del problema P) que sea un vértice no-degenerado de K para que el problema P^*) tenga una única solución optimal. Observemos que la recíproca no es válida, ya que en el ejemplo dado anteriormente el problema P^*) tiene una única solución y sin embargo los vértices de K que dan el óptimo de la funcional del problema P) son degenerados.

Un vector $\bar{Y}$ que satisface la condición d) de la proposición 1, y que verifica además las restantes restricciones del problema P^*) es llamado un VECTOR DE DECISION relativo a $\bar{X}$. Se llama así, pues su existencia o no existencia permite decidir, por la afirmativa o negativa, la optimalidad de $\bar{X}$.

Como consecuencia del teorema de dualidad obtenemos el siguiente criterio:

CRITERIO DE OPTIMALIDAD (DEL VECTOR DE DECISION).

$\bar{X} \in K$ es optimal si y sólo si existe un vector de decisión $\bar{Y}$ relativo a $\bar{X}$.

Este criterio puede ser de aplicación práctica en casos,como el indicado en la proposición, en que $\bar{X}$ es un vértice no-degenerado, y cuando el sistema lineal para determinar los $\bar{Y}$ "candidatos" sea de solución simple.

Obsérvese que si $\bar{Y}$ es un vector de decisión para $\bar{X}$, lo es para cualquier solución optimal del problema primal P).

La parte b) del teorema de dualidad implica una precisión mayor acerca de la correspondencia por dualidad de las restricciones correspondientes a caras K_1 y K_1^*, de los poliedros K y K^*, correspondientes a soluciones optimales de los problemas P) y P^*) respectivamente.

PROPOSICION 3. A toda restricción rígida (flexible) de K_1 corresponde por dualidad una restricción flexible (rígida) de K_1^*.

DEMOSTRACION. Si una restricción es flexible de K_1, es no-ligada a un $\bar{X} \in K_1$, luego la restricción dual es ligada a todo $Y \in K_1^*$, o sea es una restricción rígida para K_1^*.

Veamos que toda restricción rígida para K_1, tiene por dual una restricción flexible para K_1^*. En efecto, supongamos que la restricción j-ésima es rígida para K_1, caben dos posibilidades: a) $(AX)_j = b_j$ y $j \notin J$; b) $(AX)_j = b_j$ y $j \in J$. En el caso a) $(AX)_j = b_j$ para todo $X \in K$ luego y_j no está restricta y entonces la restricción es flexible para K_1^*. En el caso b), por el teorema de dualidad, tenemos que existen $\bar{X} \in K_1$, $\bar{Y} \in K_1^*$ tales que: $(B - A\bar{X} + \bar{Y})_j > 0$ para todo $j \in J$, pero si $(AX)_j = b_j$ tenemos $\bar{y}_j > 0$, luego la restricción es flexible para K_1^*.

Por otra parte si $\bar{x}_i = 0$ con $i \in I$, es decir si la restricción $x_i \geq 0$ es rígida para K_1, como, por el teorema de dualidad, debe ser: $(\bar{Y}A - C + \bar{X})_i > 0$ para todo $i \in I$, tenemos $(\bar{Y}A)_i > c_i$, lo que prueba que la restricción $(\bar{Y}A)_i \geq c_i$ es flexible para K_1^*.

Dicho en otras palabras, si el hiperplano H definido por una restricción del problema P), contiene todas las soluciones optimales de dicho problema, el hiperplano H^* definido por la restricción dual correspondiente, no contiene a todas las soluciones optimales de P^*), y recíprocamente.

En resumen: la cara K_1 de K está contenida en el hiperplano H si y sólo si el hiperplano H^* no contiene a la cara K_1^* de K^*.

D. Consideremos el caso del problema P) en forma normal:

$$\text{maximizar } z = \langle C_N X_N \rangle$$

sujeto a:

$$A_{MN}X_N = B_M$$

$$X_N \geq 0$$

Por ser $J = \phi$ e $I = N$, el problema dual P^*) tiene la forma siguiente:

$$\text{minimizar } w = \langle Y_M B_M \rangle$$

sujeto a: $$Y_M A_{MN} \geq C_N$$

Sea X^o un vértice no-degenerado de K y sea $I = \{j \mid x_j^o > 0\}$, tal que las columnas A_i , $i \in I$, constituyen una base de R^m.

Un vector de decisión relativo a X^o, es un vector $\bar{Y} = \bar{Y}_M \in R^m$ que verifica

1) $\bar{Y}_M A_{MI} = C_I$

2) $\bar{Y}_M A_{MJ} \geq C_J$ siendo $J = N-I$.

La solución de 1) es $\bar{Y}_M = C_I(A_{MI})^{-1}$; por lo tanto 2) equivale a: $C_I(A_{MI})^{-1}A_{MJ} - C_J \geq 0$ o bien a:

$$2') \; \Delta_J = C_I X_{IJ}^o - C_J \geq 0.$$

Sea X^o degenerado e $I \supset \{j \mid x_j^o > 0\}$ un conjunto de índices correspondientes a una base de R^m; sea $\bar{Y} = \bar{Y}_M$ definido por la condición 1), si vale 2), $\bar{Y}$ es igualmente un vector de decisión y X^o es optimal, como ya sabemos pues 2) es equivalente a 2'). Vemos así que el criterio de optimalidad para una solución básica X^o es equivalente al criterio del vector de decisión.

Se observa también que la tabla final del algoritmo simplex, cuando no se da el caso irresoluble, nos permite determinar la solución del problema dual. En efecto, supongamos que la primera tabla corresponde a la base $\{A_i\}_{i\in M}$ (es decir $A_{MM} = 1_{MM}$) y sea la tabla final correspondiente a la base $\{A_i\}_{i\in I}$, entonces por 1) $\bar{Y}_M = C_I(A_{MI})^{-1} = C_I(A_{MI}^{-1}A_{MM}) = C_I X_{IM}^o = \Delta_M + C_M$ (observemos que: $\Delta_M =$ $= C_I A_{MI}^{-1} - C_M$).

EJERCICIOS.

1. En el ejercicio 1, Capítulo I, se plantea el siguiente problema:

P) maximizar $(x_1-x_2+2x_3-x_4+3x_5+5x_6+5x_7+2x_8)$

en el conjunto K definido por:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
x_1 & & & & + x_5 & - 3x_6 & + x_7 & + 3x_8 & = & 2 \\
& x_2 & & & + 2x_5 & + 2x_6 & - x_7 & + 2x_8 & = & 3 \\
& & x_3 & & - x_5 & + 2x_6 & - 2x_7 & - x_8 & = & 2 \\
& & & x_4 & + 2x_5 & - x_6 & + x_7 & - x_8 & = & 1 \\
\end{array}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4,5,6,7,8$$

De acuerdo con la tabla final de este problema, $\bar{X} = (9,0,4,0,0,4,5,0)$ es solución óptima para el problema P) siendo el máximo de la funcional $\bar{z} = 62$.

Determinemos para $\bar{X}$ un vector de decisión $\bar{Y}$. En primer lugar planteamos el problema dual:

P*) minimizar $(2y_1+3y_2+2y_3+y_4)$

en el conjunto K^* de R^4 definido por:

$$\begin{array}{rrrrrr}
y_1 & & & & \geq & 1 \\
& y_2 & & & \geq & -1 \\
& & y_3 & & \geq & 2 \\
& & & y_4 & \geq & -1 \\
y_1 & + 2y_2 & - y_3 & + 2y_4 & \geq & 3 \\
-3y_1 & + 2y_2 & + 2y_3 & - y_4 & \geq & 5 \\
y_1 & - y_2 & - 2y_3 & + y_4 & \geq & 5 \\
3y_1 & + 2y_2 & - y_3 & - y_4 & \geq & 2 \\
\end{array}$$

Observemos que el conjunto $I = \{i \mid x_i > 0\} = \{1,3,6,7\}$; en consecuencia el vector de decisión $\bar{Y}$ asociado a $\bar{X}$ quedará determinado por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rrrrrr}
y_1 & & & & = & 1 \\
& & y_3 & & = & 2 \\
-3y_1 & + 2y_2 & + 2y_3 & - y_4 & = & 5 \\
y_1 & - y_2 & - 2y_3 & + y_4 & = & 5 \\
\end{array}$$

Resolviendo este sistema obtenemos: $y_1 = 1$; $y_3 = 2$; $y_2 = 12$; $y_4 = 20$. Además $\bar{Y} = (1,12,2,20)$ satisface las restantes restricciones como se ve inmediatamente; luego $\bar{Y}$ es optimal para el problema P^*) siendo el mínimo de la funcional $\bar{w} = 62$.

Por último, podemos observar que en la tabla final del problema P) es: $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = 13$; $\Delta_3 = 0$; $\Delta_4 = 21$, siendo $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$, $c_4 = -1$; y entonces $\bar{y}_i = \Delta_i + c_i$, $i \in M = \{1,2,3,4\}$, como habíamos observado anteriormente.

2. En el ejercicio 1, II, consideramos el siguiente problema:

$$P) \qquad \text{maximizar } (2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4)$$

en el conjunto K definido por:

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \\ 14x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 13x_4 &= 17 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima es $\bar{X} = (0,3,1,0)$ que es degenerada. Tenemos entonces $\bar{I} = \{i \mid \bar{x}_i > 0\} = \{2,3\}$ mientras que $\bar{J} = \{i \mid (AX)_i < b_i\} = \phi$ luego $J_o = M - \bar{J} = M$ y entonces: $|J_o| = 4 > |\bar{I}| = 2$; el sistema de ecuaciones para determinar un vector de decisión es:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 4y_3 + y_4 &= -3 \\ 3y_1 + y_2 + 5y_3 + 2y_4 &= 2 \end{aligned}$$

siendo indeterminado con grado de indeterminación $d = |J_o| - |I| = 2$.

E. Los parámetros y_i del problema dual juegan un papel análogo, respecto del problema P), al de los multiplicadores de Lagrange en el problema clásico de los "extremos condicionados". En realidad un teorema de Kuhn y Tucker permite un enfoque unificado del problema lineal y del problema clásico.

Forzando la analogía, para estudiar el problema:

$$P) \qquad \text{maximizar } \langle C.X \rangle, \text{ en K definido por: } AX \leq_J B \text{ , } X \geq^I 0$$

introducimos los multiplicadores y_j, con $y_j \geq 0$ si $j \in J$; y estudiamos la siguiente función (dicha de Lagrange)

$$\mathcal{L}(X,Y) = \langle C.X \rangle + \langle Y.(B-AX) \rangle = \langle C.X \rangle + \langle Y.B \rangle - YAX = \langle Y.B \rangle + \langle (C-YA).X \rangle$$

en el dominio $\mathcal{D} = \{(X,Y) \mid X \geq^I 0 \, , \, Y \geq^J 0\} \subset R^{m+n}$, (en el caso clásico el dominio es meramente R^{m+n}).

Un punto $(\bar{X},\bar{Y}) \in R^{m+n}$ se dice PUNTO SILLA de $\mathcal{L}$ si $(\bar{X},\bar{Y}) \in \mathcal{D}$ y:

$$\mathcal{L}(X,\bar{Y}) \leq \mathcal{L}(\bar{X},\bar{Y}) \leq \mathcal{L}(\bar{X},Y) \text{ para todo } (X,Y) \in \mathcal{D}.$$

PROPOSICION 3. $\bar{X}$, $\bar{Y}$ son soluciones optimales de $\mathcal{P}$) y $\mathcal{P}^*$) respectivamente si y sólo si $(\bar{X},\bar{Y})$ es punto silla de $\mathcal{L}$. En este caso $\langle C.\bar{X} \rangle = \langle \bar{Y}.B \rangle = \mathcal{L}(\bar{X},\bar{Y}) = \bar{Y}A\bar{X}$.

DEMOSTRACION. Si $\bar{X},\bar{Y}$ son soluciones optimales de $\mathcal{P}$) y $\mathcal{P}^*$) respectivamente, se verifica $\langle C.\bar{X} \rangle = \langle \bar{Y}.B \rangle$ y además $\langle \bar{Y}.(B-A\bar{X}) \rangle = \langle (\bar{Y}A-C).\bar{X} \rangle = 0$; luego $\mathcal{L}(\bar{X},\bar{Y}) = \langle C.\bar{X} \rangle = \langle \bar{Y}.B \rangle = \bar{Y}A\bar{X}$. Por lo tanto; utilizando el hecho que $C-\bar{Y}A \leq_I 0$, $X \geq^I 0$ implica: $\langle (C-\bar{Y}A).X \rangle \leq 0$ y $(B-A\bar{X}) \geq_J 0$, $Y \geq^J 0$ implica: $\langle Y.(B-A\bar{X}) \rangle \geq 0$ resulta:

$$\mathcal{L}(X,\bar{Y}) = \langle \bar{Y}.B \rangle + \langle (C-\bar{Y}A).X \rangle \leq \langle \bar{Y}.B \rangle = \mathcal{L}(\bar{X},\bar{Y}) = \langle C.\bar{X} \rangle \leq \langle C.\bar{X} \rangle + \langle Y.(B-A\bar{X}) \rangle = \mathcal{L}(\bar{X},Y)$$

y entonces $(\bar{X},\bar{Y})$ es punto silla de $\mathcal{L}$.

Recíprocamente, sea $(\bar{X},\bar{Y})$ un punto silla de $\mathcal{L}$, esto significa en particular que para todo $X \geq^I 0$ es: $\mathcal{L}(X,\bar{Y}) = \langle \bar{Y}.B \rangle + \langle C.X \rangle - \bar{Y}AX \leq \mathcal{L}(\bar{X},\bar{Y}) = \langle \bar{Y}.B \rangle + \langle C.\bar{X} \rangle - \bar{Y}A\bar{X}$, luego $\langle C.(X-\bar{X}) \rangle \leq \bar{Y}.A(X-\bar{X})$ para todo $X \geq^I 0$; pero entonces para $X \geq^I \bar{X}$, poniendo $W = X-\bar{X}$ se tiene $\langle C.W \rangle \leq \bar{Y}AW$ para todo $W \geq^I 0$, y entonces $\bar{Y}A \geq_I C$, luego $\bar{Y} \in K^*$.

En forma análoga, y usando el hecho que: $\mathcal{L}(\bar{X},\bar{Y}) \leq \mathcal{L}(\bar{X},Y)$ para todo $Y \geq^J 0$ se ve que $A\bar{X} \leq_J B$, y por lo tanto $\bar{X} \in K$.

Como $\bar{X} \in K$, $\bar{Y} \in K^*$ resulta $\langle C.\bar{X} \rangle \leq \langle \bar{Y}.B \rangle$ (por el teorema de dualidad). Por otra parte como $(0,\bar{Y}),(\bar{X},0) \in \mathcal{D}$ es: $\mathcal{L}(0,\bar{Y}) \leq \mathcal{L}(\bar{X},\bar{Y}) \leq \mathcal{L}(\bar{X},0)$, luego $\langle \bar{Y}.B \rangle \leq \langle C.\bar{X} \rangle$ y por lo tanto $\bar{X}$, $\bar{Y}$ son soluciones optimales de los problemas $\mathcal{P}$) y $\mathcal{P}^*$) respectivamente (ver proposición 1).

F. Consideremos para $B \in R^m$ el poliedro $K(B) = \{X \mid AX \leq_J B \, , \, X \geq^I 0\}$ vamos a estudiar la función:

$$M(B) = \max_{K(B)} \langle C.X \rangle$$

Convengamos en escribir $M(B) = -\infty$ si $K(B) = \phi$ y $M(B) = +\infty$ si la funcional $\langle C.X \rangle$ no está acotada superiormente en $K(B)$.

Consideremos el poliedro $K^* = \{Y \mid AY \geq_I C \text{ , } Y \geq^J 0\}$ y sea $N(B) = \min_{K^*} \langle Y.B \rangle$; convenimos en escribir $N(B) = +\infty$ si $K^* = \phi$ y $N(B) = -\infty$ si la funcional no está acotada inferiormente en K^* (para todo B).

Si $K^* = \phi$ es $N(B) = +\infty$ y el problema de maximizar $\langle C.X \rangle$ en $K(B)$ es irresoluble. Puede ocurrir que sea $K(B) = \phi$ o bien $K(B) \neq \phi$ (dependiendo del valor de B) pero como $K^* = \phi$: $M(B)$ tomará el valor $-\infty$, en el primer caso, o bien $M(B)$ tomará el valor $+\infty$, en el segundo.

Si $K^* \neq \phi$, como supondremos de aquí en adelante, el problema planteado en K^* es resoluble y también lo es el problema planteado en $K(B)$ siendo: $M(B) \equiv N(B)$; en este caso el estudio de $M(B)$ se simplifica, pues es el mínimo de una funcional ($\langle Y.B \rangle$) en un poliedro fijo K^*.

Suponiendo K^* propio, sean $V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots, V^{(p)}$ sus vértices y Q_{K^*} su cono asintótico, entonces $K^* = [V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots, V^{(p)}] + Q_{K^*}$, por lo tanto si es: $\langle Z.B \rangle < 0$ para algún $Z \in Q_{K^*}$ se tendrá $M(B) = -\infty$; si por el contrario $\langle Z.B \rangle \geq 0$ para todo $Z \in Q_{K^*}$ resulta para todo $Y \in K^*$: $\langle Y.B \rangle \geq \min_{1 \leq j \leq p} \langle B.V^{(j)} \rangle$ (ver proposición 11 - III). En conclusión tenemos:

$$M(B) = \begin{cases} -\infty & \text{si } B \notin (Q_{K^*})^* \\ \min_{1 \leq j \leq p} \langle B.V^{(j)} \rangle & \text{si } B \in (Q_{K^*})^* \end{cases}$$

PROPOSICION 4. Si $\min_{K^*} \langle Y.B \rangle$ se alcanza en un sólo $\bar{Y} \in K^*$, entonces para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño ($|\varepsilon| < \delta$) vale:

$$\frac{M(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_j + \varepsilon, \ldots, \bar{b}_m) - M(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m)}{\varepsilon} = \bar{y}_j = \frac{\partial M}{\partial b_j} (\bar{B})$$

Si $\min_{K^*} \langle Y.\bar{B} \rangle$ ocurre en un sólo punto $\bar{Y} \in K^*$, necesariamente K^* es propio e $\bar{Y}$ es uno de los vértices $V^{(j)}$ $(j = 1,2,...,p)$ de K^*, supongamos $\bar{Y} = V^{(\ell)}$; además $\langle \bar{B}.Z \rangle > 0$ para todo $Z \in Q_{K^*}$ (o bien para todo vector director de aristas de Q_{K^*}) esto nos asegura que $\bar{B}$ está en el interior de $(Q_{K^*})^*$; podemos tomar entonces un entorno de $\bar{B}$: $\mathcal{B}(\bar{B},\delta) \subset (Q_{K^*})^*$ y entonces $M(B) > -\infty$ para todo $B \in \mathcal{B}(\bar{B},\delta)$.

Como estamos suponiendo que $\min\limits_{K^*} \langle Y.\bar{B} \rangle$ ocurre en el vértice $V^{(\ell)}$ de K^*, es decir que: $M(\bar{B}) = \min\limits_{1\le j\le p} \langle V^{(j)}.\bar{B} \rangle = \langle V^{(\ell)}.\bar{B} \rangle$ para un único índice ℓ, δ puede hacerse tan pequeño como para que $\langle V^{(\ell)}.\bar{B} \rangle < \langle V^{(j)}.\bar{B} \rangle$ para $j \neq \ell$, $(j = 1,2,...,p)$ no sólo en $\bar{B}$, sino que sea $\langle V^{(\ell)}.B \rangle < \langle V^{(j)}.B \rangle$ para todo $B \in \mathcal{B}(\bar{B},\delta)$ $(j\neq\ell\ ,\ j=1,2,...,p)$; en estas condiciones $M(B) = \langle V^{(\ell)}.\bar{B} \rangle$ para todo $B \in \mathcal{B}(\bar{B},\delta)$, y entonces tomando $|\varepsilon| < \delta$ se tendrá:

$$\frac{M(\bar{b}_1,...,\bar{b}_j+\varepsilon,...,\bar{b}_m) - M(\bar{b}_1,...,\bar{b}_m)}{\varepsilon} = \frac{\langle V^{(\ell)}.\bar{B} \rangle + v_j^{(\ell)}\varepsilon - \langle V^{(\ell)}.\bar{B} \rangle}{\varepsilon} = v_j^{(\ell)} = \frac{\partial M}{\partial b_j}(\bar{B})$$

Observemos que la hipótesis de la proposición es válida si entre los X que maximizan $\langle C.X \rangle$ en $K(\bar{B})$ hay uno no-degenerado (ya que en este caso el vértice de K^* que minimiza $\langle Y.\bar{B} \rangle$ es único).

La fórmula, si es aplicable, provee una interpretación, en términos del problema P), de los multiplicadores $\bar{y}_j$. Ellos coinciden con la tasa de variación de máximo de la funcional $\langle C.X \rangle$, relativa a la variación de la cota b_j en la restricción $(AX)_j \le \bar{b}_j$ (ó $(AX)_j = b_j$).

NOTAS Y PROBLEMAS.

NOTA 1. INTERPRETACION ECONOMICA DEL PROBLEMA DUAL.

Los economistas interpretan el problema dual como un problema de asignación de precios unitarios a los factores de producción.

Estos precios se sujetan a las restricciones de problema dual; la restricción $(YA)_k \ge c_k$, expresa que el precio de la totalidad de los factores consumidos, cuando la línea k trabaja con intensidad 1, no debe ser inferior al beneficio c_k obtenido en tales condiciones.

La idea es que un beneficio no será obtenido de la nada, y debe ser compensado-eventualmente en exceso-por el precio de los factores utilizados. Con esta idea es natural que $\langle C.X \rangle \leq \langle Y.B \rangle$, es decir que el precio asignado (en las condiciones indicadas) del total de los factores producidos no sea inferior al beneficio total producido; este es el punto a) 1) del teorema de dualidad. Además la asignación de precios, y_j, debe ser hecha de modo tal que el precio total de los factores, $\langle Y.B \rangle$, sea mínimo (estos precios son llamados PRECIOS DE SOMBRA).

Sea $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ la asignación de precios en tales condiciones. El teorema de dualidad (a) 2)) expresa que el precio $\langle \bar{Y}.B \rangle$ asignado de este modo a los factores coincide con el beneficio $\langle C.\bar{X} \rangle$ que puede obtenerse de manera óptima. Así hay compensación entre el precio total de los factores disponibles y el beneficio.

Consideremos el caso en que $\bar{Y}$ es único:

Si $(A\bar{X})_j < b_j$, es decir si no consumimos todo el factor p_j, en condiciones de producción óptima, sabemos que $\bar{y}_j = 0$; es decir, se asignará precio nulo al factor que esté en una disponibilidad tal que él no sea causa de que la producción no dé más beneficio.

Si $\bar{x}_k > 0$, es decir si la línea k es realmente utilizada en el programa de producción óptimo, es $(\bar{Y}A)_k = c_k$; o sea hay compensación entre el beneficio y el precio de los factores en esa línea. Es claro que en las líneas no utilizadas $(\bar{x}_k = 0)$ nada importan los precios $\bar{y}_k$ de los factores, pues no se consume nada (la condición $(\bar{Y}A)_k \geq c_k$ se manifiesta completamente intrascendente).

Finalmente, la condición de equilibrio entre el beneficio y el precio de los factores se revela en lo siguiente:

Supongamos que $M(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ es el beneficio óptimo. Levantemos la existencia del factor p_j desde b_j a $b_j+\varepsilon$, esto significa aumentar el precio total de los factores disponibles en $\bar{y}_j\varepsilon$ siendo este aumento compensado por el incremento del beneficio, es decir:

$$M(b_1, b_2, \ldots, b_j+\varepsilon, \ldots, b_m) - M(b_1, b_2, \ldots, b_m) = \bar{y}_j\varepsilon$$

y ésta es la igualdad de la proposición 4.

NOTA 2. El LEMA DE FARKAS dice:

LEMA. Dadas las funcionales lineales $\delta_1(X), \delta_2(X), \ldots, \delta_m(X), g(X)$: $\delta_1(X) \geq 0, \ldots$

$\ldots, \delta_s(X) \geq 0, \delta_{s+1}(x) = 0, \ldots, \delta_m(X) = 0 \Rightarrow g(X) \geq 0$ si y sólo si existen números reales: $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \ldots, \lambda_s \geq 0, \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_m$ tales que para todo X:

$$g(X) = \lambda_1\delta_1(X) + \lambda_2\delta_2(X) + \ldots + \lambda_s\delta_s(X) + \ldots + \lambda_m\delta_m(X).$$

Si ponemos $\delta_j(X) = \langle A^{(j)}.X \rangle$ para $j = 1,2,\ldots,m$; $g(X) = \langle B.X \rangle$, $J = \{1,2,\ldots s\}$; el lema de Farkas expresa la equivalencia entre i) e ii):

i) $AX \geq_J 0 \Rightarrow \langle B.X \rangle \geq 0$

ii) Existe $\lambda \in R^m$, $\lambda \geq^J 0$ tal que $B = \lambda A$

Puede ser instructivo derivar el lema de Farkas del teorema de compatibilidad; veámoslo:

La implicación ii) ⇒ i) es inmediata.

Probemos que i) ⇒ ii).

Como vale i) el sistema: $AX \geq_J 0$, $\langle B.X \rangle \leq -1$ es incompatible; o sea: $-AX \leq_J 0$, $\langle B.X \rangle \leq -1$ es un sistema incompatible. Por lo tanto, existen $Y \in R^m$, $\alpha \in R$, $Y \geq^J 0$, $\alpha \geq 0$ tales que: $Y(-A) + \alpha B = 0$ (pues no hay restricciones sobre las variables) siendo $\alpha(-1) < 0$; de aquí resulta $\alpha > 0$; luego es: $B = \frac{1}{\alpha}(YA) = (\frac{1}{\alpha}Y)A$ y poniendo $\lambda = \frac{1}{\alpha}Y$ es $\lambda \geq^J 0$ y además $B = \lambda A$.

NOTA 3. JUEGOS BIPERSONALES FINITOS.

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos jugadores, los que eligen un elemento $i \in M = \{1,2,\ldots,m\}$, $j \in N = \{1,2,\ldots,n\}$ respectivamente, sin que ninguno sepa la elección del otro; el resultado (i,j) se da a conocer y una cantidad a_{ij} es lo que el jugador $\mathcal{B}$ paga al jugador $\mathcal{A}$; sea $A = A_{MN}$ la matriz de pago.

Si (h,k) es un punto silla de la matriz, es decir si $a_{ik} \leq a_{hk} \leq a_{hj}$, para todo $(i,j) \in M \times N$, h y k son las mejores jugadas de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente, en el siguiente sentido: si $\mathcal{A}$ elige h está seguro que su ganancia no bajará de a_{hk} y puede eventualmente ser mayor si $\mathcal{B}$ no elige k; si $\mathcal{A}$ no elige h su ganancia puede ser inferior a a_{hk}, si ocurre que $\mathcal{B}$ elige k y es: $a_{ik} < a_{hk}$; en general tal caso no se presentará.

Si el juego se repite muchas veces, no conviene al jugador $\mathcal{A}$ elegir sistemática mente el mismo elemento $h \in M$, excepto que estemos en el caso en que hay punto silla y éste es (h,k) - pues de proceder así B elegirá siempre el elemento $k \in N$ tal que a_{hk} sea mínimo: $a_{hk} < a_{hj}$ para todo $j \in N$. A poco de iniciado el juego, A se dará cuenta que, ya que B juega siempre k, él debe variar su jugada a un $\ell \in M$ tal que $a_{\ell k} > a_{hk}$, lo que es posible si (h,k) no es punto silla como suponemos. Por esta razón y particularmente para no brindar información alguna a B, A decide distribuir sus jugadas al azar, procurando frecuencias $p_1,p_2,\ldots$ $\ldots,p_m$ sobre los elementos $i \in M$ (siendo $p_i = \frac{n_i}{n_T}$; n_i el número de veces que juega i; n_T el número total de jugadas). Como el mismo argumento hará B, éste procurará las frecuencias $q_1,q_2,\ldots,q_n$, de esta manera, al final del juego, B habrá pagado a A la cantidad: $\sum p_i a_{ij} q_j = p\ A\ q$.

Al decir que A distribuirá sus jugadas al azar procurando frecuencias $p_i, i \in M$, queremos decir que A jugará (en cada jugada) al elemento $i \in M$ con probabilidad p_i (lo que puede realizar mediante un evento aleatorio que produzca el evento i, con probabilidad p_i - bolillero, ruleta, tabla de números aleatorios, etc.). De la misma manera jugará B (es decir, en cada jugada, B jugará al elemento $j \in N$ con probabilidad q_j).

La cantidad $E(p,q) = p\ A\ q$ indica la esperanza matemática de A.

El juego se reduce entonces, a una elección de A en el conjunto:

$$K_p = \{p \mid \sum_{i \in M} p_i = 1 \ , \ p_i \geq 0 \ , \ i \in M\}$$

y una elección de B en el conjunto:

$$K_q = \{q \mid \sum_{j \in N} q_j = 1 \ , \ q_j \geq 0 \ , \ j \in N\}$$

siendo $E(p,q) = p\ A\ q$ la función de pago. Los elementos $p \in K_p$, $q \in K_q$ se dirán ESTRATEGIAS de A y B respectivamente.

El siguiente teorema de J. von NEUMANN asegura la existencia de estrategias óptimas $\bar{p}$, $\bar{q}$ para los jugadores A y B.

TEOREMA (MINIMAX). La función $E(p,q) = p\ A\ q$ definida en $K_p \times K_q$, tiene punto silla $(\bar{p},\bar{q})$.

La denominación de MINIMAX, se debe a que la existencia de punto silla equivale a afirmar que:

$$\min_{q} \max_{p} E(p,q) = \max_{p} \min_{q} E(p,q)$$

(ver PROBLEMA 2).

Por el mismo problema sabemos que $\bar{p}$ debe verificar:

$$\max_{p} \{\min_{q} E(p,q)\} = \min_{q} E(\bar{p},q)$$

Y, análogamente, $\bar{q}$ debe satisfacer:

$$\min_{q} \{\max_{p} E(p,q)\} = \max_{p} E(p,\bar{q})$$

Consideremos los siguientes problemas:

$P_A)$ maximizar$(\min_{q \in K_q} E(p,q))$ en el conjunto K_p;

$P_B)$ minimizar$(\max_{p \in K_p} E(p,q))$ en el conjunto K_q;

ninguno de los problemas es lineal, pero vamos a reducirlos a problemas lineales equivalentes; notemos en primer lugar que:

$$\min_{q \in K_q} E(p,q) = \min_{k \in N} E(p,e_k) = \min_{k \in N} \langle p.A_k \rangle$$

donde e_k es el vector columna unitario $e_k = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{k},0,\ldots,0)$ y $A_k = Ae_k$ es la columna k-ésima de la matriz A.

En efecto, fijado $p \in K_p$, la función $E(p,q) = p\ A\ q$ es función lineal de q; esta función lineal toma el valor mínimo en uno de los vértices del poliedro K_q, que son justamente los vectores unitarios e_k, $k \in N$.

El problema $P_A)$ es entonces el siguiente:

$$\text{maximizar}(\min_{k \in N} \langle p.A_k \rangle) \text{ en el poliedro } K_p.$$

Análogamente $P_B)$ consiste en:

$$\text{minimizar}\,(\max_{j\in M} \langle A^{(j)}.q\rangle) \text{ en el poliedro } K_q .$$

Finalmente (de acuerdo a la observación b, I) los problemas $P_A)$ y $P_B)$ son equivalentes a los problemas lineales $P'_A)$, $P'_B)$ siguientes:

$P'_A)$ maximizar z

sujeto a las restricciones:

$$z \le \langle p.A_i\rangle \ , \quad i\in N$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$$

$$p_j \ge 0 \ , \quad j\in M .$$

$P'_B)$ minimizar w

con las restricciones:

$$w \ge \langle A^{(j)}.q\rangle \ , \quad j\in M$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

$$q_i \ge 0 \ , \quad i\in N .$$

Ambos problemas se representan en el siguiente cuadro:

$$\begin{array}{r|cccc|c|l}
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \\
 & \wedge & \wedge & & \wedge & & \\
 & p_1 & p_2 & \cdots & p_m & z & \\
\hline
0 \le q_1 & & & & & 1 & \le 0 \\
0 \le q_2 & & & & & 1 & \le 0 \\
\vdots & \multicolumn{4}{c|}{-(A_{MN})^t = -A^t = -(A_{NM})} & \vdots & \vdots \\
0 \le q_n & & & & & 1 & \le 0 \\
\hline
w & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & = 1 \\
\hline
 & \vee & \vee & & \vee & \parallel & \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 &
\end{array}$$

Los problemas $P'_A)$ y $P'_B)$ son duales uno del otro; en consecuencia soluciones optimales $(\bar{z},\bar{p})$; $(\bar{w},\bar{q})$ de $P'_A)$ y $P'_B)$, respectivamente, verificarán (por el TEOREMA DE DUALIDAD) $\bar{z} = \bar{w}$.

De lo expuesto resulta: $\bar{z} = \min_q E(\bar{p},q)$ y $\bar{w} = \max_p E(p,\bar{q})$; luego para todo $p \in K_p$; $q \in K_q$ se verifica:

$$E(p,\bar{q}) \leq \bar{w} = \bar{z} \leq E(\bar{p},q)$$

lo que prueba la existencia de punto silla, es decir, el TEOREMA MINIMAX.

PROBLEMA 1. Mostrar las siguientes propiedades,válidas para conos cerrados P,Q:

a) $P \subset Q \Rightarrow P^* \supset Q^*$

b) $P^{**} = P$

c) $(P \cap Q)^* = P^*+Q^*$

d) $(P+Q)^* = P^* \cap Q^*$

Admita que P^*+Q^* y P+Q son cerrados, lo que realmente ocurre si P y Q son conos poliédricos.

PROBLEMA 2. Sea $H(X,Y)$ una función definida en $E \times F$:

a) Probar que $(\bar{X},\bar{Y})$ es punto silla de H si y sólo si $H(X,\bar{Y}) \leq H(\bar{X},Y)$, para todo $(X,Y) \in E \times F$.

b) Si H es tal que existen $\max_X \min_Y H(X,Y)$, $\min_Y \max_X H(X,Y)$ entonces:

$$\max_X \min_Y H(X,Y) \leq \min_Y \max_X H(X,Y)$$

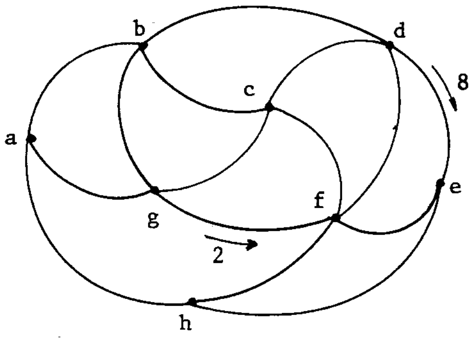
c) Si $(\bar{X},\bar{Y})$ es punto silla de H: $\max_X \min_Y H(X,Y) = \min_Y \max_X H(X,Y) = H(\bar{X},\bar{Y})$.

Recíprocamente, si $\min_Y \max_X H(X,Y) = \max_X \min_Y H(X,Y)$ entonces todo $(\bar{X},\bar{Y}) \in E \times F$ tal que: $\min_Y \{\max_X H(X,Y)\} = \max_X H(X,\bar{Y})$; $\max_X \{\min_Y H(X,Y)\} = \min_Y H(\bar{X},Y)$ es punto silla de H.

d) Las hipótesis b) y c) son válidas si E, F son compactos y H continua.

V. FLUJOS Y TENSIONES EN UN GRAFO.

A. En la figura representamos una red de distribución de un fluído. Para conocer como se realiza la circulación del fluído en la red - en un cierto intervalo de tiempo - bastará conocer en cada tramo de la misma y en el intervalo de tiempo considerado, qué cantidad de fluído ha pasado y en qué dirección. Así tendremos 8 unidades en la dirección (d,e) ; 2 unidades en la dirección (g,f) ; etc.



Cuando deben considerarse varios "estados de escurrimiento" es cómodo establecer una de las dos convenciones siguientes:

I) A cada tramo {x,y} de la red le asignamos una ORIENTACION, es decir, fijamos uno de los pares (x,y) ó (y,x). Además si α es la cantidad que fluye desde x hacia y asociamos α ó $(-\alpha)$ al tramo {x,y} según sea (x,y) ó (y,x) la orientación fijada a dicho tramo.

II) No prefijamos ninguna orientación en la red, y si α es la cantidad que fluye desde x hacia y, asociamos α al par (x,y) y $(-\alpha)$ al par (y,x).

En lo que sigue utilizaremos fundamentalmente la convención II.

Llamaremos GRAFO a todo par $\langle X,S \rangle$ constituído por un conjunto $X \neq \phi$ y una relación $S \subset X \times X$, simétrica y no-reflexiva (es decir S es tal que si $(x,y) \in S$ entonces $(y,x) \in S$ y además $(x,x) \notin S$, para todo $x \in X$).

Dado el grafo $G = \langle X,S \rangle$ llamaremos VERTICE a cada elemento $x \in X$ y arco a cada uno de los pares $(x,y) \in S$. Los arcos $(x,y),(y,x) \in S$ se dirán OPUESTOS y cada par de ellos corresponde a un TRAMO (ARISTA) {x,y} del grafo G.

La figura precedente representa un grafo de 8 vértices y 15 tramos.

En general todo grafo finito (es decir cuando X es finito) admite una representación geométrica similar (no unívocamente determinada) asignando a cada vértice un punto del plano y a cada tramo un arco de curva simple con extremos adecuados.

En un grafo llamaremos CAMINO - desde p hasta q - a toda sucesión de arcos de la forma: $(p,x_1);(x_1,x_2);\ldots;(x_\ell,q)$. Si algunos arcos son sustituídos por sus opuestos, queda definida una CADENA de extremos p,q.

Un grafo se dirá CONEXO si y sólo si para todo par de vértices existe al menos una cadena que los tiene por extremos, es decir que los conecta. Tal es el caso del grafo de la figura precedente. Puede verse que un grafo es conexo si y sólo si cualquiera de sus representaciones geométricas es un conjunto conexo.

Dado el grafo $G = \langle X,S \rangle$ llamaremos SUBGRAFO de G a todo grafo $H = \langle X,T \rangle$ donde T es una relación simétrica definida en $X \times X$, $T \subseteq S$. Observemos que un subgrafo de un grafo conexo puede no ser conexo (por ejemplo si $T = \phi$).

Salvo mención explícita en lo que sigue nos referiremos a grafos finitos, conexos.

Si dado el grafo $G = \langle X,S \rangle$ se elige un subconjunto $U \subseteq S$ tal que de cada par de arcos opuestos contenga exactamente uno de ellos, diremos que se ha dado una ORIENTACION del grafo G; como $|U| = \frac{|S|}{2}$ es claro que pueden obtenerse $2^{|S|/2}$ grafos orientados distintos a partir del mismo grafo soporte $G = \langle X,S \rangle$.

Sea E el espacio lineal de todas las funciones antisimétricas $f: S \to R$ (es decir $f(x,y) = f_{xy} = - f(y,x) = - f_{yx}$, para todo $(x,y) \in S$). Si $U \subseteq S$ es una orientación del grafo G entonces $\bar{f} = f|_U$ es una función (arbitraria) definida sobre U con valores en R. Recíprocamente, toda función $\bar{f}: U \to R$ es la restricción de una única función $f \in E$. Así E resulta isomorfo al espacio lineal E_U de todas las funciones lineales $\bar{f}: U \to R$, cuya dimensión es $|U| = \frac{|S|}{2}$.

Utilizaremos en E el producto escalar: $\langle f.g \rangle = \sum_{(x,y)\in S} f_{xy}g_{xy}$. Nótese que el producto escalar en E_U, a saber $\langle \bar{f}.\bar{g} \rangle_U = \sum_{(x,y)\in U} f_{xy}g_{xy}$ se relaciona con el producto escalar definido en E mediante la igualdad $\langle f.g \rangle = 2 \langle \bar{f}.\bar{g} \rangle_U$. Puesto que ambos productos difieren en un factor - 2 - resulta claro que dos funciones son ortogonales en E si y sólo si sus respectivas restricciones lo son en E_U.

Observemos que considerar, ya sea el espacio E, o bien el espacio E_U es adoptar, respectivamente, ya sea la convención II), ya sea la convención I) dadas al comienzo. Utilizaremos sistemáticamente el espacio E y sólo excepcionalmente el espacio E_U.

B. Diremos que ϕ es un FLUJO sobre el grafo $G = \langle X,S \rangle$ si $\phi \in E$ y cualquiera sea el vértice $a \in X$ se verifica: $\phi_a = \sum_x \phi_{ax} = 0$ (se entiende que la suma se extiende a todos los $x \in X$ tales que $(a,x) \in S$).

La condición precedente $\phi_a = 0$ corresponde al hecho intuitivo según el cual "la circulación de un fluído en una red se realiza en forma conservativa". En efecto, la suma de los $\phi_{ax} > 0$ del "flujo saliente del vértice a" y la suma de los $\phi_{ax} < 0$ da, cambiado de signo, la suma de los $\phi_{xa} > 0$ o sea el "flujo entrante al vértice a". Por lo tanto, en cada vértice el flujo entrante iguala al flujo saliente.

Nótese que si U es una orientación del grafo G, dado el flujo ϕ la función $\phi^U = \phi|_U$ ($\phi^U \in E_U$) verifica: $\sum_x \phi^U_{ax} = \sum_x \phi^U_{xa}$ (suma extendida a los x tales que: (a,x) ∈ U ; (x,a) ∈ U respectivamente). Tal es la noción de FLUJO "ORIENTADO".

Por otra parte, toda función t: X → R se dirá función POTENCIAL del grafo G; dada una tal función queda definido para cada arco (i,j) ∈ S el valor $\theta_{ij} = t_j - t_i = (\Delta t)_{ij}$; la función θ: S → R ($\theta \in E$) se dirá TENSION O DIFERENCIA DE POTENCIAL.

El conjunto Φ de los flujos y el conjunto Θ de las tensiones, sobre un grafo G, son subespacios lineales de E.

En efecto, Φ es el espacio de las soluciones $\phi \in E$ del sistema homogéneo $A\phi = 0$, donde A es la matriz de elementos $a^{(i)}_{(ij)}$ (i ∈ X , (i,j) ∈ S) tales que para cada i se tiene $a^{(i)}_{(ij)} = 1$ para el arco (i,j) ; $a^{(i)}_{(ij)} = -1$ para el arco (j,i) y $a^{(i)}_{(ij)} = 0$ en todo otro caso (es decir si (i,j), (j,i) $\notin$ S).

Por otra parte, Θ es el espacio imagen del espacio $R^{|X|}$ - de todas las funciones potenciales t en X - por la aplicación lineal Δ definida por $(\Delta t)_{ij} = t_j - t_i$.

PROPOSICION 1. Los espacios Φ y Θ son complementos ortogonales en E. Además, suponiendo $G = \langle X,S \rangle$ conexo, resulta: dim Θ = n-1 y dim Φ = m-n+1 (siendo n = |X| ; m = |S|/2).

En efecto, dada f ∈ E y $\theta = \Delta t \in \Theta$ se tiene que:

$$\langle f.\theta \rangle = \sum_{(x,y)\in S} f_{xy}(t_y - t_x) = \sum_{y\in X} t_y \sum_{x\in X} f_{xy} - \sum_{x\in X} t_x \sum_{y\in X} f_{xy}$$

intercambiando x e y en la segunda suma y notando que $f_{xy} = -f_{yx}$ resulta:

$$\langle f.\theta \rangle = 2 \sum_{y\in X} t_y \sum_{x\in X} f_{xy}$$

De aquí es inmediato que si $f \in \Phi$ se tiene: $\langle f.\theta \rangle = 0$.

Recíprocamente, si $\langle f.\theta \rangle = 0$ para todo $\theta \in \Theta$, entonces $f \in \Phi$, según se deduce de considerar las funciones potenciales tales que $t_a = 1$, $t_x = 0$ si $x \neq a$. (Observemos que hay una de estas funciones para cada vértice a).

En consecuencia: Φ y Θ son complementos ortogonales en E. Además, puesto que G se supone conexo es inmediato que $\Delta t = 0$ si y sólo si t es constante en X, resulta entonces que el núcleo de la aplicación lineal Δ, está constituído por las funciones potenciales constantes y por lo tanto su dimensión es 1; en consecuencia si $|X| = n$; el espacio imagen por Δ: Θ , tiene dimensión $n-1$.

Finalmente, dado que $m = \frac{|S|}{2}$ es: dim E = m y por lo tanto:

$$\dim \Phi = \dim E - \dim \Theta = m-(n-1) = m-n+1$$

C. Dado un conjunto $Z \subset S$ tal que $(i,j) \in Z$ implica $(j,i) \notin Z$ sea ρ_Z la función de E definida por:

$$\rho_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j) \in Z \\ -1 & \text{si} \quad (j,i) \in Z \\ 0 & \text{si} \quad (i,j);(j,i) \notin Z \end{cases}$$

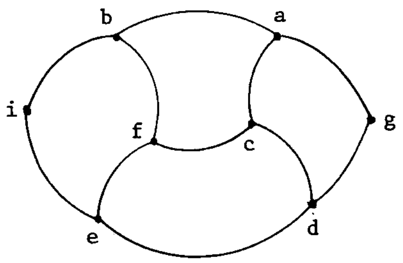
Observemos que si $Z = \{(i,j);(j,k);\ldots;(r,s);(s,i)\}$ entonces ρ_Z es un flujo; en tal caso Z y ρ_Z se dicen CICLOS de G (se excluye el caso $Z = \{(i,j);(j,i)\}$).

Dada una partición de X en dos conjuntos no vacíos : A , B = X-A , sea $Z = \{(i,j) \mid i \in A , j \in B ; (i,j) \in S\}$. Sea 1_A la función característica de A y $\rho_Z = \Delta(-1_A)$; ρ_Z es una tensión; en este caso Z y ρ_Z se dicen COCICLOS de G.

Un ciclo Z se dice ELEMENTAL si cada uno de sus vértices es considerado solamente dos veces (una como vértice inicial y otra como vértice final de los arcos del ciclo).

Un cociclo Z se dice ELEMENTAL si, al retirar los arcos $(i,j) \in Z$ y sus opuestos, el grafo G queda dividido en dos grafos conexos.

Consideremos el grafo indicado en la figura; un ciclo elemental es:

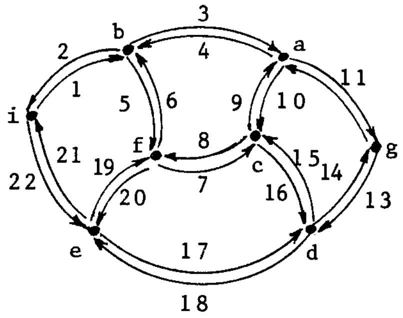


$Z_1 = \{(b,a);(a,g);(g,d);(d,c);(c,f);(f,b)\}$

y un cociclo elemental es:

$Z_2 = \{(b,a);(f,c);(e,d)\}$ (en este caso $A = \{i,b,f,e\}$).

Si los arcos del grafo son numerados como en la figura dada a continuación, el ciclo Z_1 y el cociclo Z_2 pueden ser representados por vectores $\bar{\rho}_{Z_1}, \bar{\rho}_{Z_2} \in R^{22}$ respectivamente:



$$\bar{\rho}_{Z_1} = (0,0,1,-1,-1,1,-1,1,0,0,1,-1,-1,1,1,-1,0,0,0,0,0,0)$$

$$\bar{\rho}_{Z_2} = (0,0,1,-1,0,0,1,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,-1,0,0,0,0)$$

OBSERVACION 1. Los cociclos generan el espacio Θ de las tensiones; más aún, cualquiera sea la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$, $\phi \neq A_i \neq X$, tal que la familia de funciones características $\{1_{A_i}\}_{i\in I}$ generen el espacio de las funciones potenciales, t: $X \to R$, los cociclos $\rho_i = \Delta(-1_{A_i})$ $(i \in I)$ generan el espacio Θ.

OBSERVACION 2. Los ciclos generan el espacio Φ de los flujos. En efecto, para que θ sea un tensión es suficiente (y obviamente necesario) que $\langle \theta . \rho \rangle = 0$ para todo ciclo ρ, o sea que dado el ciclo $Z = \{(i,j);(j,k);\ldots;(s,i)\} \subseteq S$ resulta:

$$(1) \qquad \theta_{ij} + \theta_{jk} + \ldots + \theta_{si} = 0$$

Por otra parte, fijado $a \in X$, si para cualquier $x \in X$ ponemos

$$t_x = t_a + \theta_{ai_1} + \theta_{i_1 i_2} + \ldots + \theta_{i_p x}$$

$((a,i_1);(i_1,i_2);\ldots;(i_p,x) \in S)$, se tiene por la igualdad (1) que la aplicación t está bien definida y, por otra parte, si $(i,j) \in S$ es $t_j - t_i = \theta_{ij}$.

En consecuencia, los ciclos generan Φ, ya que el espacio ortogonal al espacio generado por los ciclos está contenido en Θ, y $\Theta = \Phi^{\perp}$, luego Φ está contenido en el espacio generado por los ciclos, pero éstos son flujos, por lo tanto, ambos espacios coinciden.

Las afirmaciones hechas en estas observaciones serán refinadas en los párrafos D y E.

D. Un grafo $G = \langle X,S \rangle$, conexo o no, se dice un ARBOL si no contiene ningún ciclo, esto equivale a decir que G es un árbol si y sólo si $\Phi = \{0\}$.

Si G es un grafo conexo, por ser dim $\Phi = m-n+1$, resulta que G es un árbol conexo si y sólo si $m = n-1$.

En el caso que G es un árbol no-conexo, cada componente de G es un árbol conexo (suele expresarse esta situación diciendo que G es un BOSQUE).

Si el grafo conexo G no es ya un árbol, es posible (y de diferentes maneras) determinar un subgrafo $T = \langle X,T \rangle$ de G, que sea un árbol con - exactamente - n-1 tramos, y de manera que si se agrega un tramo más a T, el grafo resultante deje de ser un árbol; diremos en este caso que T es un ARBOL MAXIMO.

Puede probarse que si G es un grafo conexo, las afirmaciones siguientes son equivalentes para un subgrafo T de G:

i) T es árbol máximo

ii) T es árbol conexo

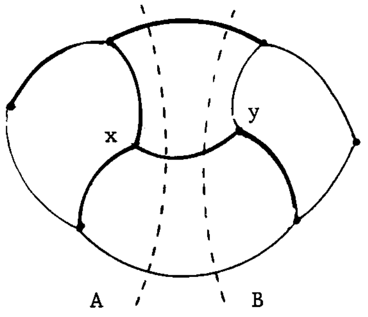
iii) T es árbol con n-1 tramos ($n = |X|$)

En el grafo del ejemplo anterior, los tramos: $\{i,b\};\{b,a\};\{b,f\};\{f,e\};\{f,c\};\{c,d\};\{d,g\}$ determinan un árbol máximo.

OBSERVACION 3. Dado un árbol máximo T de un grafo conexo G, a él se asocian una base de Φ (respectivamente de Θ) constituída por ciclos elementales (respectivamente cociclos elementales) de G.

En efecto, a cada uno de los m-n+1 tramos {a,b} del grafo G que no están en el árbol T, es posible asociar un ciclo elemental ρ_{ab} (formado por (a b) y arcos de T que conectan a con b). Es inmediato que dichos ciclos son linealmente independientes - pues cada arco no perteneciente a T forma parte de uno y sólo un ciclo. Por otra parte se pueden formar exactamente m-n+1 ciclos y es dim $\Phi = m-n+1$; por lo tanto los ciclos así constituídos forman una base de Φ.

Para probar la segunda parte de la observación, notemos que con cada uno de los n-1 tramos $\{x,y\}$ del árbol T es posible, quitando este tramo determinar dos conjuntos A y B que constituyen una partición de X (el conjunto A está constituído por los vértices conectados con x por arcos de T, B está formado por los elementos de X-A).



Tomando $Z = \{(i,j) \in S \mid i \in A\ ,\ j \in B\}$; $\rho_Z = \Delta(-1_A)$, es un cociclo elemental. De esta manera podemos determinar n-1 cociclos elementales, que son linealmente independientes - pues cada arco de T pertenece a uno solo de ellos - y entonces constituyen una base de Θ.

Consideremos una base de ciclos elementales ρ_{ab}, todo flujo ϕ se expresa de <u>manera única</u> como combinación lineal de ellos, es decir:

$$(2) \qquad \phi = \sum \lambda_{ab}\rho_{ab} \quad (\lambda_{ab} \in R)$$

En particular, ϕ queda unívocamente determinado por su valor ϕ_{ab} en el complementario de un árbol máximo, y, con más razón, en el complementario de un árbol.

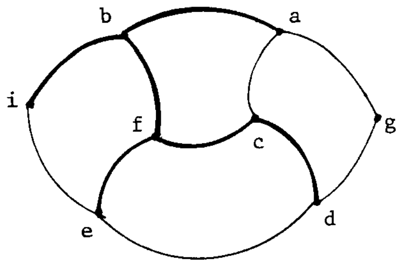
Análogamente, consideremos una base de cociclos elementales ρ_{xy}, toda tensión θ se expresa de manera única como una combinación lineal de estos cociclos, o sea:

$$(3) \qquad \theta = \sum \lambda_{xy}\rho_{xy} \quad (\lambda_{xy} \in R)$$

En particular θ queda unívocamente determinada por sus valores θ_{xy} en un árbol máximo, y, con más razón en cualquier subgrafo conexo de G (pues tal subgrafo contiene un árbol máximo).

Una consecuencia interesante de las igualdades (2) y (3) es que los valores de ϕ ó θ se expresan en función de los datos λ_{ij}, como una suma algebraica de ellos, es decir como una suma de términos λ_{ij} con coeficientes: 0,1 ó -1. En particular, si los datos λ_{ij} son enteros, ϕ y θ tendrán componentes enteras.

EJERCICIO. En el grafo de la figura considere el árbol máximo que se indica determinando:



a) El flujo ϕ con los datos:

$$\phi_{ag}=\lambda_{ag} \; ; \; \phi_{ed}=\lambda_{ed} \; ; \; \phi_{ac}=\lambda_{ac} \; ; \; \phi_{ie}=\lambda_{ie}$$

b) La tensión θ con los datos:

$$\theta_{ib}=\lambda_{ib} \; ; \; \theta_{bf}=\lambda_{bf} \; ; \; \theta_{fe}=\lambda_{fe} \; ; \; \theta_{fc}=\lambda_{fc} \; ; \; \theta_{ba}=\lambda_{ba} \; ; \; \theta_{cd}=\lambda_{cd} \; ; \; \theta_{df}=\lambda_{df} \; .$$

Independientemente de lo anterior, para determinar θ, es más simple determinar un potencial t, sobre el árbol, que responda a los datos dados y hacer $\theta = \Delta t$. Mientras que para determinar ϕ puede observarse el grafo, así para calcular, por ejemplo, el valor ϕ_{fc} se suman $\lambda_{ac}, \lambda_{ed}, \lambda_{ag}$, siendo: $\phi_{fc} = -\lambda_{ac} - \lambda_{ed} - \lambda_{ag}$.

Un subconjunto V de arcos de G, tal que con cada arco contenga su opuesto, se dirá un CONJUNTO DE UNICIDAD de los flujos de G, si para todo $\phi \in \Phi$, $\phi|_V = 0$ implica $\phi = 0$.

De lo visto anteriormente, resulta que si V es el conjunto de arcos complementario de un árbol, V es un conjunto de unicidad de los flujos de G. Recíprocamente, si V es un conjunto de unicidad de los flujos de G, los tramos $\{x,y\} \notin V$ constituyen un árbol $T = \langle X, S-V \rangle$. En efecto, consideremos un flujo ϕ' sobre el grafo T (no necesariamente conexo), prolonguemos ϕ' a todo el grafo G poniendo: $\phi_{ab} = 0$ si $(a,b) \in V$. Es fácil verificar que ϕ es un flujo de G y como $\phi|_V = 0$ resulta $\phi = 0$; en particular $\phi|_{S-V} = \phi' = 0$. Esto muestra que todo flujo del grafo T es nulo, y por lo tanto T es un árbol.

Análogamente se define el concepto de CONJUNTO DE UNICIDAD de las tensiones de G. Así entonces el conjunto de tramos de un subgrafo conexo de G es un conjunto de unicidad para las tensiones de G, ya que todo subgrafo conexo contiene un árbol máximo. La recíproca también vale, siendo su demostración muy simple.

Un conjunto de unicidad V de flujos (tensiones) se dirá un CONJUNTO DE DETERMINACION si dada una aplicación $\gamma: V \rightarrow R$ tal que $\gamma_{ab} = -\gamma_{ba}$ para todo $(a,b) \in V$ existe ϕ (respectivamente θ) - necesariamente única - tal que $\phi|_V = \gamma$ (respectivamente $\theta|_V = \gamma$).

Es fácil verificar que V es un conjunto de determinación si y sólo si es un con junto de unicidad minimal. Esto significa que, en el caso de los flujos, V es el complementario de los arcos de un árbol máximo; y que en el caso de las tensiones, V es el conjunto de arcos de un árbol máximo.

E. Llamaremos SOPORTE de un flujo (o una tensión) f al conjunto

$$\text{sop } f = \{(i,j) \mid f_{ij} > 0\}$$

De la definición resulta:

i) Si ϕ es un flujo no-nulo, sop ϕ, tiene la propiedad: $(i,j) \in \phi \Rightarrow$ existe $k \in X$ tal que $(j,k) \in$ sop ϕ.

Es fácil verificar que de esta propiedad resulta que, para un grafo G finito, sop ϕ contiene un ciclo Z.

ii) Si θ es una tensión no-nula, $\theta = \Delta t$, siendo t una función potencial no constante, tomando cualquier α tal que: $\min_{i \in X} t_i < \alpha < \max_{i \in X} t_i$ y $A = \{i \mid t_i < \alpha\}$; $B = \{j \mid t_j \geq \alpha\}$, el cociclo $Z = \{(i,j) \in S \mid i \in A \text{ , } j \in B\}$ está contenido en sop θ.

Es inmediato que todo ciclo contiene un ciclo elemental. Veamos que todo cociclo contiene un cociclo elemental. Es claro que todo cociclo contiene un cociclo minimal (en el sentido conjuntista). Basta ver que todo cociclo minimal es elemental. En efecto, sea $Z = \{(i,j) \in S \mid i \in A \text{ , } j \in B\}$ un cociclo minimal de G y sea G_Z el grafo obtenido al quitar de G los arcos de Z y sus opuestos.Si Z no es elemental, A ó B no determinan en G_Z dos grafos conexos. Suponiendo que A no es conexo, sea A_1 una componente conexa de A en G_Z, el cociclo Z_1 definido en relación con A_1 y X-A_1 es tal que $Z_1 \subseteq Z$, $Z_1 \neq Z$ - como puede verificarse - Y esto nos lleva a una contradicción.

Resulta entonces que en referencia a ciclos (cociclos) las nociones minimal y elemental son equivalentes.

Combinando los resultados anteriores vemos que:

a) El soporte de un flujo, no-nulo, contiene un ciclo elemental.

b) El soporte de una tensión, no-nula, contiene un cociclo elemental.

PROPOSICION 2. i) Si ϕ es un flujo no-nulo, entonces ϕ es una combinación po sitiva de ciclos elementales ρ_α con sop $\alpha \subset$ sop ϕ.

ii) Si θ es una tensión no-nula, entonces θ es una combinación positiva de cociclos elementales ρ_α, con sop $\rho_\alpha \subset$ sop θ.

La demostración es similar en ambos casos. Veamos i).

Sabemos - por lo visto anteriormente - que existe un ciclo elemental $Z_1 \subset$ sop ϕ, sea ρ_1 el flujo correspondiente. Veamos que se puede tomar $\lambda_1 > 0$ tal que sop$(\phi-\lambda_1\rho_1) \subsetneqq$ sop ϕ. En efecto, sea $\lambda_1 = \min\limits_{(i,j)\in Z_1} \phi_{ij}$.

Es claro que $\lambda_1 > 0$, queda por ver que sop$(\phi-\lambda_1\rho_1) \subseteq$ sop ϕ ,ya que probado esto último, por la definición de λ_1, la inclusión es propia evidentemente.

Supongamos $\phi_{ij}-\lambda_1(\rho_1)_{ij} > 0$ y veamos que también es $\phi_{ij} > 0$; esto es claro si $(\rho_1)_{ij} \geq 0$; además no puede ser $(\rho_1)_{ij} < 0$ pues en tal caso será $(\rho_1)_{ji} > 0$, luego $(j,i) \in Z_1$; pero esto significa que $\phi_{ji} \geq \lambda_1$ o sea $\lambda_1-\phi_{ji} = \lambda_1+\phi_{ij} \leq 0$ y por ser $\lambda_1+\phi_{ij} = \phi_{ij}-\lambda_1(\rho_1)_{ij}$ se contradice la hipótesis. Debe ser entonces $(\rho_1)_{ij} \geq 0$ y en consecuencia $\phi_{ij} > 0$.

Recomenzando con el flujo $\phi-\lambda_1\rho_1$, por el mismo procedimiento se determina $\lambda_2 > 0$ y un ciclo ρ_2 - con $Z_2 =$ sop $\rho_2 \subset$ sop$(\phi-\lambda_1\rho_1)$ - de modo que sop$(\phi-\lambda_1\rho_1-\lambda_2\rho_2) \subsetneqq$ sop$(\phi-\lambda_1\rho_1)$. Después de un número finito de reiteraciones, llegaremos a determinar números $\lambda_i \geq 0$ y ciclos ρ_i $(i = 1,2,\dots,p)$ tales que sop $\rho_i \subset$ sop ϕ $(i = 1,2,\dots,p)$ y $\phi-\lambda_1\rho_1-\lambda_2\rho_2-\dots-\lambda_p\rho_p = 0$ o sea $\phi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\rho_i$.

COROLARIO. Todo ciclo (cociclo) de un grafo G se puede expresar como una unión disjunta de ciclos (cociclos) elementales.

PROBLEMA. Dado el grafo $G = \langle X,S \rangle$, con p componentes conexas, probar que

$$\dim \Phi = m-n+p \quad , \quad \dim \Theta = n-p$$

VI. FLUJOS Y TENSIONES CANALIZADAS. PROBLEMA DE TRANSPORTE.

A. Consideremos el grafo $G = \langle X,S \rangle$ con una orientación prefijada U; si para cada arco $(a,b) \in U$ indicamos valores $h_{ab}, \ell_{ab}, h_{ab} \leq \ell_{ab}$ diremos que hemos especificado una CANALIZACION en el grafo orientado $\langle X,U \rangle$.

Admitiremos que puede ser $h_{ab} = -\infty$ (pero no $+\infty$) y $\ell_{ab} = +\infty$ (pero no $-\infty$).

Un flujo $\phi \in E_U$ se dice CANALIZADO (por una canalización especificada) si para todo $(a,b) \in U$ es $h_{ab} \leq \phi_{ab} \leq \ell_{ab}$.

Si ϕ se piensa como función de E (basta poner $\phi_{ba} = -\phi_{ab}$ si $(a,b) \in U$) las desigualdades $h_{ab} \leq \phi_{ab} \leq \ell_{ab}$ equivalen a $\phi_{ab} \leq \ell_{ab}$; $\phi_{ba} \leq -h_{ab}$.

Para el grafo $G = \langle X,S \rangle$ decimos que hemos dado una canalización si para cada arco $(a,b) \in S$ indicamos un valor $k_{ab} \in (-\infty,+\infty]$ tal que $k_{ab}+k_{ba} \geq 0$.

Está claro que de esta manera tenemos una canalización en el grafo orientado $\langle X,U \rangle$ si ponemos $k_{ab} = \ell_{ab}$ para $(a,b) \in U$ y $k_{ab} = -h_{ba}$ si $(a,b) \notin U$.

Indicando Φ_K el conjunto de los flujos $\phi \in E$, canalizados por la canalización $K = \{k_{ab} \mid (a,b) \in S\}$, dada anteriormente, resulta que Φ_K es un poliedro de E, intersección de Φ con los semiespacios $x_{ab} \leq k_{ab}$ $(k_{ab} < +\infty)$.

De manera completamente análoga se define el conjunto Θ_K de las tensiones canalizadas, por una canalización K.

B. Supongamos que tenemos un flujo $\phi^o \in \Phi_K$, veamos en qué condiciones ϕ^o es vértice del poliedro Φ_K.

Consideremos el conjunto

$$V = \{(a,b) \mid \phi^o_{ab} = k_{ab} \text{ ó } \phi^o_{ba} = k_{ba}\} = \{(a,b) \mid \phi^o_{ab} = k_{ab} \text{ ó } \phi^o_{ab} = -k_{ba}\} ;$$

a los tramos $\{a,b\}$ tales que $(a,b) \in V$ los llamaremos tramos SATURADOS por el flujo ϕ^o.

PROPOSICION 1. Para que $\phi^o \in \Phi_K$ sea vértice de Φ_K es necesario y suficiente que los tramos no-saturados constituyan un árbol de G. Además ϕ^o será un vértice no-degenerado si y sólo si dicho árbol es máximo.

En efecto, las restricciones ligadas a ϕ^o son las igualdades que definen Φ y las igualdades $\phi^o_{ab} = k_{ab}$ (ó $\phi^o_{ba} = k_{ba}$) para $(a,b) \in V$. Estas últimas igualdades tienen por única solución $\phi = \phi^o$ si y sólo si V es un conjunto de unicidad para los flujos, esto es si $\langle X,S-V\rangle$ es un árbol.

La última parte de la proposición necesita una aclaración previa. Supongamos que la condición $\phi \in \Phi$ se expresa sin redundancia, en cuanto a las ecuaciones que definen Φ.

Por simplicidad nos referiremos al caso en que se dá al grafo G una orientación U. De esta manera $\phi \in E_U$ siendo dim $E_U = \frac{|S|}{2} = |U| = m$ y podemos poner $\phi = (\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_m)$.

Supuesto G conexo, Φ tiene dimensión $m-n+1 = m-(n-1)$ $(n = |X|)$, y puede definirse sin redundancia por $n-1$ ecuaciones lineales, las que obviamente son ligadas a ϕ^o, pero ϕ^o además está definido por las r igualdades $\phi_i = k_i$ ó $\phi_i = \ell_i$ para $i \in V$; pero los arcos de V constituyen el complementario de arcos de un árbol T de G, luego $r \leq m-n+1$ (recordemos que el número de arcos de un árbol máximo de G es $n-1$). De lo dicho anteriormente,resulta que el número de restricciones ligadas a ϕ^o es: $r+n-1$, y por la desigualdad anterior es $r+m-1 \leq m$, y la igualdad se dá si y sólo si $r = m-n+1$ o sea si y sólo si T es un árbol máximo (recordemos que un vértice de un poliedro es no-degenerado si el número de restricciones ligadas coincide con la dimensión del mismo).

Consideremos ahora $\theta^o \in \Theta_K$ y sea $V = \{(a,b) \mid \theta^o_{ab} = k_{ab}$ ó $\theta^o_{ba} = k_{ba}\}$; el tramo $\{a,b\}$, con $(a,b) \in V$, se dice SATURADO por θ^o.

Las condiciones para que θ^o sea un vértice de Θ_K se dan a continuación, siendo su demostración similar a la de la proposición anterior.

PROPOSICION 2. Para que $\theta^o \in \Theta_K$ sea un vértice de Θ_K es necesario y suficiente que los tramos saturados por θ^o constituyan un conjunto conexo de G. Además θ^o es un vértice no-degenerado de Θ_K si y sólo si dicho conjunto es un árbol máximo de G.

C. Dado un vértice ϕ^o del poliedro Φ_K veamos como se determinan las aristas de

Φ_K incidentes en ϕ^o.

Dado el vértice ϕ^o del poliedro Φ_K sea V el conjunto de los tramos del grafo G saturado por ϕ^o. Por la proposición 1, sabemos que el grafo $T = \langle X,T \rangle$ con T = S-V constituye un árbol de G. Además el sistema homogéneo $\psi_{ab} = 0$, $(a,b) \in V$; $\psi \in \Phi$ tiene la solución única $\psi = 0$ (recordemos que V es un conjunto de unicidad para los flujos de Φ).

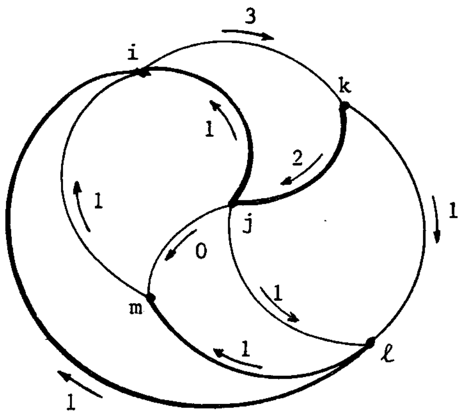
Consideremos ahora un subconjunto simétrico $V' \subset V$ tal que el sistema homogéneo $\psi_{ab} = 0$, $(a,b) \in V'$, $\psi \in \Phi$, tenga indeterminación 1. Sea $\bar{\psi}$ una solución no-nula de este sistema; de acuerdo con lo visto en la parte III (proposición 7), $\bar{\psi}$ será un vector director de una arista de Φ_K (incidente en ϕ^o) si y sólo si $\bar{\psi}_{ab} \leq 0$ para todo $(a,b) \in V\text{-}V'$ tal que $\phi^o_{ab} = k_{ab}$ (ya que en tales condiciones es: $\phi^o_{ab} + t\psi_{ab} \leq k_{ab}$ para $t \geq 0$, conveniente). Determinar $\bar{\psi}$ en tales condiciones significa encontrar una ampliación $T' = \langle X,T' \rangle$ (T' = S-V') del árbol T, tal que el subgrafo T' tenga un espacio de flujos Φ' de dimensión 1.

Sea $\psi' \in \Phi'$, $\psi' \neq 0$; si $\psi'_{ab} \leq 0$ para todo $(a,b) \in T'\text{-}T$ (o bien $\psi_{ab} \geq 0$ para todo $(a,b) \in T'\text{-}T$, en cuyo caso cambiamos ψ por $(-\psi)$), ampliemos ψ' a un flujo $\bar{\psi} \in \Phi$ poniendo $\bar{\psi}|_{V'} = 0$, en estas condiciones $\bar{\psi}$ será un vector director de una arista de Φ_K incidente en ϕ^o. De este modo podemos determinar todas las aristas incidentes en ϕ^o.

Gráficamente un conjunto $T' \supset T$ tal que el espacio de flujos Φ' asociado a él tenga dimensión 1, se reconoce por el hecho que en el grafo $T' = \langle X,T' \rangle$ existe un solo ciclo elemental Z (y su opuesto, naturalmente); $\bar{\psi}$ es entonces uno de los flujos ρ_Z ó $(-\rho_Z)$ asociados al ciclo Z.

El caso en que $T = \langle X,T \rangle$ es un árbol máximo, es decir ϕ^o es un vértice regular, es particularmente simple. Para cada tramo $\{a,b\} \notin T$ se toma $T' = T \cup \{(a,b),(b,a)\}$ y con cada uno de los m-n+1 conjuntos así construídos se determina una arista del poliedro Φ_K incidente en ϕ^o; y éstas son todas las tales aristas.

EJEMPLO. Consideremos el grafo dado a continuación, canalizado por la tabla que se acompaña:



K	i	j	h	ℓ	m
i	*	1	3	2	-1
j	2	*	-1	1	0
h	-2	3	*	2	*
ℓ	+∞	0	-1	*	3
m	2	2	*	2	*

Sea ϕ^o el flujo indicado en los arcos del grafo; el árbol máximo T (en trazo grueso) corresponde al árbol formado por los tramos del grafo no-saturados por ϕ^o, ϕ^o es un vértice regular de Φ_K (como se indicó anteriormente).

Determinemos uno de los vectores directores de aristas incidentes en ϕ^o. Observemos que $T = \{\{h,j\};\{j,i\};\{i,\ell\};\{\ell,m\}\}$; y consideremos $T' = T \cup \{(h,\ell);(\ell,h)\}$ sea $\rho = \rho_{h\ell}$ el flujo correspondiente al único ciclo elemental $Z_{h\ell} \subset T'$: $Z_{h\ell} = \{(h,\ell);(\ell,i);(i,j);(j,h)\}$; tomando $\psi = \rho_{h\ell}$ se tiene, evidentemente $\psi_{\ell h} = -1 \leq 0$ en el arco saturado (ℓ,h) $(\phi^o_{\ell h} = k_{\ell h} = -k_{h\ell} = 1)$.

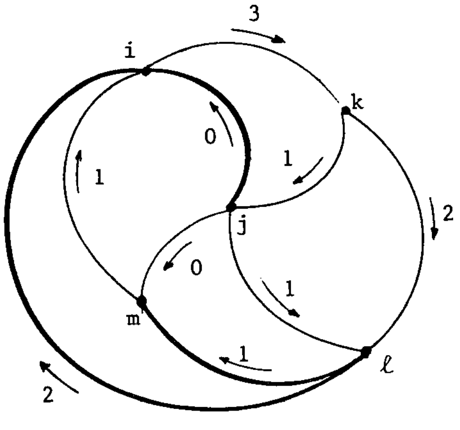
Ahora bien: $\phi^o + t\psi \in \Phi_K$, para $t \geq 0$ convenientemente elegido, más precisamente para todo $t \geq 0$ tal que $(\phi^o+t\psi)_{xy} = \phi^o_{xy}+t\psi_{xy} \leq k_{xy}$ para todo $(x,y) \in S$, esto es, para todo t: $0 \leq t \leq t_o$ donde

$$t_o = \underset{\psi_{xy}>0}{\text{mín}} \frac{k_{xy}-\phi^o_{xy}}{\psi_{xy}} = \underset{-(x,y)\in Z_{h\ell}}{\text{mín}} \{k_{xy}-\phi^o_{xy}\} =$$

$$= \text{mín}\{k_{h\ell}-\phi^o_{h\ell}, k_{\ell i}-\phi^o_{\ell i}, k_{ij}-\phi^o_{ij}, k_{jh}-\phi^o_{jh}\} =$$

$$= \text{mín}\ \{1,+\infty,2,1\} = 1 \text{ ; luego } \phi' = \phi^o + t_o\psi =$$

$= \phi^o + \rho_{h\ell}$ es un nuevo vértice de Φ_K. El conjunto de tramos no-saturados por ϕ' es el que se indica en el grafo con trazo grueso.



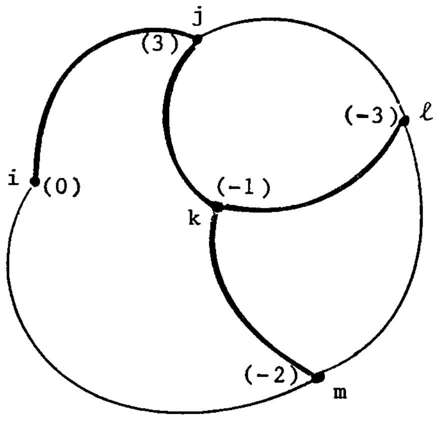
Hagamos un comentario de lo expuesto en este párrafo. Un flujo ϕ^o cuyos tramos no-saturados T no forman circuito (esto es, constituyen un árbol) no permite ser aumentado o disminuído en un mismo flujo <u>circular</u> ψ; esto es posible en cam bio, si ϕ^o tiene un ciclo de arcos no-saturados. Si $T = \langle X,T \rangle$ es un árbol máximo y $(a,b) \notin T$ es tal que $\phi^o_{ab} = k_{ab}$ pero $\phi^o_{ba} < k_{ba}$, es posible incrementar ϕ^o en un flujo circular $t\psi = t\rho_{ba}$, para $t > 0$ conveniente, hasta saturar uno de los tramos del ciclo elemental ρ_{ba} (formado con (b,a) y arcos del árbol T adecuados).

D. Sea ahora θ^o un vértice de Θ_K y T el conjunto de tramos saturados por θ^o (es decir $T = \{(a,b) \mid \theta^o_{ab}=k_{ab}$ ó $\theta^o_{ba}=k_{ba}\}$). Como hemos visto anteriormente (proposición 2 - párrafo B) el grafo $T = \langle X,T \rangle$ es conexo y si θ^o es un vértice no-degenerado, T es un árbol máximo del grafo G.

Con un razonamiento similar al utilizado para Φ_K puede verse que las aristas de Θ_K incidentes en θ^o, tienen por vectores directores a $\gamma = \rho_Z$, correspondientes a cociclos elementales. Si T es un árbol (conexo) hay n-1 cociclos elementales, obtenidos de las particiones de T en dos componentes conexas, que resultan al suprimir uno de los tramos de T.

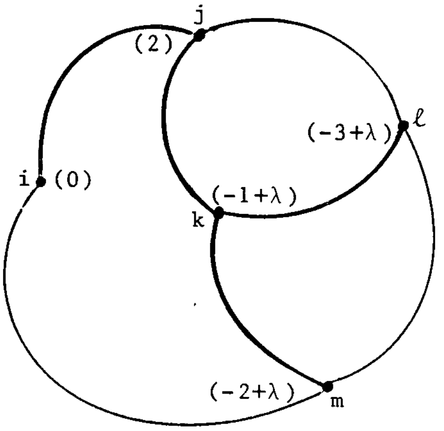
En el caso de las tensiones es más simple considerar $\theta^o \in \Theta_K$ identificada con el potencial t tal que $\theta = \Delta t$ y $t_a = 0$, siendo $a \in X$ un elemento fijo.

EJEMPLO. Consideremos la tensión θ^o representada en el grafo, canalizada de acuerdo a la tabla que se acompaña. En el grafo se indica el potencial t^o (correspondiente a θ^o) con un número entre paréntesis en cada vértice. $\theta^o = \Delta t^o$ es un vértice regular, el árbol T (en trazo grueso) corresponde al conjunto de tramos saturados por θ^o.



K	i	j	h	ℓ	m
i	*	2	*	*	0
j	0	*	-3	2	*
h	*	5	*	0	4
ℓ	*	6	2	*	10
m	4	*	1	0	*

Suprimiendo el tramo {j,h} y tomando λ conveniente,el potencial puede ser varia do en λ en el conjunto $B = \{h,\ell,m\}$. Más precisamente, $t_\lambda = t^o + \lambda 1_B$ determina $\Delta t_\lambda = \Delta t^o + \lambda \Delta(1_B) = \theta^o + \lambda\gamma$; ahora bien, $\Delta t_\lambda \in \Theta_K$ si y sólo si: $(\Delta t)_{xy} \leq k_{xy}$ para todo $(x,y) \in S$.

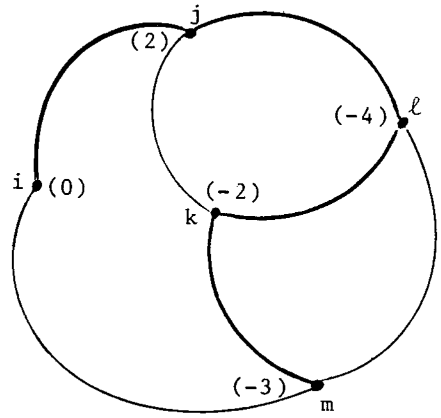


Esta condición basta que sea verificada en los arcos del cociclo

$$Z = \{(i,m),(j,h),(j,\ell)\}$$

y sus opuestos. Resulta entonces que $\theta^o + \lambda\gamma \in \Theta_K$ si y sólo si: $-1 \leq \lambda \leq 0$.

Para $\lambda = -1$ se tiene otro vértice $\theta' \in \Theta_K$; el árbol $T' = \langle X,T' \rangle$ correspondiente a θ' se indica en la figura con trazo grueso.



E. A continuación haremos algunas consideraciones sobre la posibilidad de la resolución de problemas lineales sobre los poliedros Φ_K ó Θ_K; estas consideraciones surgen naturalmente al aplicar el método simplex a tales problemas.

Consideraremos solamente el problema correspondiente al poliedro Φ_K que damos a continuación:

$$\text{minimizar } \langle C.\phi \rangle = \sum_S c_{ij}\phi_{ij} \quad , \quad \phi \in \Phi_K.$$

Podemos suponer que la matriz C es antisimétrica - sustituyéndola en caso contrario por la matriz $C^A = (C^A_{ij})$, siendo $C^A_{ij} = \dfrac{c_{ij} - c_{ji}}{2}$; de esta manera tendremos $C.\phi = C^A.\phi$.

Si el poliedro Φ_K se considera definido en E_U, el problema que se plantea

$$\text{minimizar} \langle D.\phi \rangle_U = \sum_U d_{ij}\phi_{ij} \quad , \quad \phi \in \Phi_K \subset E_U$$

se relaciona con el anterior si ponemos $c_{ij} = d_{ij}$; $c_{ji} = -d_{ij}$ para $(i,j) \in U$. De esta manera resulta $\langle D.\phi\rangle_U = \frac{1}{2}\langle C.\phi\rangle$. De acuerdo con esto, en lo que sigue, nos referiremos al problema planteado en primer término.

Supongamos, en primer lugar, que Φ_K tiene todos sus vértices no-degenerados, y que partimos de un vértice ϕ^o de Φ_K conocido, al cual está asociado un árbol máximo $T^o = \langle X,T^o\rangle$ formado por los tramos no-saturados por ϕ^o.

Por cada tramo $\{a,b\}$ saturado, podemos hacer fluir según un ciclo elemental Z, en la dirección no-saturada, una fracción de flujo $t\psi$ $(t \geq 0)$, cuya contribución al valor de la funcional es $\langle C(t\psi)\rangle = t(\sum_{(ij)\in Z} c_{ij})$ de esta manera si $\sum_Z c_{ij} < 0$, el valor de la funcional disminuirá en la arista $\phi^o+t\psi$. Si éste es el caso - y si la arista no es infinita - podemos aumentar el valor de t hasta saturar un arco del ciclo Z, determinando de esta manera el nuevo vértice de Φ_K: $\phi' = \phi^o+t_o\psi$, en el cual se recomienza.

Si para el ciclo Z es $\sum_Z c_{ij} \geq 0$, pasamos a otro tramo saturado y a otro ciclo Z'. Si para todos los tramos saturados, el ciclo Z correspondiente verifica: $\sum_Z c_{ij} \geq 0$, habremos llegado al máximo de la funcional $\langle C.\phi\rangle$ y ϕ^o será la solución óptima.

Notemos ahora que si ϕ^o es un vértice degenerado, una suma de valores k_{xy}, $(x,y) \in S$, debe anularse. En efecto, dado el árbol $T^o = \langle X,T^o\rangle$ ampliémoslo a un árbol máximo $T = \langle X,T\rangle$, si $(a,b) \in T$, pero $(a,b) \notin T^o$ y es $\phi^o_{ab} = k_{ab}$, por la OBSERVACION 3, del párrafo D, V, sabemos que ϕ^o_{ab} se expresa como una suma algebraica de los valores que ϕ^o toma en los arcos de S-T (orientados en una dirección), por ejemplo en los arcos $(x,y) \in$ S-T donde $\phi^o_{xy} = k_{xy}$; tendremos entonces una suma algebraica de los k_{xy} y k_{ab} igualada a cero. Vemos entonces que la degeneración se presenta (si pensamos en los k_{xy} como variables) en la reunión de ciertos hiperplanos de la forma $\sum k_{ij} - \sum k_{rs} = 0$, lo que revela el carácter excepcional de la degeneración.

Supongamos que el vértice ϕ^o es degenerado, sea T^o el árbol correspondiente a los tramos no-saturados por ϕ^o, $T^o = \langle X,T^o\rangle$ no es un árbol máximo, puede entonces ser ampliado a un árbol máximo $T = \langle X,T\rangle$ $(T \supset T^o)$.

Podemos pensar que los datos k_{ab} han sido variados ligeramente para tener nuevos datos $k'_{ab} \geq k_{ab}$, $(a,b) \in S$, de modo que:

1) T sea el conjunto de arcos no-saturados por ϕ^o; y

2) En el poliedro $\Phi_{K'}$, no ocurrirá ninguna degeneración.

Observemos que por ser $k_{ij} \leq k'_{ij}$, $(i,j) \in S$, es $\Phi_K \subset \Phi_{K'}$, luego $\phi^o \in \Phi_{K'}$, siendo $T = \langle X,T\rangle$ el árbol asociado a ϕ^o con canalización K'.

Operamos con el árbol T como si realmente se tratara del árbol asociado a ϕ^o con canalización K.

Se estudia un ciclo Z para el cual sea $\sum_Z c_{ij} < 0$, y si respecto de él más de un arco se satura se elige uno, se pasa así a un nuevo árbol (aunque quizás no a un nuevo vértice de Φ_K, pero sí a un vértice de $\Phi_{K'}$).

Es claro que si la degeneración no se presenta (lo que descartamos por la hipótesis 2)) arribaremos a un vértice $\bar{\phi} \in \Phi_{K'}$, y a un árbol $\bar{T}$ asociado a él, en el cual sea $\sum_Z c_{ij} \geq 0$, para todos los ciclos Z determinados a partir de $\bar{T}$. En estas condiciones $\langle C.\bar{\phi}\rangle \leq \langle C.\phi'\rangle$ para todo $\phi' \in \Phi_{K'}$, pero por ser $\Phi_K \subset \Phi_{K'}$ es: $\langle C.\bar{\phi}\rangle \leq \langle C.\phi\rangle$ para todo $\phi \in \Phi_K$.

Observemos que si $\bar{\phi} \in \Phi_K$ habremos llegado a la solución óptima para el problema de: minimizar $\langle C\ \phi\rangle$ en Φ_K.

Si $\bar{\phi} \notin \Phi_K$, $\bar{\phi}$ determina un árbol máximo $\bar{T} = \langle X,\bar{T}\rangle$, del grafo G, podemos obtener, entonces, a partir de los valores k_{ij}, $(ij) \in S-\bar{T}$, un flujo $\phi \in \Phi_K$ tal que el conjunto de tramos no saturados por ϕ sea $T \subset \bar{T}$; siendo ϕ la solución óptima para el problema de: minimizar $\langle C.\phi\rangle$ en Φ_K.

F. EL PROBLEMA CLASICO DEL TRANSPORTE.

En ciertos puertos $a_1,a_2,\dots,a_r$ se disponen cantidades $p_1,p_2,\dots,p_r$ de un bien homogéneo; mientras que en las localidades $b_1,b_2,\dots,b_s$ existen demandas

$q_1, q_2, \ldots, q_s$ del mismo bien, de manera que $\sum_{i=1}^{r} p_i = \sum_{j=1}^{s} q_j = M$.

Si c_{ij} es el costo del transporte, por unidad del bien, desde a_i a b_j, se plantea el problema de transportar toda la cantidad M de modo de satisfacer las demandas al menor costo posible.

Veamos que este problema, planteado en forma analítica anteriormente (I, INTRODUCCION, 1) puede ser tratado como un problema lineal definido en un espacio de flujos canalizados.

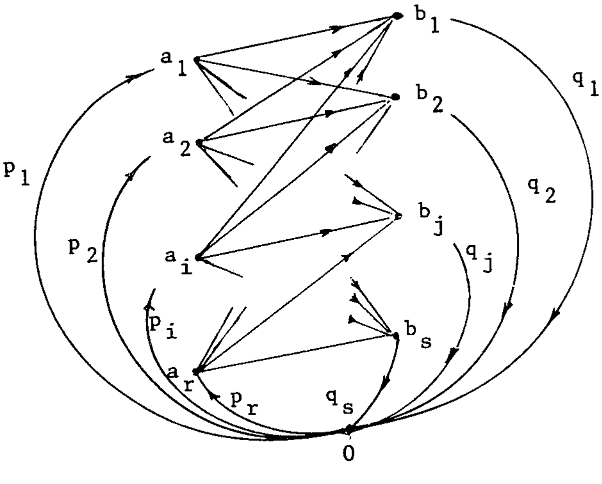
Si bien un conjunto U de rutas (a_i, b_j) están especificadas (c_{ij} es el costo del transporte por unidad del bien en cada ruta $(a_i, b_j) \in U$) podemos suponer que U consiste de todas las rutas posibles (a_i, b_j) $(i = 1,2,\ldots,r \ ; \ j = 1,2,\ldots,s)$, poniendo $c_{ij} = +\infty$ (o muy grandes) en las rutas $(a_i, b_j) \notin U$.

Otra forma de proceder es canalizar las rutas (o arcos) de modo que sólo pueda fluir 0 por ellas (es decir, considerar la canalización $k_{a_i b_j} = k_{b_j a_i} = 0$ si $(a_i, b_j) \notin U$).

Sean $X_a = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$; $X_b = \{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ y formemos un grafo cuyo conjunto de vértices sea:

$$X = X_a \cup X_b \cup \{0\} ,$$

siendo sus tramos: $\{a_i, b_j\}$; $\{a_i, 0\}$; $\{b_j, 0\}$ $(i = 1,2,\ldots,r \ ; \ j = 1,2,\ldots,s)$, es decir un grafo COMPLETO.

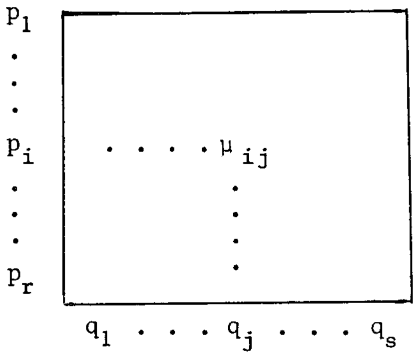


Sobre este grafo consideremos la siguiente canalización:

$K = \{k_{b_j 0} = q_j \ ; \ k_{0 b_j} = -q_j \ ; \ k_{0 a_i} = p_i \ ; \ k_{a_i 0} = -p_i \ ; \ k_{a_i b_j} = +\infty \ ; \ k_{b_j a_i} = 0 \ ,$
$i = 1,2,\ldots,r \ ; \ j = 1,2,\ldots,s\}$

Así el problema del transporte ([11]) puede ser enunciado de la siguiente manera: minimizar $\langle C.\phi \rangle$; $\phi \in \Phi_K$, siendo Φ_K el espacio de los flujos canalizados correspondiente al grafo definido anteriormente con la canalización K establecida.

Es claro entonces que decir que $\phi \in \Phi_K$; significa que $\bar{\phi} = (\phi_{a_i b_j})_{\substack{i=1,2,..,r \\ j=1,2,..,s}}$ es una solución del problema del transporte.



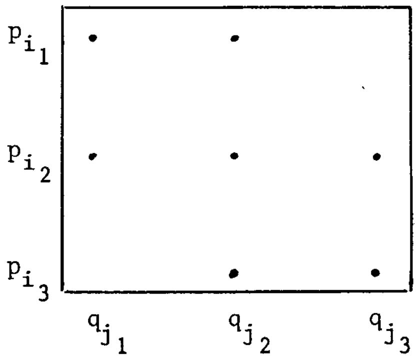
Consideremos el conjunto M_{pq} de las medidas μ con soporte contenido en $X_a \times X_b$; $\mu = (\mu_{ij})_{\substack{i=1,2,...,r \\ j=1,2,...,s}}$ que verifican:

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_{ij} = p_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{r} \mu_{ij} = q_j \quad ; \quad \mu_{ij} \geq 0 \; .$$

Resulta entonces que $\phi \in \Phi_K$ significa que $\bar{\phi} = (\phi_{a_i b_j}) \in M_{pq}$. Las soluciones $\bar{\phi}$ del problema del transporte son así, naturalmente, asociadas a funciones positivas sobre $X_a \times X_b$ (omitiendo los valores $\phi_{b_j a_i} = -\phi_{a_i b_j} \leq 0$), y pueden pensarse entonces como medidas positivas $\mu \in M_{pq}$ sobre $X_a \times X_b$ cuyas marginales son las medidas $p = (p_1, p_2, ..., p_r)$; $q = (q_1, q_2, ..., q_s)$ sobre X_a , X_b respectivamente ([9]).

Puede observarse que Φ_K y M_{pq} se corresponden por una biyección lineal; de esta manera, como sabemos caracterizar los vértices de Φ_K en términos de arcos saturados, podemos trasladar esa caracterización a los vértices de M_{pq}.

Sea $\mu \in M_{pq}$ y $\phi \in \Phi_K$ el flujo asociado; de acuerdo con lo visto anteriormente, μ será un vértice de M_{pq} si y sólo si ϕ es un vértice de Φ_K. Para ello los tramos no-saturados del grafo, no deben contener un ciclo. Como los tramos $\{a_i, 0\}$; $\{b_j, 0\}$ $(i = 1,2,...,r \; ; \; j = 1,2,...,s)$ son saturados, los tramos $\{a_i, b_j\}$ no deben formar un ciclo.



Obsérvese que un tal ciclo se traslada a un ciclo en $X_a \times X_b$, esto es en un conjunto de puntos de la forma:

(a_{i_1}, b_{j_1}) ; (a_{i_2}, b_{j_1}) ; (a_{i_2}, b_{j_3}) ; (a_{i_3}, b_{j_3}) ;

(a_{i_3}, b_{j_2}) ; (a_{i_1}, b_{j_2}) como se muestra en la figura.

Los conjuntos de puntos de $X_a \times X_b$ que no contienen ciclos se dicen ARBOLES de $X_a \times X_b$.

Resumiendo, para que $\mu \in M_{pq}$ sea un vértice (de M_{pq}) es necesario y suficiente que $\{(a_i, b_j) \mid \mu_{ij} > 0\}$ sea un árbol de $X_a \times X_b$.

Es muy fácil construir un vértice $\mu \in M_{pq}$, como veremos a continuación.

Tomemos p_i, q_j tales que $p_i \leq q_j$ (o bien $q_j \leq p_i$ si ello no es posible), supongamos $p_1 \leq q_1$ y pongamos $\mu_{11} = p_1$, $\mu_{1i} = 0$ $(i = 2,3,\ldots,s)$; pasemos ahora a determinar μ' en $(X_a - a_1) \times X_b$ con las marginales $p_2, p_3, \ldots, p_r$; $q_1 - p_1, q_2, \ldots, q_s$.

Si admitimos que podemos determinar μ' tal que el conjunto $\{(a_i, b_j) \mid \mu'_{ij} > 0\}$ sea un árbol en $(X_a - a_1) \times X_b$, es fácil comprender que definiendo $\mu = \mu'$ en $(X_a - a_1) \times X_b$; $\mu_{11} = p_1$; $\mu_{1i} = 0$ $(i = 2,3,\ldots,s)$ se tendrá un vértice de M_{pq}; μ' puede ser definida en una fila o columna de $(X_a - a_1) \times X_b$, según convenga, en el resto quedará supeditada a la determinación de μ'', etc.; en última instancia se tratará del problema trivial de determinar $\mu^{(\ell)}$ en $a_i \times b_j$ con marginales iguales.

$$\begin{array}{c|cccc|}
\cline{2-5}
p_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 \\
p_2 & & & & \\
\vdots & & & & \\
p_r & & & & \\
\cline{2-5}
\multicolumn{1}{c}{} & q_1 & q_2 & \ldots & q_s
\end{array}$$

EJEMPLO. Consideremos una matriz de 3 filas y 4 columnas con marginales $p_1 = 3$; $p_2 = 1$; $p_3 = 2$; $q_1 = 2$; $q_2 = 1$; $q_3 = 1$; $q_4 = 2$.

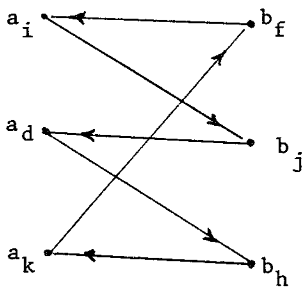
A continuación damos una sucesión de cuadros que nos permite una medida μ en $X_a \times X_b$ siendo $X_a = \{a_1, a_2, a_3\}$; $X_b = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ a partir de $\mu_{11} = 2$.

$$\begin{array}{c|cccc|}
\cline{2-5}
3 & 2 & & & \\
1 & 0 & & & \\
2 & 0 & & & \\
\cline{2-5}
\multicolumn{1}{c}{} & 2 & 1 & 1 & 2
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c:ccc|}
\cline{2-5}
3-2=1 & & 1 & 0 & 0 \\
1 & & 0 & & \\
2 & & 0 & & \\
\cline{2-5}
\multicolumn{1}{c}{} & . & 1 & 1 & 2
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc:cc|}
\cline{2-5}
. & & & & \\
1 & & & 1 & 0 \\
2 & & & 0 & \\
\cline{2-5}
\multicolumn{1}{c}{} & . & . & 1 & 2
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc:c|}
\cline{2-5}
. & & & & \\
. & & & & \\
2 & & & & 2 \\
\cline{2-5}
\multicolumn{1}{c}{} & . & . & . & 2
\end{array}$$

siendo la matriz correspondiente a μ:

$$\begin{array}{c|cccc|}
3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
 & 2 & 1 & 1 & 2
\end{array}$$

Consideremos ahora un ciclo de arcos no saturados del grafo completo asociado al problema del transporte, sea éste (a_k,b_f) ; (b_f,a_i) ; (a_i,b_j) ; (b_j,a_d) ; (a_d,b_h) ; (b_h,a_k), si un flujo de una unidad fluye en la dirección de las flechas (indicadas en el diagrama), trasladando este flujo a una medida en $X_a \times X_b$ se tendrá la situación que se indica en el cuadro que se adjunta:



$$\begin{array}{c|ccc|}
a_i & -1 & 1 & \\
a_d & & -1 & 1 \\
a_k & 1 & & -1 \\
\hline
 & b_f & b_j & b_h
\end{array}$$

Resulta entonces muy simple determinar cuando un vértice $\phi \in \Phi_K$ (es decir $\bar{\phi} \in M_{pq}$) es solución óptima para el problema del transporte, ya que - según lo visto en el párrafo E - basta considerar el signo de la funcional $\langle C.\phi \rangle$ en tales ciclos.

Observemos ahora que si en lugar de canalizar un tramo cualquiera $\{a_i,0\}$ (a_i fijo) por $k_{0a_i} = p_i$; $k_{a_i0} = -p_i$ ponemos $k_{0a_i} = +\infty$; $k_{a_i0} = -\infty$, nada varía esencialmente; pero desde un punto de vista formal, ello nos permite considerar árboles máximos formados por tramos no-saturados del grafo completo y ver que éstos se corresponden con árboles máximos en $X_a \times X_b$ que no es difícil ver tienen r+s-1 vértices.

NOTAS Y PROBLEMAS.

Sea A la matriz correspondiente al problema del transporte enunciado en I, INTRODUCCION, 1. Notemos que A es una matriz de r+s filas y r.s columnas. Indiquemos las columnas de A por: $A_{11},A_{12},\ldots,A_{1r}$; $A_{21},A_{22},\ldots,A_{2r}$; ... ; A_{s1},A_{s2}, $\ldots,A_{sr}$ y observemos que $A_{ij} = e_i+e_{r+j}$ (siendo e_i, los vectores unitarios de R^{n+s}); así resulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1_s & 0_s & \cdots & 0_s \\ 0_s & 1_s & \cdots & 0_s \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0_s & 0_s & \cdots & 1_s \\ 1_{ss} & 1_{ss} & \cdots & 1_{ss} \end{pmatrix} \quad \text{r filas}$$

donde $1_s = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{s})$; $0_s = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{s})$ y 1_{ss} es la matriz unitaria de orden s.

El problema dual, del problema del transporte, es entonces el siguiente: a las r primeras filas de la matriz A hagámosle corresponder las variables duales u_i $(i = 1,2,\ldots,r)$ y sean v_j $(j = 1,2,\ldots,s)$ las variables duales correspondientes a las s últimas filas de la matriz A, tendremos entonces:

$$\text{maximizar } \sum_{i=1}^{r} p_i u_i + \sum_{j=1}^{s} q_j v_j$$

con las restricciones: $u_i+v_j \leq c_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots,r \ ; \ j = 1,2,\ldots,s)$.

De la proposición 1 (IV, párrafo C) $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_{ij})$; $(\bar{u}_i,\bar{v}_j)$ $(i = 1,2,\ldots,r$; $j = 1,2,\ldots,s)$ serán programas óptimos para el problema del transporte y su dual, respectivamente si y sólo si verifican:

$$\sum_{j=1}^{s} \bar{\mu}_{ij} = p_i$$

$$\sum_{i=1}^{r} \bar{\mu}_{ij} = q_j$$

$$\bar{\mu}_{ij} \geq 0$$

$$c_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_j \geq 0$$

$$\bar{\mu}_{ij}(c_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_j) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,r \ ; \ j=1,2,\ldots,s)$$

Ahora bien, por ser $\bar{\mu} \in M_{pq}$, de la última igualdad resulta que: $\bar{u}_i+\bar{v}_j = c_{ij}$ para todo (i,j) que sea vértice del árbol correspondiente a la medida $\bar{\mu}$ sobre $X_a \times X_b$.

NOTA 2. Una aplicación importante del problema del transporte y su dual es la que G.B. DANTZIG y A.J. HOFFMAN hacen a la demostración del teorema de R.P. DILWORTH sobre la descomposición de un conjunto parciamente ordenado P como unión de cadenas disjuntas.

Dado un conjunto finito P parcialmente ordenado por la relación "$\leq$" , podemos considerar las descomposiciones de P como unión de cadenas disjuntas (es decir: cadenas de elementos de P tales que cada elemento del conjunto pertenezca a una y sólo una de tales cadenas).

R.P. DILWORTH prueba en [10] que el menor número de cadenas en tales condiciones coincide con el mayor número de elementos incomparables de P (es decir aquellos elementos $i,j \in P$ tales que ni $i \not\leq j$ ni $j \not\leq i$).

G.B. DANTZIG y A.J. HOFFMAN ([6]) tratan este problema como un problema de programación lineal; más aún resuelven el problema de: "minimizar el número de cadenas disjuntas de P" a partir del problema del transporte; demostrando que el el problema de la determinación del "máximo número de elementos incomparables de P" es el dual de dicho problema.

NOTA 3. En el párrafo F se da una visión general sobre la posible solución del problema del transporte, sin entrar en detalles algorítmicos que pueden completarse en obras generales como [11] y [14]. En dichos textos no sólo se trata este problema, sino también el problema del transporte CANALIZADO que generaliza al problema tratado en el párrafo F, dando lugar además a diversos problemas de aplicación a la economía y a la planificación industrial.

PROBLEMA 1. Demostrar que existe una solución del problema del transporte y además que si p_i,q_j son finitos, todo programa del problema del transporte es finito.

PROBLEMA 2. Probar que la característica de la matriz A, de la nota 1, es (r+s-1).

PROBLEMA 3. La matriz A es totalmente unimodular, es decir el determinante de toda submatriz cuadrada de A es igual a 0, +1 ó -1. De aquí resulta que si p_i,q_j $(i = 1,2,\ldots,r\ ;\ j = 1,2,\ldots,s)$ son enteros, los valores de las variables básicas de toda solución son enteros.

PROBLEMA 4. El sistema de (r+s-1) ecuaciones con (r+s) incógnitas: $u_i+v_j = c_{ij}$ dado en la NOTA 1, posee infinitas soluciones, que son funciones lineales de un parámetro; si (u_i^o,v_j^o) es una solución particular de dicho sistema y k es una constante arbitaria, toda solución de dicho sistema es de la forma:

$$u_i = u_i^o+k \quad ; \quad v_j = v_j^o-k$$

REFERENCIAS

[1] BEALE, E.M.L.: Cycling in the Dual Simplex Algorithm - NAV. RES. LOG. QUART, 2 (1955), 269-275.

[2] BERGE, C., GHOUILA-HOURY, A.: Programmes, Jeux et Reseaux de Transport, DUNOD, PARIS (1962).

[3] BOURBAKI, N.: Espaces Vectoriels Topologiques. XV, Premiѐre partie, Livre V, HERMANN & CIE. EDITEURS, PARIS (1953).

[4] CHARNES, A.: Optimality and Degenerancy in Linear Programming. ECONOMETRICA, 20 (1952), 160-170.

[5] DANTZIG, G.B.: Computational Algorithm of the Revised Simplex Method. RM 1266, THE RAND CORP. (1953).

[6] DANTZIG, G.B., HOFFMAN, A.J.: Dilworth Theorem on Partially Ordered Sets. ANNALS OF MATH. STUDIES, 38, PRINCETON UNIVERSITY PRESS, PRINCETON, N.J. (1956), 207-214.

[7] DANTZIG, G.B., ORDEN, A., WOLFE, P.: Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form under Linear Inequality Constraints. THE RAND CORP. SANTA MONICA, CAL. (1956).

[8] DANTZIG, G.B., ORCHAD-HAYS, W.: The Product For the Inverse in the Simplex Method. MATH. TABLES AIDS COMPL., 8 (1954), 64-67.

[9] DIEGO, A., GERMANI, A.: Extremal Meausures with Prescribed Marginals (finite case). J. OF.COMB. THEORY, 13 (3) (1972), 353-366.

[10] DILWORTH, R.P.: A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets. ANN. OF MATH., 51 (1950), 161-166.

[11] HADLEY, G.: Linear Programming. ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC., READING, MASS. (1963).

[12] HITCHCOCK, F.L.: The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities. J. MATH. PHYS., 20 (1941), 224-230.

[13] JACOBS, W.: The Caterer Problem. NAV. RES. LOG. QUART., 1 (1954), 154-165.

[14] SIMONNARD, M.: Linear Programming. PRENTICE HALL, INC., ENGLEWOODS CLIFS, N.J. (1966).

[15] STIGLER, G.B.: The Cost of Subsistence. J. of FARM ECON., 27 (1945), 303-314.