NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS

7

EDGARDO N. GÜICHAL

# SOBRE UN PROBLEMA DE STURM - LIOUVILLE

## Con Condiciones de Contorno Irregulares

1978

INMABB - CONICET

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

**NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS** es una colección destinada principalmente a reunir los trabajos de investigación, notas de curso, conferencias, seminarios, realizados en la Universidad Nacional del Sur en el campo del Algebra y del Análisis.

Esta publicación no tendrá un carácter periódico. Los fascículos —cada uno de los cuales contendrá en general un solo trabajo— serán numerados en forma continuada.

Las Universidades, Academias, Sociedades Científicas y los Editores de Revistas de Matemática quedan invitados a canjear sus publicaciones por las del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Toda la correspondencia relativa a esta colección deberá ser dirigida a:


**SERVICIO DE CANJE**
**INSTITUTO DE MATEMATICA**
**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**
**BAHIA BLANCA - ARGENTINA**


**NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS** est une collection destinèe principalement à reunir les travaux de recherches, notes de cours, conférences, séminaires, réalisés dans l'Université Nationale du Sud dans le domaine de' Algèbre et de l'Analyse.

Cette publication n'aura pas un caractère périodique. Les fascicules —chacun desquels aura en genéral un seul travail— seront numérotés d'une façon continuée.

Les Universitês, les Académies, les Sociétés savantes et les Editeurs de Revues de Mathématiques sont instamment priés d'échanger leurs publications contre celles de l'Institud de Mathématique de l'Université Nationale du Sud.

Toute la correspondance relative à cette collection doit être adressée à:


**SERVICIO DE CANJE**
**INSTITUTO DE MATEMATICA**
**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**
**BAHIA BLANCA - ARGENTINA**

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS (*)

N° 7

# SOBRE UN PROBLEMA DE STURM - LIOUVILLE CON CONDICIONES DE CONTORNO IRREGULARES

Edgardo N. Güichal

Este trabajo ha sido realizado bajo la dirección del Dr. Rafael Panzone, quien en Noviembre de 1976 dió su aprobación para que fuese presentado ante el Departamento de Graduados de la Universidad Nacional del Sur, para optar al grado de Doctor en Matemática. Este trámite se efectuó el 23 de Diciembre de 1976. El Departamento de Graduados designó al Jurado integrado por Dr. M. Gutierrez Burzaco; Ing. R. Scarfiello y Dr. R. Panzone. La defensa oral tuvo lugar el 4 de Junio de 1977 y en esta instancia participó como Jurado la Dra. A. Benedek, en reemplazo del Ing. Scarfiello.

INMABB - CONICET

1978

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

*Dedico estas páginas a mi querida esposa y amiga, Luján, porque son también fruto de su constante aliento, confianza y el sacrificio de su tiempo y sus propios intereses.*

## RECONOCIMIENTO

*Agradezco profundamente a los Dres. Agnes Benedek y Rafael Panzone, por su guía y ayuda permanentes, y por la paciencia con que corrigieron mis insufribles notas originales.*

E.N.G.

INDICE

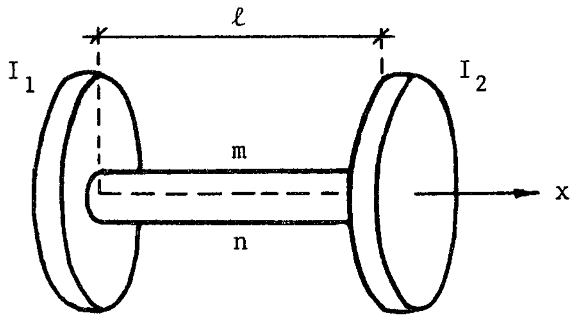
CAPITULO I. INTRODUCCION.

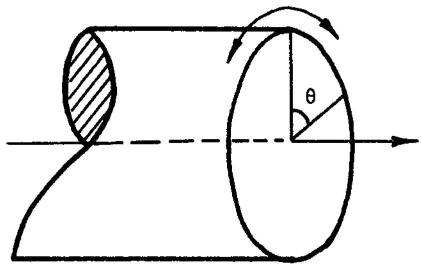
El objetivo central de este trabajo es obtener un teorema de desarrollo en "autofunciones" del sistema

$$(*)\qquad \begin{cases} y''(x) - (\lambda + q(x))\, y(x) = 0 & \text{en } (a,b) \quad (-\infty < a < b < \infty) \\ P(\lambda)\, y(a) + Q(\lambda)\, y'(a) = 0 & \\ \widetilde{P}(\lambda)\, y(b) + \widetilde{Q}(\lambda)\, y'(b) = 0 & \end{cases}$$

donde $q(x)$ es una función real, continua en $[a,b]$ y $P$ , $\widetilde{P}$ , $Q$ y $\widetilde{Q}$ son polinomios con coeficientes reales, tales que al menos uno de ellos no es constante.

Como ejemplo de un problema físico que admite un modelo del tipo (*) consideraremos el planteado por Timoshenko [9, págs. 318-323] referido a la determinación de las vibraciones de torsión libres, de un eje horizontal de sección circular constante, con dos discos en sus extremos. Se supone que las secciones se mantienen planas y sus radios rectos, durante la rotación.



sección m,n

Según Timoshenko, éste "es un caso de importancia práctica ya que un dispositivo de este tipo puede encontrarse con mucha frecuencia en diseños de máquinas. Un eje impulsor con el propulsor en un extremo y el motor en el otro es un ejemplo de esta naturaleza. Si se aplican dos cuplas opuestas pero de igual magnitud en los extremos del eje y luego son súbitamente eliminadas, se producirán vibraciones torsionales durante las cuales las dos masas de los extremos rotarán siempre en direcciones opuestas, según el principio del momento angular". [9, pág. 12].

Matemáticamente, el problema se traduce en la consideración de la ecuación unidimensional de las ondas

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \qquad 0 < x < \ell \quad , \quad t > 0$$

donde $\theta(x,t)$ representa el ángulo de torsión respecto de la posición de equili brio, en el instante t, de la sección del eje a una distancia x del origen (uno de los extremos), y $a^2 = Gg/\gamma$ , donde

$G$ = módulo de elasticidad del material.

$g$ = aceleración de la gravedad.

$\gamma$ = peso del eje, por unidad de volumen.

De la condición que la torsión del eje en sus extremos es producida por la fuerza de inercia de los discos, se obtienen las condiciones de borde:

(2) $$I_1 \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)_{x=0} = G\ I_p \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=0}$$

(3) $$I_2 \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)_{x=\ell} = -G\ I_p \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=\ell}$$

donde $I_1$ e $I_2$ son los momentos de inercia de los discos de los extremos, respecto del centro del eje e $I_p$ el momento de una sección del eje respecto de su centro.

Usando el método de separación de variables y buscando una solución de la forma

$$\theta(x,t) = u(x).T(t)$$

se deduce que u(x) debe ser solución del problema

(4) $$\begin{cases} u''(x) - \lambda\ u(x) = 0 & 0 < x < \ell \\ \ell.m.\lambda.u(0) - u'(0) = 0 & \\ \ell.n.\lambda.u(1) + u'(1) = 0 & \end{cases}$$

donde $m = I_1 g/\gamma\ \ell\ I_p$ $\quad n = I_2 g/\gamma\ \ell\ I_p$.

Puede verificarse que si

(5) $$\lambda = -\ \beta^2/\ell^2$$

donde $\beta$ es una raíz de la ecuación trascendente

$$\operatorname{tg}\ \beta = (m+n)\beta/(mn\beta^2-1)$$

entonces, cualquier múltiplo de la función

(6) $$u_\beta(x) = \cos(\beta x/\ell) - m\beta\ \operatorname{sen}(\beta x/\ell)$$

satisface el sistema (4).

La correspondiente función $T_\beta(t)$ debe ser entonces de la forma

$$T_\beta(t) = A_\beta \cos(\beta at/\ell) + B_\beta \operatorname{sen}(\beta at/\ell)$$

y se espera que la solución general del (1) , (2) y (3) pueda escribirse como

$$\theta(x,t) = \sum_\beta u_\beta(x).T_\beta(t)$$

donde los coeficientes $A_\beta$ y $B_\beta$ deberían poder determinarse a partir de condiciones iniciales. Esto se expresa en la necesidad de poder desarrollar una función dada, en términos de las (auto-) funciones $u_\beta$, que, como puede comprobarse facilmente, no son ortogonales en el intervalo $(0,\ell)$ respecto de la medida de Lebesgue.
Surgen así naturalmente muchas cuestiones a estudiar, a las que podemos dar algunas respuestas, que trataremos de resumir en esta introducción, para retomar el sistema (4) en el último capítulo, como aplicación de la teoría que vamos a desarrollar.

Otros casos particulares del problema (*) han sido considerados por varios autores, también en relación con problemas de vibraciones mecánicas, (Prescott [7], Friedman [2]) o de difusión (Langer [4], Peek [6]), en los que los polinomios señalados son, a lo sumo, de grado uno. Con esa misma restricción obtiene J. Walter [13] un teorema del tipo que nos interesa, suponiendo además que se verifican ciertas condiciones entre los coeficientes de los polinomios, lo que le permite interpretar a (*) como un problema de autovalores de un operador autoadjunto, sobre un espacio de Hilbert convenientemente definido, de modo que el concepto de ortogonalidad juega un papel fundamental. Sin embargo, no parece posible usar esta técnica si los polinomios son arbitrarios ya que, de una forma u otra, surge la necesidad de agregar restricciones sobre sus coeficientes, cuando se intenta definir un producto escalar entre las autofunciones. Este hecho ha sido señalado ya en [1], donde se observaba que parecía conveniente independizarse de la noción de ortogonalidad al estudiar el caso general.
Esta idea ha resultado completamente apropiada, pues sobre esa base hemos logrado extender los resultados allí obtenidos, al problema que nos ocupa.

Resulta interesante recordar la siguiente observación de Hille [3], respecto de los orígenes de este tipo de cuestiones: "El problema de contorno... $y'' + s^2y = 0$ ; $y(0) = 0$ , $y'(a) - s^2y(a) = 0$ fue primeramente considerado por Poisson (1820) al estudiar el movimiento de una partícula pesada, suspendida del extremo de una fibra elástica". En la misma nota se señala otra de las características notables del problema: la aparición de "series nulas", es decir: series de funciones convergentes en el intervalo $[a,b]$ , cuya suma es cero para cualquier punto interior del intervalo, pero no en sus extremos y que fuera ya observada por Tamarkin [8] para casos en que las condiciones de contorno aparecían relacionadas de un modo particular.

En los capítulos II y III estudiamos el problema con una técnica análoga a la de Titchmarsh [10, cap. I] que consiste en mostrar que para valores grandes (en módulo) del parámetro, el comportamiento de las autofunciones es análogo al de las correspondientes al caso $q(x) = 0$. Esto nos permite probar un teorema análogo al de Dirichlet-Jordan (Teorema 5, cap. III) aunque debe destacarse el diferente comportamiento de los desarrollos en los extremos del intervalo, según los grados de los polinomios que intervienen en la condición de borde respectiva (Teorema 4, capítulo III).
Las ideas básicas de los capítulos siguientes pueden encontrarse en [1, cap.V a VII]. Ellas nos permiten estudiar, en el capítulo IV, la convergencia en $L^2(a,b)$ de los desarrollos en autofunciones y demostrar que el sistema es completo si todos los autovalores son simples, mientras que es necesario agregar las "funciones principales asociadas", cuando se presentan autovalores múltiples (Teoremas 1 y 2).
Se podrá demostrar, en el capítulo V, que ninguna función de $L^2(a,b)$ tiene desarrollo único (Teorema 1). En el caso en que los autovalores son simples, esta situación se refleja en el número de "grados de libertad" del sistema, (concepto ya introducido en [1, cap. VII]), cuyo valor podemos ahora determinar (Teorema 3), resultando en una cierta arbitrariedad de elección de los coeficientes de cada desarrollo. En el caso $q(x) = 0$, se manifiesta como la posibilidad de lograr que ciertas combinaciones lineales de las autofunciones y sus derivadas coincidan en los extremos del intervalo, con valores prefijados (Teorema 4).
Por fin, en el capítulo VI, consideraremos en detalle el sistema (4) planteado en esta Introducción.
Algunos resultados auxiliares han sido agregados como Apéndices. Sus contenidos son los siguientes:

APENDICE I. Se considera el problema de existencia y unicidad de solución de la ecuación diferencial $y''(x)-(\lambda+q(x))y(x) = 0$, con condiciones iniciales dependientes del parámetro. Se demuestra además que la solución es analítica en $\lambda$ y que las derivadas respecto de $x$ y $\lambda$ pueden ser permutadas.

APENDICE II. Aquí se demuestra el teorema 3, del capítulo II, que es fundamental para el cálculo del número de grados de libertad del sistema de autofunciones. Este teorema da una condición necesaria y suficiente para que dos polinomios tengan una raíz común, que consiste, en última instancia, en otra forma de expresar el resultante de los dos polinomios.

Para terminar, queremos manifestar nuestra esperanza de haber logrado, con estos resultados, cumplir con el compromiso contraído en [1], cuando se prometió estudiar, en un trabajo posterior, el caso general que aquí consideramos.

NOTA.

Con la intención de completar en algún sentido este trabajo, sin modificar su texto original, hemos creído necesario agregar las referencias bibliográficas [14] a [17] y los siguientes comentarios:

1.- Si se hace la sustitución $\lambda = s^2$, en el problema (*), éste puede ser considerado dentro del tipo denominado "mildly irregular" por R. Langer, [16], en su clasificación de los problemas diferenciales de segundo orden.

2.- Debemos observar que el método usado en el Apéndice II, es el de eliminación de Bézout. En efecto, el determinante de la matriz C, que allí se calcula, es el Bézoutiano de los polinomios P y Q (cf. [14]).

3.- Se podrá notar que en todas las demostraciones del Capítulo V, se ha considerado el caso en que en ninguno de los extremos del intervalo fundamental se da una condición ordinaria de Sturm-Liouville; en particular se supone que $Q\neq 0$ y $\tilde{Q}\neq 0$. Sin embargo, dichas demostraciones pueden ser adaptadas sin dificultad al caso en que se tuviese una condición del tipo $\beta_0 y(a)+\beta_1 y'(a) = 0$, donde $\beta_0$ y $\beta_1$ son constantes tales que $|\beta_0|+|\beta_1|\neq 0$, (que, por otra parte, ya fué estudiado en [1], con $q(x)=0$); en efecto, bastaría tomar como C a la matriz nula.
Si esta condición estuviese dada sobre el extremo $x=b$, un simple cambio lineal de la variable independiente, lo reduciría al caso anterior.

## CAPITULO II. AUTOVALORES Y AUTOFUNCIONES.

Consideremos el problema

$$(*)\qquad \begin{cases} y''(x) - (\lambda + q(x))\, y(x) = 0 \quad \text{en } (a,b) \quad (-\infty < a < b < +\infty) \\ P(\lambda)\, y(a) + Q(\lambda)\, y'(a) = 0 \\ \tilde{P}(\lambda)\, y(b) + \tilde{Q}(\lambda)\, y'(b) = 0 \end{cases}$$

donde $q(x)$ es una función real, continua en $[a,b]$ y $P$, $Q$, $\tilde{P}$ y $\tilde{Q}$ son polinomios de grado $p, q, \tilde{p}$ y $\tilde{q}$, respectivamente; con *coeficientes reales y tales que al menos uno de ellos no es constante,* lo que nos aleja de los clásicos problemas regulares de Sturm-Liouville. Además, supondremos que se satisface la siguiente condición:

Hipótesis (H): Si los grados de los polinomios $P$ y $Q$ (o $\tilde{P}$ y $\tilde{Q}$) son positivos entonces

$$\text{m.c.d.}(P,Q) = 1 \qquad (\text{resp. m.c.d.}(\tilde{P},\tilde{Q}) = 1)$$

Si uno de ellos es el polinomio idénticamente nulo, el otro será una contante, distinta de cero.

El objeto de la misma es eliminar los casos en que alguna de las condiciones sobre los extremos del intervalo $[a,b]$, que aparecen en el problema (*), se verifique trivialmente por ser nulos los coeficientes de $y$ e $y'$ calculadas en ese extremo. Por ejemplo, si los polinomios $P$ y $Q$ tuviesen una raíz común $\lambda_o$, cualquier solución de la ecuación diferencial $y'' - (\lambda_o + q)\, y = 0$ que verificase la condición correspondiente sobre el extremo $x = b$, sería solución del problema (*), pues la condición

$$P(\lambda_o)\, y(a) + Q(\lambda_o)\, y'(a) = 0$$

se satisface automáticamente.

Si llamamos $\lambda = s^2$ y definimos los polinomios $F_i(s)$ $(i=1,2,3,4)$ por

$$F_1(s) = P(s^2) + sQ(s^2) \quad ; \quad F_2(s) = F_1(-s)$$
$$F_3(s) = \tilde{P}(s^2) + s\tilde{Q}(s^2) \quad ; \quad F_4(s) = F_3(-s)$$

se puede demostrar fácilmente el siguiente resultado:

LEMA 1. La hipótesis (H) vale si sólo si

$$\text{m.c.d.}(F_1,F_2) = 1 \text{ ó } s \quad \text{y} \quad \text{m.c.d.}(F_3,F_4) = 1 \text{ ó } s$$

En efecto, en el caso en que uno sea constante y el otro 0 es trivial.

Si P y Q tienen un divisor común $\neq 1$, $F_1$ y $F_2$ son divisibles por un polinomio en $s^2$. Si m.c.d.$(F_1,F_2) = \Pi(s-\alpha_i)^{n_i} \neq 1$, $\neq s$, existe $(s-\alpha_i)$ tal que $(s-\alpha_i)|P(s^2)$ , $(s-\alpha_i)|Q(s^2)$ $\therefore$ $\alpha_i^2$ es un cero de $Q(\lambda)$ y $P(\lambda)$.

Una solución $\phi_s(x)$, de la ecuación diferencial $y''(x)-(s^2+q(x))y(x) = 0$, $(s\neq 0)$ puede ser expresada por

$$\phi_s(x) = \phi_s(a)\cosh s(x-a)+\phi_s'(a)\frac{\operatorname{senh} s(x-a)}{s} + \frac{1}{s}\int_a^x \operatorname{senh} s(x-y)\, q(y)\, \phi_s(y)\, dy$$

o bien, por

$$\phi_s(x) = \phi_s(b)\cosh s(b-x)-\phi_s'(b)\frac{\operatorname{senh} s(b-x)}{s} + \frac{1}{s}\int_x^b \operatorname{senh} s(y-x)\, q(y)\, \phi_s(y)\, dy$$

Cuando $s = 0$, una solución $\phi_o$ de $y''-qy = 0$ verifica:

$$\phi_o(x) = \phi_o(a) + \phi_o'(a)(x-a) + \int_a^x (x-y)q(y)\phi_o(y)dy$$

y también: $$\phi_o(x) = \phi_o(b) - \phi_o'(b)(b-x) + \int_x^b (y-x)q(y)\phi_o(y)dy$$

Notemos con $U_s(x)$ y $\tilde{U}_s(x)$ *las soluciones que verifiquen,* respectivamente:

$$U_s(a) = -Q(s^2)\ ,\ U_s'(a) = P(s^2)\ ;\ \tilde{U}_s(b) = -\tilde{Q}(s^2)\ ,\ \tilde{U}_s'(b) = \tilde{P}(s^2)$$

Entonces $$U_s(x) = u_s(x) + \frac{1}{s}\int_a^x \operatorname{senh} s(x-y)q(y)U_s(y)dy$$

y $$\tilde{U}_s(x) = \tilde{u}_s(x) + \frac{1}{s}\int_x^b \operatorname{senh} s(y-x)q(y)\tilde{U}_s(y)dy \quad \text{si } s \neq 0$$

$$U_o(x) = u_o(x) + \int_a^x (x-y)\ q\ U_o\ dy\ ,$$

$$\tilde{U}_o(x) = \tilde{u}_o(x) + \int_x^b (y-x)\ q\ U_o\ dy\ ,\ \text{si } s = 0$$

donde

$$u_s(x) = (F_2(s)\ e^{s(x-a)} - F_1(s)\ e^{-s(x-a)})/2s$$

$$\tilde{u}_s(x) = (F_4(s)\ e^{-s(b-x)} - F_3(s)\ e^{s(b-x)})/2s \quad \text{si } s\neq 0$$

$$u_o(x) = -Q(0) + P(0)(x-a) = \lim_{s\to 0} u_s(x)$$

$$\tilde{u}_o(x) = -\tilde{Q}(0) - \tilde{P}(0)(b-x) = \lim_{s\to 0} \tilde{u}_s(x)$$

$U_s(x)$ será solución del problema

$$(I)\qquad \begin{cases} y''(x) - (s^2 + q(x))\, y(x) = 0 & \text{en} \quad (a,b) \\ P(s^2)\, y(a) + Q(s^2)\, y'(a) = 0 \\ \widetilde{P}(s^2)\, y(b) + \widetilde{Q}(s^2)\, y'(b) = 0 \end{cases}$$

si y sólo si el número s satisface la condición

$$U_s(b)\, \widetilde{U}_s'(b) - U_s'(b)\, \widetilde{U}_s(b) = 0$$

El primer miembro de esta expresión es el valor del wronskiano de las funciones $U_s$ y $\widetilde{U}_s$, calculado en el punto $x = b$. Como este determinante es constante para $a \leqslant x \leqslant b$, podemos afirmar que $U_s(x)$ será solución del problema (I) si y sólo si s es un cero de la función

$$W(s) = W(U_s,\widetilde{U}_s) = U_s(x)\widetilde{U}_s'(x) - U_s'(x)\widetilde{U}_s(x) = U_s(b)\widetilde{U}_s'(b) - U_s'(b)\widetilde{U}_s(b)$$

que como veremos, no es idénticamente cero y es entera en s.

DEFINICION. Llamaremos *autovalor* a todo cero de la función W(s) y *autofunción* a cualquier solución no trivial del problema (I). Diremos que es un autovalor de multiplicidad n si es un cero de W de orden n.

OBSERVACION. En rigor, debería llamarse "autovalor" al *cuadrado* de un cero de W. Estos ceros desempeñan el papel de frecuencias propias.

De las expresiones de $u_s$ y $\widetilde{u}_s$ se deducen inmediatamente las siguientes estimaciones, para $|s| > 1$ , $s = \sigma + i\tau$

$$(1)\qquad \begin{cases} |u_s(x)| \leqslant k\, e^{|\sigma|(x-a)}|s|^{m-1} \\ |\widetilde{u}_s(x)| \leqslant \widetilde{k}\, e^{|\sigma|(b-x)}|s|^{n-1} \\ |u_s'(x)| \leqslant k\, e^{|\sigma|(x-a)}|s|^{m} \\ |\widetilde{u}_s'(x)| \leqslant \widetilde{k}\, e^{|\sigma|(b-x)}|s|^{n} \end{cases}$$

donde k y $\widetilde{k}$ son constantes independientes de s y x, $m=gr.F_1= gr.F_2$, $n=gr.F_3= =gr.F_4$ (siempre es $m+n \geqslant 2$). Si $Q\neq 0$ y $\widetilde{Q}\neq 0$, entonces $m = \max(2p,2q+1)$; $n = \max(2\widetilde{p}, 2\widetilde{q}+1)$ y $m+n \geqslant 3$.-

LEMA 2. Las expresiones (1) también son válidas para $\widetilde{U}_s$ , $U_s$ , $\widetilde{U}_s'$ y $U_s'$ uniformemente en $[a,b]$ , si $|s| \to \infty$ .

DEMOSTRACION. Sea $\mu(s) = \max\limits_{a\leq x\leq b} |e^{-|\sigma|(x-a)}U_s(x)|$

Entonces $\quad \mu(s) \leqslant \max\limits_{a \le x \le b} |e^{-|\sigma|(x-a)} u_s(x)| / (1 - \frac{1}{s} \int_a^b |q(y)|dy)$

si $|s|$ es suficientemente grande, como para que el denominador sea positivo. De la primera de las igualdades (1) se deduce que

$$U_s(x) = O(e^{|\sigma|(x-a)}|s|^{m-1}) \quad \text{si} \quad |s| \to \infty$$

La estimación correspondiente a $U_s'(x)$ se obtiene de la expresión

$$U_s'(x) = u_s'(x) + \int_a^x \cosh s(x-y)\; q(y)\; U_s(y)\; dy$$

La demostración se concluye operando en forma análoga con $\widetilde{U}_s$ y $\widetilde{U}_s'$.
De estos resultados se deduce inmediatamente el siguiente:

LEMA 3. Para $|s|$ suficientemente grande, se tiene que:

$$W(s) = W(U_s,\widetilde{U}_s) = W(u_s,\widetilde{u}_s) + O(e^{|\sigma|(b-a)}|s|^M)$$

donde $M = m + n - 2$

Llamaremos $\delta(s) = W(u_s,\widetilde{u}_s) = u_s(x)\widetilde{u}_s'(x) - u_s'(x)\widetilde{u}_s(x)$

de modo que

$$\delta(s) = (e^{s(b-a)}F_2(s)F_3(s) - e^{-s(b-a)}F_1(s)F_4(s))/2s$$

$$\delta(0) = \lim_{s\to 0} \delta(s)$$

Luego, $\delta(s)$ es una función entera $\neq 0$, que para s real es $\sim e^{|s|(b-a)}|s|^{M+1}$.

Además, $W(s)$ es entera (cf. Apéndice I). Luego, del lema 3 se deduce que $W(s) \neq 0$.

Entonces, $W(s)$ y $\delta(s)$ tienen a lo sumo una cantidad *numerable* de ceros. Además tendrán un número *finito* de ellos en cualquier región acotada.

Fuera de un círculo de radio conveniente, podemos escribir:

$$\delta(s) = \frac{e^{s(b-a)}F_1(s)F_4(s)}{2s}\left[\frac{F_2(s)F_3(s)}{F_1(s)F_4(s)} - e^{-2s(b-a)}\right]$$

Para $|s| \to \infty$ , tenemos que

$$\frac{F_2(s)F_3(s)}{F_1(s)F_4(s)} = (-1)^{n+m} + \frac{O(1)}{s}$$

De modo que, para $|s| \to \infty$

(2) $$\delta(s) = e^{s(b-a)} s^{M+1} \frac{F_1(s)F_4(s)}{2s^{M+2}} \left[\frac{O(1)}{s} + (-1)^{n+m} - e^{-2s(b-a)}\right]$$

LEMA 4. Sea $C_N$ el contorno del cuadrado con vértices en $(\pm 1 \pm i)h_N$ , donde

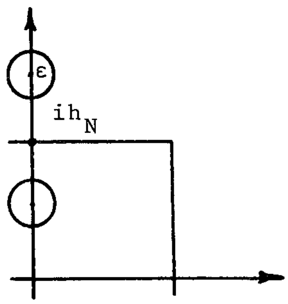
$h_N = (N + (1 + (-1)^{n+m})/4)\ \pi/(b-a) \qquad (N = 1,2,3,\ldots)$

Entonces, para todo N suficientemente grande y $s \in C_N$, se tiene que:

$$|\delta(s)| \geqslant A.e^{|\sigma|(b-a)} |s|^{M+1}$$

donde A es una constante positiva. (A puede ser cualquier constante $< 1/2$).

DEMOSTRACION. Como $\delta(-s) = \delta(s)$ y $\delta(\bar{s}) = \overline{\delta(s)}$ , es suficiente estudiar el comportamiento de la función en la región $0 \leqslant \arg s \leqslant \pi/2$.




Si $s = \sigma + ih_N$ , $0 \leqslant \sigma \leqslant h_N$ , tenemos que:

(2 bis) $|(-1)^{n+m} - e^{-2s(b-a)}| = 1 + e^{-2\sigma(b-a)} \geqslant 1$

si $s = h_N + i\tau$ , $0 \leqslant \tau \leqslant h_N$ :

$|e^{-2s(b-a)}| = e^{-2h_N(b-a)} \longrightarrow 0$ si $N \to \infty$

Teniendo en cuenta la expresión (2) se concluye inmediatamente la tesis.

LEMA 5. Sea $C_{\varepsilon,N}$ la circunferencia con centro en $ih_{(N-\frac{1}{2})}$ ($h_N$ igual que en el lema anterior) y radio $\varepsilon$; entonces, si N es suficientemente grande y $s \in C_{\varepsilon,N}$, se tiene que, para $\varepsilon < \pi/(b-a)$: $|\delta(s)| \geqslant A(\varepsilon)\ e^{|\sigma|(b-a)} |s|^{M+1}$, donde $A(\varepsilon)$ es una constante positiva.

DEMOSTRACION. Basta observar que $\min\limits_{s \in C_{\varepsilon,N}} |(-1)^{n+m} - e^{-2s(b-a)}| = \nu(\varepsilon) > 0$ y aplicarlo en la expresión (2).

COROLARIO 1. Para todo N suficientemente grande, W(s) y $\delta(s)$ tienen el mismo número de ceros, encerrados por $C_N$, y como consecuencia, en la región comprendida entre $C_N$ y $C_{N+1}$. La misma propiedad vale para el círculo encerrado por $C_{\varepsilon,N}$.

DEMOSTRACION. La primera afirmación es una consecuencia inmediata de los lemas 3 y 4 del teorema de Rouché aplicado a las funciones W(s) y $\delta(s)$. El mismo teorema, además de los lemas 3 y 5, permite demostrar la propiedad enunciada, en el círculo $C_{\varepsilon,N}$.

COROLARIO 2. Sobre $C_N$, se tiene que $W(s) = \delta(s)\,[1 + O(1/|s|)]$ si N es suficientemente grande.

Respecto de los ceros de $\delta(s)$, i.e. los autovalores en el caso $q(x) \equiv 0$ vale el siguiente resultado ([1] , Teor. 1, cap. III).

TEOREMA 1. Si s es un cero de $\delta(s)$, entonces $-s$ y $\bar{s}$ también lo son. Fuera de un círculo suficientemente grande, todo cero de $\delta(s)$ es simple y es un número imaginario puro, de la forma $i(h_{(N-\frac{1}{2})} + O(1/|N|)$ con N entero y la distancia entre dos ceros consecutivos tiende a $\pi/(b-a)$ cuando $|s| \to \infty$ .

DEMOSTRACION. La primera afirmación es una consecuencia de

$$\delta(s) = \delta(-s) = \overline{\delta(\bar{s})}$$

Por otra parte, los ceros de esta función satisfacen la ecuación

$$e^{2s(b-a)} = F_1(s)F_4(s)/F_2(s)F_3(s) \tag{3}$$

Los puntos s para los cuales también sea $\delta'(s) = 0$, verificarán otra ecuación análoga, del tipo

$$e^{2s(b-a)} = P^*(s)/Q^*(s) \quad \text{donde } P^* \text{ y } Q^* \text{ son polinomios.} \tag{4}$$

De modo que, tales valores de s son raíces del polinomio

$$P^*(s)F_2(s)F_3(s) - Q^*(s)F_1(s)F_4(s)$$

y en consecuencia, habrá solo un número finito de ellos.

Si $s = it$, con t real, la ecuación (3) se transforma en

$$e^{it(b-a)} = \pm F_1(it)F_4(it)/|F_1(it)F_4(it)| \tag{5}$$

Luego:

$$tg(b-a)t = Im(F_1(it)F_4(it))/Re(F_1(it)F_4(it)) \tag{6}$$

Esta ecuación determina las raíces imaginarias de $\delta(s)$, Como $F_1(s)F_4(s)$ es un polinomio de grado n+m, se deduce que, en el segundo miembro de (6), el grado del denominador será mayor que el grado del numerador si n+m es par, y será menor si n+m es impar.

Esto implica que la ecuación (6) tiene infinitas soluciones positivas que se aproximan, justamente, a $h_{(N-\frac{1}{2})}$ si $N \to \infty$ y tienen la forma $h_{(N-\frac{1}{2})} + O(1/|N|)$.

Si tenemos en cuenta, por último, que el segundo miembro de (3) es

$$(-1)^{n+m} + O(1/|s|)$$

llegamos a la conclusión, usando nuevamente el teorema de Rouché, que las raíces imaginarias halladas son las únicas fuera de un círculo de radio suficientemente grande, lo que concluye la demostración.

TEOREMA 2. Si $s$ es un autovalor del problema (1), también lo son $-s$ y $\bar{s}$. Fuera de un círculo suficientemente grande, los autovalores son ceros simples de $W(s)$ y son números imaginarios puros, de la forma $i(h_{(N-\frac{1}{2})} + O(1/|N|))$, para todo $N$ entero de módulo suficientemente grande.

El teorema sigue inmediatamente de la siguiente proposición.

PROPOSICION 1. $U_s(x) = U_{-s}(x) = \overline{U_{\bar{s}}(x)}$ ; $\tilde{U}_{-s}(x) = \overline{\tilde{U}_s(x)} = \tilde{U}_{\bar{s}}(x)$

En efecto, observando que $U_{-s}(x)$ y $\overline{U_{\bar{s}}(x)}$ satisfacen, por ser $q(x)$, $P$ y $Q$ reales, a la misma ecuación diferencial y las condiciones en el punto $x = a$, que $U_s(x)$, se deduce, de la unicidad de solución para un problema con condiciones iniciales, que las tres funciones coinciden sobre todo el intervalo $[a,b]$.

En forma análoga se demuestra que

$$\tilde{U}_{-s}(x) = \overline{\tilde{U}_{\bar{s}}(x)} = \tilde{U}_s(x) \quad \text{para todo} \quad x \in [a,b]$$

Luego: $W(s) = W(-s) = W(\bar{s})$, lo que demuestra la primera parte del Teorema 2.

La segunda, es una consecuencia de la primera parte del teorema, del Corolario 1 y del teorema anterior.

Daremos ahora dos ejemplos, que ilustran, en el caso $q(x) \equiv 0$, $b-a = 1$, la posibilidad de encontrar autovalores múltiples.

1. Si $F_1(s) = s + 3s^2 + s^3$ y $F_3(s) = s + 2s^2 + 2s^3$
entonces $s_o = 0$ es un cero de orden 4 de la función $\delta(s)$.

2. Sea $s_o = r_1 + ir_2$ , con $r_1 \neq 0$ , $r_2 \neq 0$
$F_1(s) = F_3(s) = (s-s_o)^r.(s-\bar{s}_o)^r$ donde $r$ es un número natural.

Entonces $\delta(s) = (s^2-s_o^2)^r.(s^2-\bar{s}_o^2)^r. \dfrac{\operatorname{senh} s(b-a)}{s}$

Luego, $\delta(s)$ tiene ceros de orden $r$ en los puntos $s_o$ , $\bar{s}_o$ , $-s_o$ y $-\bar{s}_o$ y ceros simples en los puntos $H_k = ik\pi/(b-a)$ $(k = \pm 1 \; ; \pm 2 \; ; \pm 3 \; ; \ldots)$

Si $W(s) = 0$, entonces $U_s$ y $\tilde{U}_s$ son linealmente dependientes, de modo que podrá escribirse

$$\tilde{U}_s(x) = A(s).U_s(x) \quad \text{para} \quad x \in [a,b]$$

La función $A(s)$ puede extenderse a todo el plano por la expresión

$$A(z) = \frac{\alpha\tilde{U}_z(a) + \beta\tilde{U}_z'(a)}{\alpha U_z(a) + \beta U_z'(a)}$$

donde $\alpha$ y $\beta$ son números reales, distintos de cero, tales que la expresión $D(z) = \alpha U_z(a) + \beta U_z'(a)$ no se anula para ningún autovalor s. Tales constantes existen , pues el conjunto de autovalores es numerable y

$$\{(x,y) \;/\; xU_s(a) + yU_s'(a) = 0 \;,\; s \in S\}$$

es de primera categoría en $R^2$.

Para esta función $A(z)$ se verifica que

$$A(z)U_z(a) = \tilde{U}_z(a) + \beta W(z)/D(z)$$

$$A(z)U_z'(a) = \tilde{U}_z'(a) - \alpha W(z)/D(z)$$

Se tiene además que si $s \in S$

$$A(s) = \tilde{U}_s(a)/U_s(a) = \tilde{U}_s'(a)/U_s'(a)$$

Además $A(s) \neq 0$ en estos puntos, ya que en caso contrario se tendría que $\tilde{U}_s(x) \equiv 0$ y en consecuencia $\tilde{P}(s^2) = \tilde{Q}(s^2) = 0$ para ese valor de s, lo que contradice la hipótesis (H).

Puede observarse también que $A(s)$ es una función par, i.e. $A(-s) = A(s)$. Esto sigue de la proposición 1, que prueba también que $A(s) = \overline{A(\bar{s})}$.

LEMA 6. Sean $h_1(s)$ y $h_2(s)$ polinomios tales que la función $f(s) = h_1(s)A(s) + h_2(s)$ tiene un cero en cada autovalor del problema (I), fuera de un círculo de radio suficientemente grande. Entonces $h_1(s) \equiv 0$ y $h_2(s) \equiv 0$.

DEMOSTRACION. Supongamos que los ceros de $f(s)$ y $W(s)$ coinciden si $|s| > R$. Multiplicando la función $f(s)$ por un polinomio $H(s)$, que tenga un cero del mismo orden que $W(s)$ en cada autovalor s tal que $|s| \leq R$ y llamando $H_1(s) =$

$= H(s)h_1(s)$ ; $H_2(s) = H(s)h_2(s)$, obtenemos la función

$$F(s) = H_1(s)A(s) + H_2(s)$$

cuyos ceros son ceros de $W(s)$, de modo que $F(s)/W(s)$ es una función entera, si el R se elige como para que los ceros de $W(s)$ fuera de $|s| \leqslant R$ sean simples.

Del Lema 2 y cualquiera de las expresiones $A(s) = -\tilde{U}_s(a)/Q(s^2)$ ó $A(s) = \tilde{U}'_s(a)/P(s^2)$ se deduce que

$$A(s) = O(e^{|\sigma|(b-a)}|s|^k)$$

Y en consecuencia $F(s) = O(e^{|\sigma|(b-a)}|s|^K)$ si $|s| \to \infty$ (k y K son enteros convenientemente elegidos).

Por otra parte, se deduce del Corolario 2, que $1/W(s) = (1/\delta(s))(1+o(1))$ si $s \in C_N$ y N es suficientemente grande; luego, por el lema 4, resulta que

$$1/W(s) = O(e^{-|\sigma|(b-a)}|s|^{-M-1}) \quad \text{si} \quad s \in C_N$$

Esto significa que $F(s)/W(s) = O(|s|^r)$ donde $r = K-M-1$ , si $s \in C_N$ y $N > N_o$.
Entonces, por ser F/W entera, será necesariamente un polinomio. Luego $F(s) =$ $= G(s)W(s)$ , donde $G(s)$ es un polinomio.

Se tiene, en consecuencia , que

$$H_1(s)\tilde{U}_s(x) + [H_2(s) - G(s)W(s)]\, U_s(x) = 0$$

para todo s y para todo valor $x \in [a,b]$

Si s no es un autovalor, por ejemplo: si fuese un número real $s > C$, con C suficientemente grande, $\tilde{U}_s$ y $U_s$ serían linealmente independientes, de modo que, para eso valores de s, debe verificarse que

$$H_1(s) = 0 \quad \text{y} \quad H_2(s) = G(s)W(s)$$

Como todas estas funciones son enteras, debe ser:

$$H_1(s) \equiv 0 \quad \text{y} \quad H_2(s) \equiv G(s)W(s)$$

Por otra parte, la última identidad se verificará solo si $H_2(s) \equiv 0$.

De aquí se deduce que $h_1(s) \equiv 0$ y $h_2(s) \equiv 0$, como se quería demostrar.

LEMA 7. Si s y t son autovalores y $s^2 \neq t^2$ , entonces:

$$\int_a^b U_s(x)U_t(x)\,dx = \frac{-1}{A(s)A(t)}\,\widetilde{V}(s^2,t^2) + V(s^2,t^2)$$

donde $$\widetilde{V}(\lambda,\mu) = (\widetilde{P}(\lambda)\widetilde{Q}(\mu) - \widetilde{P}(\mu)\widetilde{Q}(\lambda))/(\lambda-\mu)$$

y $$V(\lambda,\mu) = (P(\lambda)Q(\mu) - P(\mu)Q(\lambda))/(\lambda-\mu)$$

DEMOSTRACION. Basta tener en cuenta que

$$(s^2-t^2)\int_a^b U_s(x)U_t(x)\,dx = U_t(x)U_s'(x) - U_s(x)U_t'(x)\Big|_a^b$$

y que $$\widetilde{U}_s(b) = -\widetilde{Q}(s^2) = A(s)U_s(b)\ ;\ \widetilde{U}_s'(b) = \widetilde{P}(s^2) = A(s)U_s'(b)$$

DEFINICION. Llamaremos S al conjunto de los autovalores que verifican que $s = 0$ ó $0 \leqslant \arg s < \pi$ .

El Lema 7 muestra que, en general, las autofunciones $U_s$ y $U_t$ $(s \neq t)$ no serán ortogonales sobre el intervalo $[a,b]$. Más aún, se tiene el siguiente resultado:

LEMA 8. a) Si sobre alguno de los extremos del intervalo $[a,b]$ se da una condición del tipo Sturm-Liouville (es decir, que los polinomios P y Q ó $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$, son constantes) y fijamos $t \in S$, entonces habrá a lo sumo un número finito de autofunciones $U_s$ $(s \in S)$ ortogonales a $U_t$.

b) En el caso general, si se fija $t \in S$, es posible encontrar infinitos autovalores $s \in S$ tal que $U_s$ nc sea ortogonal a $U_t$.

DEMOSTRACION. a) Supongamos, para fijar ideas, que $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$ son constantes, de modo que $\widetilde{V}(s^2,t^2) \equiv 0$.

Si $U_t$ fuese ortogonal a una infinidad de autofunciones $U_s$, se tendría según el Lema 7, que los autovalores correspondientes son ceros del polinomio $V(s^2,\bar{t}^2)$, de donde resulta que éste debe ser idénticamente nulo. Pero esto significa que los polinomios P y Q tienen una raíz común o alguno de ellos es idénticamente cero (cf. Ap. II). En cualquier caso, se contradice la hipótesis (H) o el hecho que algunos de los cuatro polinomios considerados, no debe ser constante.

b) Supongamos que $U_t$ es ortogonal a $U_s$ para todo $s \in S$, $|s| > R > |t|$.

Entonces, por Lema 7, se deduce que, $h_1(s)A(s) + h_2(s) = 0 \quad s \in S,\ |s| > R$ donde $h_1(s) = V(s^2,\bar{t}^2)$ y $h_2(s) = -\widetilde{V}(s^2,\bar{t}^2)/A(\bar{t})$

Como las funciones $h_1$ , $h_2$ y A son simétricas, también se anulará aquella expresión en los puntos $-s$, con $s \in S$, $|s| > R$.

De modo que, para todos los autovalores $s$ tales que $|s| > R$, se tiene que

$$h_1(s)A(s) + h_2(s) = 0$$

Luego, por el Lema 6, debe ser $h_1(s) \equiv 0$ y $h_2(s) \equiv 0$.

Es decir que $V(s^2,\bar{t}^2) = 0$ y $\tilde{V}(s^2,\bar{t}^2) = 0$ para todo $s$, lo que nos lleva nuevamente a una contradicción.

Los polinomios $\tilde{V}(\lambda,\mu)$ y $V(\lambda,\mu)$ son simétricos en $\lambda$ y $\mu$ y pueden ser expresados en la forma

$$\tilde{V}(\lambda,\mu) = \sum_{j,k=0}^{n^*} \tilde{c}_{jk}\, \lambda^j \mu^k \quad \text{con} \quad \tilde{c}_{jk} = \tilde{c}_{kj}$$

$$V(\lambda,\mu) = \sum_{j,k=0}^{m^*} c_{jk}\, \lambda^j \mu^k \quad \text{con} \quad c_{jk} = c_{kj}$$

donde $n^* = [n/2]-1$, $m^* = [m/2]-1$, si $n>1$ y $m>1$; en caso contrario será $V\equiv 0$ ó $\tilde{V}\equiv 0$, lo que sucede unicamente cuando se da una condición ordinaria de Sturm-Liouville sobre un extremo del intervalo.
([K] indica "parte entera de K", esto es, el mayor número natural menor o igual a K).

LEMA 9. Cuando gr $P > 0$ y gr $Q > 0$, la hipótesis (H) se verifica si y sólo si $\det C \neq 0$, donde $C = (c_{jk})$.

Un resultado análogo vale para los polinomios $\tilde{P}$ y $\tilde{Q}$.

Este Lema es, en realidad, un Corolario del siguiente Teorema, cuya demostración puede obtenerse usando la técnica de [12, págs. 102-107], por ejemplo. (Apéndice II).

TEOREMA 3. Sean $\Phi(z)$ y $\Psi(z)$ los polinomios

$$\Phi(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_o$$

$$\Psi(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_o \quad ; \quad a_n \neq 0 \quad , \quad b_m \neq 0,\ n \geqslant m \geqslant 1$$

cuyas raíces son $u_1,u_2,\ldots,u_n$ y $v_1,v_2,\ldots,v_m$, respectivamente. Si indicamos con $C$ la matriz $(c_{jk})$, en la que $c_{jk}$ es el coeficiente de $z^j w^k$ en el polinomio simétrico

$$V(z,w) = (\Phi(z)\Psi(w) - \Phi(w)\Psi(z))/(z-w)$$

entonces
$$\det C = (-1)^{[n/2]} a_n^n\, b_m^n\, \Pi_{i=1}^{n}\, \Pi_{j=1}^{m} (u_i - v_j)$$

esto es: $$\det C = (-1)^{[n/2]} a_n^{n-m} . R(a,b)$$

donde $R(a,b)$ es la resultante de los polinomios $\Phi$ y $\Psi$.

## CAPITULO III. DESARROLLOS EN AUTOFUNCIONES.

Notaremos con $O(x,y,s)$ y $\tilde{O}(x,y,s)$ las funciones definidas para $a \leqslant x,\ y \leqslant b$; s complejo, por las siguientes expresiones:

$$O(x,y,s) = \begin{cases} (s/\delta(s)).\tilde{u}_s(x).u_s(y) & \text{si} \quad y < x \leqslant b \\ (s/\delta(s)).\tilde{u}_s(y).u_s(x) & \text{si} \quad a \leqslant x < y \end{cases}$$

$$\tilde{O}(x,y,s) = \begin{cases} (s/W(s)).\tilde{U}_s(x).U_s(y) & \text{si} \quad y < x \leqslant b \\ (s/W(s)).\tilde{U}_s(y).U_s(x) & \text{si} \quad a \leqslant x < y \end{cases}$$

TEOREMA 1. Si $\Phi$ es integrable sobre $[a,b]$, entonces:

$$\int_{C_N} \left[\int_a^b \tilde{O}(x,y,s)\Phi(y)dy\right]ds = \int_{C_N} \left[\int_a^b O(x,y,s)\Phi(y)dy\right]ds + o(1)$$

para $N \to \infty$, uniformemente en $x \in [a,b]$.

DEMOSTRACION. Ya hemos visto en el capítulo anterior que si N es suficientemente grande y $s \in C_N$, entonces $W(s) \neq 0$ y además

$$1/W(s) = (1/\delta(s)).(1 + O(1/|s|))$$

Por otra parte, de la definición de $U_s$ y el Lema 2, cap. II,

$$U_s(x) = u_s(x) + O(e^{|\sigma|(x-a)}\,|s|^{m-2}) \text{ , entonces si}$$

$y < x \leqslant b$: $\quad U_s(y)\tilde{U}_s(x) = u_s(y)\tilde{u}_s(x) + O(e^{|\sigma|(b-a+y-x)}|s|^{M-1})$ , donde la $O(\ldots)$ es uniforme para y,x tales que $a \leqslant y < x \leqslant b$.

De modo que, usando el lema 4 del cap. II:

$$\frac{U_s(y)\tilde{U}_s(x)}{W(s)} = \frac{u_s(y)\tilde{u}_s(x)}{\delta(s)} + O(e^{|\sigma|(y-x)}/|s|^2)$$

En consecuencia:

$$\int_a^x \tilde{O}(x,y,s)\Phi(y)dy = \int_a^x O(x,y,s)\Phi(y)dy + O(\int_a^x (e^{|\sigma|(y-x)}\Phi(y)/|s|)\ dy$$

el último término es igual a

$$O(e^{-|\sigma|\delta}/|s|) + O(\int_{x-\delta}^{x} (|\Phi(y)|/|s|)dy$$

cualquiera sea $\delta > 0$, suficientemente pequeño.

Entonces

$$\int_{C_N} \left[\int_a^x \tilde{O}(x,y,s)\Phi(y)dy\right] ds = \int_{C_N} \left[\int_a^x O(x,y,s)\Phi(y)dy\right] ds +$$

$$+ \int_{C_N} O(e^{-|\sigma|\delta}/|s|)ds + O(\int_{x-\delta}^{x} |\Phi(y)|dy)$$

El último término puede hacerse tan chico como se quiera, eligiendo a $\delta$ suficientemente pequeño. Como $\int_A |\Phi| dy$ es absolutamente continua, la cota de esta integral es independiente de x. Elegido $\delta$, el segundo término del segundo miembro es $o(1)$ para $N \to \infty$ .

Un resultado análogo vale para $\int_{C_N} \left[\int_x^b O(x,y,s)\ \Phi(y)dy\right] ds$ , lo que concluye la demostración.

TEOREMA 2. (*Teorema de localización*). Sea $\Phi$ integrable sobre $[a,b]$ y $x \in [a,b]$. Entonces, si $0 < \delta$, se tiene que, si $N \to \infty$:

$$\int_{C_N} \left[\int_a^b O(x,y,s)\ \Phi(y)dy\right] ds = \int_{C_N} \left[\int_{(x-\delta)\vee a}^{(x-\delta)\wedge b} O(x,y,s)\ \Phi(y)\ dy\right] ds + o(1)$$

Además, el último término tiende a cero uniformemente en $[a,b]$.

DEMOSTRACION. De las estimaciones para $u_s, \tilde{u}_s$ y $\delta(s)$, $s \in C_N$, ya conocidas, se deduce que, sobre $C_N$:

$$O(x,y,s) = O(e^{-|\sigma||x-y|})$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\psi(x)$ una función absolutamente continua tal que

$$\Phi(x) = \psi(x) + \eta(x), \quad \text{donde} \quad \int_a^b |\eta(x)|dx < \varepsilon$$

Entonces:

$$\int_{\substack{a \\ |x-y|\geq\delta}}^{b} O(x,y,s)\eta(y)dy = O( \int_{\substack{a \\ |x-y|\geq\delta}}^{b} e^{-|\sigma||x-y|}|\eta(y)|dy) = O(\varepsilon e^{-|\sigma|\delta})$$

De modo que $\displaystyle\int_{C_N}\Big[\int_{\substack{a\\|x-y|\geq\delta}}^{b} O(x,y,s)\eta(y)dy\Big]ds = O(\varepsilon)$ si $N\to\infty$, para $\delta$ fijo.

Recordando que $u_s(x) = (F_2(s)e^{s(x-a)}-F_1(s)e^{-s(x-a)})/2s$, se tiene, integrando por partes, que:

$$\int_a^{x-\delta} \psi(y)u_s(y)dy = \psi(y)\ \frac{F_2(s)e^{s(y-a)} + F_1(s)e^{-s(y-a)}}{2s^2}\Bigg]_a^{x-\delta} -$$

$$-\int_a^{x-\delta} \psi'(y)\ \frac{F_2(s)e^{s(y-a)} + F_1(s)e^{-s(y-a)}}{2s^2}\,dy = O(e^{|\sigma|(x-a-\delta)}|s|^{m-2}) \quad \text{y}$$

$\displaystyle\int_{x+\delta}^{b} \psi(y)\tilde{u}_s(y)dy = O(e^{|\sigma|(b-x-\delta)}|s|^{n-2})$, que puede obtenerse en forma análoga, teniendo en cuenta que $\tilde{u}_s(x) = \dfrac{F_4(s)e^{-s(b-x)} - F_3(s)e^{s(b-x)}}{2s}$.

De donde resulta que

$$\int_{\substack{a\\|x-y|\geq\delta}}^{b} O(x,y,s)\psi(y)dy = O(e^{-\delta|\sigma|}|s|^{-1})$$

Luego

$$\int_{C_N}\Big[\int_{\substack{a\\|x-y|\geq\delta}}^{b} O(x,y,s)\psi(y)dy\Big]ds = O(\int_{C_N} e^{-\delta|\sigma|}|s|^{-1}ds) = \frac{1}{h_N}\,O(\int_{C_N} e^{-\delta|\sigma|}ds) =$$

$$= O(\frac{1}{h_N}) \quad \text{si} \quad N\to\infty.$$

lo que demuestra la afirmación.

TEOREMA 3. Si $\Phi$ es de variación acotada en $[a,b]$, entonces, si $N\to\infty$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\Big[\int_a^b O(x,y,s)\Phi(y)dy\Big]ds = (-\tfrac{1}{2})(\Phi(x+0)+\Phi(x-0)) + o(1)$$

para todo $x\in(a,b)$. Si $\Phi$ es continua en $[a,b]$, el $o(1)$ es uniforme en todo compacto $K\subset(a,b)$.

DEMOSTRACION. Sea $x\in(a,b)$ y $0<\delta\leqslant \min(x-a,b-x)$ y supongamos que $\Phi$ es real.

$$\int_{x-\delta}^{x} u_s(y)\Phi(y)dy = \Phi(x-0)\int_{x-\delta}^{x}u_s(y)dy + \int_{x-\delta}^{x}u_s(y)(\Phi(y)-\Phi(x-0))\,dy$$

Pero, para $s=\sigma+i\tau\in C_N$, con $\sigma\geqslant 0$, se tiene que

$$(1) \qquad \int_{x-\delta}^{x} u_s(y)\,dy = \frac{F_2(s)e^{s(x-a)}}{2s^2}\,(1 + O(e^{-\sigma\delta}))$$

De donde se puede deducir, usando (2 bis), cap. II, que para $\sigma \geqslant 0$:

$$\int_{x-\delta}^{x} \mathcal{O}(x,y,s)\,dy = (-1/2s)(1 + O(e^{-\sigma\delta})) \quad , \; s \in C_N$$

Si llamamos $C_N^+ = C_N \cap \{s \mid \mathrm{Re}\, s \geqslant 0\}$ tendremos que

$$\int_{C_N^+} \left[\int_{x-\delta}^{x} \mathcal{O}(x,y,s)\,dy\right] ds = -\frac{i\pi}{2} + o(1) \quad (N \to \infty)$$

Pero $\mathcal{O}(x,y,s) = -\mathcal{O}(x,y,-s)$ y en consecuencia:

$$\int_{C_N} \left[\int_{x-\delta}^{x} \mathcal{O}(x,y,s)\,dy\right] ds = 2\int_{C_N^+} \left[\int_{x-\delta}^{x} \mathcal{O}(x,y,s)\,dy\right] ds$$

de modo que:

$$(2) \qquad \Phi(x-0)\int_{C_N} \left[\int_{x-\delta}^{x} \mathcal{O}(x,y,s)\,dy\right] ds = (-\tfrac{1}{2})\; 2\pi i\; \Phi(x-0) + o(1) \quad (N \to \infty)$$

Como $\Phi$ es real y de variación acotada en un entorno de x, podemos escribir $\Phi(y)-\Phi(x-0) = g(y)-h(y)$, donde g y h son funciones positivas, no crecientes y tales que $g,h \to 0$ si $y \to x-0$. En el caso en que $\Phi$ tomase valores complejos, podrían repetirse estos argumentos considerando las funciones Re $\Phi$ e Im $\Phi$.

Aplicando el segundo teorema del valor medio obtenemos que

$$\int_{x-\delta}^{x} \mathrm{Re}\; u_s(y)g(y)\,dy = g(x-\delta)\;\mathrm{Re}\int_{x-\delta}^{x-\varepsilon} u_s(y)\,dy \qquad (0 < \varepsilon < \delta)$$

$$\int_{x-\delta}^{x} \mathrm{Im}\; u_s(y)g(y)\,dy = g(x-\delta)\;\mathrm{Im}\int_{x-\delta}^{x-\varepsilon'} u\;(y)\,dy \qquad (0 < \varepsilon' < \delta)$$

Si multiplicamos ambas ecuaciones por $s.\tilde{u}_s(x)/\delta(s)$, los segundos miembros resultan iguales a $g(x-\delta).O(1/|s|)$, de modo que:

$$\int_{x-\delta}^{x} \mathcal{O}(x,y,s)g(y)\,dy = g(x-\delta)\;O(1/|s|)$$

En consecuencia:

$$\int_{C_N}\left[\int_{x-\delta}^{x} O(x,y,s)g(y)dy\right]ds = O(g(x-\delta))$$

Repitiendo estas operaciones con la función h, se obtiene que

$$(3)\qquad \int_{C_N}\left[\int_{x-\delta}^{x} O(x,y,s)(\Phi(y)-\Phi(x-0))dy\right]ds = O(g(x-\delta)) + O(h(x-\delta))$$

El segundo miembro puede hacerse tan pequeño como se quiera, con tal de tomar $\delta$ suficientemente pequeño. De (3) y (2) se obtiene:

$$(4)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} ds \int_{x-\delta}^{x} O(x,y,s)\ \Phi(y)dy = -\frac{\Phi(x-0)}{2} + o(1)$$

Trabajando en forma análoga con

$$\int_{x}^{x+\delta} \tilde{u}_s(y)\Phi(y)dy = \Phi(x+0)\int_{x}^{x+\delta} \tilde{u}_s(y)dy + \int_{x}^{x+\delta} \tilde{u}_s(y)(\Phi(y)-\Phi(x+0))dy$$

se completa la demostración, teniendo en cuenta el resultado del teorema 2.

Sea $\Phi(y) = G(y)-H(y)$, con $G(y)$ y $H(y)$ no crecientes. Si $\Phi \in C([a,b])$, pueden elegirse también G y H continuas.

Escribiendo: $\Phi(y)-\Phi(x) = [G(y)-G(x)] - [H(y)-H(x)] = g_x(y)-h_x(y)$ vemos, de la continuidad uniforme de G, que $g_x(x-\delta) \underset{\delta\to 0}{\to} 0$ uniformemente en $x \in K$ (compacto contenido en (a,b)). Con esto se concluye la demostración del teorema.

TEOREMA 4. i) Si $\Phi$ es integrable sobre [a,b] y $0 < \delta < b-a$, entonces

$$\int_{C_N}\left[\int_{a}^{b} O(a,y,s)\Phi(y)dy\right]ds = \int_{C_N}\left[\int_{a}^{a+\delta} O(a,y,s)\Phi(y)dy\right]ds + o(1)$$

$$\text{si } p \leqslant q \quad (N \to \infty)$$

y es igual a o(1) si $p > q$.

ii) Si $\Phi$ es de variación acotada en un entorno de $x = a$ y $p \leqslant q$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\left[\int_{a}^{a+\delta} O(a,y,s)\Phi(y)dy\right]ds = -\ \Phi(a+0)+o(1) \qquad (N \to \infty).$$

iii) Un resultado semejante vale para el extremo b.

DEMOSTRACION. Consideremos el caso $x = b$. Basta observar que

$$\mathcal{O}(b,y,s) = \frac{-s\widetilde{Q}(s^2)}{\delta(s)}\ u_s(y) \quad \text{de modo que}$$

$$\int_{b-\delta}^{b} \mathcal{O}(b,y,s)\,dy = -\frac{\widetilde{Q}(s^2)}{F_3(s)} \cdot \left[1 + O(e^{-\sigma\delta})\right]$$

Luego pueden seguirse demostraciones análogas a las de los teoremas 2 y 3, pues

$$\int_{b-\delta}^{b} \mathcal{O}(b,y,s)\,dy = \begin{cases} -\frac{1}{s}\ (1 + O(1/|s|) + O(e^{-\sigma\delta})) & \text{si } \widetilde{p} \leqslant \widetilde{q}. \\ O(1/|s|^2) & \text{si } \widetilde{p} > \widetilde{q}. \end{cases}$$

Aplicando el teorema de los residuos, escribiremos ahora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\left[\int_a^b \widetilde{\mathcal{O}}(x,y,s)\Phi(y)\,dy\right]ds = \sum \text{Res}\int_a^b \widetilde{\mathcal{O}}(x,y,s)\Phi(y)\,dy$$

donde la suma se realiza sobre los puntos s tales que $W(s) = 0$, $|s| < h_N$ , N suficientemente grande.

Teniendo en cuenta la observación hecha antes de enunciar el Lema 6, del capítulo anterior, se muestra inmediatamente que, *si* s *es un cero simple de* W(s), entonces

$$(5) \qquad \text{Res}\int_a^b \widetilde{\mathcal{O}}(x,y,s)\Phi(y)\,dy = \left[\frac{sA(s)}{W'(s)}\int_a^b U_s(y)\Phi(y)\,dy\right]U_s(x) = H(s)U_s(x)$$

Supongamos ahora que W(s) tiene un *cero de orden* $r > 1$ *en* $s \neq 0$ y calculemos el residuo en ese punto.

$U_z(x)$ y $\widetilde{U}_z(x)$ son funciones enteras de z, para cada $x \in [a,b]$ , de modo que podemos escribir:

$$U_z(x) = \mathcal{U}_o(x,s) + \mathcal{U}_1(x,s)(z-s) + \mathcal{U}_2(x,s)(z-s)^2 + \dots$$

$$\widetilde{U}_z(x) = \widetilde{\mathcal{U}}_o(x,s) + \widetilde{\mathcal{U}}_1(x,s)(z-s) + \widetilde{\mathcal{U}}_2(x,s)(z-s)^2 + \dots$$

En consecuencia:

$$\widetilde{U}_z(x)U_z(y) = \widetilde{\mathcal{U}}_o(x,s)\mathcal{U}_o(y,s) + \dots + \left[\sum_{k=0}^{n} \widetilde{\mathcal{U}}_k(x,s)\mathcal{U}_{n-k}(y,s)\right](z-s)^n + \dots$$

Si W(z) tiene un cero de orden r en $s \neq 0$ , entonces

$$(z-s)^r\ \frac{z}{W(z)} = c_{-r}+c_{-r+1}(z-s)+\dots+c_{-1}(z-s)^{r-1}+c_o(z-s)^r+\dots \quad ; \quad c_{-r} \neq 0 .$$

Luego:

$$\frac{(z-s)^r z}{W(z)}\tilde{U}_z(x)U_z(y) = \ldots+(z-s)^{r-1}\sum_{j=1}^{r} c_{-j}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{u}_k(x,s)u_{j-1-k}(y,s)\right) + \ldots$$

De esto se deduce que el valor del residuo que queremos calcular, es:

$$\text{Res} = \sum_{j=1}^{r} c_{-j}\sum_{k=0}^{j-1}\left[\tilde{u}_k(x,s)\int_a^x u_{j-1-k}(y,s)\Phi(y)\,dy+u_k(x,s)\int_x^b \tilde{u}_{j-1-k}(y)\Phi(y)\,dy\right]$$

donde

$$(6)\qquad \begin{cases} u_k(x,s) = \dfrac{1}{k!}\dfrac{\partial^k}{\partial z^k} U_z(x)\Big]_{z=s} \\[2ex] \tilde{u}_k(x,s) = \dfrac{1}{k!}\dfrac{\partial^k}{\partial z^k}\tilde{U}_z(x)\Big]_{z=s} \qquad k = 0,1,\ldots,r-1 \end{cases}$$

Si $s = 0$: $U_z(x) = u_o(x,0)+z^2u_2(x,0)+\ldots$ ; $\tilde{U}_z(x) = \tilde{u}_o(x,0)+z^2\tilde{u}_2(x,0)+\ldots$ ;

$$z^{2r-1}\frac{z}{W(z)} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{-2r+2i}z^{2i} \quad , \text{ entonces}$$

$\text{Res}_o = \sum_{j=1}^{r} c_{-2j}\left[\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{u}_{2k}(x,0)\int_a^x u_{2(j-1-k)}(y)\Phi(y)\,dy+\ldots\right]$ , donde las funciones $u_{2j}$ y $\tilde{u}_{2j}$ se obtienen de (6) considerando $k = 0,2,4,\ldots,2(r-1)$.

Como $\quad \tilde{U}_z(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(x,s)(z-s)^k \quad$ y

$$z^2\tilde{U}_z(x) = (z-s)^2\tilde{U}_z(x) + 2(z-s)s\tilde{U}_z(x) + s^2\tilde{U}_z(x)$$

se concluye que:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\tilde{u}_k''(x,s)-(s^2+q(x))\tilde{u}_k(x,s)\right](z-s)^k = (z^2-s^2)\tilde{U}_z(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(x,s)(z-s)^{k+2} + 2s\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(x,s)(z-s)^{k+1}$$

De aquí resulta que las funciones $\tilde{u}_k(x,s)$ satisfacen las ecuaciones

$$(7)\quad \begin{cases} \tilde{u}_o''(x,s) - (s^2+q(x))\tilde{u}_o(x,s) = 0 \\ \tilde{u}_1''(x,s) - (s^2+q(x))\tilde{u}_1(x,s) = 2s\tilde{u}_o(x,s) \\ \tilde{u}_2''(x,s) - (s^2+q(x))\tilde{u}_2(x,s) = 2s\tilde{u}_1(x,s) + \tilde{u}_o(x,s) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{u}_{r-1}''(x,s) - (s^2+q(x))\tilde{u}_{r-1}(x,s) = 2s\tilde{u}_{r-2}(x,s) + \tilde{u}_{r-3}(x,s) \end{cases}$$

Donde las comillas indican derivación respecto de x.

Expresiones análogas valen para las funciones $u_j(x,s)$.

Si s = 0, reemplazamos en (7) s por 0 y consideramos sólo las funciones $\tilde{u}_h$, de índice par.

De (7) se deduce fácilmente que las familias de funciones $\{\tilde{u}_o,\ldots,\tilde{u}_{r-1}\}$ y $\{u_o,\ldots,u_{r-1}\}$ son, para cada $s \neq 0$, linealmente independientes sobre $[a,b]$. Como ejemplo, probaremos esta afirmación para la familia $\{u_o,\ldots,u_{r-1}\}$ : $u_o \neq 0$ ; Si $u_j$ es la primer función que es combinación lineal de las precedentes , entonces, aplicando el operador correspondiente a $u_j - \sum_{k=0}^{j-1} c_k u_k = 0$ , se obtiene que $u_{j-1} = \sum_{k=0}^{j-2} c_k' u_k$ , contradicción que demuestra que, *para todo* n y s fijo: $\{u_o(x,s),\ldots,u_n(x,s)\}$ es linealmente independiente.

DEFINICION. La familia $\{u_o,\ldots,u_{r-1}\}$ será llamada "*cadena de funciones principales asociadas a* $U_s(x)$" [5].

Teniendo en cuenta, además, que s es un cero de orden r de W(z), se puede demostrar el siguiente resultado:

$$(8)\qquad \tilde{u}_k(x,s) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\Big[A(z)U_z(x)\Big]_{z=s} \quad ; \quad k = 0,1,\ldots,r-1$$

(si s = 0 se toma nuevamente $k = 0,2,4,\ldots,2(r-1)$).

Para demostrarlo veremos que la función del segundo miembro satisface la misma ecuación diferencial que $\tilde{u}_k(x,s)$, además de coincidir sus valores y los de sus derivadas primeras, respecto de x, en el punto x = a.

En efecto, sea

$$\widetilde{V}_k(x,z) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[A(z)U_z(x)\right]$$

Esta es una función analítica en z, en cada punto $s \in S$ y dos veces continuamente diferenciable en x pues como se demuestra en el Apéndice I, el orden de derivación respecto de x y z, para la función $U_z(x)$, puede ser permutado, de modo que $\widetilde{V}_k(x,z)$ verifica la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2\widetilde{V}_k}{\partial x^2}(x,z) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[A(z)U''_z(x)\right] = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[(z^2+q(x))A(z)U_z(x)\right]$$

Resulta entonces que si k = 0:

$$\frac{\partial^2\widetilde{V}_o}{\partial x^2}(x,s) = (s^2+q(x))A(s)U_s(x) = (s^2+q(x))\widetilde{V}_o(x,s)$$

esto es

$$\frac{\partial^2\widetilde{V}_o}{\partial x^2}(x,s) = (s^2+q(x))\widetilde{V}_o(x,s) = 0$$

Si k = 1, se obtiene que:

$$\frac{\partial^2\widetilde{V}_1}{\partial x^2}(x,s) = \frac{\partial}{\partial z}\left[(z^2+q(x))A(z)U_z(x)\right]_{z=s} =$$

$$= 2sA(s)U_s(x) + (s^2+q(x))\frac{\partial}{\partial z}\left[A(z)U_z(x)\right]_{z=s}$$

esto es

$$\frac{\partial^2\widetilde{V}_1}{\partial x^2}(x,s) - (s^2+q(x))\,\widetilde{V}_1(x,s) = 2s\,\widetilde{V}_o(x,s)$$

En caso en que $k \geqslant 2$:

$$\frac{\partial^2\widetilde{V}_k}{\partial x^2}(x,s) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left\{\binom{k}{j}\frac{\partial^j}{\partial z^j}(z^2+q(x))\frac{\partial^{k-j}}{\partial z^{k-j}}\left[A(z)U_z(x)\right]\right\}_{z=s} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left\{(z^2+q(x))\frac{\partial^k}{\partial z^k}A(z)U_z(x) + k\;2z\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\left[A(z)U_z(x)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{k(k-1)}{2}\;2\frac{\partial^{k-2}}{\partial z^{k-2}}\left[A(z)U_z(x)\right]\right\}_{z=s} =$$

$$= (s^2+q(x))\ \tilde{V}_k(x,s) + 2s\ \tilde{V}_{k-1}(x,s) + \tilde{V}_{k-2}(x,s)$$

De modo que:

$$\frac{\partial^2\tilde{V}_k}{\partial x^2}(x,s) - (s^2+q(x))\tilde{V}_k(x,s) = 2s\tilde{V}_{k-1}(x,s) + \tilde{V}_{k-2}(x,s)$$

Además, $\tilde{V}_k(x,s)$ satisface las condiciones iniciales

$$\tilde{V}_k(a,s) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[A(z)U_z(a)\right]_{z=s} \quad ; \quad \frac{\partial\tilde{V}_k}{\partial x}(a,s) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[A(z)U_z'(a)\right]_{z=s}$$

Pero, como ya se ha visto en el Capítulo II

$$A(z)U_z(a) = \tilde{U}_z(a) + \beta W(z)/D(z)$$

$$\text{y} \qquad A(z)U_z'(a) = \tilde{U}_z'(a) - \alpha W(z)/D(z)$$

De modo que si W(z) tiene un cero de orden r en z=s se tiene que

$$\tilde{V}_k(a,s) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\tilde{U}_z(a)\Big]_{z=s} = \tilde{U}_k(a,s)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{V}_k(a,s) = \frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial x^k}U_z'\Big]_{z=s} = \frac{\partial}{\partial x}\tilde{U}_k(a,s)$$

para $k = 0,1,2,...,r-1$.

Se deduce así que, $\tilde{V}_o(x,s)$ satisface la misma ecuación diferencial (7) que $\tilde{U}_o(x,s)$, e idénticas condiciones iniciales, de modo que resulta ser $\tilde{V}_o(x,s) \equiv \tilde{U}_o(x,s)$.

Luego, por recurrencia, se llega a la misma conclusión para $k = 1,2,...,r-1$, lo que concluye la demostración.

Se tiene entonces:

$$(9) \qquad \tilde{U}_k(x,s) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{d^{k-i}}{dz^{k-i}}A(z)\Big]_{z=s}\frac{\partial^i}{\partial z^i}U_z(x)\Big]_{z=s} = \sum_{i=0}^{k}a_{k-i}U_i(x,s)$$

$$\text{donde} \qquad a_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dz^i}A(z)\Big]_{z=s}$$

Así puede verificarse que:

$$(10) \quad \mathrm{Res} = \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{j=0}^{r-k} \left(\sum_{i=0}^{r-k-j} a_i c_{-(j+k+i)}\right) \int_a^b u_j(y,s)\Phi(y)dy\right] u_{k-1}(x,s)$$

Pero la expresión entre paréntesis es el coeficiente de $(z-s)^{r-k-j}$ en el producto de los desarrollos en serie en torno de s, de las funciones $A(z)$ y $(z-s)^r.z/W(z)$, de modo que es igual a:

$$\frac{1}{(r-k-j)!} \frac{d^{r-k-j}}{dz^{r-k-j}} \left[\frac{A(z)z(z-s)^r}{W(z)}\right]_{r=s}$$

De todo esto se deduce que, en el caso de un *cero* $\neq 0$ *de orden* r:

$$(11) \quad \begin{cases} \mathrm{Res} = \sum_{k=1}^{r} H_{k-1}(s)u_{k-1}(x,s) \quad \text{donde} \\ H_{k-1}(s) = \dfrac{1}{(r-k)!}\displaystyle\int_a^b \frac{\partial^{r-k}}{\partial z^{r-k}} \left[\frac{A(z)z(z-s)^r}{W(z)} U_z(x)\right]_{z=s} \Phi(x)dx \end{cases}$$

si s = 0 $\quad H_{2(k-1)} = \dfrac{1}{2(r-k)!} \displaystyle\int_a^b \frac{\partial^{2(r-k)}}{\partial z^{2(r-k)}} \left[\frac{A(z)z^{2r}}{W(z)} U_z(x)\right]_0 \Phi(x)dx$ y

$$(11 \text{ bis}) \quad \mathrm{Res}_o = \sum_{k=1}^{r} H_{2(k-1)}u_{2(k-1)}(x;0)$$

Sabemos ya que W(z) es una función par, de modo que si s = 0 es autovalor es un polo de orden impar de $\tilde{O}(x,y,z)$, exactamente: si s = 0 es un cero de orden 2r de W, entonces es un polo de orden 2r-1 de $\tilde{O}(x,y,z)$ y se puede calcular el residuo en forma análoga a lo hecho en el caso s $\neq$ 0, observando sin embargo, que en este caso la cadena de funciones principales asociada a $U_o(x)$ tiene solo r elementos:

$$u_o(x), \ldots, {}_{2(r-1)}(x)$$

donde

$$u_{2j}(x) = \frac{1}{(2j)!} \left.\frac{\partial^{2j}U_z(x)}{\partial z^{2j}}\right]_{z=0} \qquad j = 0,\ldots,r-1$$

Pues al ser $U_z(x)$ y $\tilde{U}_z(x)$ funciones pares de z (para cada x fijo), sus derivadas respecto de z, de orden impar, son nulas en z = 0.

En resumen, de todos estos resultados y de los teoremas 1, 2 y 3 se deduce el siguiente teorema:

TEOREMA 5. a) Si $\Phi$ es una función de variación acotada en $[a,b]$ y $x \in (a,b)$, el valor $(\Phi(x+0) + \Phi(x-0))$ puede ser representado como suma de una serie de autofunciones y de las funciones principales asociadas, en el caso de autovalores múltiples.

b) Si $\Phi$ es integrable sobre $[a,b]$ y $\Phi \equiv 0$ en un entorno del punto $x \in (a,b)$, dicha serie converge a 0 en el punto x.

c) Si $\Phi$ es de variación acotada y continua en $[a,b]$ y nula en entornos de x=a y x=b, la serie obtenida converge *uniformemente* a $\Phi(x)$ en $[a,b]$.

# CAPITULO IV. CONVERGENCIA EN $L^2(a,b)$.

Para comenzar, supondremos que todos los autovalores son simples, excepto s=0, que puede ser un autovalor doble.

Observando que el residuo de la función $\int_a^b \tilde{O}(x,y,s)\Phi(y)dy$ , en el punto s, coincide con su residuo en -s, concluímos que la suma de ambos es

(1) $$2H(s)\,U_s(x) \qquad \text{donde} \qquad H(s) = \frac{s.A(s)}{W'(s)} \int_a^b U_s(y)\Phi(y)dy$$

mientras que, si s = 0 es autovalor, se tiene que, el residuo allí es:

$$\left[\frac{2A(0)}{W''(0)} \int_a^b U_o(y)\Phi(y)dy\right] U_o(x)$$

Si notamos $H(0) = \lim_{s\to\infty} H(s)$, podemos escribir:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} \left[\int_a^b \cdots\right] ds = \sum_{\substack{s\,\varepsilon\,S\\ |s|<h_N}} 2H(s).U_s(x)$$

Normalizando el sistema de autofunciones $\{U_s\}_{s\varepsilon S}$ (que son linealmente independientes) con la norma $L^2(a,b)$ y llamando.

$$V_s(x) = \frac{1}{\|U_s\|}\,U_s$$

tenemos que

(2) $$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} \left[\int_a^b \cdots\right] ds = \sum_{\substack{s\varepsilon S\\ |s|<h_N}} (-2H(s)\|U_s\|)\;V_s(x)$$

DEFINICION. Llamaremos productos de Fourier, asociados a $\Phi$, a los números

$$b_s = b_s(\Phi) = (\Phi,V_s) = \int_a^b V_{\bar{s}}(y)\Phi(y)dy \qquad s \in S$$

y notaremos con $b = b(\Phi)$ a la sucesión $(b_s)_{s\varepsilon S}$.

Definiremos ahora la matriz $N = (n_{st})$ de modo que

(3) $$(Nb)_s = -2H(s)\|U_s\| \qquad s \in S$$

Para ello será necesario tomar, con $s,t \in S$:

$$n_{st} = \begin{cases} -\dfrac{2sA(s)}{W'(s)} \|U_s\|^2 & \text{si } t^2 = \bar{s}^2 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

N *es hermítica.*

OBSERVACION. Si $0 \in S$, se tomará $n_{oo} = -\dfrac{2A(0)}{W''(0)} \|U_o\|^2$ .

Se tiene entonces que:

$$(4) \qquad -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \left[\int_a^b \ldots\right] ds = \sum_{\substack{s\in S \\ |s|<h_N}} (Nb)_s \, V_s(x)$$

LEMA 1. Si $s,t \in S$, $s \neq t$ se tiene que:

$$(V_s, V_t) = O(1)/(|s|+1)(|t|+1)$$

Además $\|U_s\| \sim \sqrt{\frac{b-a}{2}}\, |\beta_m||s|^{m-1}$ si $|s| \to \infty$ y $\beta_m$ es el coeficiente de $s^m$ en el polinomio $F_1(s)$.

DEMOSTRACION. Si $|s|$ es suficientemente grande, $s \in S$, entonces $s = i\alpha$ $(\alpha > 0)$.

De modo que $U_s(x) = u_s(x) + \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_a^x \text{sen } \alpha(x-y)q(y)U_s(y)dy =$

$$= u_s(x) + \frac{1}{\alpha}\int_a^x \text{sen } \alpha(x-y)q(y)u_s(y)dy +$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2}\int_a^x \left[\int_t^x \text{sen } \alpha(x-y) \text{ sen } \alpha(y-t)q(y)dy\right] q(t)U_s(t)dt$$

$$\left\|\int_a^x \text{sen } \alpha(x-y)q(y)u_s(y)dy\right\| \leqslant \sqrt{b-a}\, \|q\|_\infty \|u_s\|_2 = c_1 \|u_s\|_2.$$

$$\left\|\int_a^x \left[\int_t^x \ldots dy\right] dt\right\| \leqslant \sqrt{b-a} \int_a^b |q|dy\, \|q\|_\infty \|U_s\|_2 = c_2 \|U_s\|_2$$

Luego:

$$\|U_s - u_s\| \leqslant \frac{c_1}{\alpha}\|u_s\| + \frac{c_2}{\alpha^2}\|U_s\|$$

De donde se deduce que

$$\|U_s\| \; (1-c_2/\alpha^2) \leqslant (1+c_1/\alpha) \; \|u_s\|$$

$$\text{y} \qquad \|U_s\| \; (1+c_2/\alpha^2) \geqslant (1-c_1/\alpha) \; \|u_s\|$$

y se elige $\alpha$ lo suficientemente grande como para que

$$1-c_2/\alpha^2 > 0 \qquad \text{y} \qquad 1-c_1/\alpha > 0 \quad :$$

$$(5) \qquad \|U_s\| \leqslant \frac{1+c_1/\alpha}{1-c_2/\alpha^2} \|u_s\| \leqslant \frac{1+c_2/\alpha^2}{1-c_1/\alpha} \; \frac{1+c_1/\alpha}{1-c_2/\alpha^2} \; \|U_s\|$$

En consecuencia, se tiene que $\|U_s\| \sim \|u_s\|$ si $|s| \to \infty$

Pero, si $s = i\alpha$

$$\|u_s\|^2 = -\frac{1}{4\alpha^2}\int_a^b (F_2^2(s)e^{2s(x-a)} + F_1^2(s)e^{-2s(x-a)} - 2F_1(s)F_2(s))\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4\alpha}\left[\frac{F_2(s)e^{s(b-a)}-F_1(s)e^{-s(b-a)})(F_2(s)e^{s(b-a)}F_1(s)e^{-s(b-a)})}{2s}\right.$$

$$\left. - 2(b-a)\; F_1(s)\; F_2(s) + \frac{F_1^2(s)-F_2^2(s)}{2s}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\alpha^2}\,(u_s(b)u_s'(b) - (b-a)F_1(s)F_2(s) + P(s^2)Q(s^2)) \; .$$

De modo que

$$\|u_s\|^2/|s|^{2m-2} = \frac{b-a}{2}\,\frac{F_1(s)F_2(s)}{|s|^{2m}} + O(1/|s|)$$

Y teniendo en cuenta que $F_1(s)F_2(s) = \beta_m^2|s|^{2m} + O(|s|^{2m-1})$

se obtiene que

$$\|u_s\|^2/|s|^{2(m-1)} \longrightarrow (b-a)\;\beta_m^2/2 \quad \text{si} \quad |s| \to \infty \; .$$

Como $A(s) = \tilde{U}_s'(b)/U_s'(b) = \tilde{U}_s(b)/U_s(b)$, tenemos que:

$$1/A(s) = U_s'(b)/\tilde{P}(s^2) = -U_s(b)/\tilde{Q}(s^2)$$

Luego $1/A(s) = O(1)|s|^{m-2\tilde{p}}$ y también $1/A(s) = O(1)|s|^{m-(2\tilde{q}+1)}$ .

De modo que $1/A(s)=O(1)|s|^{m-n}$. (Esto vale aún si $n=0$, pues en ese caso es $\tilde{Q}\equiv 0$, $\tilde{P}\equiv cte.\neq 0$ y $1/A(s)=cte.U_s'(b)$). En consecuencia:

$$1/\|U_s\|A(s) = O(1)|s|^{1-n} \quad y \quad 1/\|U_s\|\|U_t\|A(s)A(t) = O(1)|st|^{1-n} \quad s,t \in S$$

Como $\tilde{V}(s^2,t^2) = O(1)|st|^{n-2}$ (que puede mejorarse por $O(1)|st|^{n-3}$ si n es impar) se tiene que

$$\tilde{V}(s^2,t^2)/\|U_s\|\|U_t\|A(s)A(t) = O(1)/|st|$$

Análogamente se prueba que $V(s^2,t^2)/\|U_s\|\|U_t\| = O(1)/|st|$ si $s,t \in S$, con lo que queda demostrado que

$$(V_s,V_t) = O(1)|st|$$

si se tiene en cuenta la expresión obtenida en el lema 7 cap. II.

En forma semejante se prueba que $(V_s,V_g) = O(1)/|s|$ para $g \in S$, g fijo.

Hemos probado entonces que: $s \neq t$ ; $g,s,t \in S$ implican $(V_s,V_t) = O(|st|^{-1})$ , $(V_s,V_g) = O(|s|^{-1})$ si $|s|$ , $|t| \geqslant C$. De aquí resulta la tesis.

COROLARIO. La serie $\sum_{s\in S} c_s V_s(x)$ converge en $L^2(a,b)$ si y sólo si $\sum_{s\in S} |c_s|^2<\infty$.

DEMOSTRACION. Basta observar que, si efectuamos las sumas para los valores de s tales que $M \leqslant |s| \leqslant N$

$$\|\sum c_s V_s(x)\|^2 = \sum |c_s|^2 + O(1) \sum_{s\neq t} |c_s \bar{c}_t|/|st|$$

Pero $\sum_{s\neq t} |c_s\bar{c}_t|/|st| \leqslant (\sum |c_s|/|s|)^2 \leqslant (\sum |c_s|^2)(\sum \frac{1}{|s|^2}) = \frac{O(1)}{M} \sum |c_s|^2$

De modo que

$$\|\sum c_s V_s\|^2 = (\sum |c_s|^2)(1 + \frac{O(1)}{M}) \tag{6}$$

Siguiendo la terminología ya usada en [1, cap.V] llamaremos *coeficientes de Fourier* a los números de la sucesión $(c_s)$ tales que la serie $\sum_{s\in S} c_s V_s(x)$ sea convergente en $L^2(a,b)$. Precisamente, si $f \underset{L^2}{=} \sum c_s V_s$, entonces los $c_s$ se dirán coeficientes de Fourier de f.

LEMA 2. $n_{ss} \sim 1$ si $|s| \to \infty$ .

DEMOSTRACION. Teniendo en cuenta que, para $s \in S$, será

$$\tilde{U}_s(b) = A(s)\, U_s(b) \quad y \quad \tilde{U}'_s(b) = A(s)\, U'_s(b)$$

se obtiene

$$\frac{dW(s)}{ds} \Big/ 2sA(s) = \frac{1}{2s}\left[\frac{dU_s(b)}{ds} U'_s(b) - U_s(b)\frac{dU'_s(b)}{ds}\right] + (U_s(b)\tilde{P}'(s^2) +$$

$$+ U'_s(b)\tilde{Q}'(s^2))/A(s)$$

De las estimaciones ya conocidas deducimos que el último término es $O(|s|^{2m-3})$. Además, si $s = i\gamma$ : $\frac{dU_s(y)}{ds} = O(1)|s|^{m-1}$; $\frac{dU'_s(y)}{ds} = O(1)|s|^m$ $\therefore$ $\Delta = U_s - u_s =$ $= O(1)|s|^{m-2}$ , $\frac{d\Delta}{ds} = O(1)|s|^{m-2}$ $\Delta' = O(1)|s|^{m-1}$ , $\frac{d\Delta'}{ds} = O(1)|s|^{m-1}$. De aquí resulta que el primer término es igual a

$$\frac{1}{2s}\left[\frac{du_s(b)}{ds} u'_s(b) - u_s(b)\frac{du'_s(b)}{ds}\right] + O(|s|^{2m-3})$$

que coincide con:

$$\frac{b-a}{s}\,\frac{F_1(s)F_2(s)}{s^2} + O(|s|^{2m-3}) = -\frac{b-a}{s}\,\beta_m^2\,|s|^{2m-2} + O(|s|^{2m-3})$$

De modo que

$$-\frac{W'(s)}{2sA(s)} \sim \frac{b-a}{2}\,\beta_m^2\,|s|^{2m-2}$$

Si se recuerda la definición de $n_{ss}$ y la estimación para $\|U_s\|$ obtenida en el Lema 1, se concluye inmediatamente la demostración.

LEMA 3. i) Si $f \in L^2(a,b)$, entonces $b(f) \in \ell_2$ y $\|b(f)\|_{\ell_2} = O(1)\|f\|$.

ii) Si $f = \sum_{s\in S} c_s V_s$ (en $L^2(a,b)$) entonces $b_t(f) = c_t + \dfrac{O(1)\|c\|_{\ell_2}}{t}$

DEMOSTRACION. i) $s = i\alpha$, con $\alpha = h_N + \frac{O(1)}{N}$ , se tiene que

$$V_s(x) = -\frac{Q(-\alpha^2)}{\|U_s\|}\cos\alpha(x-a) + \frac{P(-\alpha^2)}{\|U_s\|}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha(x-a)}{\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha}\int_a^x \operatorname{sen}\alpha(x-y)q(y)V_s(y)\,dy =$$

$$= O(1)\cos h_N(x-a) + O(1)\ \mathrm{sen}\ h_N(x-a) + \frac{O(1)}{N}$$

Entonces:

$$b_s(f) = O(1)(f,\cos h_N(x-a)) + O(1)(f,\mathrm{sen}\ h_N(x-a)) + \frac{O(1)}{N}\|f\|$$

Como cada uno de estos términos constituye una sucesión de $\ell_2$, resulta que $(b_s(f)) \in \ell_2$, y es inmediato que $\|b(f)\|_{\ell_2} = O(1)\|f\|$, como se quería demostrar.

ii) Si $f = \sum_{s\in S} c_s V_s$, entonces $c = (c_s) \in \ell_2$, de modo que,

$$b_t(f) = (f,V_t) = \sum_{s\in S} c_s(V_s,V_t) = c_t + O(1)\sum_{s\neq t}\frac{|c_s|}{(|s|+1)(|t|+1)} = c_t + \frac{O(1)}{t}\|c\|_{\ell_2}$$

OBSERVACION. Los O(1) del lema precedente tienen mayorantes independientes de c y f.

DEFINICION. Si $f =_{L^2} \sum c_s V_s$, con $c_s = (Nb)_s$, diremos que los números de la sucesión $(c_s)$ son los coeficientes de Orr de f.

TEOREMA 1. Toda función de $L^2(a,b)$ admite un desarrollo en autofunciones, convergente en L (a,b), con coeficientes de Orr.

DEMOSTRACION. Sea $(\Phi_m)$ una sucesión de funciones continuas, de variación acotada, nulas en entornos de x = a y x = b, tales que $\Phi_m \to \Phi$ en $L^2(a,b)$.

Por el teorema 5, c) del capítulo anterior, sabemos que cada $\Phi_m$ admite un desarrollo de la forma

$$\Phi_m(x) = \sum_{s\in S} (Nb(\Phi_m))_s\ V_s(x)$$

que converge uniformemente sobre [a,b].

Como $\|b(\Phi_m) - b(\Phi)\|_{\ell_2} = O(1)\ \|\Phi_m - \Phi\|_{\ell_2}$, tenemos que

$$b(\Phi_m) \longrightarrow b(\Phi) \quad \text{en} \quad \ell_2 \quad (m \to \infty).$$

Del Lema 2, se deduce que

$$Nb(\Phi_m) \longrightarrow Nb(\Phi) \quad \text{en} \quad \ell_2.$$

En consecuencia; usando el corolario al lema 1 y la fórmula (6):

$$\|\Phi_m - \sum_{s\in S}(Nb(\Phi))_s V_s\| = \|\sum_{s\in S}[Nb(\Phi_m)-Nb(\Phi)]_s V_s\| = O(1)\|Nb(\Phi_m)-Nb(\Phi)\|_{\ell_2}$$

lo que significa que $\Phi_m \longrightarrow \sum_{s\in S}(Nb)_s V_s$ en $L^2(a,b)$

De modo que $\Phi(x) = \sum_{s\in S}(Nb(\Phi))_s V_s(s)$ en $L^2(a,b)$

como se quería demostrar.

Estas conclusiones pueden extenderse sin mucha dificultad al caso de *autovalores múltiples*, como veremos enseguida, debido a que todos ellos estarán contenidos en algún círculo $|z| \leqslant R$, si R es suficientemente grande. Distinguiremos dos subconjuntos de S, que notaremos con $S_1$ y $S_2$, definidos por

$$S_1 = \{s \in S \mid s \text{ es autovalor múltiple}\}$$

$$S_2 = \{s \in S \mid s \text{ es autovalor simple}\}$$

Si 0 es autovalor, entonces $0 \in S_1$, ya que, como sabemos, será de multiplicidad par, aunque en el caso en que su orden de multiplicidad sea 2, da origen a la autofunción misma, como único integrante de la cadena de funciones principales asociadas.

Se tiene entonces que $S_1$ es un conjunto *finito*, cuyos elementos aparecerán dados en algún orden prefijado

$$S_1 = \{s_1, s_2, \dots\}$$

Si $s_i$, $s_j$ son dos elementos consecutivos de $S_1$, con órdenes de multiplicidad $r_i$, $r_j$, respectivamente, ordenaremos las funciones principales asociadas del modo siguiente:

$$\mathcal{U}_o(x,s_i),\mathcal{U}_1(x,s_i),\dots,\mathcal{U}_{r_i-1}(x,s_i),\mathcal{U}_o(x,s_j),\mathcal{U}_1(x,s_j),\dots,\mathcal{U}_{r_j-1}(x,s_j)$$

Indicaremos con $V_{s,k}(x)$ a la función $\mathcal{U}_k(x,s)$ normalizada, es decir

$$V_{s,k}(x) \equiv \frac{1}{\|\mathcal{U}_k\|}\,\mathcal{U}_k(x,s)$$

y el producto de Fourier asociado a la función $\Phi$, correspondiente a $V_{s,k}$ estará dado por el número

$$b_{s,k} = (\Phi, V_{s,k}) = \int_a^b V_{\bar{s},k}(x)\Phi(x)\,dx$$

Si $s \in S$ , $s \neq 0$, tiene orden de multiplicidad r, vale nuevamente que el residuo de la función

$$\int_a^b \widetilde{\mathcal{O}}(x,y,s)\Phi(y)dy$$

calculado en el punto s, coincide con su residuo en -s, pues $\widetilde{\mathcal{O}}$ es una función impar en z, de modo que:

$$\mathrm{Res}_{-s} = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z\to -s} \frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} [\widetilde{\mathcal{O}}(x,y,z)(z+s)^r] =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z\to s} \frac{\partial^{r-1}}{\partial(-z)^{r-1}} [\widetilde{\mathcal{O}}(x,y,-z)(-z+s)^r] =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} (-1)^{r-1} \lim_{z\to s} \frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} [(-1)^{r+1}\widetilde{\mathcal{O}}(x,y,z)(z-s)^r] = \mathrm{Res}_s$$

La suma de ambos será, de acuerdo con las fórmulas (10) y (11) del capítulo III:

$$\sum_{k=1}^{r} (2\, H_{k-1}(s)\|\mathcal{U}_{k-1}\|)V_{s,k-1}(x)$$

donde

$$H_{k-1}(s) = \sum_{j=0}^{r-k} B_{r-k-j}(s).\int_a^b \mathcal{U}_{s,j}(y)\Phi(y)dy =$$

$$= \sum_{j=0}^{r-k} B_{r-k-j}(s).\|\mathcal{U}_{s,j}\|.(\Phi,V_{\bar{s},j})$$

y

$$B_{r-k-j}(s) = \frac{1}{(r-k-j)!} \frac{d^{r-k-j}}{dz^{r-k-j}} \left[\frac{A(z)z(z-s)^r}{W(z)}\right]_{z=s}$$

Una expresión análoga se obtiene para s = 0, de la fórmula (11 bis) del capítulo III:

Si 0 es un cero de orden 2r, el residuo es

$$\sum_{k=1}^{r} H_{2(k-1)}\|\mathcal{U}_{0,2(k-1)}\|V_{0,2(k-1)}(x) \;;$$

$$H_{2(k-1)} = \sum_{j=0}^{2(r-k)} B_{2(r-k-j)}(\Phi,\mathcal{U}_{0,2j})$$

donde

$$B_{2(r-k-j)} = \frac{1}{(2(r-k-j))!} \frac{d^{2(r-k-j)}}{dz^{2(r-k-j)}} \left[\frac{A(z)z^{2r}}{W(z)}\right]_{z=0}$$

Nuevamente se tiene que si $h_N > R$ y $r(s)$ denota el orden de multiplicidad del autovalor $s \neq 0$ y $2r(0)$ el de $s = 0$, entonces:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\left[\int_a^b \ldots\right] ds = \sum_{s\varepsilon S_1}{}' \sum_{k=0}^{r(s)-1} (-2H_k(s)\|\mathcal{U}_k\|)V_{s,k}(x) +$$

$$+ \sum_{\substack{s\varepsilon S_2 \\ |s|<h_N}} (-2H(s)\|U_s\|)V_s(x)$$

Donde $\sum'$ indica que si $s = 0$, el factor 2 debe eliminarse y k debe reemplazarse por 2k.

Puede definirse entonces la matriz (infinita) N de modo tal que los coeficientes de estas sumas se obtengan por medio de la expresión

$(Nb)_{s,k}$ $\quad s \in S$ , $k=0,1,\ldots,r(s)-1$ si $s\neq 0$ ; $k=0,2,\ldots,2(r(0)-1)$ si $s=0$

En efecto, para ello basta considerarla constituída por "bloques" de la forma $N = (N_{st})$ donde $N_{st}$ es una matriz de $r(s)$ filas por $r(t)$ columnas, definida por:

$$N_{st} = (n_{st}) \quad \text{si} \quad r(s) = r(t) = 1 \quad \text{y} \quad \bar{s}^2 = t^2$$

$$= \begin{pmatrix} B_{1,1}(s) & B_{1,2}(s) & & B_{1,r-1}(s) & B_{1,r}(s) \\ B_{2,1}(s) & B_{2,2}(s) & \ldots & B_{2,r-1}(s) & 0 \\ B_{3,1}(s) & B_{3,2}(s) & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{r-1,1}(s) & B_{r-1,2}(s) & \ldots & 0 & 0 \\ B_{r,1}(s) & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{si } \bar{s}^2 = t^2 \\ \text{y } r(s) > 1 \end{array}$$

$= (\ 0\ )$ en cualquier otro caso.

N *es Hermitiana* y

$$B_{\alpha,\beta} = -2\|\mathcal{U}_{s,\alpha-1}\|\|\mathcal{U}_{s,\beta-1}\|B_{r-\alpha-\beta+1} = B_{\beta,\alpha} \qquad \text{si } s \neq 0,$$

$$B_{\beta,\alpha} = B_{\alpha,\beta} = -\|\mathcal{U}_{0,2(\alpha-1)}\|\|\mathcal{U}_{0,2(\beta-1)}\|B_{2(r-\alpha-\beta+1)} \qquad \text{si } s = 0.$$

TEOREMA 2. Toda función $\Phi \in L^2(a,b)$ admite un desarrollo en autofunciones y funciones principales asociadas, convergente en $L^2(a,b)$, con coeficientes dados por la sucesión $N(b(\Phi))$.

DEMOSTRACION. La demostración sigue exactamente la del teorema 1, pues basta recordar que fuera de un círculo de radio suficientemente grande, todos los autovalores son simples y que el resultado probado en el lema 3 i) sigue siendo válido en el caso de autovalores múltiples.

Debe observarse que, en realidad, también sigue siendo válido el resultado del lema 3 ii), que puede obtenerse como consecuencia de una generalización del lema 7, capítulo II, que veremos a continuación.

Previamente, definiremos la función $\tilde{A}(z)$, para cada número complejo z, por medio de la expresión:

$$A(z) = \frac{\gamma\tilde{U}_z(b)+\delta\tilde{U}_z'(b)}{\gamma U_z(b)+\delta U_z'(b)}$$

donde $\gamma$ y $\delta$ son números reales tales que el denominador

$$\tilde{D}(z) \equiv \gamma U_z(b)+\delta U_z'(b)$$

no se anula en ningún autovalor s.

La existencia de tales coeficientes se justifica con el mismo argumento empleado al obtener la función $\tilde{A}(z)$, en el capítulo II. Más aún, $\tilde{A}(z)$ es otra de las posibles extensiones de A(s) a todo el plano complejo que verifica las relaciones siguientes:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \tilde{A}(z)U_z(b) &= \tilde{U}_z(b) + \delta W(z)/\tilde{D}(z) \\ \tilde{A}(z)U_z'(b) &= \tilde{U}_z'(b) - \gamma W(z)/\tilde{D}(z) \end{aligned}$$

LEMA 4. Si s y t son autovalores de multiplicidad r y r' respectivamente y s $s^2 \neq t^2$ , entonces

$$\int_a^b u_k(x,s)u_j(x,t)\,dx = \frac{1}{k!j!}\frac{\partial^{k+j}}{\partial z^k \partial w^j}\left[\frac{-1}{\tilde{A}(z)\tilde{A}(w)}V(z^2,w^2)+V(z^2,w^2)\right]_{\substack{z=s\\ w=t}}$$

$$k = 0,1,\ldots,r-1 \quad ; \quad j = 0,1,\ldots,r'-1.$$

Donde $\tilde{V}$ y V son los polinomios definidos en el lema 7, capítulo II.

DEMOSTRACION. $(z^2-w^2)\int_a^b U_z(x)U_w(x)dx = U_z(x)U_w'(x)-U_w(x)U_z'(x)\Big]_a^b$

Pero $U_z(a)U_w'(a)-U_w(a)U_z'(a) = -V(z^2,w^2).(z^2-w^2)$ y usando las fórmulas (7), se obtiene que

$$U_z(b)U_w'(b)-U_w(b)U_z'(b) = \frac{(z^2-w^2)}{\widetilde{A}(z)\widetilde{A}(w)}\widetilde{V}(z^2,w^2) + H(z,w)$$

donde

$$H(z,w) = (\delta/\widetilde{A}(z)\widetilde{A}(w)).(\widetilde{U}_w'(b)W(z)/\widetilde{D}(z) - \widetilde{U}_z'(b)W(w)/\widetilde{D}(w)) -$$

$$- (\gamma/\widetilde{A}(z)\widetilde{A}(w)).(\widetilde{U}_z(b)W(w)/\widetilde{D}(w) - \widetilde{U}_w(b)W(z)/\widetilde{D}(z)) =$$

$$= \frac{W(z)\widetilde{D}(w)}{\widetilde{A}(z)\widetilde{D}(z)} - \frac{W(w)\widetilde{D}(z)}{\widetilde{A}(w)\widetilde{D}(w)}.$$

Como $\widetilde{A}(z) \neq 0$ y $\widetilde{D}(z) \neq 0$ en todo autovalor, se deduce que $H(z,w)/(z^2-w^2)$ es analítica en cada una de sus variables (fijando la otra) si z y w varían en entornos (disjuntos) de s y t respectivamente.

Además tiene ceros de orden r y r' en z = s y w = t pues estos puntos son ceros de W(.) de esos órdenes, por hipótesis.

Recordando la definición dada en (6), capítulo III; se concluye la demostración.

## CAPITULO V. LOS GRADOS DE LIBERTAD DEL SISTEMA.

Supondremos en lo que sigue que los *autovalores no nulos son simples, excepto* $s = 0$, *que puede ser doble.*

Si notamos con A la matriz $(A_{st})$, donde $A_{st} = (V_t, V_s)$ $s,t \in S$; tendremos que si $c \in \ell_2$ y definimos la función $f(x)$ por medio de

$$f(x) = \sum_{s \in S} c_s V_s(x)$$

(esta serie converge en $L^2(a,b)$), entonces $b = b(f) = Ac$.

La matriz A define entonces un operador, que también notaremos con A, de $\ell_2$ en $\ell_2$, cuyo rango estará constituído por los productos de Fourier $b(f)$ asociados a funciones de $L^2(a,b)$.

Si escribimos $A = I+T$, resulta definido el *operador* T, en $\ell_2$, que verifica que $\sum_{s,t} |T_{st}|^2 < \infty$ , pues $T_{ss} = 0$ y $T_{st} = (V_t, V_s) = O(1)/(|t|+1)(|s|+1)$ si $s \neq t$, de modo que T es un operador completamente continuo.

Una función $f \in L^2(a,b)$ admite un desarrollo único de la forma $\sum_{s \in S} c_s V_s$ si y sólo si se verifica que

$$Ac = 0 \text{ es equivalente a } c = 0$$

lo cual, según el teorema de la alternativa de Fredholm, equivale a asegurar que $A\ell_2 = \ell_2$.

TEOREMA 1. Ninguna función $f \in L^2(a,b)$ tiene desarrollo único en autofunciones, en $L^2(a,b)$.

DEMOSTRACION. Según las observaciones anteriores, basta probar que el rango de A está estrictamente contenido en $\ell_2$, es decir que existe algún elemento de $\ell_2$ cuyos términos no pueden expresarse como productos de Fourier de ninguna función f de $L^2(a,b)$.

Fijemos $t \in S$ y supongamos que existe una función f tal que

$$b_s(f) = \delta_{st} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq t \\ 1 & \text{si } s = t \end{cases}$$

Como $f = \sum (Nb)_s V_s$, se tendrá que, si $|t|$ es suficientemente grande, esto se reduce a $f(x) = n_{tt} V_t(x)$.

Entonces $b_s(f) = n_{tt}.A_{st}$, esto es: $\delta_{st} = n_{tt}.A_{st}$.
Pero, si se ha elegido t de tal modo que $n_{tt} \neq 0$ (cf. Lema 2, capítulo IV) y luego $s \neq t$ tal que $A_{st} \neq 0$ (lo que es posible por el lema 8b del capítulo II) se obtiene una contradicción, que demuestra la tesis.

OBSERVACION. Aunque se ha señalado al comenzar que se consideraría el caso en que los autovalores son simples, debe destacarse que esta demostración sigue siendo válida aún cuando hubiese algunos autovalores múltiples.

Llamaremos $\tilde{k}_i(s) = s^{2i}/A(s)\|U_s\|$ $\quad i = 0,1,\dots,n^* = [n/2] - 1$

$k_j(s) = s^{2j}/\|U_s\|$ $\quad j = 0,1,\dots,m^* = [m/2] - 1 \quad (n, m \geqslant 2)$

(Ver Nota 3, de pág. 5)
También consideraremos los vectores

$$\tilde{k}(s) = \begin{pmatrix} \tilde{k}_o(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{k}_{n*}(s) \end{pmatrix} \qquad\qquad k(s) = \begin{pmatrix} k_o(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_{m*}(s) \end{pmatrix}$$

y las sucesiones

$$\tilde{k}_i = (\tilde{k}_i(s))_{s\varepsilon S} \quad ; \quad \bar{\tilde{k}}_i = (\tilde{k}_i(\bar{s}))_{s\varepsilon S}$$

$$k_j = (k_j(s))_{s\varepsilon S} \quad ; \quad \bar{k}_j = (k_j(\bar{s}))_{s\varepsilon S}$$

Teniendo en cuenta el lema 7 del capítulo II, podemos escribir:

$$A_{st} = - \tilde{k}^t(\bar{s}).\tilde{C}.\tilde{k}(t) + k^t(\bar{s}).C.k(t)$$

donde $\tilde{C}$ y C son las matrices definidas en el lema 9 del capítulo II y $k^t(s)$ indica el traspuesto del vector k(s).

Si definimos además las matrices $\tilde{Y}_{pq}$ y $Y_{pq}$ por

$$(\tilde{Y}_{pq})_{st} = \bar{\tilde{k}}_p(s).k_q(t) \qquad (Y_{pq})_{st} = \bar{k}_p(s).k_q(t)$$

entonces:

$$A_{st} = -\sum_{p,q=0}^{n^*} \tilde{c}_{pq}(\tilde{Y}_{pq})_{st} + \sum_{p,q=0}^{m^*} c_{pq}(Y_{pq})_{st}$$

siempre que $s,t \in S$ y $s \neq -\bar{t}$

LEMA 1. $k_p(s) = (K_1/|s|^{m-1-2p})(1 + O(1/|s|)) \qquad p = 0,1,\ldots,m^*$

$\tilde{k}_p(s) = (K_2 . e^{-s(b-a)}/|s|^{n-1-2p})(1 + O(1/|s|)) \qquad p = 0,1,\ldots,n^*$

donde $K_1$ y $K_2$ son constantes.

DEMOSTRACION. En la demostración del Lema 1, capítulo IV, se ha visto que

$$\|U_s\| = \sqrt{(b-a)/2}\, |\beta_m|\, |s|^{m-1}(1 + O(1/|s|))$$

En consecuencia, si $s = i\alpha$:

$$k_p(s) = s^{2p}/\|U_s\| = \frac{(-1)^p\ 2p}{\sqrt{(b-a)/2}\,|\beta_m|\,\alpha^{m-1}}(1 + O(1/|s|)) =$$

$$= \frac{(-1)^p}{|\beta_m|}\sqrt{\frac{2}{b-a}}\,\frac{1}{\alpha^{m-1-2p}}(1 + O(1/|s|))$$

para $p = 0,1,\ldots,m^*$ ; con $m^* = [m/2] - 1$

Por otra parte, como

$$\frac{1}{A(s)} = \frac{U_s'(b)}{\tilde{P}(s^2)} = \frac{-U_s(b)}{\tilde{Q}(s^2)} \qquad \text{si} \quad s \in S\ ,$$

podemos escribir:

$$\frac{1}{A(s)} = \frac{U_s'(b) - sU_s(b)}{\tilde{P}(s^2) + s\tilde{Q}(s^2)} = \frac{U_s'(b) - sU_s(b)}{F_3(s)}$$

Pero, para $s = i\alpha$ , se tiene que

$$U_s(x) = u_s(x) + \frac{1}{\alpha}\int_a^x \operatorname{sen}\alpha(x-y)q(y)U_s(y)dy$$

$$u_s(x) = (F_2(s)e^{s(x-a)} - F_1(s)e^{-s(x-a)})/2s$$

de modo que

$$U'_s(b) - sU_s(b) = F_1(s)e^{-i\alpha(b-a)} + \int_a^b e^{-i\alpha(b-y)}q(y)U_s(y)dy$$

es decir que

$$\frac{1}{A(s)} = (F_1(s)/F_3(s))e^{-i\alpha(b-a)} + (1/F_3(s))\int_a^b e^{-i\alpha(b-y)}q(y)U_s(y)dy$$

Observando que $U_s(y) = O(|s|^{m-1})$ (Lema 2, capítulo II) y que

$$F_3(s) = \alpha_n s^n + (\text{términos de menor orden})$$

se concluye que el último sumando de la expresión de $1/A$ es $O(|s|^{m-1-n})$.

Como $F_1(s)/F_3(s) = (\beta_m/\alpha_n)s^{m-n}(1 + O(1/|s|))$, se deduce que

$$\frac{1}{A(s)}\|U_s\| = \frac{\operatorname{sgn}\beta_m}{\alpha_n}\sqrt{\frac{2}{b-a}}\, e^{-i\alpha(b-a)}\frac{s^{m-n}}{|s|^{m-1}}(1 + O(1/|s|)) + O(|s|^{-n}) =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}\beta_m}{\alpha_n}\sqrt{\frac{2}{b-a}}\,\frac{e^{-i\alpha(b-a)}i^{m-n}}{\alpha^{n-1}}(1 + O(1/\alpha))$$

Luego

$$\tilde{k}_p(s) = \frac{s^{2p}}{A(s)\|U_s\|} = \frac{\operatorname{sgn}\beta_m}{\alpha_n}\sqrt{\frac{2}{b-a}}\,\frac{(-1)^p i^{m-n}e^{-i\alpha(b-a)}}{\alpha^{n-1-2p}}(1 + O(1/\alpha))$$

lo que concluye la demostración.

COROLARIO. $k_p(s) = (K_1/|s|)(1 + O(1/|s|)) \qquad p = 0,1,\dots,m^*$

$\tilde{k}_q(s) = (K_2/|s|)(1 + O(1/|s|)) \qquad q = 0,1,\dots,n^*$

Ambas estimaciones pueden mejorarse por

$$(K_j/|s|^2)(1 + O(1/|s|))$$

en caso en que m ó n sean números impares.

DEMOSTRACION. Del Lema 1 se deduce que las "peores" estimaciones se obtienen cuando $p = m^*$ y $q = n^*$, y resultan ser:

$$(K_1/|s|^{n-1-2n^*})(1 + O(1/|s|)) \quad \text{y} \quad (K_2/|s|^{m-1-2m^*})(1 + O(1/|s|))$$

respectivamente.

Pero, si $p = m$ ó $n$ y $p^* = [p/2] - 1$, se tiene que

$$p-1-2p^* = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ es par} \\ 2 & \text{si } p \text{ es impar} \end{cases}$$

de donde se deduce la tesis.

TEOREMA 2. a) El operador A puede expresarse en la forma $A = D+L$, donde L es un operador de rango finito, definido por

$$L = - \sum_{p,q=0}^{n^*} \tilde{c}_{pq} \tilde{Y}_{pq} + \sum_{p,q=0}^{m^*} c_{pq} Y_{pq}$$

y D está definido por la matriz $(D_{st})$ donde $D_{ss} = 1 - L_{ss}$ es real si s es real o imaginario puro, $D_{s,-\bar{s}} = A_{s,-\bar{s}} - L_{s,-\bar{s}} = (V_{\bar{s}}, V_s) - L_{s,-\bar{s}}$ si $s=\sigma+i\tau$, $\sigma \neq 0$, $\tau \neq 0$. $D_{st} = 0$ en cualquier otro caso.

b) El conjunto $\{\tilde{k}_i, k_j,\ i = 0,1,\dots,n^*\ ;\ j = 0,1,\dots,m^*\}$ está constituído por sucesiones de $\ell_2$ y forman una familia linealmente independiente.

c) Para toda función f en $L^2(a,b)$ y cualquiera sea $i = 0,1,\dots,n^*$ ; $j = 0,1,\dots,m^*$ se tiene que $Nb(f)$ es ortogonal, en $\ell_2$, a $\tilde{\bar{w}}_i$ y $\bar{w}_j$, donde

$$\tilde{w}_i = \sum_{j=0}^{n^*} \tilde{c}_{ij} \tilde{k}_j \quad \text{y} \quad w_j = \sum_{i=0}^{m^*} c_{ji} k_i$$

d) $I - DN = 0 = I - ND$.

e) $c \in \ell_2$ es una sucesión de coeficientes de Orr si y sólo si se verifica que $Lc = 0$.

DEMOSTRACION. Las afirmaciones hechas en a) son consecuencias de las observaciones anteriores.

De las acotaciones ya obtenidas para $\|U_s\|$ y $A(s)$ (en capítulo IV) se deduce que

$$k_j(s) = O(1)/s \qquad j = 0,1,\dots,m^*$$

$$\tilde{k}_i(s) = O(1)/s \qquad i = 0,1,\dots,n^*$$

de modo que $k_j, \tilde{k}_i \in \ell_2$.

Supongamos que, para todo $s \in S$, se tiene que

$$\sum_{i=0}^{n^*} \lambda_i \tilde{k}_i(s) + \sum_{j=0}^{m^*} \mu_j k_j(s) = 0$$

Entonces

$$(\sum_{i=0}^{n^*} \lambda_i s^{2i}) + A(s).(\sum_{j=0}^{m^*} \mu_j s^{2j}) = 0 \quad \text{para todo } s \in S.$$

Luego, por el lema 6 del capítulo II, se deduce que

$$\lambda_i = 0 \quad , \quad \mu_j = 0 \qquad i = 0,\ldots,n^* \quad , \quad j = 0,\ldots,m^*$$

lo que demuestra b).

Sea ahora $f \in L^2(a,b)$ y $c = c(f)$ sus coeficientes de Orr, de modo que

$$c = N\mathit{b}(f) \qquad y \qquad Ac = \mathit{b}$$

Entonces $\qquad Dc + Lc = \mathit{b}$

esto es $\qquad (I-DN)\mathit{b} = Lc$

Luego

$$(I-DN) = -\sum_{i,j=0}^{n^*} \tilde{c}_{ij} \langle \tilde{k}_j, c \rangle \bar{\tilde{k}}_i + \sum_{i,j=0}^{m^*} c_{ij} \langle k_j, c \rangle \bar{k}_i$$

en la que $\langle k_j, c \rangle = \sum_{s \in S} k_j(s).c_s$ y $\langle \tilde{k}_j, c \rangle$ se define en forma análoga.

Entonces

$$(I-DN)\mathit{b} = -\sum_{i=0}^{n^*} \langle \tilde{w}_i, c \rangle \bar{\tilde{k}}_i + \sum_{i=0}^{m^*} \langle w_i, c \rangle \bar{k}_i$$

Resulta así que, mientras $\mathit{b}$ recorre el rango del operador A, $(I-DN)\mathit{b}$ varía en un subespacio de $\ell_2$, de dimensión finita. Pero $A = I-(-T)$, donde $-T$ es completamente continuo, de modo que $\ell_2 = R(A) \oplus \text{Núc}(A^*)$, es decir que $R(A) = \ell_2 \ominus \text{Núc}(I+T^*)$; luego, por el tercer teorema de Fredholm R(A) tiene codimensión finita.

De esto se deduce que I-DN transforma $\ell_2$ en un subespacio de dimensión finita. En consecuencia, todos los elementos de la *matriz diagonal* I-DN son nulos, excepto a lo sumo un número finito. En particular, es posible determinar $k > 0$ tal que $D_{tt}.n_{tt} = 1$ si $|t| > k$.

Se tiene así que, para $|s| > k$, $s \in S$:

$$- \sum_{i=0}^{n*} \langle \tilde{w}_i , c \rangle \overline{\tilde{k}}_i(s) + \sum_{i=0}^{m*} \langle w_i , c \rangle \overline{k}_i(s) = 0$$

En consecuencia

$$h_1(s)A(s) + h_2(s) = 0 \quad \text{si} \quad s \in S \quad y \quad |s| > k$$

donde

$$h_1(s) = \sum_{i=0}^{m*} \overline{\langle w_i , c \rangle} \; s^{2i}$$

$$h_2(s) = - \sum_{j=0}^{n*} \overline{\langle \tilde{w}_j , c \rangle} \; s^{2j}$$

Usando nuevamente el lema 6 del capítulo II se concluye que

$$\langle w_i , c \rangle = 0 \qquad i = 0,1,\dots,m*$$

$$\langle \tilde{w}_j , c \rangle = 0 \qquad j = 0,1,\dots,n*$$

de donde se deducen c) y d).

Además, si $c = Nb$, resulta que $Lc = 0$ y, recíprocamente, si $Lc = 0$, entonces $Ac = Dc = b(f)$ , donde $f = \sum c_s V_s$. Entonces

$$c = D^{-1} b(f) = Nb$$

es decir que c es una sucesión de coeficientes de Orr, lo que concluye la demostración.

OBSERVACION. Usando los vectores $w_i$ y $\tilde{w}_i$ , definidos en c), podemos expresar el operador L en la forma:

$$L = \sum_{p=0}^{m*} \overline{k}_p w_p - \sum_{q=0}^{n*} \overline{\tilde{k}}_q . \tilde{w}_q$$

DEFINICION. Si $c \in \ell_2$, llamaremos $\beta(c)$ al vector

$$\beta(c) = \begin{bmatrix} \langle w_o ,c \rangle \\ \langle w_1 ,c \rangle \\ \vdots \\ \langle w_{n*} ,c \rangle \\ \langle w_o ,c \rangle \\ \langle w_1 ,c \rangle \\ \vdots \\ \langle w_{m*} ,c \rangle \end{bmatrix}$$

y notaremos con K a la matriz cuadrada dada por

$$K = (-\beta(D^{-1}\bar{\tilde{k}}_o),\dots,-\beta(D^{-1}\bar{\tilde{k}}_{n*}),\beta(D^{-1}\bar{k}\ ),\dots,\beta(D^{-1}\bar{k}_{m*}))$$

PROPOSICION. Si $c = (c_s) \in \ell_2$ y $b = (b_s)$ son los productos de Fourier asociados a $f = \sum c_s V_s$, entonces $(I+K)\beta(c) = 0$ y $\beta(D^{-1}b) = 0$.

DEMOSTRACION. Hemos visto que

$$Lc = - \sum_{p=0}^{n*} \langle \tilde{w}_p ,c \rangle \ \bar{\tilde{k}}_p + \sum_{p=0}^{m*} \langle w_p ,c \rangle \ \bar{k}_p$$

Como $c = D^{-1}b - D^{-1}Lc$, se tiene que

$$c = D^{-1}b + \sum_{p=0}^{n*} (D^{-1}\bar{\tilde{k}}_p).\langle \tilde{w}_p ,c \rangle - \sum_{p=0}^{m*} (D^{-1}\bar{k}_p).\langle w_p ,c \rangle$$

De modo que

$$\langle \tilde{w}_r ,c \rangle = \langle \tilde{w}_r ,D^{-1}b \rangle + \sum_{p=0}^{n*} \langle \tilde{w}_r ,D^{-1}\bar{\tilde{k}}_p \rangle \langle \tilde{w}_p ,c \rangle - \sum_{p=0}^{m*} \langle \tilde{w}_r ,D^{-1}\bar{k}_p \rangle \langle w_p ,c \rangle$$

obteniéndose una expresión análoga para $\langle w_r ,c \rangle$.

Como $\langle \tilde{w}_r ,Nb \rangle = 0$ y $\langle w_r ,Nb \rangle = 0$, según el teorema 1, c), entonces $\beta(D^{-1}b) = 0$ ; además obtenemos que

$$\langle \tilde{w}_r ,c \rangle - \sum_{p=0}^{n*} \langle \tilde{w}_r ,D^{-1}\bar{\tilde{k}}_p \rangle \langle \tilde{w}_p ,c \rangle + \sum_{p=0}^{m*} \langle \tilde{w}_r ,D^{-1}\bar{k}_p \rangle \langle w_p ,c \rangle = 0 \qquad 0 \leqslant r \leqslant n*$$

$$\langle w_r ,c \rangle - \sum_{p=0}^{n*} \langle w_r ,D^{-1}\bar{\tilde{k}}_p \rangle \langle \tilde{w}_p ,c \rangle + \sum_{p=0}^{m*} \langle w_r ,D^{-1}\bar{k}_p \rangle \langle w_p ,c \rangle = 0 \qquad 0 \leqslant r \leqslant m*$$

Esto es: $(I+K)\beta(c) = 0$, lo que concluye la demostración.

PROPOSICION 2. $I+K = 0$ , esto es: $K = -I$

DEMOSTRACION. $\tilde{w}_i(s) = (\sum_{j=0}^{n^*} \tilde{c}_{ij} s^{2j})/A(s)\|U_s\| \qquad i = 0,1,\ldots,n^*$

$$w_i(s) = (\sum_{j=0}^{m^*} c_{ij} s^{2j})\|U_s\| \qquad j = 0,1,\ldots,m^*$$

Si fijamos $s \in S$ y tomamos $c = e_s = (\delta_{ts}) \in \ell_2$ tendremos que

$$\langle \tilde{w}_p, c \rangle = \tilde{w}_p(s) \quad y \quad \langle w_p, c \rangle = w_p(s)$$

de modo que

$$\beta(e_s) = \begin{pmatrix} \tilde{w}_o(s) \\ \vdots \\ \tilde{w}_{n^*}(s) \\ w_o(s) \\ \vdots \\ w_{m^*}(s) \end{pmatrix}$$

y llamando

$$h_s = (1/A(s)\|U_s\|) \begin{pmatrix} 1 \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{2n^*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (1/\|U_s\|) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{2m^*} \end{pmatrix}$$

podemos escribir que

$$\beta(e_s) = H.h_s$$

donde H es la matriz

$$H = \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Como $(I+K)\beta(e_s) = 0$, resulta que, para cada $s \in S$, será

$$(I+K).H.h_s = 0$$

Elijamos ahora $r = n^*+m^*+2$ valores $s$ en $S$ tales que los correspondientes vectores $\{h_s\}$ formen una familia linealmente independiente; lo que es equivalente a pedir que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ s_1^2 & s_2^2 & \cdots & s_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1^{2n^*} & s_2^{2n^*} & & s_r^{2n^*} \\ A(s_1) & A(s_2) & \cdots & A(s_r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A(s_1)s_1^{2m^*} & A(s_2)s_2^{2m^*} & \cdots & A(s_r)s_r^{2m^*} \end{vmatrix}$$

no se anule.

Esto puede lograrse de la siguiente manera: seleccionamos $s_1,\ldots,s_{n^*+1}$ tales que $s_i^2 \neq s_j^2$ si $i \neq j$, con lo que nos aseguramos que

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ s_1^2 & s_2^2 & \cdots & s_{n^*+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1^{2n^*} & s_2^{2n^*} & \cdots & s_{n^*+1}^{2n^*} \end{vmatrix} \neq 0$$

Queremos hallar ahora algún valor $s \in S$ tal que

$$D_1(s) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1^{2n^*} & \cdots & s_{n^*+1}^{2n^*} & s^{2n^*} \\ A(s_1) & \cdots & A(s_{n^*+1}) & A(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

Si desarrollamos $D_1(s)$ por la última columna, obtenemos que

$$D_1(s) = D.A(s) + h(s)$$

donde h(s) es un polinomio.

Como $D \neq 0$, el lema 6 del capítulo II nos asegura que existirá algún valor de s, que llamaremos $s_{n^*+2}$, tal que $D_1(s_{n^*+2}) \neq 0$.

El mismo argumento nos permite determinar $s_{k+1}$, si ya se han obtenido $s_1, s_2, \ldots, s_k$ $(n^*+1 \leqslant k < n^*+m^*+2)$.

Como consecuencia de esto resulta que $(I+K).H = 0$ ; pero

$$\det H = \det \tilde{C}.\det C \neq 0$$

según el lema 9 del capítulo II, de modo que debe ser $I+K = 0$, como se quería demostrar.

DEFINICION. Diremos que el conjunto de autofunciones $\{V_s\}$ tiene g grados de libertad si el conjunto $G$ de los coeficientes $c = (c_s)$ tales que $\sum c_s V_s = 0$ (en $L^2(a,b)$) es un subespacio de $\ell_2$, de dimensión g.

TEOREMA 3. a) $G$ es el núcleo del operador definido por la matriz A, es decir: el autoespacio del operador completamente continuo T, correspondiente al autovalor -1.

b) $g$ = dimensión de $G = [n/2] + [m/2]$.

DEMOSTRACION.a) Como $f = 0$ si y sólo si $b(f) = 0$, se tiene que $c \in G$ es equivalente a $Ac = 0$.

b) Si $c \in G$ y $\beta(c) = 0$ entonces $Lc = 0$ y $Ac = 0$, luego $Dc = 0$ y en consecuencia $c = 0$.

Es decir que la correspondencia $c \longrightarrow \beta(c)$ define una transformación inyectiva de $G$ en $C^{m^*+n^*+2}$. Veamos que también es suryectiva.

Sea

$$\beta = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{\beta}_{n^*} \\ \beta_o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{m^*} \end{pmatrix}$$

y definamos $$c = \sum_{p=0}^{n^*} \tilde{\beta}_p D^{-1}\bar{\tilde{k}}_p - \sum_{p=0}^{m^*} \beta_p D^{-1}\bar{k}_p$$

Entonces

$$\langle \tilde{w}_q , c \rangle = (-K\beta)_q = (I\beta)_q = \tilde{\beta}_q \quad \text{si} \quad q = 0,1,\dots,n^*$$

y análogamente

$$\langle w_p , c \rangle = \beta_p \quad \text{si} \quad p = 0,1,\dots,m^*$$

de modo que $c = -D^{-1}Lc$ ; esto es $Ac = 0$.

Luego $c \in G$ y $\beta = \beta(c)$, lo que demuestra que

$$\dim G = m^*+n^*+2 = [m/2] + [n/2]$$

lo que prueba la tesis.

Veremos ahora como afectan estos resultados la elección de distintos desarrollos para una función $f \in L^2(a,b)$.

TEOREMA 4. a) Si $c \in \ell_2$, entonces $\sum_{s\in S} (D^{-1}Lc)_s V_s(x) = 0$ en $L^2(a,b)$.

b) Sea $f \in L^2(a,b)$, $b = b(f)$ y $A_o,\dots,A_{n^*},B_o,\dots,B_{m^*}$ constantes arbitrarias, entonces

$$\sum_{s\in S} \{D^{-1}[\, b+\sum_{j=0}^{n^*} A_j(\sum_{i=0} \tilde{c}_{ij}\bar{\tilde{k}}_i\,)+\sum_{k=0}^{m^*} B_k(\sum_{i=0}^{m^*} c_{ik}\bar{k}_i)]\}_s V_s(x) = f(x)$$

en $L^2(a,b)$, y

$$G = D^{-1}([\bar{\tilde{k}}_j,\bar{k}_h]) = D^{-1}([\bar{\tilde{w}}_j,\bar{w}_h]) = D^{-1} \text{ (rango L)}$$

c) Sea $f \in L^2(a,b)$, $b = b(f)$. Dadas las constantes $\Phi_r$ y $\Psi_k$ ($r = 0,\dots,n^*$ , $k = 0,\dots,m^*$) es posible determinar los coeficientes $A_i$ y $B_j$ de manera única, tales que

$$\sum_{s\in S} \{D^{-1}[\,\dots]\}_s \tilde{w}_r(s) = \Phi_r \qquad r = 0,1,\dots,n^*$$

$$\sum_{s\in S} D^{-1}[\,\dots]\}_s w_r(s) = \Psi_r \qquad r = 0,1,\dots,m^*$$

DEMOSTRACION. a) Si $c \in \ell_2$ y llamamos $b = Ac$ y $f = \sum c_s V_s$ entonces también se tiene que $f = \sum (D^{-1}b)_s V_s$ (en $L^2(a,b)$).

Como $c = D^{-1}b - D^{-1}Lc$, resulta que $\sum_{s\in S} (D^{-1}Lc)_s V_s = 0$ en $L^2(a,b)$, como se quería demostrar.

b) Sea $c \in G$; entonces $c = -D^{-1}Lc$.

Como el rango de L está contenido en un espacio de dimensión $m^*+n^*+2$ (el generado por $\tilde{\bar{k}}_i$, $\bar{k}_j$) entonces debe coincidir con éste, pues: $\dim G = m^*+n^*+2$ y D es biunívoca.

Luego $G = D^{-1}([\tilde{\bar{k}}_i, \bar{k}_j]) = D^{-1}$ (rango de L).

Por otra parte, como $\langle \tilde{w}_r, D^{-1}b \rangle = 0$ y $\langle w_k, D^{-1}b \rangle = 0$, se tiene que

$$\sum_{s\in S} (D^{-1}b)_s \tilde{w}_r(s) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{s\in S} (D^{-1}b)_s w_r(s) = 0$$

En consecuencia

$$\sum_{s\in S} [D^{-1}(\ldots)]_s \tilde{w}_r(s) = \langle \tilde{w}_r, \sum_{j=0}^{n^*} A_j (\sum_{i=0}^{n^*} \tilde{c}_{ij} D^{-1}\tilde{\bar{k}}_i) + \sum_{q=0}^{m^*} B_q (\sum_{p=0}^{m^*} c_{pq} D^{-1}\bar{k}_p) \rangle =$$

$$= \sum_{j=0}^{n^*} A_j (\sum_{i=0}^{n^*} \tilde{c}_{ij} \langle \tilde{w}_r, D^{-1}\tilde{\bar{k}}_i \rangle ) + \sum_{q=0}^{m^*} B_q (\sum_{p=0}^{m^*} c_{pq} \langle \tilde{w}_r, D^{-1}\bar{k}_p \rangle)$$

Una expresión análoga se obtiene para

$$\sum_{s\in S} [D^{-1}(\ldots)]_s w_k(s)$$

Pero, de la proposición 2, sabemos ya que

$$\langle \tilde{w}_i, D^{-1}\tilde{\bar{k}}_j \rangle = \delta_{ij} \qquad 0 \leq i,j \leq n^*$$

$$\langle w_i, D^{-1}\bar{k}_j \rangle = -\delta_{ij} \qquad 0 \leq i,j \leq m^*$$

$$\left.\begin{array}{l} \langle \tilde{w}_i, D^{-1}\bar{k}_j \rangle = 0 \\ \langle w_j, D^{-1}\tilde{\bar{k}}_i \rangle = 0 \end{array}\right\} \quad 0 \leq i \leq n^* \;;\; 0 \leq j \leq m^*$$

Luego:

$$\sum_{s\in S} [D^{-1}(\ldots)]_s \tilde{w}_r(s) = \sum_{j=0}^{n^*} \tilde{c}_{rj} A_j \qquad r = 0,1,\ldots,n^*$$

y

$$\sum_{s\in S} [D^{-1}(\ldots)]_s w_k(s) = -\sum_{q=0}^{m^*} c_{kq} B_q \qquad k = 0,1,\ldots,m^*$$

Recordando que $\det \tilde{C} \neq 0$ y $\det C \neq 0$, se demuestra la afirmación c).

TEOREMA 5. Sea $c \in \ell_2$ y $a < a' < b' < b$.
La serie $\sum_{s \in S} (D^{-1}Lc)_s V_s(x)$ converge a 0 uniformemente sobre el intervalo $[a', b']$.

Si m es un número impar, entonces la convergencia es uniforme sobre todo el intervalo $[a, b']$.

Si n es un número impar, la convergencia es uniforme sobre todo el intervalo $[a', b]$.

DEMOSTRACION. Si $|s| > R$, con R suficientemente grande y $s \in S$, se tiene que $s = i\alpha$ ; en consecuencia

$$(D^{-1}Lc)_s = (NLc)_s = n_{ss}(Lc)_s$$

donde

$$(Lc)_s = \sum_t L_{st} c_t = \sum_t \{-\sum_{p,q=0}^{n*} \tilde{c}_{pq} \bar{\tilde{k}}_p(s) \tilde{k}_q(t) c_t + \sum_{p,q=0}^{m*} c_{pq} \bar{k}_p(s) k_q(t) c_t\} =$$

$$= \sum_t \{-\sum_{p=0}^{n*} \tilde{w}_p(t) c_t \bar{\tilde{k}}_p(s) + \sum_{p=0}^{m*} w_p(s) c_t \bar{k}_p(s)\} =$$

$$= -\sum_{p=0}^{n*} \bar{\tilde{k}}_p(s) \langle \tilde{w}_p, c \rangle + \sum_{p=0}^{m*} \bar{k}_p(s) \langle w_p, c \rangle$$

Por el Lema 1, resulta que

$$(1) \qquad (Lc)_s = -\bar{\tilde{k}}_{n*}(s) \langle \tilde{w}_{n*}, c \rangle + \bar{k}_{m*}(s) \langle w_{m*}, c \rangle + O(1/|s|^2) =$$

$$= \begin{cases} (k/|s|) + O(1/|s|^2) & \text{si al menos uno de los números m,n es par} \\ (k/|s|^2) + O(1/|s|^2) & \text{si ambos números son impares.} \end{cases}$$

Como $n_{ss} = 1 + O(1|s|)$, resulta que las estimaciones obtenidas para $(Lc)_s$ siguen valiendo para el coeficiente de la serie: $(NLc)_s$.

Por otra parte, para $s = i\alpha$ :

$$(2) \qquad V_s(x) = -\frac{Q(-\alpha^2)}{\|U_s\|} \cos \alpha(x-a) + \frac{P(-\alpha^2)}{\alpha \|U_s\|} \operatorname{sen} \alpha(x-a) +$$

$$+ (1/\alpha) \int_a^x \operatorname{sen} \alpha(x-y) q(y) V_s(y) dy$$

Como $$\left|\int_a^x \operatorname{sen}\alpha(x-y)q(y)V_s(y)dy\right| \leqslant \int_a^b |q(y)|\,|V_s(y)|dy \leqslant \|q\|_\infty \sqrt{b-a}$$

se tiene que

$$V_s(x) = -\frac{Q(-\alpha^2)}{\|U_s\|}\cos\alpha(x-a) + \frac{P(-\alpha^2)}{\alpha\|U_s\|}\operatorname{sen}\alpha(x-a) + O(1/\alpha)$$

Supongamos en primer lugar que m *es impar*; si recordamos que $m = \text{máx}(2p,2q+1)$ donde p y q son los grados de los polinomios P y Q, respectivamente, la hipótesis hecha antes significa que $m = 2q+1 > 2p$. Si expresamos a P y Q como

$$P(\lambda) = a_p\lambda^p +\ldots+ a_o$$

$$Q(\lambda) = b_q\lambda^q +\ldots+ b_o$$

tendremos que

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{Q(-\alpha^2)}{\|U_s\|} &= \sqrt{\frac{2}{b-a}}\ \frac{b_q(-1)^q\ \alpha^{2q}}{|\beta_m|\alpha^{m-1}}\ (1 + O(1/\alpha)) \\ \frac{P(-\alpha^2)}{\alpha\|U_s\|} &= \sqrt{\frac{2}{b-a}}\ \frac{a_p(-1)^p\ \alpha^{2p-1}}{|\beta_m|\alpha^{m-1}}\ (1 + O(1/\alpha)) \end{aligned}$$

Luego, bajo las condiciones indicadas, será:

$$(4)\qquad V_{i\alpha}(x) = K_1'\cos\alpha(x-a) + O(1/\alpha)$$

*Si* n *también es impar*, se concluye que

$$(D^{-1}Lc)_{i\alpha}V_{i\alpha}(x) = O(1/\alpha^2)$$

de donde resulta que *la serie es uniformemente convergente sobre todo el intervalo* [a,b] y como ya sabemos que converge a 0 en casi todo punto del mismo (Teorema 4 a) se demuestra inmediatamente la tesis.

*Si* n *fuese par*, como $\alpha = h_{(N-\frac{1}{2})} + O(1/N)$ y $h_{(N-\frac{1}{2})} = [N-\frac{1}{2} + \frac{1+(-1)^{n+m}}{4}]\ \frac{\pi}{b-a}$

se ve que resulta ser

$$\alpha = (N - \tfrac{1}{2})\ \frac{\pi}{b-a} + O(1/N)$$

$$V_{i\alpha}(x) = K_1' \cos(N - \tfrac{1}{2}) \frac{\pi}{b-a} (x-a) + O(1/N)$$

y $$e^{i\alpha(b-a)} = e^{ih_{(N-\frac{1}{2})}(b-a)} + O(1/N) = i(-1)^N + O(1/N)$$

Entonces usando nuevamente el lema 1

$$(D^{-1}Lc)_{i\alpha} V_{i\alpha}(x) = K_1'' (-1)^N \frac{\cos(N - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{(b-a)} (x-a)}{N - \frac{1}{2}} + O(1/N^2)$$

de donde se deduce la afirmación del enunciado, teniendo en cuenta que

$$\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^{N+1} \frac{\cos(N - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{b-a} (x-a)}{N - \frac{1}{2}}$$

es una serie de Fourier que converge uniformemente en $[a,b']$ , a la función constante $f(x) = \pi/2$.

Consideremos ahora el caso en que $m = 2p > 2q + 1$.

De (3) resulta que, en estas condiciones:

$$V_{i\alpha}(x) = K_2' \operatorname{sen} \alpha(x-a) + O(1/\alpha)$$

*Si* n *es impar*, se tiene nuevamente que $h_{(N-\frac{1}{2})} = (N - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{b-a} + O(1/N)$ y que

$$(D^{-1}Lc)_{i\alpha} = \frac{K}{N - \frac{1}{2}} (1 + O(1/N))$$

con K independiente de $\alpha$.

Entonces

$$(D^{-1}Lc)_s V_s(x) = K_2'' \frac{\operatorname{sen}(N - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{b-a} (x-a)}{N - \frac{1}{2}} + O(1/N^2)$$

y basta observar que

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(N - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{b-a} (x-a)}{N - \frac{1}{2}}$$

es una serie de Fourier que converge uniformemente a la función constante $f(x) = \pi/2$ en $[a',b]$.

Por último, consideraremos el caso en que m y n son números pares, con lo que resulta que

$$\alpha = N\pi/(b-a) + O(1/N)$$

y en consecuencia

$$(D^{-1}Lc)_{i\alpha} = (K/N)(1 + O(1/N))$$

con $K = K_1(-1)^N + K_2$

y $$V_{i\alpha}(x) = K_2'' \operatorname{sen}(N\pi/(b-a))(x-a) + O(1/N)$$

Es decir que

$$(D^{-1}Lc)_{i\alpha}V_{i\alpha}(x) = K_1^*(-1)^N \frac{\operatorname{sen} \frac{N\pi}{b-a}(x-a)}{N} + K_2^* \frac{\operatorname{sen} \frac{N\pi}{b-a}(x-a)}{N} + O(1/N^2)$$

De modo que el argumento usado en los casos anteriores puede ser aplicado nuevamente pues

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N} \operatorname{sen} \frac{N\pi}{b-a}(x-a) \quad \text{y} \quad \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \operatorname{sen} \frac{N\pi}{b-a}(x-a)$$

son series de Fourier que convergen uniformemente en $[a',b']$, lo que concluye la demostración.

En el caso en que $q(x) = 0$ sobre todo el intervalo $[a,b]$, es posible dar una interpretación más precisa al resultado obtenido en el teorema 4, ya que se tiene entonces que

$$U_s^{(2k)}(x) = s^{2k}U_s(x) \quad \text{y} \quad U_s^{(2k+1)}(x) = s^{2k}U_s'(x)$$

lo que nos permite expresar las series que allí aparecen, como sumas de ciertas combinaciones lineales de derivadas de las funciones $V_s$, como se desprende del siguiente teorema.

TEOREMA 6. Si $q(x) = 0$ sobre todo el intervalo $[a,b]$, entonces, para cada índice $i = 0,1,\dots,n^*$ ; $j = 0,1,\dots,m^*$, es posible determinar los coeficientes $\{b_{ih},\ h = 0,1,\dots,n-2\}$ ; $\{a_{jh},\ h = 0,1,\dots,m-2\}$ de modo que:

i) $$k_j(s) = \sum_{h=0}^{m-2} a_{jh}V_s^{(h)}(a)$$

ii) $$\tilde{k}_i(s) = \sum_{h=0}^{n-2} b_{ih}V_s^{(h)}(b)$$

y en consecuencia, se tiene que

$$\text{iii)}\quad w_p(s) = \sum_{r=0}^{m-2} \left(\sum_{j=0}^{m^*} c_{pj} a_{jr}\right) V_s^{(r)}(a)$$

$$\text{iv)}\quad \tilde{w}_q(s) = \sum_{r=0}^{n-2} \left(\sum_{j=0}^{n^*} \tilde{c}_{qj} b_{jr}\right) V_s^{(r)}(b)$$

$$\text{donde } V_s^{(h)}(x) = \frac{d^h V_s}{dx^h}(x)$$

DEMOSTRACION. Daremos la demostración de las expresiones ii) y iv) ya que i) y iii) se obtienen en forma análoga.

Como $\tilde{P}(\lambda)$ y $\tilde{Q}(\lambda)$ no tienen raíces comunes, se pueden encontrar polinomios $\tilde{Q}_k(\lambda)$ y $\tilde{P}_k(\lambda)$ de grados no mayores que q-1 y p-1, respectivamente, tales que

$$\tilde{P}_k(\lambda)\tilde{Q}(\lambda) + \tilde{Q}_k(\lambda)\tilde{P}(\lambda) = \lambda^k \qquad k = 0,1,\ldots,n^*$$

Si llamamos

$$\tilde{P}_k(\lambda) = -\sum_{r=0}^{\tilde{p}-1} b_{k,2r}\,\lambda^r \quad ; \quad \tilde{Q}_k(\lambda) = \sum_{r=0}^{\tilde{q}-1} b_{k,2r+1}\,\lambda^r$$

obtenemos que

$$s^{2k} = \sum_{r=0}^{\tilde{p}-1} b_{k,2r} s^{2r}(-\tilde{Q}(s^2)) + \sum_{r=0}^{\tilde{q}-1} b_{k,2r+1} s^{2r}\tilde{P}(s^2) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\tilde{p}-1} b_{k,2r} \tilde{U}_s^{(2r)}(b) + \sum_{r=0}^{\tilde{q}-1} b_{k,2r+1} \tilde{U}_s^{(2r+1)}(b)$$

La derivada de mayor orden que aparece en esta expresión es $U_s^{(R)}(b)$ con $R = \text{máx}(2\tilde{p}-2, 2\tilde{q}-1) = n-2$, de modo que agregando coeficientes nulos, si fuese necesario, podemos escribir

$$s^{2k} = \sum_{r=0}^{n-2} b_{k,r} \tilde{U}^{(r)}(b) = A(s)\|U_s\| \sum_{r=0}^{n-2} b_{k,r} V_s^{(r)}(b)$$

Luego $\tilde{k}_i(s) = \sum_{r=0}^{n-2} b_{i,r} V_s^{(r)}(b)$ y en consecuencia

$$\tilde{w}_q(s) = \sum_{r=0}^{n-2} \left(\sum_{j=0}^{n^*} \tilde{c}_{qj} b_{jr}\right) V_s^{(r)}(b)$$

como se quería demostrar.

CAPITULO VI. UNA APLICACION.

En este capítulo consideraremos en detalle el sistema que fue planteado en la introducción:

$$(1)\qquad \begin{cases} u''(x) - \lambda u(x) = 0 & \text{si} \quad 0 < x < \ell \\ \ell m\lambda u(0) - u'(0) = 0 & \\ \ell n\lambda u(\ell) + u'(\ell) = 0 & m,n \text{ constantes positivas.} \end{cases}$$

Se tiene entonces, en este caso:

$$(2)\qquad \begin{array}{lll} P(s^2) = \ell ms^2 & ; & Q(s^2) = -1 \\ \widetilde{P}(s^2) = \ell ns^2 & ; & \widetilde{Q}(s^2) = 1 \end{array}$$

y en consecuencia

$$(3)\qquad \begin{array}{lll} F_1(s) = \ell ms^2 - s & & F_3(s) = \ell ns^2 + s \\ V(s^2,t^2) = -\ell m & ; & V(s^2,t^2) = \ell n \end{array}$$

De modo que

$$(4)\qquad c_{oo} = -\ell m \quad ; \quad c_{oo} = \ell n$$

Para aplicar el teorema 6, capítulo V, observemos que si elegimos

$$P_o(\lambda) \equiv -1 \quad ; \quad \widetilde{P}_o(\lambda) \equiv 1 \quad ; \quad Q_o(\lambda) \equiv \widetilde{Q}_o(\lambda) \equiv 0$$

tenemos que

$$\widetilde{P}_o(\lambda)\widetilde{Q}(\lambda) + \widetilde{Q}_o(\lambda)\widetilde{P}(\lambda) \equiv 1$$

y

$$P_o(\lambda)Q(\lambda) + Q_o(\lambda)P(\lambda) \equiv 1$$

Si escribimos $P_o(\lambda) = -1$ ; $\widetilde{P}_o(\lambda) = -(-1)$, se tiene que:

$$(5)\qquad a_{oo} = 1 \quad ; \quad b_{oo} = -1$$

Usando la expresión obtenida en el capítulo II, podemos escribir

$$\delta(s) = \frac{e^{s\ell}}{2} s[\ell^2 mns^2 + \ell(m+n)s + 1] - \frac{e^{-s\ell}}{2} s[\ell^2 mns^2 - \ell(m+n)s + 1]$$

Esto es:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \delta(s) &= s^2.d(s) \\ d(s) &= (\ell^2 mns^2 + 1)\,\frac{\operatorname{senh} s\ell}{s} + \ell(m+n)\cosh s\ell \end{aligned}$$

Si s es un número real, $d(s) > 0$, de modo que el único cero real de $\delta(s)$ es $s = 0$ (cero de orden 2).

Para $s \neq 0$, y llamando $z = s\ell$ , se tiene que $d(s) = 0$ si y sólo si se verifica la condición:

$$(7)\qquad \operatorname{ctgh} z = -\frac{mnz^2+1}{(m+n)z}$$

Sea $z = \alpha+i\beta$ ($\alpha > 0$). Entonces

$$\operatorname{Re} \operatorname{ctgh} z = \frac{\operatorname{senh} 2\alpha}{2(\operatorname{senh}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta)} > 0$$

mientras que

$$\operatorname{Re} -\frac{mnz^2+1}{(m+n)z} = -\frac{m.n}{m+n} + \frac{1}{(m+n)(\alpha^2+\beta^2)}\quad \alpha < 0$$

De esto se deduce que los únicos ceros de la función $\delta(s)$ son de la forma $s = i\beta/\ell$ , donde $\beta$ es una solución de la ecuación

$$(8)\qquad \operatorname{tg} \beta = (m+n)\beta/(mn\beta^2-1)$$

Notaremos con S al conjunto $S = \{i\beta/\ell\}$ , donde $\beta$ es una raíz no negativa de la ecuación (8) y con $u_\beta(x)$ a la autofunción correspondiente al autovalor $s = i\beta/\ell$ ; es decir:

$$(9)\qquad \begin{aligned} u_o(x) &= 1 \\ u_\beta(x) &= \cos\frac{\beta x}{\ell} - m\ \operatorname{sen}\frac{\beta x}{\ell} \quad \text{si } \beta \neq 0 \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \|u_o\|^2 &= \ell \\ \|u_\beta\|^2 &= \frac{\ell}{4\beta}\,[\,2\beta(1+m^2\beta^2) + (1-m^2\beta^2)\operatorname{sen} 2\beta + 2m\beta(\cos 2\beta-1)] \end{aligned}$$

Notaremos con $v_\beta(x)$ a la función $v_\beta(x) = u_\beta(x)/\|u_\beta\|$.

Por el teorema 6, capítulo V, se tiene, usando (4) y (5):

$$(11)\qquad \begin{aligned} w_o(\beta) &= c_{oo}a_{oo}v_\beta(0) = -\ell m v_\beta(0) \\ \tilde{w}_o(\beta) &= \tilde{c}_{oo}b_{oo}v_\beta(\ell) = -\ell n v_\beta(\ell) \end{aligned}$$

y en consecuencia:

$$(12)\qquad \begin{aligned} \tilde{k}_o(\beta) &= (1/\tilde{c}_{oo}).\tilde{w}_o(\beta) = -v_\beta(\ell) \\ k_o(\beta) &= (1/c_{oo}).w_o(\beta) = v_\beta(0) \end{aligned}$$

Por el teorema 5, capítulo III y el teorema 4b, capítulo V, podemos asegurar que si f(x) es una función de variación acotada y continua en $[0,\ell]$, entonces admite un desarrollo de la forma

$$(13)\qquad \sum_\beta n_{\beta\beta}\left[\int_o^\ell f(t)v_\beta(t)dt + A_o\tilde{w}_o(\beta) + B_ow_o(\beta)\right] v_\beta(x)$$

que converge a f(x) en todo punto de $(0,\ell)$ y donde $A_o$ y $B_o$ son constantes arbitrarias.

Debe observarse que el sistema $\{v_\beta\}$ tiene dos grados de libertad (teorema 3, capítulo V)

La serie $\sum_\beta n_{\beta\beta}\left[\int_o^\ell f(t)v_\beta(t)dt\right] v_\beta(x)$ converge a 0 en los puntos $x = 0$ y $x = \ell$, según se deduce del teorema 4i, capítulo III.

Usando (12) se tiene que, en el punto $x = 0$, la serie (13) coincide con:

$$\sum_\beta n_{\beta\beta}\,[A_o\tilde{w}_o(\beta) + B_ow_o(\beta)]\; k_o(\beta) = A_o\langle D^{-1}\bar{k}_o,\tilde{w}_o\rangle + B_o\langle D^{-1}\bar{k}_o,w_o\rangle = -B_o$$

(La última igualdad es consecuencia de la proposición 2, capítulo V).

Análogamente, se tiene que, en el punto $x = \ell$, la serie coincide con:

$$\sum_\beta n_{\beta\beta}\,[A_o\tilde{w}_o(\beta)+B_ow_o(\beta)][-\tilde{k}_o(\beta)] = -A_o\langle D^{-1}\bar{\tilde{k}}_o,w_o\rangle - B_o\langle D^{-1}\bar{\tilde{k}}_o,w_o\rangle = -A_o$$

Es decir que, si elegimos $A_o = -f(\ell)$, $B_o = -f(0)$, tendremos que:

$$(14)\qquad f(x) = \sum_\beta \frac{n_{\beta\beta}}{\|u_\beta\|^2}\left[\int_o f(t)u_\beta(t)dt+f(\ell)\ell n u_\beta(\ell)+f(0)\ell m u_\beta(0)\right] u_\beta(x)$$

para todo $x \in [0,\ell]$ y en la que:

$$\frac{n_{oo}}{\|u_o\|^2} = (-2A(0))/\delta''(0) \quad \text{y} \quad \frac{n_{\beta\beta}}{\|u_\beta\|^2} = -2(i\beta/\ell)A(i\beta/\ell)/\delta'(i\beta/\ell)$$

La función A(z), definida en el capítulo II, toma los valores

$$A(s) = \tilde{u}_\beta(0)/u_\beta(0) \quad \text{si} \quad s = i\beta/\ell$$

donde

$$\tilde{u}_\beta(x) = n\beta \operatorname{sen} \beta(\ell-x)/\ell - \cos \beta(\ell-x)/\ell$$

de modo que

(15) $$A(0) = -1 \quad ; \quad A(i\beta/\ell) = n\beta \operatorname{sen} \beta - \cos \beta$$

Por otra parte, como $\delta(s) = s^2 d(s)$ , se tiene que

$$\delta'(s) = 2sd(s) + s^2 d'(s)$$

$$\delta''(s) = 2d(s) + 4sd'(s) + s^2 d''(s)$$

de modo que

$$\delta''(0) = 2\,\ell\,(m+n+1)$$

$$\delta'(i\beta/\ell) = i \operatorname{sen} \beta[1-\beta^2(m+n+3mn)] + i\beta \cos \beta\,[1-mn\beta^2+2(m+n)]$$

En consecuencia:

$$\frac{n_{oo}}{\|u_o\|^2} = 1/\ell(m+n+1)$$

$$\frac{n_{\beta\beta}}{\|u_\beta\|^2} = \frac{2}{\ell}\,\frac{\cos \beta - n\beta \operatorname{sen} \beta}{\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta}[1-\beta^2(m+n+3mn)]+\cos \beta\,[1-mn\beta^2+2(m+n)]}$$

CONCLUSION.

Una función f(x), de variación acotada y continua en $[0,\ell]$ , puede ser representada en cada punto de ese intervalo, como suma de una serie de autofunciones del problema (1), en la forma:

$$f(x) = \sum_\beta C_\beta\Big[\int_0^\ell f(t)u_\beta(t)dt+\ell nf(\ell)u_\beta(\ell)+\ell mf(0)u_\beta(0)\Big]\; u_\beta(x)$$

donde $$u_\beta(x) = \cos(\beta x/\ell) - m\beta \operatorname{sen}(\beta x/\ell)$$

$$C_\beta = \frac{2}{\ell}\,\frac{\cos \beta - n\beta \operatorname{sen} \beta}{\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta}[1-\beta^2(m+n+3mn)]+\cos \beta\,[1-mn\beta^2+2(m+n)]}$$

y $\beta$ varía sobre el conjunto de raíces no negativas de la ecuación trascendente

$$\operatorname{tg} \beta = (m+n)\beta/(mn\beta^2-1)$$

APENDICE I.

Sobre la existencia de solución única y su analiticidad respecto del parámetro, para el problema:

$$(') \qquad \begin{cases} y''(x) - (z+q(x))y(x) = 0 \quad \text{en} \quad (a,b) \\ y(a) = f(z) \\ y'(a) = g(z) \end{cases}$$

donde $q(z)$ es una función continua, a valores complejos, en el intervalo $[a,b]$ y $f$ y $g$ son funciones enteras de la variable compleja $z$.

Usando el método clásico de las aproximaciones sucesivas mostraremos que existe una única solución de ('), que es también una función entera de $z$, para cada valor de $x$ en $[a,b]$, continua en $(x,z) \in K$, para todo compacto $K$ contenido en $[a,b] \times C$.

En efecto, puede verificarse que una función $y(x,z)$ es solución del problema (') si y sólo si satisface la ecuación integral

$$y(x,z) = f(z) + g(z)(x-a) + \int_a^x\int_a^t (z+q(w))y(w,z)dw\, dt$$

que también puede escribirse

$$y(x,z) = f(z) + g(z)(x-a) + \int_a^x (x-t)(z+q(t))y(t,z)dt$$

Consideremos los valores de $z$ en el círculo definido por $|z| \leqslant R$ y llamemos

$$M(R) = \max_{|z|\leq R} f(z) \quad , \; N(R) = \max_{|z|\leq R} g(z) \quad , \; M_q = \max_{a\leq x\leq b} |q(x)|$$

Definamos, además, la sucesión de funciones $y_n(x,z)$ por

$$\begin{cases} y_o(x,z) = f(z) + g(z)(x-a) \\ y_k(x,z) = f(z) + g(z)(x-a) + \int_a^x (z+q(t))y_{k-1}(t,z)(x-t)dt \; ; \; k \geqslant 1 \end{cases}$$

Tenemos entonces que

$$|y_o(x,z)| \leqslant M(R) + N(R)(x-a) \leqslant M(R) + N(R)(b-a)$$

y en consecuencia:

$$|y_1(x,z)-y_o(x,z)| \leqslant (R+M_q)(M(R) + N(R)(b-a)).(x-a)^2/2$$

Teniendo en cuenta que si $k \geqslant 2$ se tiene que:

$$|y_k(x,z)-y_{k-1}(x,z)| \leqslant (R+M_q)(b-a) \int_a^x |y_{k-1}(t,z)-y_{k-2}(t,z)|dt$$

puede probarse por inducción que

$$|y_k(x,z)-y_{k-1}(x,z)| \leqslant (R+M_q)^k . \frac{(b-a)^{k-1}}{(k+1)!} (M(R)+N(R)(b-a))(x-a)^{k+1}$$

lo que demuestra que la serie

$$y_o(x,z) + \sum_{k=1}^{\infty} (y_k(x,z)-y_{k-1}(x,z))$$

converge uniformemente respecto de $z$ si $|z| \leqslant R$ y $x \in [a,b]$, a una función $y(x,z)$ que resulta entonces analítica en ese círculo, para $x$ fijo.

Además, se tiene que si $k \geqslant 2$

$$y'_k(x,z)-y'_{k-1}(x,z) = \int_a^x (z+q(t))(y_{k-1}(t,z)-y_{k-2}(t,z))dt$$

$$y''_k(x,z)-y''_{k-1}(x,z) = (z+q(x))(y_{k-1}(x,z)-y_{k-2}(x,z))$$

lo que permite demostrar que la serie que define a $y(x,z)$ puede derivarse (respecto de $x$) término a término dos veces, pues las series así obtenidas también convergen uniformemente respecto de $x$. [11:1.72 pág. 37].

Además

$$\begin{aligned} y''(x,z) &= \sum_{k=1}^{\infty} (y''_k(x,z)-y''_{k-1}(x,z)) = \\ &= (z+q(x)) [y_o(x,z) + \sum_{k=2}^{\infty} (y_{k-1}(x,z)-y_{k-2}(x,z))] = \\ &= (z+q(x))y(x,z) \end{aligned}$$

De modo que $y(x,z)$ es efectivamente solución de la ecuación diferencial planteada y se puede verificar que satisface las condiciones iniciales del problema (').

Veamos por último la cuestión de la unicidad. Supongamos que $y(x,z)$ e $y^*(x,z)$ son dos soluciones del problema ('). Entonces la función $u(x,z) = y(x,z)-y^*(x,z)$ resulta ser solución de

$$u'' - (z+q(x))u = 0 \quad \text{en} \quad (a,b)$$

$$u(a) = u'(a) = 0$$

Como es bien conocido, será $u \equiv 0$, lo que concluye la demostración.

La función $y(x,z)$ satisface además la siguiente relación:

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^i}{\partial x^i}\, y(x,z) = \frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\, y(x,z)$$

cuando $i = 1,2$ ; $k = 1,2,3,\ldots$

Esto puede probarse teniendo en cuenta que cada una de las funciones $y_k(x,z)$ la verifica y que las derivaciones indicadas pueden efectuarse término a término sobre la serie que define a $y(x,z)$, ya que las series que así se obtengan serán uniformemente convergentes en la región definida por $a \leqslant x \leqslant b$; $|z| \leqslant R$. Esta última afirmación es consecuencia de las estimaciones que obtendremos a continuación.

De la definición de la función $y_k(x,z)$ se desprende que

$$\frac{\partial^j y_o}{\partial z^j} = f^{(j)}(z) + g^{(j)}(z)\ (x-a)$$

$$\frac{\partial^j y_k}{\partial z^j} = f^{(j)}(z) + g^{(j)}(z)\ (x-a) + \int_a^x (x-t)(z+q(t))\ \frac{\partial^j y_{k-1}}{\partial z^j}\, dt\ +$$

$$+ j\int_a^x \frac{\partial^{j-1} y_{k-1}}{\partial z^{j-1}}\ (x-t)dt$$

Si llamamos $M_j(R) = \max\limits_{0\leq i\leq j}\ \max\limits_{|z|\leq R} |f^{(i)}(z)|$

$$N_j(R) = \max_{0\leq i\leq j}\ \max_{|z|\leq R} |g^{(i)}(z)|$$

$$M_q = \max_{a\leq x\leq b} |q(x)|$$

se puede mostrar por inducción que, para $k \geqslant 2$, se tiene que:

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial z^j}\ (y_k - y_{k-1})\right| \leqslant (R+M_q+j)^k\ \frac{(b-a)^{k-1}}{(k+1)!}\ (M_j(R)+N_j(R).(b-a)).(x-a)^{k+1}$$

De aquí se deduce la convergencia uniforme de la serie que se obtiene derivando término a término respecto de z, la serie que define a $y(x,z)$. La propiedad correspondiente a las series de $y'(x,z)$ e $y''(x,z)$ se obtienen de las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial^j}{\partial z^j}\frac{\partial y_k}{\partial x} - \frac{\partial^j}{\partial z^j}\frac{\partial y_{k-1}}{\partial x} = \int_a^x (z+q(t))\frac{\partial^j}{\partial z^j}(y_{k-1}-y_{k-2})\,dt + j\int_a^x \frac{\partial^{j-1}}{\partial z^{j-1}}(y_{k-1}-y_{k-2})\,dt$$

$$\frac{\partial^j}{\partial z^j}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(y_k-y_{k-1}) = (z+q(x))\frac{\partial^j}{\partial z^j}(y_{k-1}-y_{k-2}) + j\,\frac{\partial^{j-1}}{\partial z^{j-1}}(y_{k-1}-y_{k-2})$$

CQD.

APENDICE II.

Una condición necesaria y suficiente para que dos polinomios tengan una raíz común.

Nos proponemos probar el siguiente resultado:

"Si P y Q son polinomios de grado positivos, con coeficientes complejos, entonces tienen una raíz común si y sólo si det C = 0 , donde $C = (c_{pq})$ y $c_{pq}$ es el coeficiente de $x^p y^q$ en el polinomio simétrico

$V(x,y) = (P(x)Q(y)-P(y)Q(x))/(x-y)$".

Para demostrarlo, seguiremos una técnica análoga a la de B.L. Van der Waerden (Algebra, Vol. I) cuando resuelve este problema en términos del resultante R, de los polinomios P y Q, que es un determinante de orden gr P + gr Q, mientras que det C es un determinante de orden n = máx(gr P, gr Q).

Más aún, veremos que det C = k.R, donde k es una constante que calcularemos.

LEMA 1. Sean P y Q dos polinomios en una variable, con coeficientes complejos, de grados positivos; V(x,y) el polinomio simétrico definido por:
$V(x,y) = (P(x)Q(y)-P(y)Q(x))/(x-y)$.

Entonces P y Q tienen al menos una raíz común si y sólo si vale la siguiente propiedad:

(H) "Existe un número complejo $x_o$ tal que $V(x_o,y) = 0$ para todo número complejo y".

DEMOSTRACION. Si $x_o$ fuese una raíz común, se tendría que $P(x_o) = Q(x_o) = 0$ y en consecuencia $V(x_o,y) = 0$ para todo número complejo y.

Recíprocamente, si se verificase la condición (H), se tendría que
$P(x_o)Q(y) \equiv P(y)Q(x_o)$.

Si $P(x_o) = Q(x_o) = 0$, entonces $x_o$ sería una raíz común a P y Q.

Si uno de ellos no fuese nulo en $x_o$, por ejemplo $P(x_o) \neq 0$, se tendría que
$Q(y) \equiv (Q(x_o)/P(x_o)).P(y)$.

Luego , o $Q \equiv 0$, o bien *todas* sus raíces coinciden con las de P, lo que concluye la demostración.

Consecuencia inmediata de esta demostración es el siguiente resultado:

COROLARIO 1. a) $P = \text{cte}.Q$ ó $P(x_o) = Q(x_o) = 0$ , si P y Q tienen una raíz común.

b) $P = \text{cte}.Q$ si y sólo si $V \equiv 0$.

COROLARIO 2. P y Q tienen una raíz común si y sólo si

$$P(x)Q(y)-P(y)Q(x) = (x-y)(x-x_o)W(x,y)$$

donde W es un polinomio.

DEMOSTRACION. Sea $V(x_o,y) \equiv 0$. Aplicando la regla de Ruffini, podríamos escribir: $V(x,y) = (x-x_o)W(x,y) + R(y)$. Pero entonces: $R(y) \equiv 0$, de modo que

$$V(x,y) = (x-x_o)W(x,y)$$

y recíprocamente. CQD.

Escribamos
$$P(x) = a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \qquad (a_n \neq 0)$$
$$Q(x) = b_o+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx \qquad (b_m \neq 0)$$

y supongamos, para fijar ideas, que $n \geqslant m$.

Si llamamos $F(x,y) = V(x,y)(x-y)$, tendremos que

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_ib_j(x^iy^j-x^jy^i) = \sum_{i,j=0}^{n} d_{ij}x^iy^j$$

donde $d_{ii} = 0$ , $d_{ij} = -d_{ji}$ , $d_{ij} = a_ib_j-a_jb_i$ con $b_j = 0$ si $j > m$.

Si $i > j$:

$$x^iy^j-x^jy^i = (x-y)(x^{i-1}y^j+x^{i-2}y^{j+1}+\ldots+x^{j+1}y^{i-2}+x^jy^{i-1})$$

Si $i < j$, se debe intercambiar x con y e i con j en la expresión a la derecha para obtener el mismo miembro izquierdo.

En consecuencia, podemos escribir

$$V(x,y) = \sum_{p,q=0}^{n-1} c_{p,q}x^py^q \quad ; \quad c_{p,q} = c_{q,p} \quad (0 \leqslant p,q \leqslant n-1)$$

e indicando con C la matriz $C = (c_{p,q})$ resulta que

$$(\mathrm{I}) \qquad V(x,y) = (1,y,y^2,\dots,y^{n-1}).C.\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{n-1} \end{pmatrix}$$

LEMA 2. Si vale la hipótesis (H), entonces det C = 0.

DEMOSTRACION. Si vale la hipótesis (H) se tiene que, por la expresión (I)

$$C.\begin{pmatrix} 1 \\ x_o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_o^{n-1} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

De modo que el sistema de ecuaciones

$$C.\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

admite una solución no trivial, lo que demuestra que det C = 0.

De la definición de F(x,y) se deduce que

$$F(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} d_{i,j} x^i y^j = \sum_{p,q=0}^{n-1} c_{p,q} (x^{p+1}y^q - x^p y^{q+1}) =$$

$$= \sum_{p,q=0}^{n-1} c_{p,q} x^{p+1} y^q - \sum_{p,q=0}^{n-1} c_{p,q} x^p y^{q+1}$$

de modo que

$$\begin{cases} d_{o,k} = -c_{o,k-1} & k = 1,\dots,n \\ d_{i,j} = c_{i-1,j} - c_{i,j-1} & 1 \leqslant i,j \leqslant n-1 \\ d_{k,n} = -c_{k,n-1} & k = 0,1,\dots,n-1 \\ d_{i,i} = 0 \;;\; d_{i,j} = -d_{j,i} & \end{cases}$$

De estas expresiones se deduce que

$$\begin{cases} c_{o,k} = -d_{o,k+1} & k = 0,1,\ldots,n-1 \\ c_{j,k-1} = c_{j-1,k} - d_{j,k} & 1 \leqslant j,k \leqslant n-1 \\ c_{j,n-1} = -d_{j,n} & j = 0,1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

CONVENCION. $b_j = 0$ si $j < 0$ ó $j > m$.

Esto nos permite asegurar que, si $m < n$:

$$\begin{cases} c_{o,k} = a_{k+1}b_o & \text{si } m \leqslant k \leqslant n-1 \\ c_{j,k-1} = c_{j-1,k} + a_k b_j & \text{si } 1 \leqslant j < n-1 \ ; \ m+1 \leqslant k \leqslant n-1 \\ c_{j,n-1} = a_n b_j & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant n-1 \end{cases}$$

DEFINICION. Llamaremos $\vec{c}_q$ $(q = 0,1,\ldots,n-1)$ a la $(q+1)$-ésima columna de la matriz C.

En el caso $n > m$, indicaremos con $\vec{v}_q$ $(m \leqslant q \leqslant n-1)$ el vector columna definido por

$$\vec{v}_q = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_o \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\0\end{matrix}}\right\} n-1-q \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}b\\b\\ \vdots\\b\end{matrix}}\right\} m+1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\0\end{matrix}}\right\} q-m \end{matrix}$$

LEMA 3. Si $n > m$ y $m \leqslant q \leqslant n-1$, entonces

i) $\vec{c}_q = a_{q+1}\vec{v}_{n-1} + a_{q+2}\vec{v}_{n-2} + \ldots + a_n\vec{v}_q$

ii) el determinante de C coincide con el de la matriz C' que se obtiene de C reemplazando sus últimas n-m columnas por $\vec{c}'_q = a_n\vec{v}_q$.

DEMOSTRACION. La expresión i) es equivalente a

$$(*) \qquad c_{j,q} = \sum_{k=1}^{n-q} a_{q+k}b_{j-k+1} \qquad j = 0,1,\ldots,n-1$$

Estas fórmulas son evidentemente ciertas en el caso $q = n-1$, en que se reducen a $c_{j,n-1} = a_n b_j$ y que ya han sido obtenidas en (II).

Supongamos que sean válidas también para $q = r, r+1, \ldots, n-1$ $(m \leq r \leq n-1)$ y probémoslas para $q = r-1$, es decir, demostremos que

$$c_{j,r-1} = \sum_{k=1}^{n-r+1} a_{r-1+k} b_{j-k+1} \qquad j = 0,1,\ldots,n-1$$

Si $j = 0$, se debe probar que

$$c_{o,r-1} = \sum_{k=1}^{n-r+1} a_{r-1+k} b_{-k+1} = a_r b_o$$

lo que es exacto, según (II).

Si $1 \leq j \leq n-1$ se obtiene, también de (II), que

$$c_{j,r-1} = c_{j-1,r} + a_r b_j = \sum_{k=1}^{n-r} a_{r+k} b_{j-k} + a_r b_j =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r} a_{r+k} b_{j-k} = \sum_{k=1}^{n-r+1} a_{r-1+k} b_{j-k+1}$$

como se quería demostrar.

De ellas se deduce que cada uno de los vectores $\vec{v}_q$ $(m \leq q \leq n-1)$ puede ser expresado como combinación lineal de los vectores $\vec{c}_q, \vec{c}_{q+1}, \ldots, \vec{c}_{n-1}$ y precisamente:

$$\vec{c}_q = \vec{c}\,'_q + (\text{combinación lineal de los vectores } \vec{c}_{q+1}, \ldots, \vec{c}_{n-1})$$

lo que permite demostrar la afirmación ii)

LEMA 4. $\det C = a_n^{n-m} . \Phi(a,b)$ ; donde $\Phi(a,b)$ es un polinomio en las variables $a = (a_o, a_1, \ldots, a_n)$ $b = (b_o, b_1, \ldots, b_m)$ ; homogéneo de grado m en a (para b fijo) y homogéneo de grado n en b (si se fija a).

DEMOSTRACION. Si $n > m$, se tiene que $a_n$ es factor común de todos los elementos de las últimas n-m columnas de la matriz C', definida en el lema 3 (ii), de modo que

$$\det C = a_n^{n-m} . \det C'' \qquad \text{donde}$$

$$
C'' = \begin{pmatrix}
c_{o,o} & \cdots & c_{o,m-1} & 0 & \cdots & 0 & b_o \\
\vdots & & & 0 & & b_o & b_1 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & b_m \\
\vdots & & & & & b_m & 0 \\
\vdots & & & & & 0 & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
c_{n-1,o} & \cdots & c_{n-1,m-1} & b_m & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

(La disposición de las últimas n-m columnas es análoga a la indicada para la matriz C', del Lema 3).

Como los coeficientes $d_{ij}$ pueden pensarse como polinomios en las variables a,b y los coeficientes $c_{pq}$ son combinaciones lineales de los $d_{ij}$, resulta que

$$c_{p,q} = f_{p,q}(a,b) \quad \text{donde } f_{p,q} \text{ es un polinomio.}$$

Se tiene además que $f_{p,q}(\lambda a,\mu b) = \lambda\mu f_{p,q}(a,b)$; es decir que cada polinomio $f_{p,q}$ es homogéneo de grado 1 en cada una de las variables a y b.

En consecuencia $\quad \det C'' = \Phi(a,b)$

donde $\Phi$ es un polinomio tal que

$$\Phi(\lambda a,b) = \lambda^m.\Phi(a,b)$$

$$\text{y} \quad \Phi(a,\mu b) = \mu^n.\Phi(a,b)$$

En el caso n = m, vale este mismo argumento, aplicando directamente a det C, con lo que se completa la demostración.

Si escribimos los polinomios P y Q en la forma

$$P(x) = a_n(x-u_1)(x-u_2)\dots(x-u_n)$$

$$Q(x) = b_m(x-v_1)(x-v_2)\dots(x-v_m)$$

los cocientes $a_k/a_n$ y $b_j/b_m$ resultan ser polinomios homogéneos (funciones simétricas elementales) de grados n-k y m-j en las variables $u = (u_1,\dots,u_n)$ y

$v = (v_1,\dots,v_m)$ respectivamente, de modo que

$$\Phi(a,b) = a_n^m\, b_m^n\, h(u,v) \quad \text{(h es también un polinomio)}$$

Si reemplazamos $u_i$ por $v_j$ en la expresión factoreada de P, obtenemos un polinomio $P_1$ que tiene una raíz común con Q; luego, por el lema 2, el determinante de la matriz C correspondiente, se anula.

Esto nos muestra que $h(u,v)$ tiene la siguiente propiedad:

"Si reemplazamos una de las variables $u_i$ por $v_j$, h se anula".

Luego $(u_i-v_j)$ divide a h y en consecuencia, también el polinomio

$$R^*(u,v) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (u_i-v_j)$$

divide a $h(u,v)$ y se obtiene que

$$\Phi(a,b) = k(u,v).a_n^m.b_m^n.\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (u_i-v_j)$$

donde $k(u,v)$ es un polinomio simétrico en u para v fijo y simétrico en v para u fijo, pues las permutaciones de u (respectivamente v) no cambian P (respectivamente Q), entonces, no cambian h.

Usando el teorema fundamental de las funciones simétricas, podemos expresar a k como una función $\alpha = \alpha(a',b')$ donde $\alpha$ es un polinomio en las variables $a' = a/a_n$ y $b' = b/b_m$. En efecto:

$$k(u,v) = K(\sigma(u),v) = \alpha(\sigma(u),\sigma(v)) = \alpha(a',b')$$

Si $\alpha$ es de grado s en $a/a_n$ y de grado t en $b/b_m$, podemos escribir

$$\alpha(a/a_n,b/b_m) = \beta(a,b)/a_n^s\, b_m^t$$

donde $\beta(a,b)$ es un polinomio homogéneo de grado s en a y homogéneo de grado t en b.

En resumen, se tiene que

$$\Phi(a,b) = \frac{\beta(a,b)}{a_n^s\, b_m^t} R(a,b)$$

donde $R(a,b)$ es el resultante de los polinomios P y Q.

TEOREMA 1. La hipótesis (H) vale si y sólo si $\det C = 0$

DEMOSTRACION. De la expresión $a_n^s\ b_m^t\ \Phi(a,b) = \beta(a,b)\ R(a,b)$ se deduce que debe ser $s = 0$ y $t = 0$, pues ni $a_n$ ni $b_m$ dividen a $\beta$ ó a $R$.

En consecuencia, será $\beta(a,b) = \beta_o$ (constante) y

$$\det C = \beta_o\ a_n^{n-m}\ R(a,b)$$

de donde se concluye la tesis.

TEOREMA 2. $\det C = (-1)^{[n/2]}\ a_n^{n-m}\ R(a,b)$ , donde $R(a,b)$ es el resultante de los polinomios $P$ y $Q$.

DEMOSTRACION. El coeficiente de $a_n^m\ b_o^n$ en $R(a,b)$ es 1, como ya es conocido; de modo que el coeficiente de $a_n^n\ b_o^n$ en el segundo miembro de la expresión del $\det C$ obtenida en el teorema anterior, es $\beta_o$.

Si pudiésemos averiguar el coeficiente del término indicado, en $\det C$, podríamos determinar el valor de $\beta_o$.

Para ello necesitamos conocer los coeficientes $c_{p,q}$ en función de $a$ y $b$, ó, más precisamente, saber en cuales de dichos coeficientes interviene $b_o$. Este aparece en $d_{i,j}$ $(i < j)$ si y sólo si $i = 0$, y se tiene que

$$d_{o,k} = a_o b_k - a_k b_o \qquad k = 1,2,\dots,n$$

Poniendo nuevamente a $c_{p,q}$ en función de $d_{i,j}$ tenemos que

$$c_{o,k} = -\ d_{o,k+1} \qquad k = 0,1,\dots,n-1$$

$$c_{i,j} = c_{i-1,j+1} - c_{i,j+1} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \quad ; \quad 0 \leqslant j \leqslant n-2$$

de modo que $b_o$ aparece en $c_{p,q}$ si y sólo si $p+q \leqslant n-1$. En efecto, de:

$$c_{i,j} = c_{i-1,j+1} - d_{i,j+1} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \quad ; \quad 0 \leqslant j \leqslant n-2$$

se deduce que

$$c_{i,j} = c_{i-k,j+k} - d_{i,j+1} - \dots - d_{i-k+1,j+k} \qquad (k=1,2,\dots \quad 0 \leqslant i-k \ ;\ j+k \leqslant n-1)$$

Entonces, si $j+1 \geqslant n$, con $k = n-1-j$ (máximo permitido) son tales que $i-k > 0$, resulta que:

$$c_{i,j} = c_{i-k,n-1}^{-} \cdots = -d_{i-k,n}^{-} \cdots$$

Como los índices de los números $d_{r,s}$ son distintos de 0, se deduce que $c_{i,j}$ *no contiene* $b_o$.

Si $j+1 \leqslant n-1$ y $k = i$, entonces

$$c_{i,j} = c_{o,j+1}^{-} \cdots = -d_{o,j+i+1}^{-} \cdots = a_{i+j+1}\, b_o + (\text{términos que no contienen } b_o)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{o,o} & c_{o,1} & \cdots & c_{o,n-1} \\ \vdots & & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ c_{n-1,o} & \cdots & \cdots & \cdot \end{pmatrix}$$

Entonces, de la observación anterior se deduce que, para ubicar el término en que aparece la mayor potencia de $b_o$, esto es $b_o^n$, será suficiente considerar so_ lo el producto de los elementos

$$D = c_{o,n-1} \cdot c_{1,n-2} \cdots c_{n-1,o} = \prod_{i=0}^{n-1} c_{i,n-1-i}$$

El signo dependerá del orden de la permutación

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo signo es $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{[n/2]}$

Si $i+j = n-1$ : $c_{i,j} = a_n\, b_o + (\text{términos que no contienen } b_o)$

de modo que

$$D = (a_n\, b_o)^n + \text{polinomio de grado } (n-1) \text{ en } b_o.$$

Se obtiene, en consecuencia, que

$$\beta_o = (-1)^{[n/2]}$$

como se quería demostrar.

# BIBLIOGRAFIA


[1] BENEDEK, A., GÜICHAL, E. and PANZONE, R.: On certain non harmonic Fourier expansions as eigenfunction expansions of non regular Sturm-Liouville systems, NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS, N°4. INSTITUTO DE MATEMATICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR. (1974).

[2] FRIEDMAN, B.: Principles and techniques of applied mathematics, WILEY, Ch. 4, pp. 205-207.

[3] HILLE, E.: Note on the preceding paper by Mr. Peek, ANNALS OF MATH. 2nd. SERIES, VOL. 30, pp. 270-271 (1929).

[4] LANGER, R.E.: A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid, TÔHOKU MATH. J., 35(1932) pp. 260-275.

[5] NAIMARK, M.A.: Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint differential operator of the second order on a semi-axis, AMERICAN MATH. SOCIETY TRANSLATIONS. SERIES 2. VOL.16 (1960), pp. 103-193.

[6] PEEK, R.L.: Solution to a problem in diffusion employing a non-orthogonal sine series, ANNALS OF MATH. 2nd. SERIES, VOL. 30 (1929) pp. 265-269.

[7] PRESCOTT, J.: Applied elasticity, LONGMANS, GREEN AND CO., (1924), DOVER (1961), pp. 263-267.

[8] TAMARKIN, J.: (Petrograd Thesis (1917)), MATH. ZEITSCHRIFT, VOL. 27 (1927) pp. 1-54.

[9] TIMOSHENKO, S. and YOUNG, D.H.: Vibration problems in engineering, VAN NOSTRAND (1955).

[10] TITCHMARSH, E.C.: Eigenfunction expansions associated with second order differential equations, CLARENDON PRESS, OXFORD (1946).

[11] TITCHMARSH, E.C.: The theory of functions, OXFORD UNIVERSITY PRESS (1939).

[12] VAN DER WAERDEN, B.L.: Algebra, VOL. I, FREDERICK UNGAR PUB. CO., NEW YORK (1970).

[13] WALTER, J.: Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions, MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT, BAND 133. HEFT 4 (1973) pp. 301-312.

[14] BÔCHER, M.: Introduction to higher algebra, MACMILLAN CO. (1952) pp. 238-239.

[15] LANGER, R.E.: The expansion problem in the theory of ordinary linear differential systems. TRANS. AMER. MATH. SOC. VOL. 31 (1929) pp. 868-906.

[16] LANGER, R.E.: A theory for ordinary differential boundary problems of the second order and of the highly irregular type., TRANS. AMER. MATH. SOC. VOL. 53, NUMBER 2, MARCH, 1943, pp. 292-361.

[17] RUSSAKOVSKII, E.M.: Operator treatment of boundary problems with spectral parameters entering via polynomials in the boundary conditions. FUNCT. ANALYSIS AND ITS APPL., JUNE, 1976 pp. 238-239.