ISSN 0325-8963

NOTAS DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

1

ANGEL R. LAROTONDA

NOTAS SOBRE VARIEDADES DIFERENCIABLES

1980
INMABB - CONICET
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA — ARGENTINA

NOTAS DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA (*)

N° 1

NOTAS SOBRE VARIEDADES DIFERENCIABLES

Angel R. Larotonda

INMABB - CONICET

1980

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

Estas notas resumen un curso sobre variedades diferenciables dictado en la Universidad Nacional del Sur durante el segundo cuatrimestre de 1979. La exposición sigue las ideas del libro de Lang [15], omitiendo el uso innecesario de coordenadas y poniendo énfasis en el carácter intrínseco de los objetos estudiados.

Lógicamente lo reducido del tiempo impidió extenderse sobre otros temas de interés - en particular aplicaciones a la geometría diferencial clásica - pero de cualquier manera el texto resulta autocontenido y las referencias pueden completar el mismo.

Corresponde señalar la entusiasta colaboración de todos los participantes del curso - especialmente el Ing. Hernán Cendra - en la redacción de estas notas; por consiguiente sea para el autor la responsabilidad por los errores de las mismas, y para aquellos todo el mérito.

Angel R. Larotonda
Bahía Blanca, diciembre de 1979
Buenos Aires, enero de 1980

CAPITULO I

§ 1 - APLICACIONES LINEALES.

Sean E,F espacios normados sobre el cuerpo $\mathbf{K}$ (en todo lo que sigue $\mathbf{K}$ será el cuerpo $\mathbf{R}$ de los reales ó bien el cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos); indicaremos con $\mathcal{L}(E,F)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales continuas $T: E \longrightarrow F$. El conjunto $\mathcal{L}(E,F)$ es trivialmente un $\mathbf{K}$-espacio vectorial definiendo:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \quad (x \in E)$$
$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x) \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathbf{K} \quad (x \in E)$$

La caracterización de los elementos de $\mathcal{L}(E,F)$ se hace mediante la:

PROPOSICION 1.1. Sea $T: E \longrightarrow F$ una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son entonces equivalentes:

a) T es continua.

b) T es continua en 0.

c) T está acotada en la bola unitaria $|x| \leqslant 1$ (o sea: hay un $M \geqslant 0$ tal que $|T(x)| \leqslant M$ para todo x con $|x| \leqslant 1$).

d) T es uniformemente continua.

DEMOSTRACION. a) $\Rightarrow$ b) y d) $\Rightarrow$ a) son triviales; b) $\Rightarrow$ c) Si B es la bola unitaria de F, $T^{-1}(B)$ es entorno de 0, así que hay un $r > 0$ tal que $|x| < r \Rightarrow |T(x)| \leqslant 1$. En consecuencia (cambiando x por r.x) resulta que $|x| < 1 \Rightarrow |T(x)| \leqslant 1/r = M$.

Para c) $\Rightarrow$ d) notemos primero que vale $|T(x)| \leqslant M.|x|$ para todo $x \in E$ (si $x=0$ es evidente; si $x \neq 0$ considerar $y = x/|x|$). Por lo tanto

$$|T(x) - T(a)| = |T(x-a)| \leqslant M.|x-a|$$

y de aquí la continuidad uniforme es inmediata (dado $\varepsilon > 0$, tómese $\delta = \varepsilon/M$).

La afirmación c) de 1.1 nos autoriza a definir en $\mathcal{L}(E,F)$:

$$\|T\| = \sup\{|T(x)|: |x| \leqslant 1\} \qquad (1)$$

OBSERVACIONES 1.2.a) Es fácil ver que $T \longrightarrow \|T\|$ es una norma, con lo cual $\mathcal{L}(E,F)$ resulta un espacio normado.

b) Evidentemente la norma de $\mathcal{L}(E,F)$ depende de las normas de E y F (ver 1.3).

c) Notese que $|T(x)| \leq \|T\|.|x|$ para $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $x \in E$.

EJERCICIO 1.3. Sea $E = R^n$, $F = R^m$; dada $T \in \mathcal{L}(E,F)$ sea $a = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$ la matriz de T respecto de las bases canónicas, es decir
$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, e_i \quad (1 \leq j \leq n)$.

i) Si en E (resp:F) consideramos la norma $|x| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$ (resp: $|y| = \max\{|y_i|: 1 \leq i \leq m\}$), probar que

$$\|T\| = \max\{|a_{ij}|: 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$$

ii) Si se considera en ambos E,F la norma euclídea $|x| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$
$\|T\|^2$ es el mayor autovalor de $T^* \circ T$.

COROLARIO 1.4. Dos normas (indicadas $|\ |$ y $\|\ \|$) en un mismo espacio vectorial E son equivalentes (es decir: definen la misma topología en E) si y sólo si existen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tales que

$$\alpha\,.\,|x| \leq \|x\| \leq \beta.\,|x| \quad \text{para todo } x \in E$$

DEMOSTRACION. Pues dichas desigualdades equivalen a la continuidad de la aplicación identidad 1_E entre ambos espacios normados (E con la norma $|\ |$ y E con la norma $\|\ \|$).

Conviene hacer notar que la topología usual de K^n (esto es: la topología producto) está definida por la norma $|x|_\infty = \max\{|x_i|: 1 \leq i \leq n\}$, ya que la bola de centro a y radio $r > 0$ para esta norma no es otra cosa que el cubo $(a_1-r, a_1+r) \times\ldots\times (a_n-r, a_n+r)$; con esta observación es fácil probar el

LEMA 1.5. Si F es cualquier espacio normado, toda transformación lineal $T: K^n \longrightarrow F$ es continua.

DEMOSTRACION. Si $M = \max\{|T(e_i)|: 1 \leq i \leq n\}$ tendremos $|T(x)| = |T(x_1,\ldots,x_n)| = |T(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.T(e_i)| \leq M. \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq M.n\, |x|_\infty$

y la tesis resulta de 1.1.

PROPOSICION 1.6. Si E es un espacio normado de dimensión n, todo isomorfismo algebraico $T: K^n \longrightarrow E$ es un isomorfismo topológico.

DEMOSTRACION. Por 1.5 T resulta continua; siendo biyectiva es suficiente probar que T^{-1} es continua, o sea: la imagen de todo entorno de 0 es un entorno de 0 (1.1.b)). Sea $V_r(0) = \{x \in K^n: |x|_\infty < r\}$, veamos que $T(V_r(0))$ es entorno de 0; como $K_r = \{x: |x|_\infty = r\}$ es compacto, $T(K_r)$ es compacto y no contiene a 0. Luego hay un $\varepsilon > 0$ tal que $U = \{y \in E: |y| < \varepsilon\}$ es disjunto de $T(K_r)$, y afirmamos que $U \subset T(V_r(0))$.

De lo contrario (recordar que T es biyectiva) habrá un $y \in E$ con $|y| < \varepsilon$, $y = T(x)$ con $|x|_\infty \geq r$; como $y \notin T(K_r)$ debe ser $|x|_\infty > r$.

Si $x' = \frac{rx}{|x|_\infty}$ será $x' \in K_r$ y $|T(x')| = \left|\frac{r}{|x|_\infty} . y\right| < |y| < \varepsilon$, lo que da $T(x') \in U \cap T(K_r)$, absurdo.

OBSERVACIONES 1.7.a) De 1.6 resulta que todas las normas en K^n son equivalentes (tómese $E = K^n$ con una norma cualquiera); más generalmente si E es de dimensión finita, todas las normas en E son equivalentes. Además E con cualquiera de estas normas resulta isomorfo (algebraica y topológicamente) con K^n. En particular resulta completo.

b) En particular, de lo anterior y 1.5 resulta que toda transformación lineal $T: E \longrightarrow F$ es continua si $\dim(E) < \infty$.

Por el contrario, no toda transformación lineal $T: E \longrightarrow F$ ($\dim(F) < \infty$) es continua si $\dim(E) < \infty$. En tal sentido tenemos la:

PROPOSICION 1.8. Si E es un espacio normado, V es un espacio normado de dimensión finita y $f: E \longrightarrow V$ es una transformación lineal, son equivalentes:

a) f es continua.

b) El núcleo N(f) es cerrado.

DEMOSTRACION. Evidentemente a) $\Rightarrow$ b), pues $f^{-1}(0)$ debe ser cerrado (por serlo $\{0\} \subset V$); para ver que b) $\Rightarrow$ a) podemos suponer que $f(E) = V$ (reemplazando V por el subespacio imagen de f si es necesario).

Definimos para cada $v \in V$

$$\|v\| = \inf\{|x|: f(x) = v\} = \operatorname{dist}(0, f^{-1}(v))$$

Es rutinario verificar que esto es una norma en V; la condición b) asegura que $\|v\| = 0$ sólo ocurre si $v = 0$. En efecto, la hipótesis b) implica que los conjuntos $f^{-1}(v)$ son cerrados (ya que se obtienen de $f^{-1}(0)$ por traslación) y entonces $\|v\| = 0$ da $\operatorname{dist}(0, f^{-1}(v)) = 0$, luego $0 \in f^{-1}(v)$ así que $v = 0$.

Notemos que $\|f(x)\| \leq |x|$ para todo $x \in E$, lo que asegura la continuidad de f cuando se considera la norma $\| \ \|$ en $\acute{V}$; pero en V *todas* las normas son equivalentes (1.7 a)) y por lo tanto f es continua de E en V (con su norma original).

Si $E_1,\ldots,E_n$ son espacios normados la topología producto en el espacio vectorial $\prod_{i=1}^{n} E_i$ es definida por la norma $|(x_1,\ldots,x_n)| = \max\{|x_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\}$; pero es fácil ver (usando el ejercicio 3 de 1.14) que cualquiera de las normas

$$|(x_1,\ldots,x_n)|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$|(x_1,\ldots,x_n)|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$$

es equivalente a la norma indicada.

Las proyecciones $p_j : \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow E_j$ resultan continuas, y cada E_j se identifica al subespacio *cerrado* del producto formado por los $(x_i)_{i\leq n}$ con $x_i = 0$ si $i\neq j$. Además $\prod_{i=1}^{n} E_i$ es de Banach si y sólo si cada E_i lo es.

En general dado un subespacio S de un espacio normado E, siempre hay un subespacio $S' \subset E$ tal que $S \oplus S' = E$ y por lo tanto hay un isomorfismo de de espacios vectoriales $S\times S' \longrightarrow E$ dado por $(x_1,x_2) \longrightarrow x_1+x_2$.

Pero este isomorfismo puede no ser topológico (se trata de una biyección continua, y su inversa puede no ser continua).

DEFINICION 1.9. Si S_1,S_2 son subespacios de un espacio normado E, decimos que E es *suma topológica* de S_1 y S_2, ó que S_1 (resp:S_2) es un suplemento topológico de S_2 (resp: de S_1) si la aplicación

$$\sigma : S_1 \times S_2 \longrightarrow E \qquad \sigma(x_1,x_2) = x_1+x_2 \qquad (2)$$

es un isomorfismo topológico.

Un subespacio $S \subset E$ se dice *directo* si admite suplemento topológico.

OBSERVACIONES 1.10.a) Si E es suma topológica de S_1 y S_2 es claro que $E = S_1 \oplus S_2$, pero la recíproca no vale en general.

b) Si E es de dimensión finita, todo subespacio es directo (1.7 b)).

c) Si E es un espacio de Banach y S_1, S_2 son subespacios *cerrados* tales que $E = S_1\oplus S_2$ entonces E es suma topológica de S_1 y S_2. En efecto, como consecuencia del teorema de Banach (o del "gráfico cerrado", ver [1]) toda biyección lineal continua entre espacios de Banach es un isomorfismo topológico; basta aplicar entonces este hecho a (1).

d) En particular en un espacio de Hilbert E todo subespacio *cerrado* S es directo (tómese $S_2 = S^{\perp}$, complemento ortogonal de S y aplíquese c)).

LEMA 1.11. Si $S \subset E$ es un subespacio de un espacio normado, son equivalentes:

i) S es directo.

ii) Existe un "proyector continuo" (esto es, $u \in \mathcal{L}(E,E)$ con $u^2 = u$) tal que $u(E) = S$.

iii) Existe un proyector continuo v con núcleo $v^{-1}(0) = S$.

iv) Existe $f \in \mathcal{L}(E,S)$ con $f(x) = x$ si $x \in S$.

v) Para todo espacio normado F y para toda $T \in \mathcal{L}(S,F)$, hay una $T' \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que $T'|S = T$.

DEMOSTRACION. ii) $\Leftrightarrow$ iii) Resulta de poner $v = 1_E - u$; ii) $\Leftrightarrow$ iv) Inmediato: f es u (considerada como aplicación de E en S).

i) $\Rightarrow$ ii) Si S' es suplemento topológico de S y $p: S\times S' \longrightarrow S$ es la proyección $(x,x') \longrightarrow x$, se define $u(x) = p\,\sigma^{-1}(x)$.

iv) $\Rightarrow$ v) Basta tomar $T' = Tf$.

v) $\Rightarrow$ iv) Se considera el caso $F=S$, $T=1_S$.

ii) $\Rightarrow$ i) Si $g(x) = (u(x),x-u(x))$, g es continuo, $\sigma g = 1_E$ y tambien $g\sigma(x_1,x_2) = (x_1,x_2)$; aquí la imagen de 1_E-u es un suplemento topológico de S.

PROPOSICION 1.12. Sea E un espacio normado, $S \subset E$ un subespacio. Entonces S es directo si

a) $\dim(S) < \infty$, o bien si

b) S es cerrado de codimensión finita.

DEMOSTRACION. a) Sea a_i $(1 \leq i \leq n)$ una base de S y sea $\varphi_j : S \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $\varphi_j(\sum_{i=1}^{n} t_i\, a_i) = t_j$ $(1 \leq j \leq n)$; la aplicación $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{K}^n$ definida por $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))$ resulta un isomorfismo.

Ahora por el teorema de Hahn-Banach (ver [1]) cada φ_j se extiende a una $\psi_j \in \mathcal{L}(E,K)$; si $\psi : E \longrightarrow K^n$ es $\psi(x) = (\psi_1(x),\dots,\psi_n(x))$ es inmediato verificar que $f = \varphi^{-1}\psi : E \longrightarrow S$ está en las condiciones de 1.11 iv).

b) Sea V un subespacio de E tal que $S \oplus V = E$; por hipótesis V es de dimensión finita. Sea $v: E \longrightarrow E$ la proyección "algebraica" sobre V; ciertamente $v^2 = v$ y $v^{-1}(0) = S$ así que sólo hay que probar que v es continua. Pero $v(E) = V$ y $v^{-1}(0)$ es cerrado, así que la continuidad de v resulta de 1.8.

Si E (resp:F) es una suma topológica de E_1 y E_2 (resp: F_1 y F_2), se produce un isomorfismo topológico

$$\mathcal{L}(E,F) \xrightarrow[\sim]{} \prod_{i,j=1}^{2} \mathcal{L}(E_i,F_j) \tag{3}$$

que asocia a cada T cuatro transformaciones lineales continuas

$$T_{ij} : E_j \longrightarrow F_i \qquad (1 \leqslant i,j \leqslant 2)$$

mediante la regla

$$T_{ij} = \text{componente según } F_i \text{ de } T|E_j$$

o sea

$$T(x) = T(x_1+x_2) = [T_{11}(x_1) + T_{12}(x_2)] + [T_{21}(x_1) + T_{22}(x_2)]$$

Esto puede disponerse como una matriz de transformaciones lineales

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \tag{4}$$

que opera entonces sobre $x \in E$ como una "matriz columna" $(x_1\ x_2)$; la columna

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}(x_1) + T_{12}(x_2) \\ T_{21}(x_1) + T_{22}(x_2) \end{pmatrix}$$

está formada entonces por las dos componentes de $T(x)$ (según F_1 y F_2).

Una transformación lineal continua $f: E \longrightarrow F$ se dirá un *morfismo directo* si el núcleo $N(f)$ (resp: la imagen $I(f)$) son subespacios directos de E y F respectivamente, y si siendo S un suplemento topológico de $N(f)$, la biyección continua $f|S: S \longrightarrow I(f)$ es un isomorfismo topológico.

OBSERVACIONES 1.13.a) Si E y F son espacios de Banach, la biyección $S \longrightarrow I(f)$ es automáticamente un isomorfismo (por el teorema del gráfico cerrado) de modo que en este caso f será um morfismo directo si y sólo si $N(f)$ e $I(f)$ son subespacios directos.

b) Diremos que f es un *monomorfismo directo* si f es inyectiva y además $I(f)$ es un subespacio directo de F de tal forma que $f: E \longrightarrow I(f)$ es un isomorfismo topológico (esta última condición es superflua si E y F son de Banach). Dualmente un *epimorfismo directo*: f es suryectiva, $N(f)$ tiene un suplemento topológico S y $f|S: S \longrightarrow F$ es un isomorfismo topológico (si E y F son de Banach, esta condición es innecesaria).

c) Es fácil ver que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ es un monomorfismo directo $\Leftrightarrow$ existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tal que $gf = 1_E$. PRUEBA. Una afirmación es trivial: g se define como la composición de un proyector continuo $F \longrightarrow I(f)$ con la inversa $f^{-1}: I(f) \longrightarrow E$. Recíprocamente la existencia de g implica que f es inyectiva, y que $fg = u$ es un proyector continuo con imagen $I(f)$; además si $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ aplicando g resulta $x_n \longrightarrow x$, lo que muestra que f es un isomorfismo topológico de E sobre $I(f)$.

d) Dualmente, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ es un epimorfismo topológico $\Leftrightarrow$ existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tal que $fg = 1_F$ (Demostración como ejercicio).

Obviamente un subespacio $S \subset E$ es directo $\Leftrightarrow$ la inclusión $S \longrightarrow E$ es un monomorfismo directo.

EJERCICIOS 1.14. 1) Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $T = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{T(x)}{|x|} = 0$ (Sug: $x = \lambda.a$, $|a| = 1$).

2) Probar que $T \longrightarrow T(1)$ es una isometría de $\mathcal{L}(K,E)$ sobre E.

3) Se consideran las normas en K^n.

$$|x|_\infty = \max\{|x_i|: 1 \leqslant i \leqslant n\} \qquad |x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad |x|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$$

Probar que $|x|_\infty \leqslant |x|_2 \leqslant |x|_1 \leqslant n.|x|_\infty$.

4) Si $S \subset E$ es un subespacio directo, probar que dos suplementos de S son (topológicamente) isomorfos.

5) Si S_1, S_2 son subespacios de un espacio normado E, probar que son equivalentes:

i) E es suma topológica de S_1 y S_2.

ii) $S_1 + S_2 = E$ y existe un $c > 0$ tal que $c.|x_1 + x_2| \geqslant |x_1| + |x_2|$ para todo $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$.

6) Si $S_1 \subset E$ es un subespacio cerrado y $S_2 \subset E$ es de dimensión finita entonces $S_1 + S_2$ es cerrado en E.

7) Sea X un espacio topológico, E un espacio de Banach. Demostrar que $BC(X,E)$ = conjunto de todas las aplicaciones continuas y acotadas $f: X \longrightarrow E$ es un espacio de Banach si $\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in E\}$.

8) Si E,F son espacios normados (F Banach) y $B_r(0) = \{x \in E: |x| \leqslant r\}$ demostrar que $T \longrightarrow T|B_r(0)$ es un isomorfismo topológico isométrico de $\mathcal{L}(E,F)$ sobre un subespacio cerrado de $BC(B_r(0),F)$.

Deducir que $\mathcal{L}(E,F)$ es de Banach si F lo es.

9) Sea E un espacio normado, $(x_i)_{i\in I}$ una familia de elementos de E.

a) Decimos que $(x_i)_{i\in I}$ es *sumable* (con suma x) si para cada $\varepsilon > 0$ hay una parte finita $J_0 \subset I$ tal que $|\sum_{i\in J} x_i - x| < \varepsilon$ para toda parte finita $J \supset J_0$. Probar que una familia sumable es nula salvo un conjunto numerable de índices.

b) La familia $(x_i)_{i\geq 0}$ es sumable $\Leftrightarrow$ para toda biyección $\sigma: N \longrightarrow N$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ es convergente (con suma $\sum_{i\in N} x_i$).

c) Si E es un espacio de Banach y $\sum_{i\geq 0} |x_i| < \infty$, la familia $(x_i)_{i\geq 0}$ es sumable.

§ 2 - APLICACIONES MULTILINEALES.

Si $E_1,\ldots,E_n,F$ son espacios normados indicamos con $\mathrm{Mult}(E_1,\ldots,E_n;F)$ el espacio vectorial de las aplicaciones multilineales continuas

$$f : E_1 \times\ldots\times E_n \longrightarrow F$$

Este espacio es normado por

$$\|f\| = \sup\{|f(x_1,\ldots,x_n)| : |x_1| \leqslant 1,\ldots,|x_n| \leqslant 1\} \qquad (1)$$

definición justificada por el siguiente:

LEMA 2.1. Si $f: \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow F$ es una función multilineal, son equivalentes:

a) f es continua.

b) f es continua en $(0,\ldots,0)$.

c) Existe $c \geqslant 0$ tal que $|f(x_1,\ldots,x_n)| \leqslant c.|x_1|\ldots|x_n|$ para todo $(x_1,\ldots,x_n)$ en $E_1 \times\ldots\times E_n$.

DEMOSTRACION. a) $\Rightarrow$ b) Evidente. b) $\Rightarrow$ c) La imagen inversa por f de la bola unitaria de F debe contener una bola de radio $r > 0$; como es $|(x_1,\ldots,x_n)| = \max\{|x_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ resulta que

$$|x_i| \leqslant r \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \quad \Rightarrow \quad |f(x_1,\ldots,x_n)| \leqslant 1$$

y entonces es fácil ver que vale c) con $c = 1/r^n$.

Veamos c) $\Rightarrow$ a): Tenemos

$$f(x_1,\ldots,x_n) - f(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{i=1}^{n} f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i-a_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

y por lo tanto

$$|f(x_1,\dots,x_n) - f(a_1,\dots,a_n)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i-a_i,x_{i+1},\dots,x_n)| \leqslant$$
$$c.\sum_{i=1}^{n} |a_1|\dots|a_{i-1}|.|x_i-a_i|.|x_{i+1}|\dots|x_n|$$

y de aquí sigue fácilmente que $f(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow f(a_1,\dots,a_n)$ cuando $(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow (a_1,\dots,a_n)$ (o lo que es igual, cuando $x_j \longrightarrow a_j$ para cada $j \leqslant n$).

OBSERVACIONES Y EJEMPLOS 2.2.a) De (1) es claro que

$$|f(x_1,\dots,x_n)| \leqslant \|f\|.|x_1|. \;\dots\; .|x_n| \qquad (2)$$

lo que significa que la aplicación multilineal

$$v : \mathrm{Mult}(E_1,\dots,E_n;F)\times E_1\times\dots\times E_n \longrightarrow F \qquad (3)$$

definida por $v(f,x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n)$, es continua.

b) La composición $(T,S) \longrightarrow ST$

$$\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G) \longrightarrow \mathcal{L}(E,G) \qquad (4)$$

es bilineal continua ya que es fácil ver que $\|ST\| \leqslant \|S\|.\|T\|$

c) Si $E_1,\dots,E_n$ son de dimensión finita, toda aplicación multilineal $f: \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow F$ resulta continua. En efecto (limitándonos al caso n=2 para evitar notaciones engorrosas) consideramos bases $\{v_1,\dots,v_p\}$ y $\{u_1,\dots,u_q\}$ de E_1 y E_2 respectivamente, así que

$$f(x,y) = f(\sum_1^p x_i\, v_i\, , \sum_1^q y_j\, u_j) = \sum_{i,j} x_i\, y_j\, f(v_i,u_j)$$

Por otro lado hay $a > 0$, $b > 0$ tales que

$$\max\{|x_i| : 1 \leqslant i \leqslant p\} \leqslant a.|x| \qquad \max\{|y_j| : 1 \leqslant j \leqslant q\} \leqslant b.|y|$$

(cf. 1.7 a), con isomorfismos $E_1 \approx K^p$, $E_2 \approx K^q$). Obtenemos entonces la desigualdad 2.1 c) con

$$c = p.q.a.b.M \quad \text{donde} \quad M = \max\{|f(v_i,u_j)| : 1 \leqslant i \leqslant p\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant q\}$$

d) Toda función multilineal en n variables puede escribirse como composición de funciones multilineales en $k < n$ variables; así por ejemplo dada $f \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_{n-1},E_n;F)$ consideramos

$$\psi : E_1 \times\dots\times E_{n-1} \longrightarrow \mathcal{L}(E_n,F)$$

definida por $\psi(x_1,\dots,x_{n-1})(x) = f(x_1,\dots,x_{n-1},x)$. Claramente $\|f\| = \|\psi\|$, $\psi \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_{n-1}\ ;\ \mathcal{L}(E_n,F))$ y f es la composición

$$E_1 \times \dots \times E_{n-1} \times E_n \xrightarrow[\psi \times 1_{E_n}]{} \mathcal{L}(E_n,F) \times E_n \xrightarrow[e]{} F$$

donde $e(T,x) = T(x)$ (cf. 2.2a)) es bilineal continua.

Indicaremos con $\mathcal{L}_r(E,F)$ el espacio normado $\mathcal{L}(\underbrace{E,\dots,E}_{r};F)$; nótese que $\mathcal{L}_1(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$. Pondremos $\mathcal{L}_0(E,F) = F$ por convención.

PROPOSICION 2.3. Para todo $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ la aplicación

$$\sigma_{p,q} : \mathcal{L}_p(E,\mathcal{L}_q(E,F)) \longrightarrow \mathcal{L}_{p+q}(E,F) \qquad (5)$$

definida por $\sigma_{p,q}(f)(x_1,\dots,x_{p+q}) = [f(x_1,\dots,x_p)](x_{p+1},\dots,x_{p+q})$ es una isometría de espacios normados.

DEMOSTRACION. Rutinaria, la inversa de $\sigma_{p,q}$ se calcula así: dada $\phi \in \mathcal{L}_{p+q}(E,F)$ se define (para cada $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$):

$$\psi_{x_1,\dots,x_p}(x_{p+1},\dots,x_{p+q}) = \phi(x_1,\dots,x_{p+q})$$

y la aplicación $(x_1,\dots,x_p) \longrightarrow \psi_{x_1,\dots,x_p}$ es $\sigma^{-1}_{p,q}(\phi)$. La afirmación correspondiente a las normas es trivial.

Interesan especialmente las aplicaciones multilineales $f\colon E^n \longrightarrow F$ que son *simétricas*, esto es: aquellas que verifican

$$f(x_{\sigma_1},\dots,x_{\sigma_n}) = f(x_1,\dots,x_n) \qquad (6)$$

para toda permutación $\sigma\colon [n] \longrightarrow [n]$ (aquí $[n] = \{1,2,\dots,n\}$).

Las aplicaciones multilineales simétricas $f\colon E^n \longrightarrow F$ forman un subespacio cerrado $S_n(E,F)$ de $\mathcal{L}_n(E,F)$; es fácil ver asimismo que la isometría $\sigma_{p,q}$ de 2.3 induce una isometría

$$\sigma_{p,q} : S_p(E,S_q(E,F)) \longrightarrow S_{p+q}(E,F) \qquad (7)$$

LEMA 2.4. Sea $\phi \in S_n(E,F)$, sea $a \in E$. Si $x \in E$, para todo $t \in K$ vale

$$\phi(a+tx,\dots,a+tx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi(\underbrace{a,\dots,a}_{n-k},\underbrace{x,\dots,x}_{k})t^k$$

DEMOSTRACION. Trivial si $n=1$; por inducción consideramos $\phi_i \in S_{n-1}(E,F)$ definidas por

$$\phi_1(x_2,\dots,x_n) = \phi(a,x_2,\dots,x_n) \qquad \phi_2(x_2,\dots,x_n) = \phi(x,x_2,\dots,x_n)$$

Luego $\phi(a+tx,\ldots,a+tx) = \phi_1(a+tx,\ldots,a+tx) + t\phi_2(a+tx,\ldots,a+tx) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \phi(\underbrace{a,\ldots,a}_{n-1-k},\underbrace{x,\ldots,x}_{k})t^k + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \phi(\underbrace{a,\ldots,a}_{n-1-j},\underbrace{x,\ldots,x}_{j+1})t^{j+1}$$

que reordenando según potencias de t da la tesis, ya que

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (ver ejercicio 2.9).

COROLARIO 2.5. Sea $\phi \in S_n(E,F)$; entonces $\phi = 0 \Leftrightarrow \phi(x,\ldots,x) = 0$ para todo $x \in E$.

DEMOSTRACION. Trivial si $n=1$; por inducción: como $\phi(a+tx,\ldots,a+tx) = 0$ para todo a,x,t de 2.4 se deduce en particular que

$$\phi(a,x,\ldots,x) = 0$$

para todo a,x (cf. ejercicio 2, 2.9) y se aplica la hipótesis de recurrencia a la función $\psi_a \in S_{n-1}(E,F)$, $\psi_a(x_2,\ldots,x_n) = \phi(a,x_2,\ldots,x_n)$ dando $\psi_a = 0$. Como esto es válido para todo $a \in E$ vemos que $\phi = 0$.

DEFINICION 2.6. Si E,F son espacios normados, un *polinomio homogéneo de grado* 0: $E \longrightarrow F$ es cualquier aplicación constante $E \longrightarrow F$; si $m > 0$ un *polinomio homogéneo de grado* m es una aplicación $P: E \longrightarrow F$ de la forma

$$P(x) = \phi(x,x,\ldots,x)$$

para alguna $\phi \in S_m(E,F)$.

OBSERVACIONES 2.7.a) La aplicación ϕ de la definición está unívocamente determinada gracias a 2.5; se la denomina "aplicación m-lineal simétrica asociada a P", y se indicará $\tilde{P}$.

b) Si $P_m(E,F)$ indica el conjunto de los polinomios homogéneos $P: E \longrightarrow F$ de grado m es inmediato verificar que con las operaciones usuales esto es un espacio vectorial, y que

$$S_m(E,F) \longrightarrow P_m(E,F) \qquad (\phi \longrightarrow \phi|\Delta) \qquad (8)$$

es un isomorfismo. Aquí $\Delta = \{(x,\ldots,x): x \in E\}$.

Lógicamente si $m=1$, $P_1(E,F) = S_1(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$.

c) En general es difícil reconstruir $\tilde{P}$ a partir de P (es decir: describir la inversa del isomorfismo (8)); este proceso-denominado "polarización"- determina $\phi(x_1,\ldots,x_m)$ a partir de los valores $\phi(x,\ldots,x)$ es bien conocido para m=2 ya que

$$4\phi(x_1,x_2) = \phi(x_1+x_2,x_1+x_2) - \phi(x_1-x_2,x_1-x_2)$$

Para la fórmula de polarización (en general), véase [2].

d) La norma en $P_m(E,F)$ se define como

$$\|P\| = \frac{1}{m!} \sup \{|P(x)| : |x| \leq 1\} \tag{9}$$

de manera que entonces $\|P\| = \frac{1}{m!} \|\tilde{P}\|$.

e) EXPRESION EN COORDENADAS. Si $P: E \longrightarrow F$ es un polinomio homogéneo de grado m y $\{e_1,\ldots,e_n\}$es una base de E, escribimos $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ y resulta

$$P(x) = \phi(\sum_1^n x_i e_i, \sum_1^n x_i e_i, \ldots, \sum_1^n x_i e_i) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1} \phi(e_{i_1}, \sum_1^n x_i e_i, \ldots, \sum_1^n x_i e_i) = \ldots =$$

$$= \sum_{(i)} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m} \phi(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}) \tag{10}$$

la suma extendida a todas las aplicaciones $(i) = (i_1,\ldots,i_m): [m] \longrightarrow [n]$ (en total: n^m). Esta fórmula puede reorganizarse usando la simetría de ϕ, pues $\phi(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}) = \phi(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})$ si (i) y (j) difieren en una permutación de [m]. Cada uno de estos "coeficientes" se escribe

$$\phi(\underbrace{e_1,\ldots,e_1}_{\alpha_1},\underbrace{e_2,\ldots,e_2}_{\alpha_2},\ldots,\underbrace{e_n,\ldots,e_n}_{\alpha_n}) = c_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

donde α_j es la cantidad de veces que aparece e_j en $\{e_{i_1},\ldots,e_{i_m}\}$ (para cada j, $1 \leq j \leq n$). Lógicamente $0 \leq \alpha_j$ y $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = m$.

Haciendo esto para todas estas sucesiones $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ se obtienen todos los coeficientes de (10); el escalar que acompaña a $c_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ es evidentemente $x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$.

Al agrupar todos los coeficientes de (10) iguales a $c_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, la cantidad de ellos es igual a la cantidad de sucesiones $(i_1,\ldots,i_m)$ con α_1 "unos",..., α_n "enes", o sea todas las que se obtienen por permutación de

$$\underbrace{1 \ldots 1}_{\alpha_1} \quad \underbrace{2 \ldots 2}_{\alpha_2} \quad \ldots \quad \underbrace{n \ldots n}_{\alpha_n}$$

Esta cantidad es igual a $m!/\alpha_1!\ \alpha_2!\ \ldots\ \alpha_m!$.

En definitiva (10) puede reescribirse

$$P(x) = \sum_{\alpha} \frac{m!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!} \; x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} \; c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$$

suma extendida a todas las sucesiones $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in N^n$ con $0 \leqslant \alpha_i$ para $i = 1,\ldots,n$ y $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m$.

Es usual introducir las abreviaturas (para cada $\alpha \in N^n$):

$$\alpha! = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j! \qquad\qquad |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

Con lo cual obtenemos

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \; x^\alpha \; c_\alpha \qquad (11)$$

lo que justifica la denominación de "polinomio homogéneo".

DEFINICION 2.8. Un *polinomio de grado* $\leqslant m$, $P: E \longrightarrow F$ es una aplicación de la forma $P = \sum_{k=0}^{m} P_k$, donde $P_k \in P_k(E,F)$ para cada k.

EJERCICIOS 2.9.1) Sea $S_n: \mathcal{L}_n(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}_n(E,F)$ definido por $S_n(f)(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(x_{\sigma_1},\ldots,x_{\sigma_n})$, suma extendida a todas las permutaciones $\sigma: [n] \longrightarrow [n]$.

a) $\|S_n(f)\| \leqslant \|f\|$ para toda $f \in \mathcal{L}_n(E,F)$.

b) S_n es un proyector continuo.

c) Deducir que $S_n(E,F)$ es un subespacio directo de $\mathcal{L}_n(E,F)$.

2) Sean $c_j \in E$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ y sea $\varphi: K \longrightarrow E$ la aplicación definida por $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n} c_j . t^j$. Probar que son equivalentes:

i) $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$.

ii) $\varphi(t) = 0$ para todo $t \in K$.

iii) $\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t^m} = 0$.

(Sug: para ver que iii) $\Rightarrow$ i) usar el teorema de Hahn-Banach y el caso en que $E = K$).

Deducir que $\sum_0^m c_j . t^j = \sum_0^n a_k \, t^k$ para todo $t \in K$ ocurre si y sólo si es $n=m$

y $a_j = c_j$ para todo j.

3) Sea $P: E \longrightarrow F$ un polinomio de grado $\leqslant m$; si $a \in E$ es tal que $\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{|x-a|^m} = 0$, entonces $P=0$ (Sug: $x = a+tv$).

4) Si $P \in P_n(E,K)$, $S \in P_m(E,K)$ el producto P.S es un polinomio homogéneo de grado n+m.

§ 3 - ALGEBRAS NORMADAS.

Un *álgebra normada* consiste de una K-álgebra A provista de una norma que satisface las condiciones

i) $\|x.y\| \leqslant \|x\| . \|y\| \quad (x \in A,\ y \in A)$.

ii) $\|1\| = 1$ (donde un "1" indica el elemento unidad de A).

Por 2.1 el producto $(x,y) \longrightarrow x.y$ es automáticamente continuo.

Un álgebra normada se dice un *álgebra de Banach* si A es un espacio de Banach; el ejemplo típico será $A = \mathrm{End}(E) = \mathcal{L}(E,E)$, álgebra de endomorfismos continuos de un espacio de Banach E (cf. 2.2 b) y ejercicio 8 de 1.14).

Indicamos con A_* el conjunto de elementos inversibles de A.

PROPOSICION 3.1. Si A es un álgebra de Banach, A_* es un conjunto abierto en A y la función $x \longrightarrow x^{-1}$ es continua en A_* (en particular A_* es un grupo topológico).

DEMOSTRACION. Veamos primero que la bola abierta $V_r(1)$ de centro 1 y radio $r \leqslant 1$ está incluída en A_*. Si $|x-1| < r \leqslant 1$ la serie $\sum_0^\infty (1-x)^k$ es (absolutamente) convergente, ya que $\sum_0^\infty |x-1|^k < \sum_0^\infty r^k = (1-r)^{-1}$ (cf. ejercicio 9c) de 1.14). Como

$$1 - (1-x)^n = x.\sum_{j=0}^{n-1} (1-x)^j$$

y $(1-x)^n \longrightarrow 0$ vemos que

$$x^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (1-x)^j \qquad (1)$$

Lo que prueba que $V_1(1) \subset A_*$.

En general, si $a \in A_*$ la aplicación $x \longrightarrow a.x$ es un homeomorfismo de A, que manda A_* en A_* y 1 en a. Así $a.V_1(1)$ es abierto, entorno de a, contenido en A_*.

En lo referente a la continuidad de $x \longrightarrow x^{-1}$, es suficiente ver que es continua en x=1. Pero por lo anterior, si $|1-x| < 1$

$$|x^{-1} - 1| \leq \sum_1^\infty |1-x|^k = |1-x| \sum_0^\infty |1-x|^k = \frac{|1-x|}{1-|1-x|} \longrightarrow 0 \quad \text{si } x \longrightarrow 1, \text{ lo}$$

que prueba lo afirmado.

OBSERVACIONES 3.2. El resultado anterior tiene una serie de consecuencias importantes; limitémonos a observar que

a) En un álgebra de Banach, todo ideal maximal es cerrado. Pues si I es un tal ideal, $\overline{I}$ es un ideal que contiene a I, luego $\overline{I} = I$ ó $\overline{I} = A$. Si fuera $\overline{I} = A$ debería ser $I \cap A_* \neq \emptyset$, absurdo.

b) Todo carácter h de un álgebra de Banach es continuo (un *carácter* de A es un homomorfismo de álgebras $h: A \longrightarrow K$ que verifica $h(1) = 1$). En efecto el núcleo $h^{-1}(0)$ es cerrado por a) y se apela a 1.8).

Mencionemos de paso que si h es un carácter de A, necesariamente es $\|h\| = 1$; en efecto $h(1) = 1$ así que basta ver que $|h(x)| < 1$ si $|x| < 1$. Pero en tal caso $\sum_0^\infty x^k$ converge, luego también deberá ser convergente $\sum_0^\infty h(x)^k$, así que necesariamente $|h(x)| < 1$.

Interesan en particular las álgebras de Banach denominadas C*-álgebras, esto es: hay una aplicación $x \longrightarrow x^*$ de A en A que satisface

$$(x^*)^* = x \qquad (x+y)^* = x^* + y^*$$

$$(x.y)^* = y^*.x^* \qquad \|x^*\| = x$$

$$\|x\|^2 = \|x.x^*\| \qquad (\lambda.x)^* = \overline{\lambda}.x^* \quad (\lambda \in K)$$

donde $\overline{\lambda} = \lambda$ si K = R, o el conjugado usual de λ si K = C.

Ejemplo típico de C*-álgebra es $\mathcal{L}(H)$ donde H es un espacio de Hilbert (real o complejo según el caso), y donde x^* es el adjunto de x.

EJERCICIOS 3.3. 1) Demostrar directamente 3.1 para A = End(E), donde E es un K-espacio vectorial de dimensión finita (Sug: usar determinantes).

2) Si A es un álgebra de Banach y $x \in A$ el *espectro* de x es el subconjunto de K definido por $sp(x) = \{\lambda \in K: x-\lambda.1 \notin A_*\}$.

i) Probar que sp(x) es cerrado (Sug: 3.1).

ii) Probar que sp(x) está contenido en $\{\lambda \in K: |\lambda| \leq |x|\}$ (Sug: si $|\lambda| > |x|$, $x-\lambda = (\frac{x}{\lambda} - 1)\lambda \in A_*$ por (1)). Deducir que sp(x) es compacto.

iii) La *resolvente* de x es la función R_x: K - sp(x) $\longrightarrow$ A definida por $R_x(\lambda) = (x-\lambda)^{-1}$. Probar que $R_x(\lambda_1)-R_x(\lambda_2) = (\lambda_2-\lambda_1).R_x(\lambda_2).R_x(\lambda_1)$.

iv) Deducir de lo anterior que R_x es continua; probar con el método de ii) que $\lim_{|\lambda|\to\infty} R_x(\lambda) = 0$.

v) Si A = End(E), y dim(E) $< \infty$, sp(x) es el conjunto de autovalores de x.

3) Sea A una K-álgebra que es un espacio normado tal que $(x,y) \longrightarrow x.y$ es continua, probar: hay una norma en A equivalente a la original para la cual A resulta un álgebra normada (Sug: $\|a\| = \sup\{|a.x|: |x| = 1\}$).

§ 4 - INTEGRAL DE UNA FUNCION VECTORIAL.

Para todo intervalo $[a,b] \subset R$ y para todo espacio normado E (sobre R ó C) denotamos B([a,b],E) el espacio de las aplicaciones acotadas $f: [a,b] \longrightarrow E$, normado por $\|f\| = \sup\{|f(t)|: a \leq t \leq b\}$.

LEMA 4.1. B([a,b],E) es de Banach si E lo es.

DEMOSTRACION. Sea $f_n: [a,b] \longrightarrow E$ una sucesión de Cauchy; es evidente que para cada $t \in [a,b]$ la sucesión $(f_n(t))_{n\geq 1}$ es de Cauchy en E así que existe $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ para cada t. Veamos que $\|f-f_n\| \longrightarrow 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ hay un n_0 tal que $|f_{n+r}(t)-f_n(t)| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_0$ $r \geq 0$ y para todo $t \in [a,b]$. Haciendo $r \longrightarrow \infty$ resulta que si $n \geq n_0$ para todo $t \in [a,b]$ será $|f(t)-f_n(t)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, como queríamos.

Consideramos ahora funciones *escalera* $\psi: [a,b] \longrightarrow E$; llamamos así a toda aplicación de la forma

$$\psi(t) = \sum_{j=0}^{r} \chi_{[\alpha_j,\alpha_{j+1}]}(t).a_j \qquad (1)$$

donde $a_j \in E$ y $\chi_{[\alpha_j,\alpha_{j+1}]}$ = función característica de $[\alpha_j,\alpha_{j+1}]$, para $a = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_{r+1} = b$.

Si indicamos con $\mathcal{E}([a,b],E)$ el conjunto de tales aplicaciones es fácil ver que esto es un subespacio de B([a,b],E) (para $\psi_1+\psi_2$ se considera una partición de [a,b] en intervalos de extremos los determinados por las particiones definidas por ψ_1 y ψ_2.

LEMA 4.2. $C([a,b],E) \subset \overline{\mathcal{E}([a,b],E)}$, es decir: toda función continua $f: [a,b] \longrightarrow E$ es límite uniforme de escaleras.

DEMOSTRACION. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de f hay un $\delta > 0$ tal que $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$ si $|x-x'| < \delta$. Dividiendo $[a,b]$ en intervalos $[\alpha_j,\alpha_{j+1}]$ de longitud $< \delta$, de punto medio x_j consideramos

$$\psi = \sum \chi_{[\alpha_j,\alpha_{j+1}]} \cdot f(x_j)$$

Notando que $\sum \chi_{[\alpha_j,\alpha_{j+1}]} = 1$ resulta

$$|f(t)-\psi(t)| = |\sum \chi_{[\alpha_j,\alpha_{j+1}]}(t).(f(t)-f(x_j))| \leqslant$$

$$\leqslant \sum \chi_{[\alpha_j,\alpha_{j+1}]}(t)\ |f(t)-f(x_j)| < \sum \chi_{[\alpha_j,\alpha_{j+1}]}(t).\varepsilon = \varepsilon$$

Para $\psi \in \mathcal{E}([a,b],E)$ definimos su *integral* $I(\psi)$ por

$$I(\psi) = \sum_{j=0}^{r} (\alpha_{j+1}-\alpha_j).a_j$$

si ψ está dada por (1).

LEMA 4.3.a) La aplicación $I: \mathcal{E}([a,b],E) \longrightarrow E$ es lineal.

b) $|I(\psi)| \leqslant (b-a).\|\psi\|$ (en particular, I es continua).

DEMOSTRACION. Inmediata.

Cuando E es un espacio de Banach la integral I puede extenderse a $\overline{\mathcal{E}([a,b],E)}$ del siguiente modo: si $f = \lim_{n\to\infty} \psi_n$ en $B([a,b],E)$ (las ψ_n escaleras) se pone $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(\psi_n)$; este límite existe ya que la sucesión $I(\psi_n)$ es de Cauchy en E (por 4.3 b), y por ser $(\psi_n)_{n\geq 1}$ de Cauchy en $B([a,b],E)$).

Además el valor $I(f)$ no depende de la particular sucesión $\psi_n \longrightarrow f$; si $\psi_n \longrightarrow f$ y $\psi'_n \longrightarrow f$ entonces $\psi_n-\psi'_n \longrightarrow 0$ así que $I(\psi_n)-I(\psi'_n) \longrightarrow 0$ por 4.3.

En particular (4.2) $I(f)$ está definida para toda función continua $f: [a,b] \longrightarrow E$, y se escribe

$$I(f) = \int_a^b f(t)\ dt$$

De las definiciones se deduce enseguida la:

PROPOSICION 4.4. La integral

$$\int_a^b : C([a,b],E) \longrightarrow E$$

es una función lineal y continua. Más precisamente

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant \|f\|.(b-a)$$

Asimismo:

PROPOSICION 4.5. Para toda $f: [a,b] \longrightarrow E$ continua y para toda $\varphi \in E^* =$ $= \mathcal{L}(E,R)$ es

$$\varphi\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \varphi\, f(t)\,dt$$

DEMOSTRACION. Nótese que el miembro de la derecha es una integral "usual"; para probar lo afirmado basta reducirse por continuidad al caso en que $f \in \mathcal{E}([a,b],E)$ en cuyo caso la tesis es trivial.

(Más generalmente este resultado es válido -con misma demostración- en el caso de reemplazar φ por una transformación $T \in \mathcal{L}(E,F)$).

EJERCICIO 4.6. 1) Si $\dim(E) < \infty$ y $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es base de E, probar que $\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right)v_i$ para toda $f: [a,b] \longrightarrow E$ continua.

2) Si E es un espacio de Banach complejo y $g: [0,1] \longrightarrow C$ es C^1, sea $\Gamma = g([0,1])$. Para cada $f \in C(\Gamma,E)$ de define

$$\int_\Gamma f(z)\,dz \quad \text{como} \quad \int_0^1 fg(t)\,g'(t)\,dt$$

Mostrar que esta integral da una aplicación continua y lineal $C(\Gamma,E) \longrightarrow E$, con

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant L(\Gamma).\|f\|$$

donde $L(\Gamma) = \int_0^1 |g'(t)|\,dt$.

CAPITULO II

§ 1 - DIFERENCIAL.

Sean E y F espacios normados, sea $\Omega \in E$ un conjunto abierto y sea $f\colon \Omega \longrightarrow F$ una aplicación.

DEFINICION 1.1. Si $a \in \Omega$, decimos que f es *diferenciable en* a si existe una transformación lineal continua $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a) - T(x-a)}{|x-a|} = 0 \qquad (1)$$

OBSERVACIONES 1.2.a) Si existe una tal transformación lineal T, ella es única; pues si hubiera dos (digamos T_1, T_2) restando en (1) resultaría

$$\lim_{x \to a} \frac{(T_1-T_2)(x-a)}{|x-a|} = 0$$

y haciendo $x-a = v$ de deduce $T_1 = T_2$ por el ejercicio 1 de 1.14 (cap.I).

b) Si f es diferenciable en $a \in \Omega$, la única transformación lineal $T \in \mathcal{L}(E,F)$ que verifica (1) se denomina la *diferencial de* f *en* a y se indica $Df(a)$.

c) Si f es constante, f es diferenciable en a y $Df(a) = 0$; evidente pues $T = 0 \in \mathcal{L}(E,F)$ verifica entonces (1).

d) Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, f es diferenciable en a y $Df(a) = f$; pues $T=f$ verifica trivialmente (1).

e) Usando que el límite de sumas es la suma de límites se ve enseguida que f,g son diferenciables en a también lo es f+g, y que vale $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$. Análogamente para $\lambda.f$, $\lambda \in \mathbf{K}$.

f) Si f es diferenciable en a, en particular deberá ser

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) - T(x-a) = 0$$

Como T es continua resulta que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y por lo tanto f es continua en a.

1.3. CALCULO DE LA DIFERENCIAL.

Supongamos que f es diferenciable en $a \in \Omega$, por lo tanto

$$f(x) - f(a) = Df(a)(x-a) + r(x)$$

donde por definición es $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{|x-a|} = 0$. Poniendo $x = a+tv$:

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = Df(a)(v) + \frac{r(a+tv)}{t}$$

y como $\frac{r(a+tv)}{t} \longrightarrow 0$ para $t \longrightarrow 0$ queda finalmente

$$Df(a)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \qquad (2)$$

El segundo miembro suele llamarse *derivada direccional* (de f en a, según la "dirección v") y se denota $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$; mencionemos que puede existir $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ para todo $v \in E$ y sin embargo f no ser diferenciable en $a \in \Omega$ (ver ejercicios).

Consideremos el caso particular $E = K^n$ con base canónica e_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$; en tal caso la notación es

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(a) \quad \text{se escribe} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{o bien} \quad D_j f(a)$$

Utilizando (2) vemos que

$$Df(a)(v_1,\dots,v_n) = Df(a)(\sum_1^n v_j e_j) = \sum_1^n v_j Df(a)(e_j) = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \qquad (3)$$

Si aún $F = K^m$, será

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a),\dots,\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\, e_i \qquad (4)$$

e introduciendo esto en (3) queda

$$Df(a)(v_1,\dots,v_n) = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).v_j)e_i \qquad (5)$$

de modo que la matriz de Df(a) en las bases canónicas es la "matriz jacobiana" de f en a:

$$(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)) \qquad (1 \leqslant i \leqslant m \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant n) \qquad (6)$$

Mencionemos asimismo que si $E = K$ (F cualquiera) se utiliza la notación

$$f'(a) = Df(a)(1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} \qquad (7)$$

y claramente $Df(a)(\lambda) = \lambda.f'(a)$ para todo $\lambda \in K$.

El cálculo de Df(a) en "espacios más generales" puede no ser tan sencillo:

EJEMPLO 1.4. Sea $f: \ell^2(R) \longrightarrow R$, $f(x) = |x|^2$ (esto es, la norma que deriva del producto escalar en ℓ^2). De la identidad

$$|x|^2 - |a|^2 = 2\langle a,x-a\rangle + |x-a|^2$$

se deduce que $Df(a)(x-a) = 2\langle a,x-a\rangle$ pues $\dfrac{|x-a|^2}{|x-a|} \longrightarrow 0$ para $x \longrightarrow a$, luego

$$Df(a)(v) = 2\langle a,v\rangle = 2\sum_{j=1}^{\infty} a_i v_i$$

que generaliza un resultado análogo en el caso $E = R^n$; pues si $f(x) = |x|^2 = \sum_1^n x_i^2$ es $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 2a_i$ (ver ejercicio 3 de 1.9).

TEOREMA 1.5. Sean E,F,G espacios normados, $\Omega \subset E$ y $\Omega' \subset F$ sendos abiertos y sean $f: \Omega \longrightarrow F$, $g: \Omega' \longrightarrow G$ aplicaciones con $f(\Omega) \subset \Omega'$.
Entonces si f es diferenciable en $a \in \Omega$ y g es diferenciable en $b = f(a)$, la composición $gf: \Omega \longrightarrow G$ es diferenciable en a y se tiene

$$Dgf(a) = Dg(f(a))\,Df(a)$$

DEMOSTRACION. Sabemos que

$$f(x) - f(a) = Df(a)(x-a) + r(x)$$

$$g(y) - g(b) = Dg(b)(y-b) + r'(y)$$

con $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{r(x)}{|x-a|} = 0$, $\lim\limits_{y\to b} \dfrac{r'(y)}{|y-b|} = 0$. Luego

$$\begin{aligned} gf(x) - gf(a) &= Dg(f(a))(f(x) - f(a)) + r'(f(x)) = \\ &= Dg(f(a))(Df(a)(x-a) + r(x)) + r'(f(x)) = \\ &= Dg(f(a))Df(a)(x-a) + Dg(f(a))(r(x)) + r'(f(x)) \end{aligned}$$

Veamos que los dos últimos términos tienden a 0 luego de ser divididos por $|x-a|$; esto probará el teorema. Para el primero es claro pues

$$\frac{|Dg(b)(r(x))|}{|x-a|} \leqslant \|Dg(b)\| \cdot \frac{|r(x)|}{|x-a|}$$

mientras que para el segundo operamos de la siguiente forma: es

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|x-a|} \leqslant \frac{|Df(a)(x-a)|}{|x-a|} + \frac{|r(x)|}{|x-a|} \leqslant \|Df(a)\| + \frac{|r(x)|}{|x-a|}$$

así que hay un $\eta > 0$ para el cual vale

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|x-a|} \leqslant \|Df(a)\| + 1 = K \quad \text{si} \quad 0 < |x-a| < \eta$$

Por otro lado dado $\varepsilon > 0$, para ε/K hay un $\eta' > 0$ tal que

$$|r'(y)| < (\varepsilon/K)|y-b| \quad \text{si} \quad 0 < |y-b| < \eta'$$

Notar que esto vale incluso para $y=b$ pues $r'(b) = 0$.

Además por la continuidad de f en a hay un $\delta > 0$ (que puede suponerse menor que η) tal que

$$|f(x) - f(a)| < \eta' \quad \text{si} \quad |x-a| < \delta$$

Por consiguiente si $0 < |x-a| < \delta$ será

$$\frac{|r'f(x)|}{|x-a|} \leqslant (\varepsilon/K) \frac{|f(x) - f(a)|}{|x-a|} \leqslant (\varepsilon/K).\ K = \varepsilon$$

lo que concluye la demostración.

NOTA 1.6. Cuando $E = K^n$, $F = K^m$, $G = K^p$ resulta de 1.5 que la matriz jacobiana de gf en a es el producto de las matrices jacobianas de g en f(a) y de f en a. Luego

$$\frac{\partial (gf)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)).\ \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \tag{8}$$

(para $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$); que es la fórmula de derivación de una composición (conocida bajo el nombre de "regla de la cadena").

1.7. DIFERENCIALES PARCIALES.

Supongamos que Ω es abierto en E y que $E = E_1 \times E_2$ (también puede suponerse que E es suma topológica de subespacios E_1, E_2); si $f\colon \Omega \longrightarrow F$ es una aplicación y $a = (a_1,a_2) \in \Omega$ se define la *diferencial parcial respecto a* E_1 *de* f *en* a (si existe) como el elemento $D_1f(a) \in \mathcal{L}(E_1,F)$ que verifica

$$\lim_{x_1 \to a_1} \frac{f(x_1,a_2) - f(a_1,a_2) - D_1f(a)(x_1-a_1)}{|x_1 - a_1|} = 0$$

Como en el caso de la diferencial se ve que esta transformación lineal es única (si existe); análogamente se define $D_2f(a)$ supuesta existente.

El proceso anterior se generaliza sin dificultad al caso $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$; cada diferencial parcial (supuesta existente) resulta ser un elemento $D_if(a) \in \mathcal{L}(E_i,F)$.

PROPOSICION 1.8. Si f es diferenciable en $a = (a_1,\dots,a_n) \in \Omega$, existen todas las diferenciales parciales $D_if(a)$ y se tiene

$$Df(a)(v_1,\dots,v_n) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a)(v_i)$$

para todo $(v_1,\dots,v_n) \in E_1 \times\dots\times E_n$.

DEMOSTRACION. Inmediata, pues $|x_i - a_i| \leq |x-a|$.

Notemos que si $E_1 = E_2 = \dots = E_n = K$ tendremos entonces $D_i f(a)(1) = = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (comparar ambas definiciones), así que 1.8 nos da nuevamente (3) en este caso.

Cuando $\Omega \subset E_1 \times E_2$ es abierto y $f\colon \Omega \longrightarrow F_1 \times F_2$ es diferenciable en $a \in \Omega$, $Df(a)$ da lugar a cuatro transformaciones lineales continuas como en (4) de I.1. Claramente $Df(a)$ se representa por la matriz

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) \end{pmatrix}$$

de transformaciones $D_j f_i(a) \in \mathcal{L}(E_j, F_i)$.

EJERCICIOS 1.9. 1) Si $\Omega \subset K$ es abierto y $f\colon\Omega \longrightarrow F$ probar que f es diferenciable en a si y sólo si existe $f'(a)$ (definida como el límite (7)).

2) Si E es un espacio de Hilbert real, probar que $f\colon E \longrightarrow R$ dada por $f(x) = |x|$ es diferenciable en cada $a \neq 0$, con $Df(a)(v) = \frac{\langle a,v \rangle}{|a|}$ (Sug: 1.5 y 1.4).

3) Si $f\colon C^n \longrightarrow R$ es $f(x) = |x|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$, probar que f es diferenciable sólo en $a=0$. ¿Qué pasa si se considera C^n como R-espacio vectorial?

4) Si $f\colon E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ es bilineal continua, f es diferenciable en cada $a = (a_1,a_2)$ y es $Df(a)(v_1,v_2) = f(a_1,v_2) + f(v_1,a_2)$.

§ 2 - FUNCIONES DE CLASE C^1.

Si $f\colon \Omega \longrightarrow F$ es una función diferenciable en cada $x \in \Omega$ (se supone Ω abierto en E) se tiene para cada $x \in \Omega$, $Df(x) \in \mathcal{L}(E,F)$; diremos en tal caso que f es *diferenciable*, y la *diferencial* de f será la función

$$Df\colon \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \tag{1}$$

definida por $x \longrightarrow Df(x)$.

Diremos que f *es de clase* C^1 (o brevemente: f *es* C^1) si la aplicación Df es continua.

EJEMPLO 2.1. Si $E = K^n$, $F = K^m$ se tiene un isomorfismo $\mathcal{L}(K^n,K^m) \xrightarrow{\sim} K^{m\times n}$; por este isomorfismo $Df(x)$ se transforma en la aplicación "jacobiana"

$$J(f)(x) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)) \qquad J(f): \Omega \longrightarrow K^{m\times n}$$

(cf.(6) de §1). Así entonces decir que f es C^1 en este caso equivale a afirmar la continuidad de $J(f)$, que equivale a la continuidad de todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(1 \leqslant i \leqslant m \ , \ 1 \leqslant j \leqslant n)$.

LEMA 2.2. Sean E,F espacios de Banach reales, sea $\Omega \in E$ un abierto y sea $f: \Omega \longrightarrow F$ de clase C^1. Entonces si $a \in \Omega$ y el segmento $[a,x] \subset \Omega$ se tiene

$$f(x) - f(a) = \int_a^b Df(a+t(x-a))(x-a)\ dt$$

DEMOSTRACION. Sea $g: [0,1] \longrightarrow F$, $g(t) = f(a+t(x-a))$; para toda forma lineal $\varphi \in F^* = \mathcal{L}(F,R)$ la aplicación $\varphi g: [0,1] \longrightarrow R$ es derivable, con derivada (cf. 1.5)

$$(\varphi g)'(t) = D\,\varphi g(t)(1) = \varphi\ Dg(t)(1) = \varphi\ Df(a+t(x-a))(x-a)$$

que es continua. Luego

$$\varphi g(1) - \varphi g(0) = \int_0^1 (\varphi g)'(t)\ dt$$

Por consiguiente, siendo $\varphi g(1) = \varphi f(x)$, $\varphi g(0) = \varphi f(a)$ de I.4.5 deducimos que

$$\varphi(f(x) - f(a) - \int_0^1 Df(a+t(x-a))(x-a)\ dt) = 0$$

Como φ es cualquier elemento de F^*, sigue la tesis gracias al teorema de Hahn-Banach ([1], 17C).

La siguiente versión del teorema del valor medio puede probarse en un contexto más general, pero será suficiente para nuestros propósitos:

COROLARIO 2.3. Mismas hipótesis que en 2.2, se verifica

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \sup \{\|Df(y)\| : y \in [a,x]\} \ . \ |x-a|$$

DEMOSTRACION. Inmediato a partir de I.4.4 y I.1.2c).

EJERCICIOS 2.4. 1) Usando 2.3 probar: si $\Omega \subset E$ es conexo y $f: \Omega \longrightarrow F$ es diferenciable con $Df(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$, f es constante.

2) Sea $\Omega \subset E_1 \times E_2$ abierto y sea $f: \Omega \longrightarrow F$ tal que para todo $x \in \Omega$ existe $D_1 f(x)$, de tal modo que $D_1 f: \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, F)$ es continua. Probar que

$$f(x_1,x_2) - f(a_1,x_2) = \int_0^1 D_1 f(a_1+t(x_1-a_1),x_2)(x_1-a_1)\, dt \qquad (*)$$

si el segmento de extremos (x_1,x_2) y (a_1,x_2) está contenido en Ω (Mismo método que en 2.2). Enunciar y probar el análogo de 2.3.

3) Mismas hipótesis que en ejercicio 2, se supone además que existe $D_2 f(a_1,a_2)$. Probar que f es diferenciable en (a_1,a_2) (Sug: sumar a (*) la expresión $f(a_1,x_2) - f(a_1,a_2) = D_2 f(a_1,a_2)(x_2-a_2) + r(x_2)$ y usar la continuidad de $D_1 f$).

4) Sea A un álgebra de Banach sobre $K = \mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$ (I.3). Probar que la función $\theta: A_* \longrightarrow A_*$, $\theta(x) = x^{-1}$ es diferenciable y que

$$D\theta(a)(v) = -a^{-1}.v.a^{-1}$$

(Sug: si $r(v) = (a+v)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}.v.a^{-1}$, multiplicar por $a+v$ y probar que es $r(v)/|v| \longrightarrow 0$ para $v \longrightarrow 0$). Ver 3.14 b).

5) Sea E un espacio de Hilbert real, $\Omega \subset E$ un abierto y $f: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1. Probar que existe una única aplicación continua $\nabla f: \Omega \longrightarrow E$ (denominada "*gradiente*" de f) que verifica $\langle \nabla f(x), v \rangle = Df(x)(v)$ para cada $x \in \Omega$ y todo $v \in E$.

Calcular ∇f para $f(x) = |x|^2$. ¿Cuál es la expresión de ∇f si $E = \mathbf{R}^n$?; más precisamente probar que $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$.

Verificar que $\nabla(g.f) = g.\nabla f + f.\nabla g$.

6) Con las notaciones del ejercicio anterior, probar que $\max\{|Df(x)(v)| : |v| = 1\} = |\nabla f(x)|$ y deducir que $|\nabla f(x)| = \|Df(x)\|$ para todo $x \in \Omega$.

7) Sean E, F C-espacios normados; indicamos con E_0, F_0 los respectivos espacios normados reales.

i) Si $J: E_0 \longrightarrow E_0$ es $J(x) = ix$, J es una isometría de E_0 y $J^2 = -1_E$.

ii) $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(E,F) = \{T \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E_0,F_0): JT = TJ\}$.

iii) Si $\Omega \subset E$ es abierto y $f: \Omega \longrightarrow F$ es diferenciable, se dirá que f es *holomorfa*. Probar: f es holomorfa $\Leftrightarrow$ a) f es diferenciable como aplicación de $\Omega \subset E_0$ en F_0 y b) Para todo $x \in \Omega$, $Df(x)J = JDf(x)$ (donde $Df(x)$ es la diferencial de f como aplicación real).

8) Para todo espacio de Hilbert real E se define el *complexificado* $E_{\mathbf{C}}$ como el espacio de Hilbert complejo $E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ (identificado a ExE), donde

$(\alpha+i\beta).(x,y) = (\alpha x-\beta y, \alpha y+\beta x)$ y $\langle\!\langle (a,b),(x,y)\rangle\!\rangle = \langle a,x\rangle + \langle b,y\rangle + i\{\langle a,y\rangle - \langle b,x\rangle\}$.

a) $(E_C)_0 = E\times E$ y $J(x,y) = (-y,x)$.

b) $\mathcal{L}_C(E_C,F_C)$ se identifica al conjunto de operadores de $\mathcal{L}(E\times E,F\times F)$ representables en la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \qquad B,A \in \mathcal{L}(E,F).$$

c) Si $\Omega \subset E_C$ es abierto y $f\colon \Omega \longrightarrow F_C$, f es holomorfa $\Leftrightarrow$ se verifican las condiciones

$$D_1f_1 = D_2f_2 \qquad\qquad D_1f_2 = -D_2f_1$$

("ecuaciones de Cauchy-Riemann").

9) Sea A un álgebra de Banach sobre C, sea $x \in A$.

a) La resolvente $R_x\colon C\text{-}sp(x) \longrightarrow A$ es holomorfa (cf. ejercicio 4 y ejercicio 2 de I.3.3).

b) Usando el ejercicio 2 de I.3.3, el teorema de Hahn-Banach y el teorema de Lioville probar que $sp(x) \neq \emptyset$. (Sug: para cada $\varphi \in \mathcal{L}(A,C)$ considerar $\varphi R_x\colon C\text{-}sp(x) \longrightarrow C$). (Teorema de Gelfand).

c) Deducir de b) que si A es un cuerpo, entonces $A = \mathbf{C}$.

d) La función $h \longrightarrow h^{-1}(0)$ define una biyección entre el conjunto de caracteres de un álgebra de Banach A y el conjunto de ideales maximales de A (usar c)).

10) Sea A una R-álgebra de Banach sobre **R** que es un cuerpo conmutativo. Probar que A es isomorfa a **R** ó **C**. (Sug: considerar el caso que haya o nó un elemento $a \in A$ con $a^2+1 = 0$; luego $A \otimes_{\mathbf{R}} C$).

§ 3 - DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR.

Si E,F son espacios normados, $\Omega \subset E$ es un abierto y $f\colon\Omega \longrightarrow F$ es una aplicación decimos que f es *dos veces diferenciable* en $a \in \Omega$ si

1) f es diferenciable en un entorno $U \subset \Omega$ de a, y

2) $Df\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ es diferenciable en a.

En tal caso queda definida una aplicación bilineal

$$D^2f(a)\colon E\times E \longrightarrow F \qquad (1)$$

denominada la *diferencial de segundo orden de* f *en* a por la regla

$$D^2f(a)(v_1,v_2) = [D(Df)(a)(v_1)](v_2) \qquad (2)$$

OBSERVACIONES 3.1. a) Si f es dos veces diferenciable en a , Df resulta continua en a (cf. 1.2 f)).

b) Si f es la restricción a Ω de una aplicación lineal afín $x \longrightarrow T(x)+b$ (con $T \in \mathcal{L}(E,F), b \in F$), claramente es $Df(x) = T$ para todo $x \in \Omega$; luego Df es constante y por lo tanto $D^2f(a) = 0$ para todo $a \in \Omega$.

c) Supongamos que f es dos veces diferenciable en $a \in \Omega$; veamos como se calcula $D^2f(a)$. Evidentemente

$$D(Df)(a)(v_1) = \lim_{t\to 0} \frac{Df(a+tv_1) - Df(a)}{t}$$

(derivada direccional de Df en a según la dirección v_1). Nótese que se trata de un límite en $\mathcal{L}(E,F)$; entonces por 2.2 a)del cap.I (con n=1) resulta

$$D^2f(a)(v_1,v_2) = \lim_{t\to 0} \frac{Df(a+tv_1)(v_2)-Df(a)(v_2)}{t} \qquad (3)$$

d) Supongamos que $f: E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ es bilineal continua. Del ejercicio 4) de 1.9 se deduce que $Df: E_1\times E_2 \longrightarrow \mathcal{L}(E_1\times E_2,F)$ es una aplicación lineal continua, $Df(a_1,a_2)(v_1,v_2) = f(a_1,v_2) + f(v_1,a_2)$. Luego $D(Df)(x) = Df$ para todo $x \in E_1\times E_2$, o sea

$$D^2f(a_1,a_2)((v_1,v_2),(v_1',v_2')) = f(v_1,v_2') + f(v_1',v_2)$$

(independiente de (a_1,a_2)).

PROPOSICION 3.2. Sean E,F,G espacios normados, $\Omega \subset E$ y $\Omega' \subset F$ abiertos y sean $f: \Omega \longrightarrow F$, $g: \Omega' \longrightarrow G$ aplicaciones dos veces diferenciables en $a \in \Omega$ y $b = f(a)$ respectivamente.

Entonces $gf: \Omega \longrightarrow G$ es dos veces diferenciable en a, y se tiene

$$D^2gf(a)(v_1,v_2) = D^2g(a)(Df(a)(v_1),Df(a)(v_2)) + Dg(a)\, D^2f(a)(v_1,v_2)$$

DEMOSTRACION. Por 1.5 la aplicación Dgf es la composición

$$\Omega \xrightarrow[\Delta]{} \Omega\times\Omega \xrightarrow[1_E\times f]{} \Omega\times\Omega' \xrightarrow[Df\times Dg]{} \mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(F,G) \xrightarrow[\circ]{} \mathcal{L}(E,G) \qquad (4)$$

donde $\Delta(x) = (x,x)$ (lineal, restringida a Ω) y "o" es la composición. Por hipótesis todas las funciones de (4) son diferenciables en a, luego lo es su composición. Así Dgf es diferenciable en a, es decir: gf es dos veces diferenciable en a. La fórmula de la tesis se obtiene aplicando la regla de diferenciación 1.5 a (4).

3.3. CALCULO EN COORDENADAS.

Supongamos $E = K^n$ así que (cf.§1)

$$Df(a)(\xi) = Df(a)(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\xi_j \qquad (5)$$

Por lo tanto si f es dos veces diferenciable en a existirá (3.1c)):

$$\lim_{t\to 0} \frac{Df(a+t\eta)(\xi) - Df(a)(\xi)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} [\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+t\eta)\xi_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\xi_j] =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} [\sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+t\eta) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a))\xi_j]$$

lo que implica la existencia de las derivadas parciales de las $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ y nos da

$$D^2f(a)(\eta,\xi) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)\eta_k)\xi_j = \sum_{k,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)\eta_k\, \xi_j \qquad (6)$$

En realidad la diferenciabilidad de Df en a equivale a la diferenciabilidad de cada una de las aplicaciones $x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ (consecuencia de (5)).

Si $F = K$, un resultado clásico afirma entonces que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \qquad (1 \leqslant k,j \leqslant n)$$

Combinando esto con (6) deducimos: si $E = K^n$, $F = K$ la diferencial de segundo orden $D^2f(a)$: $K^n x K^n \longrightarrow K$ es simétrica, esto es

$$D^2f(a)(\eta,\xi) = D^2f(a)(\xi,\eta)$$

Esto es completamente general, según se deduce del:

TEOREMA 3.4. Si E,F son espacios normados y $f: \Omega \longrightarrow F$ es dos veces diferenciable en a, la diferencial de segundo orden $D^2f(a)$ es simétrica.

DEMOSTRACION. Supongamos primero $F = K$, sean v_1,v_2 en E. Consideramos la aplicación $\varphi: U \longrightarrow E$, $\varphi(x) = a + x_1v_1 + x_2v_2$ donde U es un entorno de 0 en K^2 (con precisión: $U = \{x \in K^2\colon a + x_1.v_1 + x_2.v_2 \in \Omega\}$).Por 3.2 , $f\varphi: U \longrightarrow K$ es dos veces diferenciable en 0 y como $D\varphi(0)(e_i) = v_i$ (i=1,2),

$D^2\varphi(0) = 0$ (3.1b)) la fórmula de 3.2 nos da

$$D^2f\varphi(0)(e_1,e_2) = D^2f(a)(v_1,v_2)$$

Análogamente

$$D^2f\varphi(0)(e_2,e_1) = D^2f(a)(v_2,v_1)$$

Como los miembros de la izquierda son iguales (por lo explicado debajo de (6)), resulta la tesis en este caso.

En el caso general, F cualquiera, sea $\psi \in \mathcal{L}(F,\mathbb{K}) = F^*$ así que ψf está en las condiciones anteriores. O sea

$$D^2\psi f(a)(v_1,v_2) = D^2\psi f(a)(v_2,v_1)$$

Pero la fórmula de 3.2 nos da

$$D^2\psi f(a)(v_1,v_2) = \psi D^2f(a)(v_1,v_2)$$

y análogamente

$$D^2\psi f(a)(v_2,v_1) = \psi D^2f(a)(v_2,v_1)$$

Por lo tanto $\psi D^2f(a)(v_1,v_2) = \psi D^2f(a)(v_2,v_1)$ y como $\psi \in F^*$ es cualquiera la tesis resulta del teorema de Hahn-Banach ([1], 17C).

Si $f\colon \Omega \longrightarrow F$ es dos veces diferenciable en cada $x \in \Omega$ decimos que f es *dos veces diferenciable*; en tal caso la regla $x \longrightarrow D^2f(x)$ define la *diferencial segunda*

$$D^2f\colon \Omega \longrightarrow S_2(E,F) \subset \mathcal{L}_2(E,F) \qquad (7)$$

(cf. §2 de cap.I). Decimos que f es *de clase* C^2 si D^2f es continua.

Podemos dar entonces una definición inductiva:

DEFINICION 3.5. Si $\Omega \subset E$ es abierto, una aplicación $f\colon \Omega \longrightarrow F$ se dice *r-veces diferenciable* en $a \in \Omega$ $(r \geqslant 2)$ si

i) f es (r-1)-veces diferenciable en un entorno U de a.

ii) La diferencial de orden r-1, $D^{r-1}f\colon U \longrightarrow \mathcal{L}_{r-1}(E,F)$ es diferenciable en a.

Si $f\colon \Omega \longrightarrow F$ es r-veces diferenciable en a, su *diferencial de orden* r *en* a es la aplicación $D^rf(a) \in \mathcal{L}_r(E,F)$ definida por

$$D^rf(a)(u_1,\dots,u_r) = \{D(D^{r-1}f)(a)(u_1)\}\,(u_2,\dots,u_r) \qquad (8)$$

Decimos que $f\colon \Omega \longrightarrow F$ es *r-veces diferenciable* si existe $D^rf(x)$ para todo $x \in \Omega$ y en tal caso la *diferencial de orden* r de f es la aplicación $x \longrightarrow D^rf(x)$, de Ω en $\mathcal{L}_r(E,F)$.

Si f es r-veces diferenciable y $D^rf\colon \Omega \longrightarrow \mathcal{L}_r(E,F)$ es continua diremos que f es de clase C^r.

Completamos la definición diciendo que "f es de clase C^0" significa que f es continua, y "f es de clase C^∞" significa que f es de clase C^r para todo $r \geqslant 0$.

OBSERVACIONES 3.6.a) Si f es r-veces diferenciable en $a \in \Omega$, $D^{r-1}f$ es continua en a (1.2f)); luego si f es r-veces diferenciable, f es de clase C^{r-1} $(r \geqslant 1)$. En particular, f es de clase C^∞ si y sólo si D^rf existe para todo $r \geqslant 1$.

b) Si $f\colon E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ es bilineal continua, $D^2f(a)$ existe para todo a (3.1d)) y es independiente de a; luego $D^3f(x) = 0$ para todo x y entonces es claro que f es de clase C^∞.

c) No es difícil explicitar $D^rf(a)$ en términos de $D^{r-1}f$; pues de (8) y 2.2a) del capítulo I se deduce como en 3.1c):

$$D^rf(a)(u_1,\dots,u_r) = \lim_{t\to 0} \frac{D^{r-1}f(a+tu_1)(u_2,\dots,u_r) - D^{r-1}f(a)(u_2,\dots,u_r)}{t} \tag{9}$$

d) Supongamos $E = R$, $r \geqslant 2$ y $f\colon \Omega \longrightarrow F$ (Ω abierto en R); si $a \in \Omega$ y existe $D^rf(a)\colon R \times\dots\times R \longrightarrow F$ (multilineal), esta aplicación queda determinada por su valor en $(1,\dots,1)$ ya que

$$D^rf(a)(u_1,\dots,u_r) = u_1.u_2.\ \dots\ .u_r.D^rf(a)(1,\dots,1)$$

Pero no es difícil ver que $D^rf(a)(1,\dots,1) \in F$ es el "vector derivado de orden r de f en a"; inductivamente con (9)

$$D^rf(a)(1,\dots,1) = \lim_{t\to 0} \frac{D^{r-1}f(a+t)(1,\dots,1) - D^{r-1}f(a)(1,\dots,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f^{(r-1)}(a+t) - f^{(r-1)}(a)}{t} = f^{(r)}(a)$$

Recíprocamente si existe $f^{(r)}(a)$ es fácil ver que existe $D^rf(a)$, y que vale

$$D^rf(a)(u_1,\dots,u_r) = u_1.u_2.\ \dots\ .u_r.f^{(r)}(a) \tag{10}$$

Será conveniente vincular D^rf con las diferenciales D^qf, $q < r$; para ello haremos uso del isomorfismo $\sigma_{p,q}$ de 2.3 (cap.I), observando que la definición (8) puede escribirse

$$D^r f(a) = \sigma_{1,r-1}(D(D^{r-1}f)(a)) \qquad (11)$$

(notar que $D(D^{r-1}f)(a) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}_{r-1}(E,F))$). Más generalmente:

PROPOSICION 3.7. Sea $f\colon \Omega \longrightarrow F$ una aplicación q-veces diferenciable ($q \geqslant 1$), tal que $D^q f$ es p-veces diferenciable en $a \in \Omega$ ($p \geqslant 1$). Entonces:

i) f es (p+q)-veces diferenciable en a, y

ii) $D^{p+q}f(a) = \sigma_{p,q}\ (D^p(D^q f)(a))$

(notar que $D^p(D^q f)(a) \in \mathcal{L}_p(E,\mathcal{L}_q(E,F))$).

DEMOSTRACION. Por inducción sobre p; si p=1 todo es válido, de modo que hay que ver como pasar de p-1 a p. Por de pronto $D^q f\colon \Omega \longrightarrow \mathcal{L}_q(E,F)$ será (p-1)-veces diferenciable y por la hipótesis inductiva tendremos

i') f es (p+q-1)-diferenciable

ii') Para cada $x \in \Omega$ es $D^{p+q-1}f(x) = \sigma_{p-1,q}\ (D^{p-1}(D^q f)(x))$.

Escribamos $g = D^q f$, así que la composición

$$\Omega \xrightarrow[D^{p-1}g]{} \mathcal{L}_{p-1}(E,\mathcal{L}_q(E,F)) \xrightarrow[\sigma_{p-1,q}]{\sim} \mathcal{L}_{p+q-1}(E,F) \qquad (12)$$

es $D^{p+q-1}f$.

Pero por hipótesis g es p-veces diferenciable en $a \in \Omega$, luego $D^{p-1}g$ es diferenciable en a; como $\sigma_{p-1,q}$ es isomorfismo lineal, de 1.5 resulta $D^{p+q-1}f$ diferenciable en a, lo que nos da i). La afirmamación ii) resulta diferenciando (12) con 1.5:

$$\sigma_{p-1,q}\ D(D^{p-1}g)(a) = D(D^{p+q-1}f)(a)$$

Luego $D^{p+q}f(a)(u_1,\ldots,u_{p+q}) = \{D(D^{p+q-1}f)(a)(u_1)\}(u_2,\ldots,u_{p+q}) =$

$$= \{\sigma_{p-1,q}\ D(D^{p-1}g)(a)(u_1)\}(u_2,\ldots,u_{p+q}) =$$

$$= \{[D(D^{p-1}g)(a)(u_1)](u_2,\ldots,u_p)\}(u_{p+1},\ldots,u_{p+q}) =$$

$$= \{D^p g(a)(u_1,\ldots,u_p)\}(u_{p+1},\ldots,u_{p+q}) =$$

$= \{D^p(D^q f)(a)(u_1,\dots,u_p)\}(u_{p+1},\dots,u_{p+q})$ que es ii).

COROLARIO 3.8. Si $f\colon \Omega \longrightarrow F$, f es r-veces diferenciable en a si y sólo si para todo $q < r$, existe $D^q f$ y es (r-q)-veces diferenciable en a.

Ahora es fácil generalizar 3.4:

PROPOSICION 3.9. Si $f\colon \Omega \longrightarrow F$ es r-veces diferenciable en $a \in \Omega$ $(r \geqslant 2)$. Entonces $D^r f(a)$ es una aplicación multilineal simétrica.

DEMOSTRACION. Por inducción sobre r, el caso r=2 es justamente 3.4; por hipótesis inductiva $D^{r-1}f(x)$ es simétrica para todo x en un entorno U de a, así que $D^{r-1}f\colon U \longrightarrow S_{r-1}(E,F) \subset \mathcal{L}_{r-1}(E,F)$ es diferenciable en a. Como $S_{r-1}(E,F)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}_{r-1}(E,F)$ resulta que $D(D^{r-1}f)(a)(u_1) \in S_{r-1}(E,F)$ de donde sigue fácilmente que $(u_1,\dots,u_r) \longrightarrow D^r f(a)(u_1,u_2,\dots,u_r)$ es simétrica como función de $u_2,\dots,u_r$. Para completar la demostración basta ver que

$$D^r f(a)(u_1,u_2,\dots,u_r) = D^r f(a)(u_2,u_1,\dots,u_r)$$

Pero poniendo $g = D^{r-2}f$, de 3.7 resulta por 3.4:

$$D^r f(a)(u_1,u_2,\dots,u_r) = [D^2 g(a)(u_1,u_2)](u_3,\dots,u_r) =$$

$$= [D^2 g(a)(u_2,u_1)](u_3,\dots,u_r) = D^r f(a)(u_2,u_1,u_3,\dots,u_r)$$

como queríamos.

3.10. CALCULOS EN COORDENADAS.

Supongamos $E = K^n$ y $f\colon \Omega \longrightarrow F$ r-veces diferenciable en $a \in \Omega$. Tendremos

$$D^r f(a)(u_1,\dots,u_r) = \sum_J u_{1j_1}.u_{2j_2}\dots u_{rj_r}.D^r f(a)(e_{j_1},\dots,e_{j_r}) \qquad (13)$$

suma extendida a todas las aplicaciones $J = (j_1,\dots,j_r)\colon [r] \longrightarrow [n]$.

Ahora

$$D^r f(a)(e_{j_1},\dots,e_{j_r}) = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_r}}(a) \qquad (14)$$

según se ve fácilmente por inducción (cf. 3.6c)):

$$D^r f(a)(e_{j_1},\dots,e_{j_r}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{j_2}\dots\partial x_{j_r}}(a+te_{j_1}) - \frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{j_2}\dots\partial x_{j_r}}(a)\right] =$$

$$= \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}} (a)$$

Pero de 3.9 se deduce que

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}}(a) = \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}(a)$$

si $(i_1,\dots,i_r)$ y $(j_1,\dots,j_r)$ difieren sólo en una permutación.

Utilizando las notaciones de 2.7e) (capítulo I) vemos que

$$D^r f(a)(\underbrace{e_1,\dots,e_1}_{\alpha_1},\dots,\underbrace{e_n,\dots,e_n}_{\alpha_n}) = \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} (a)$$

que notaremos como $D_\alpha f(a)$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in N^n$ con $|\alpha| = r$.

Así tenemos

$$D^r f(a)(x,\dots,x) = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D_\alpha f(a).x^\alpha \qquad (15)$$

expresión del polinomio homogéneo asociado a $D^r f(a)$.

Mencionemos de paso que de lo precedente se deduce que si f es de clase $\mathcal{C}^r$ entonces no sólo existen las derivadas parciales $D_\alpha f$ $(|\alpha| = r)$, sino que también son continuas como aplicaciones de Ω en F.

PROPOSICION 3.11. Sean $\Omega \subset E$, $\Omega' \subset F$ abiertos, sean $f\colon \Omega \longrightarrow F$ y $g\colon \Omega' \longrightarrow G$ aplicaciones tales que $f(\Omega) \subset \Omega'$, $f(a) = b$. Sea $1 \leqslant r \leqslant \infty$.

i) Si f y g son respectivamente r-veces diferenciables en a y b, $gf\colon \Omega \longrightarrow G$ es r-veces diferenciable en a.

ii) Si f y g son de clase C^r, también lo es gf.

DEMOSTRACION. Inducción sobre r, con un argumento formal análogo al 3.2 (úsese el mismo diagrama). El caso $r=\infty$ resulta resulta de la validez de la tesis para todo r finito.

La fórmula que expresa $D^r gf$ es bastante complicada, y no la trataremos aquí ([6]); no obstante el siguiente caso particular es interesante:

PROPOSICION 3.12. Sea Ω abierto en E y $f\colon \Omega \longrightarrow F$ r-veces diferenciable; si $u\colon G \longrightarrow E$ es afín (esto es, $u(x) = T(x)+a$ con $T \in \mathcal{L}(G,E)$ y $a \in E$) y $\Omega' = u^{-1}(\Omega)$ entonces para todo $x \in \Omega'$ vale

$$D^r fu(x) = D^r f(u(x))(T \times\dots\times T) \qquad (16)$$

DEMOSTRACION. Como fu es r-veces diferenciable por 3.11 y (16) es cierta para r=1, por inducción resulta

$$D^r fu(x)(v_1,\dots,v_r) = \lim_{t\to 0} \frac{D^{r-1}fu(x+tv_1)(v_2,\dots,v_r)-D^{r-1}fu(x)(v_2,\dots,v_r)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{D^{r-1}f(u(x)+T(v_1).t)(T(v_2),\dots,T(v_r))-D^{r-1}f(u(x))(T(v_2),\dots,T(v_r))}{t} =$$

$$= [D(D^{r-1}f)(u(x))(T(v_1))](T(v_2),\dots,T(v_r)) = D^r f(u(x))(T(v_1),\dots,T(v_r))$$

COROLARIO 3.13. Con las hipótesis anteriores, si $G = R$ y $u(t) = a+t(b-a)$, para todo $t \in R$ tal que $a+t(b-a) \in \Omega$ es

$$(fu)^{(r)}(t) = D^r fu(t)(1,\dots,1) = D^r f(a+t(b-a))(b-a,\dots,b-a)$$

Veamos ahora dos ejemplos:

EJEMPLOS 3.14 .a) Todo polinomio $f: E \longrightarrow F$ es una función C^∞ (cf.2.8,cap. I); en efecto, es suficiente verificar esto en el caso homogéneo, lo que a su vez se reduce a ver que toda $\phi \in \mathcal{L}_r(E,F)$ es de clase C^∞. Pero esto es claro por inducción, ya que

$$D\phi(a)(v_1,\dots,v_r) = \sum_{i=1}^{r} \phi(v_1,\dots,v_{i-1},a_i,v_{i+1},\dots,v_r)$$

muestra que $D\phi(a)$ es suma de aplicaciones (r-1)-lineales. Más generalmente si $\phi: E_1 \times\dots\times E_r \longrightarrow F$ es multilineal continua y $\psi: E_1 \times\dots\times E_{r-1} \longrightarrow \mathcal{L}(E_r,F)$ es $\psi(x_1,\dots,x_{r-1})(x) = \phi(x_1,\dots,x_{r-1},x)$ entonces la composición

$$E_1 \times\dots\times E_{r-1} \times E_r \xrightarrow[\psi\times 1_{E_r}]{} \mathcal{L}(E_r,F) \xrightarrow[e]{} F$$

es ϕ (donde $e(T,x) = T(x)$) cf.2.2d) de cap.I. Esto permite argumentar por inducción sobre r, con 3.6b).

b) Sea A un álgebra de Banach, y sea $\theta: A_* \longrightarrow A$ la inversa $\theta(x) = x^{-1}$ (ver 3.1 de cap.I). La identidad (cf. ejercicio 4 de 2.4):

$$(x+v)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}.v.x^{-1} = (x+v)^{-1}.vx^{-1}v.x^{-1}$$

y la continuidad de $v \longrightarrow (x+v)^{-1}$ en $v=0$, muestra que θ es diferenciable y que

$$D\theta(x)(v) = -x^{-1}.v.x^{-1}$$

Si $\eta: A \longrightarrow \mathcal{L}(A,A)$ es la aplicación lineal continua $\eta(x)(v) = x.v.x$, la fórmula precedente expresa que

$$D\theta = -\eta\theta : A_* \longrightarrow \mathcal{L}(A,A)$$

Luego $D\theta$ es también diferenciable (1.5), así que θ es dos veces diferenciable, luego $D\theta$ es dos veces diferenciable, ... Es evidente entonces que θ es de clase C^∞.

Para terminar en el siguiente resultado se utiliza la notación siguiente: si X es un espacio topológico y F es un espacio normado , $BC(X,F)$ indicará el espacio de aplicaciones continuas acotadas $f: X \longrightarrow F$, normado por $\|f\| = \sup \{|f(x)|: x \in X\}$.

PROPOSICION 3.15. Sea $\Omega \subset E$ un abierto convexo, sea F un espacio de Banach y sea $f_n: \Omega \longrightarrow F$ una sucesión de aplicaciones de clase C^r ($0 \leqslant r \leqslant \infty$), acotadas. Se supone que para todo $k < r+1$, la sucesión $D^k f_n \in BC(\Omega,\mathcal{L}_k(E,F))$ es de Cauchy.

Entonces existe una aplicación $f: \Omega \longrightarrow F$ de clase C^r tal que $D^k f_n \to D^k f$ uniformemente para todo $k < r+1$.

DEMOSTRACION. Esto es conocido si $r=0$, puesto que $BC(\Omega,F)$ es un espacio de Banach (sin hipótesis sobre Ω); como también lo es $\mathcal{L}_k(E,F)$ sigue que existen aplicaciones continuas acotadas $g_k: \Omega \longrightarrow \mathcal{L}_k(E,F)$ para cada k ($0 \leqslant k < r+1$), con $D^k f_n \longrightarrow g_k$ uniformemente.

Lo que hay que demostrar es entonces: cada g_k es diferenciable, y $D^k f = g_k$, donde $f = g_0$.

Por 3.7 es suficiente entonces considerar el caso $r=1$; escribimos (2.2):

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_0^1 Df_n(a+t(x-a))(x-a)dt$$

Como la convergencia $Df_n \longrightarrow g_1$ es uniforme,

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 g_1(a+t(x-a))(x-a)dt$$

Como g_1 es continua , dado $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que $|g_1(y)-g_1(a)| < \varepsilon$ si $|x-a| < \delta$; luego si $|x-a| < \delta$ será

$$|f(x)-f(a)-g_1(a)(x-a)| \leqslant \int_0^1 |g_1(a+t(x-a))-g_1(a)|.|x-a|dt \leqslant \varepsilon.|x-a|$$

de donde: f es diferenciable en a, con $Df(a) = g_1(a)$. Como esto vale para todo $a \in \Omega$, sigue la tesis.

EJERCICIOS 3.16. 1) Calcular $D^2f(a)$, $D^3f(a)$, $D^4f: R^2 \longrightarrow \mathcal{L}_4(R^2,R^2)$ para

$a = (0,1)$ y $f\colon R^2 \longrightarrow R^2$ dada por $f(x_1,x_2) = (e^{-x_1}\cos x_2, x_1^3 \text{ sen } x_2)$.

2) Si $f\colon \Omega \longrightarrow F$ es r-veces diferenciable y $T \in \mathcal{L}(F,G)$, Tf es r-veces diferenciable y $D^rTf(x) = TD^rf(x)$ para todo $x \in \Omega$.

3) Sea $f\colon E \longrightarrow F$ un polinomio homogéneo de grado r, sea ϕ la aplicación r-lineal simétrica asociada. Usando 2.4 del cap.I, probar que

$$D^kf(a)(x,\dots,x) = \begin{cases} 0 & k > r \\ \dfrac{r!}{(r-k)!}\;\phi(a,\dots,a,\underbrace{x,\dots,x}_{k}) & 0 \leqslant k \leqslant r \end{cases}$$

Deducir que si P es un polinomio de grado $\leqslant m$, es

$$P(a+x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{D^kP(a)}{k!}\,(x,\dots,x)$$

4) Si A es un álgebra de Banach y $\theta\colon A_* \longrightarrow A$ es $\theta(x) = x^{-1}$, probar que

$$D^r\theta(x)(v_1,\dots,v_r) = (-1)^r \sum_{\sigma} x^{-1}.v_{\sigma_1}.x^{-1}.\;\dots\;.x^{-1}.v_{\sigma_r}.x^{-1}$$

(suma extendida a todas las permutaciones $\sigma\colon [r] \longrightarrow [r]$). (Sug: inducción y 3.14b)).

5) Sea $J \subset R$ un intervalo abierto con $[0,1] \subset J$, sea F un espacio de Banach y sea $\varphi\colon J \longrightarrow F$ de clase C^r $(r \geqslant 1)$. Probar:

i) $$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 (1-t)^{r-1}.\varphi^{(r)}(t)dt \qquad \text{(Inducción)}$$

ii) $$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{r} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 (1-t)^{r-1}.(\varphi^{(r)}(t)-\varphi^{(r)}(0))dt$$

(Sug: usar i)).

6) Sea $\Omega \subset E$ abierto, sea F un espacio de Banach y sea $f\colon \Omega \longrightarrow F$ de clase C^r $(r \geqslant 1)$. Sea $U = \{(x,v)\colon x+tv \in \Omega \text{ para todo } t \in [0,1]\}$

i) U es entorno abierto de $\Omega \times \{0\}$ en $\Omega \times E$.

ii) Si $R\colon U \longrightarrow \mathcal{L}_r(E,F)$ es

$$R(x,v) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 (1-t)^{r-1}.(D^rf(x+tv)-D^rf(x))dt$$

entonces R es continua y $R(x,0) = 0$.

iii) $$f(x+v) = \sum_{k=0}^{r} \frac{D^kf(x)}{k!}\,(v,\dots,v) + R(x,v)$$

para todo $(x,v) \in U$ ("fórmula de Taylor") (Sug: considerar $\varphi(t) = f(x+tv)$, usar el ejercicio anterior y 3.13).

7) Sea F un espacio de Banach, sea $P_r: E \longrightarrow F$ una sucesión de polinomios homogéneos de grado r, con aplicaciones r-lineales simétricas asociadas $\phi_r: E^r \longrightarrow F$ (aquí $K = R$ ó C).

Se supone que $\overline{\lim} \|\phi_r\|^{1/r} = 1/R$, $R > 0$.

i) Probar que la sucesión $f_n = \sum_{r=0}^{n} P_r$ converge uniformemente en toda bola $B_\alpha = \{x: |x| \leq \alpha\}$ con $\alpha < R$, a una aplicación $f: V_R \longrightarrow F$ $(V_R = \{x: |x| < R\})$.

ii) f es la clase C^∞ y $D^k f_n \longrightarrow D^k f$ uniformemente en toda bola B_α, $\alpha < R$, para cada $k \geq 0$ (usar 3.15).

iii) Para todo $k \geq 0$, $D^k f(0) = k!\ \phi_k$.

8) Sean E,F espacios de Banach sobre $K = R$ ó C y sea $\Omega \subset E$ abierto; una aplicación $f: \Omega \longrightarrow F$ se dice *analítica* si para cada $a \in \Omega$ existe una sucesión $P_r: E \longrightarrow F$ de polinomios homogéneos de grado r y un $R > 0$ tales que $|v| < R \Rightarrow a+v \in \Omega$ y

1°) La serie $\sum_{r\geq 0} P_r(v)$ converge para todo v con $|v| < R$.

2°) Si $|v| < R$, $f(a+v) = \sum_{r\geq 0} P_r(v)$.

i) Demostrar que (con las notaciones anteriores) la serie $\sum_{r\geq 0} P_r$ converge uniformemente en la bola cerrada B_α, $\alpha < R$ y que $|P_r(x)| \leq \dfrac{|x|^r}{R^r}$ para todo x (Sug: si $\varphi \in F^*$, considerar $t \longrightarrow \varphi f(a+tv)$ que es analítica en $|t| \leq 1$ si $|v| < R$).

ii) Probar que toda función analítica es C^∞ (Sug: usando i), demostrar que es diferenciable, con diferencial analítica).

9) Para toda álgebra de Banach A sobre $K = R$ ó C, sea $U_R(A) = \{a \in A : |a| < R\}$, $0 < R \leq \infty$. Si $\mathcal{O}_R(A)$ es el álgebra de funciones analíticas $f: U_R(A) \longrightarrow A$, probar: existe un único homomorfismo $\sigma: \mathcal{O}_R(K) \longrightarrow \mathcal{O}_R(A)$ de álgebras que verifica

i) Si $P: K \longrightarrow K$ es polinomio, $\sigma(P)(x) = P(x)$.

ii) Si $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sobre compactos, $\sigma(f_n) \longrightarrow \sigma(f)$ uniformemente en $U_\alpha(A)$ para todo α, $0 < \alpha < R$.

(Sug: sustituir "t" por "x" en las series enteras).

Si A es una C*-álgebra (cap.I,§3), entonces $\sigma(f)(x)^* = \sigma(f)(x)$ si $x = x^*$

y $f(\bar{z}) = f(z)$.

10) Usando el ejercicio anterior, probar que en toda álgebra de Banach A la función $\exp: A \longrightarrow A$ definida por $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ es de clase C^∞

i) $D\exp(0) = 1_A$.

ii) $\exp(x) \in A_*$, $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$.

iii) $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$ si $xy = yx$.

§ 4 - DIFEOMORFISMOS.

La noción de "difeomorfismo" corresponde en el contexto diferenciable con la idea de homeomorfismo para espacios topológicos.

DEFINICION 4.1. Sean E,F espacios normados y sean $\Omega \subset E$, $\Omega' \subset F$ abiertos. Una aplicación $f: \Omega \longrightarrow \Omega'$ se dice C^k-*difeomorfismo* si se verifican

a) f es de clase C^k.

b) f es biyectiva.

c) f^{-1} es de clase C^k.

Evidentemente si k=0 esto es la definición de homeomorfismo, de manera que la novedad aparece si $k > 1$; si $k=\infty$, f se dirá un *difeomorfismo*.

DEFINICION 4.2. Si E,F son espacios normados y $\Omega \subset E$ es un abierto, una aplicación $f: \Omega \longrightarrow F$ se dice un C^k-*difeomorfismo local en* $a \in \Omega$ si existen entornos U de a y V de f(a) tales que $f|U: U \longrightarrow V$ es un C^k-difeomorfismo. Diremos que f es un C^k-*difeomorfismo local* si lo es en cada $a \in \Omega$.

OBSERVACIONES 4.3. a) Una aplicación puede ser C^∞ y biyectiva , pero no difeomorfismo; por ejemplo $f(t) = t^3$ en R, (su inversa $t \longrightarrow t^{1/3}$ no es diferenciable en t=0).

b) Si $f: \Omega \longrightarrow F$ es un C^k-difeomorfismo local en a $(k > 0)$, necesariamente $Df(a): E \longrightarrow F$ es un isomorfismo. Pues -con la notación de 4.2- si $g = (f|U)^{-1}: V \longrightarrow U$ de 1.5 se deduce que $Dg(f(a))Df(a) = 1_E$ y $Df(a)Dg(f(a)) = 1_F$, así que $Dg(f(a)) = Df(a)^{-1}$.

c) Si $f: \Omega \longrightarrow F$ es un C^k-difeomorfismo local $(k \geqslant 0)$, para todo abierto $U \subset \Omega$, f(U) es abierto en F (en particular, $f(\Omega)$ es abierto). PRUEBA: si $b \in f(U)$, consideramos un $a \in U$ con $f(a) = b$; hay entornos U_1 de a y V_1 de b con $f|U_1: U_1 \longrightarrow V_1$ un C^k-difeomorfismo. Luego $U \cap U_1$ es entorno abierto de a y por lo tanto $f(U \cap U_1)$ es entorno abierto de b en V_1; por lo tanto es entorno abierto de b (contenido en $f(U)$), ya que V_1 es abierto.

d) Si $f: \Omega \longrightarrow F$ es un C^k-difeomorfismo local inyectivo ($k \geqslant 0$), entonces $f: \Omega \longrightarrow f(\Omega)$ es un C^k-difeomorfismo. PRUEBA: Basta ver que f^{-1} es localmente de clase C^k, lo que es inmediato ya que con la notación de 4.2 será $f^{-1}|V = (f|U)^{-1}: V \longrightarrow U$.

EJEMPLOS 4.4. a) TRASLACIONES. Si $\tau_a: E \longrightarrow E$ es $\tau_a(x) = x+a$, τ_a es trivialmente un difeomorfismo (pues es claro que es C^∞ y que $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$, otra traslación).

b) AUTOMORFISMOS. De manera análoga, toda transformación $T \in GL(E)$ resulta un difeomorfismo.

c) COORDENADAS POLARES EN $\mathbf{R}^2$. Se trata del conocido difeomorfismo

$$f(r,\theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$$

de $(0,\infty) \times (\theta_0,\theta_0+2\pi)$ en $U = \mathbf{R}^2-L$, donde L es la semirrecta definida por $(t \cos \theta_0, t \operatorname{sen} \theta_0)$, $t \geqslant 0$.

d) El siguiente ejemplo es teóricamente relevante; se trata de $\theta: A_* \longrightarrow A_*$ donde $\theta(x) = x^{-1}$ para un álgebra de Banach A (cf.3.14). Es un difeomorfismo puesto que θ es C^∞ y $\theta^{-1} = \theta$.

e) Si $f: \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ y $g: \Omega_2 \longrightarrow \Omega_3$ son C^k-difeomorfismos ($k \geqslant 0$) también lo es $gf: \Omega_1 \longrightarrow \Omega_3$ (más general: si f es C^k-difeomorfismo local en $a \in \Omega_1$ y g es C^k-difeomorfismo local en $b = f(a)$, gf es C^k-difeomorfismo local en a).

NOTA 4.5. Hemos visto en 4.3b) que si $k > 0$, la existencia de un C^k-difeomorfismo local entre un abierto de E y un abierto de F implica necesariamente que E y F son isomorfos. En particular: si $n \neq m$, no puede haber un C^k-difeomorfismo local entre un abierto de $\mathbf{R}^n$ y un abierto de $\mathbf{R}^m$, supuesto que $k > 0$.

Este resultado es válido incluso si k=0, pero la prueba en este caso es más delicada ("teorema de invariancia de dominio", ver por ejemplo [3], 18.11). Conviene señalar asimismo que esto es falso si E y F son ambos de dimensión infinita (dos espacios de Banach separables de dimensión infinita son homeomorfos, ver [4], [5]).

Veamos ahora que la condición c) de la definición 4.1 puede debilitarse:

LEMA 4.6. Sean $\Omega \subset E$ y $\Omega' \subset F$ abiertos y sea $f: \Omega \longrightarrow \Omega'$ una biyección de clase C^k ($1 \leqslant k \leqslant \infty$). Entonces si $f^{-1}: \Omega' \longrightarrow \Omega$ es diferenciable, es de clase C^k (y por lo tanto f es un C^k-difeomorfismo).

DEMOSTRACION. Si f^{-1} es diferenciable, como en 4.3b) se tiene $Df^{-1}(y) = Df(f^{-1}(y))^{-1}$ para cada $y \in \Omega'$. Por consiguiente $Df^{-1}: \Omega' \longrightarrow \mathcal{L}(F,E)$ se escribe como la composición

$$\Omega' \xrightarrow[f^{-1}]{} \Omega \xrightarrow[Df]{} \mathrm{Iso}(E,F) \xrightarrow[i]{} \mathrm{Iso}(F,E) \qquad (*)$$

donde $i(T) = T^{-1}$ (ver ejercicio 1 de 4.9). Como i es C^∞ y Df es de clase C^{k-1}, la continuidad de f^{-1} nos da: Df^{-1} es continua (o sea f^{-1} es C^1). Nuevamente (*) nos da Df^{-1} de clase C^1, luego f^{-1} es C^2,... . En general, si f^{-1} se supone de clase C^{r-1}, de (*) resulta también Df^{-1} de clase C^r, y por lo tanto f^{-1} de clase C^r (para cada r con $1 \leqslant r < k+1$).

TEOREMA 4.7 ("Teorema de la función inversa"). Sean E,F espacios de Banach, sea Ω un abierto en E y sea $f: \Omega \longrightarrow F$ de clase C^k $(k > 0)$. Si $a \in \Omega$ y $Df(a): E \longrightarrow F$ es un isomorfismo, f es un C^k-difeomorfismo local en a.

DEMOSTRACION. Sea $b = f(a)$ y consideremos la aplicación $x \longrightarrow g(x) = Df(0)^{-1}\tau_{-b}f\tau_a(x) = Df(0)^{-1}(f(x+a)) - Df(0)^{-1}(b)$ (cf. 4.4a)b)); g está definida en el abierto $\tau_{-a}(\Omega)$, entorno de 0 en E y claramente

$$g: \tau_{-a}(\Omega) \longrightarrow E \qquad g(0) = 0 \qquad Dg(0) = 1_E$$

Evidentemente basta probar que hay entornos U,V de 0 tales que $g|U : U \longrightarrow V$ es un C^k-difeomorfismo (nótese que $f = \tau_b\, Df(0) g \tau_{-a}$, cf.4.4.e)).

O lo que es igual: probar el teorema en el caso particular en que: $E = F$, $a=0$, $f(0) = 0$ y $Df(0) = 1_E$, que es lo que pasaremos hacer.

Como $Df: \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E,E)$ es continua, hay un entorno $\Omega_1 \subset \Omega$ de 0 tal que $Df(x) \in GL(E)$ si $x \in \Omega_1$; por otro lado dado $\varepsilon = 1/2$ hay un $r > 0$ tal que $\|Df(x) - 1_E\| < 1/2$ si $|x| < r$, pudiendo evidentemente suponerse que $\overline{V_r(0)} = \{x \in E: |x| \leqslant r\} \subset \Omega_1$.

Sean

$$A = \{x \in E : |x| \leqslant r\} \qquad B = \tfrac{1}{2} A = \{x \in E: |x| \leqslant \tfrac{r}{2}\}$$

y sea $h: B \times A \longrightarrow E$ definida por

$$h(y,x) = h_y(x) = y + x - f(x)$$

así que para cada $y \in B$ es $h_y: A \longrightarrow E$.

Claramente $h_y(0) = y$ para todo $y \in B$; y si $y \in B$ es

$$|h_y(x_1) - h_y(x_2)| \leqslant \frac{1}{2} |x_1 - x_2| \quad (x_1, x_2 \text{ en } A) \qquad (1)$$

(PRUEBA: pues $\|Dh_y(x)\| = \|1_E - Df(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$ si $x \in A$ y se aplica 2.3, ya que A es convexo). Además de (1) resulta

$$|h_y(x)| \leqslant |h_y(x) - h_y(0)| + |h_y(0)| \leqslant \frac{|x|}{2} + |y| = r \qquad (2)$$

de donde resulta que $h_y(A) \subset A$ para cada $y \in B$.

Por (1) resulta que cada $h_y\colon A \longrightarrow A$ es una contracción de razón 1/2, así que por el teorema de punto fijo de Banach (ejercicio 2 de 4.9) para cada $y \in B$ hay un único $x \in A$ tal que $h_y(x) = x$. Llamándolo $h(y)$ resulta una aplicación $h\colon B \longrightarrow A$, con $g(y) = y + g(y) - fg(y)$; por lo tanto $fg(y) = y$ así que $f\colon A \longrightarrow B$ es suryectiva.

Pero por otro lado f es inyectiva ya que por (1) es

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |(h_y(x_1)-x_1)-(h_y(x_2)-x_2)| \geqslant ||x_1-x_2| - |h_y(x_1)-h_y(x_2)|| \geqslant$$
$$\geqslant |x_1-x_2| - |h_y(x_1)-h_y(x_2)| \geqslant |x_1-x_2| - \frac{1}{2}|x_1-x_2| = \frac{1}{2}|x_1-x_2|$$

vale decir

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \frac{1}{2} |x_1-x_2| \qquad (3)$$

y de aquí sigue que $f\colon A \longrightarrow B$ es biyectiva.

Escribiendo (3) en la forma

$$2\,|y_1-y_2| \geqslant |g(y_1)-g(y_2)| \qquad (4)$$

resulta además que $g = f^{-1}\colon B \longrightarrow A$ es continua. Para completar la demostración basta ver que $g = f^{-1}$ es diferenciable en $y_1 = f(x_1)$ (cf.4.6).

Ahora de

$$f(x) - f(x_1) = Df(x_1)(x-x_1) + r(x) \qquad \lim_{x \to x_1} \frac{r(x)}{|x-x_1|} = 0$$

se obtiene (aplicando $Df(x_1)^{-1}$ y escribiendo $y = f(x)$, $y_1 = f(x_1)$):

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1) = Df(x_1)^{-1}(y-y_1) - Df(x_1)^{-1}\, r(x)$$

y entonces es suficiente demostrar que

$$\lim_{y \to y_1} \frac{Df(x_1)^{-1}(rf^{-1}(y))}{|y-y_1|} = 0$$

Como $Df(x_1)^{-1} \in \mathcal{L}(E,E)$, basta probar que

$$\lim_{y\to y_1} \frac{rf^{-1}(y)}{|y-y_1|} = 0$$

Pero

$$\frac{|rf^{-1}(y)|}{|y-y_1|} = \frac{|rf^{-1}(y)|}{|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_1)|} \cdot \frac{|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_1)|}{|y-y_1|} \leqslant \frac{|rf^{-1}(y)|}{|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_1)|} \cdot 2$$

por (4), así que debemos probar que

$$\lim_{y\to y_1} \frac{rf^{-1}(y)}{|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_1)|} = 0$$

Pero esto es trivial debido a la hipótesis sobre r y al hecho que f es un homeomorfismo (esto es, la continuidad de f^{-1}).

COROLARIO 4.8. Sea $\Omega \subset E$ un abierto y sea $f\colon \Omega \longrightarrow F$ de clase C^k $(k > 0)$.

i) f es un C^k-difeomorfismo local si y sólo si $Df(x)$ es un isomorfismo para todo $x \in \Omega$.

ii) f es un C^k-difeomorfismo de Ω sobre el abierto $f(\Omega)$ si y sólo si f es inyectiva y $Df(x)$ es isomorfismo para todo $x \in \Omega$.

EJERCICIOS 4.9. 1) Sean E,F espacios de Banach, sea $Iso(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$ el conjunto de isomorfismos $u\colon E \longrightarrow F$.

i) $Iso(E,F)$ es abierto en $\mathcal{L}(E,F)$ (Sug: si $u_0 \in Iso(E,F)$, vía $u_0^{-1}u$ reducirlo al caso $E = F$, esto es $GL(E)$).

ii) $u \longrightarrow u^{-1}$ es C^∞ de $Iso(E,F)$ en $Iso(F,E)$ (cf.3.14b)).

2) Sea X un espacio métrico completo; una aplicación $u\colon X \longrightarrow X$ se dice una *contracción de razón* α si $d(u(x),u(x')) \leqslant \alpha.d(x,x')$ para todo x,x' en X.

Probar el *teorema de punto fijo* de Banach: si u es una contracción de razón α con $0 < \alpha < 1$, existe un único $x \in X$ tal que $u(x) = x$. (Sug: la unicidad es trivial; para existencia tómese $x_0 \in X$ y defínase $x_{r+1} = u(x_r) = u^{r+1}(x_0)$. Pruébese que la sucesión $(x_j)_{j\geq 0}$ es de Cauchy y tómese $x = \lim_{j\to\infty} x_j$).

3) Si $\Omega \subset R$ es un intervalo y $f\colon \Omega \longrightarrow R$ es un C^k-difeomorfismo local $(k \geqslant 1)$, f es inyectiva (y por lo tanto un C^k-difeomorfismo entre Ω y $f(\Omega)$).

4) Sea $f\colon R \longrightarrow R$, $f(0) = 0$ y $f(t) = \frac{t}{2} + t^2 \operatorname{sen} 1/t$ para $t\neq 0$.

i) f es diferenciable y $f'(0) \neq 0$.

ii) No existe ningún entorno de 0 en el cual f es inyectiva (Sug: $t_n = \frac{1}{2\pi n}$).

Deducir que la hipótesis de continuidad sobre Df no puede ser eliminada en 4.7.

§ 5 - TEOREMAS DE RANGO CONSTANTE.

Disponiendo de una buena caracterización de los C^k-difeomorfismos, el estudio de una aplicación en un entorno de un punto a puede hacerse "cambiando coordenadas".

DEFINICION 5.1. Sean E y F espacios de Banach, sea Ω abierto en E y sea $a \in \Omega$. Si $f: \Omega \longrightarrow F$ es de clase C^k $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$, una *representación local de* f *en* a es una terna $((u,U),(v,V),g)$ donde

a) U es entorno de $0 \in E$ y u es un C^k-difeomorfismo de U sobre un entorno de a, $u(U) \subset \Omega$, $u(0) = a$.

b) V es un entorno de $0 \in F$ y v es un C^k-difeomorfismo de V sobre un entorno de $b = f(a)$, $v(0) = b$.

c) $g: U \longrightarrow F$ es de clase C^k y $v^{-1}fu = g$.

OBSERVACIONES 5.2. a) Con las notaciones anteriores, u y v interpretan como "cambios de coordenadas", y g es la "expresión" de f en los nuevos sistemas de coordenadas. Nótese que $g(0) = 0$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & f(a) \\ 0 \arrow[u, "u"] \arrow[r, "g"'] & 0 \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

b) La idea es encontrar bajo que condiciones la aplicación f tiene una representación local "sencilla". EJEMPLO: si $Df(x) = 0$ para todo x en un entotorno de a, f tiene una representación local de la forma $((u,U),(v,V),0)$ (consecuencia de 2.4, ejercicio 1). En tal sentido tenemos:

TEOREMA 5.3. Sean E,F espacios de Banach, Ω abierto en E, $a \in \Omega$ y sea $f: \Omega \longrightarrow F$ de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$. Supongamos que $Df(a): E \longrightarrow F$ es un epimorfismo directo (cap.I,1.13b)), y sea $b = f(a)$.

Existe entonces una representación local de f en a de la forma

$$((U,u),(F,\tau_b),Df(a))$$

O sea: hay un entorno U de $0 \in E$ y un C^k-difeomorfismo u de U sobre un entorno $U' \subset \Omega$ de a tal que $fu(x) = Df(a)(x) + b$ para todo $x \in U$.

DEMOSTRACION. Supongamos primero a=0, f(a) = 0; sea $h \in \mathcal{L}(F,E)$ tal que $Df(0)h = 1_F$. La aplicación $g(x) = hf(x) + x - hDf(0)(x)$ está definida en Ω, con $g(0) = 0$ y $Dg(0) = 1_E$; luego por 4.7 existen entornos U, U' de 0 tales que $g|U' : U' \longrightarrow U$ es un C^k-difeomorfismo. Claramente $Dg(x) = $ $= hDf(x) + 1_E - hDf(0)$ luego componiendo con Df(0) resulta que para todo $x \in U'$ es

$$Df(0)\, Dg(x) = Df(x)$$

vale decir

$$D(Df(0)g) = Df$$

en U'. Si éste se toma conexo tendremos $Df(0)\, g|U' = f|U' + \text{const}$, pero como $g(0) = 0$, $f(0) = 0$ se obtiene finalmente $Df(0)\, g|U' = f|U'$ y la tesis es inmediata tomando $u = (g|U')^{-1}: U \longrightarrow U'$.

El caso general del enunciado se reduce a éste, considerando la aplicación $x \longrightarrow f(x+a)-b = \tau_{-b} f \tau_a$ definida en $\tau_{-a}(\Omega)$.

Dualmente:

TEOREMA 5.4. Sean E,F espacios de Banach, Ω abierto en E, $a \in \Omega$ y $f: \Omega \longrightarrow F$ de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$. Supongamos que $Df(a): E \longrightarrow F$ es un monomorfismo directo (cap.I,1.13b)) y sea $b = f(a)$.

Existe entonces una representación local de f en a de la forma

$$((U,\tau_a),(V,v),Df(a))$$

O sea: existen entornos U de $0 \in E$ con $U + a \subset \Omega$ y V de $0 \in F$, junto con un C^k-difeomorfismo v de V sobre un entorno de b tales que $v^{-1}f(x+a) = $ $= Df(a)(x)$ si $x \in U$ (o bien $vDf(a)(x-a) = f(x)$ para todo $x \in U+a$).

DEMOSTRACION. Consideramos el caso a=0, f(a) = 0; sea $h \in \mathcal{L}(F,E)$ tal que $hDf(0) = 1_E$ y sea $v(y) = fh(y) + y - Df(0)h(y)$. Claramente $v(0) = 0$ y $Dv(0) = 1_F$ así que v establece un C^k-difeomorfismo de un entorno V de 0 sobre un entorno V' de 0.

Si $U_0 = f^{-1}(V')$ es $vDf(0)(x) = f(x)$ para todo $x \in U$ = componente conexa de 0 en U_0.

El caso general queda como ejercicio.

OBSERVACIONES. 5.5. a) Cuando F es de dimensión finita, la condición de 5.3 se lee "Df(a) es suryectiva"; análogamente si E es de dimensión finita, la hipótesis en 5.4 es "Df(a) es inyectiva" (ver cap.I, 1.12).

b) En la situación de 5.3, $f|u(U) : u(U) \longrightarrow F$ resulta una aplicación abierta (ya que $Df(a)$ es abierta por ser epimorfismo).

c) Dualmente en 5.4, f es inyectiva en $U+a$; y más exactamente $f(U+a) = vDf(a)(U) = v(\mathrm{Im}Df(a) \cap W)$, donde W es un abierto en F tal que $Df(a)(U) = \mathrm{Im}(Df(a)) \cap W$.

d) Los teoremas 5.3 y 5.4 nos dan condiciones suficientes para que una aplicación tenga una representación local *lineal*. Antes de pasar a un caso más general, veamos una consecuencia importante.

TEOREMA 5.6. Sean E,F espacios de Banach, Ω abierto en E y $f: \Omega \longrightarrow F$ de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$. Sea $a \in \Omega$ y $b = f(a)$.

i) Supongamos $Df(a)$ epimorfismo directo y sea E_0 = núcleo de $Df(a)$. Existen entonces entornos $U_a \subset \Omega$ de a, U_0 de $0 \in E_0$ y V_b de $b \in F$ y un C^k-difeomorfismo $\zeta: U_0 \times V_b \longrightarrow U_a$ tal que $f\zeta(x,y) = y$ para todo $(x,y) \in U_0 \times V_b$, con $\zeta(0,b) = a$.

ii) Supongamos $Df(a)$ monomorfismo directo y sea F_0 un suplemento de la imagen de $Df(a)$. Existen entonces entornos $U_a \subset \Omega$ de a, V_b de b en F y V_0 de $0 \in F$, y un C^k-difeomorfismo $\zeta: V_b \longrightarrow U_a \times V_0$ tal que $\zeta f(x) = (x,0)$ para todo $x \in U_a$, $\zeta(b) = (a,0)$.

Gráficamente el teorema se resume en los diagramas

i)
$$\begin{tikzcd} U_a \arrow[r, "f"] & V_b \\ U_0 \times V_b \arrow[u, "\zeta"', "\sim"] \arrow[ur, "\text{proy.}"'] & \end{tikzcd}$$

ii)
$$\begin{tikzcd} U_a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\text{iny.}"'] & V_b \arrow[d, "\zeta", "\sim"'] \\ & U_a \times V_0 \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACION. i) Sea $h \in \mathcal{L}(F,E)$ con $Df(a)h = 1_F$, y consideremos el isomorfismo $\varphi: E_0 \times F \longrightarrow E$, $\varphi(x,y) = x + h(y) - h(b)$ con $\varphi(0,b) = 0$. Ciertamente $Df(a)\varphi(x,y) = y-b = \tau_{-b}(y)$.

Consideramos la notación de 5.3, hay entornos $U_0 \subset E_0$ de 0 y $V_b \subset F$ de b con $\varphi(U_0 \times V_b) \subset U$.

Poniendo $U_a = u\varphi(U_0 \times V_b)$, la tesis resulta haciendo $\zeta = u\varphi$.

ii) Es análoga y queda como ejercicio.

En el caso general, no es fácil obtener una representación local sencilla para una aplicación, y nos limitaremos al estudio de un caso particular. Así si Ω es abierto en E, $a \in \Omega$ y $f: \Omega \longrightarrow F$ es de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ diremos que f es *localmente directa* en a si existen subespacios $E_1 \subset E$, $F_2 \subset F$ y un entorno U de a tales que:

i) Para todo $x \in U$, E es suma topológica de E_1 y el núcleo de $Df(x)$.

ii) Para todo $x \in U$, F es suma topológica de F_2 y la imagen de $Df(x)$.

La caracterización de las aplicaciones localmente directas se basa en el siguiente lema algebraico:

LEMA 5.7. Sean T_0, T_1 en $\mathcal{L}(E,F)$ y supongamos que T_0 es un morfismo directo, y sean E_1, F_2 subespacios respectivos de E y F tales que

$$E_1 \oplus N(T_0) = E \qquad\qquad Im(T_0) \oplus F_2 = F$$

Entonces si

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} E_1 \\ N(T_0) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Im(T_0) \\ F_2 \end{pmatrix}$$

es la representación de T_1 en las descomposiciones de E y F (véase cap.I, luego de 1.12) son equivalentes las afirmaciones:

i) T_1 es directo y $E_1 \oplus N(T_1) = E$, $Im(T_1) \oplus F_2 = F$

ii) $A \in Iso(E_1, Im(T_0))$ y $D = CA^{-1}B$.

Si además se supone $\dim(E_1) < \infty$, las condiciones anteriores son a su vez equivalentes a

iii) $A \in Iso(E_1, Im(T_0))$ y $\dim Im(T_1) = \dim Im(T_0)$.

DEMOSTRACION. Supongamos que vale ii); la aplicación T_1 se escribe $(v_1,v_2) \longrightarrow (A(v_1+A^{-1}B(v_2)), C(v_1+A^{-1}B(v_2)))$, como aplicación

$$E = E_1 \oplus N(T_0) \longrightarrow Im(T_0) \oplus F_2 = F$$

Luego $N(T_1) = \{(v_1,v_2): v_1+A^{-1}B(v_2) = 0\}$ se identifica con el gráfico de $v \longrightarrow -A^{-1}B(v)$, de $N(T_0)$ en E_1 y por lo tanto es claro que $N(T_1)$ es suplemento topológico de E_1 (ver ejercicio 1 en 5.11).

Por otro lado es evidente que $Im(T_1) \cap F_2 = 0$; además $Im(T_1) =$
$= \{(A(v_1), C(v_1)): v_1 \in E_1\}$ y el isomorfismo $(u_1,u_2) \longrightarrow (A^{-1}(u_1), u_2)$ de de $F = Im(T_0) \oplus F_2$ sobre $E_1 \times F_2$ manda F_2 sobre $\{0\} \times F_2$ e $Im(T_1)$ sobre el gráfico de $C: E_1 \longrightarrow F_2$, de donde es claro que $Im(T_1)$ es suplemento topológico de F_2.

Ahora si vale i), consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times N(T_1) \arrow[r, "\psi"'] & Im(T_1) \times F_2 \arrow[d, "\beta", "\sim"'] \\
E = E_1 \oplus N(T_0) \arrow[u, "\alpha", "\sim"'] \arrow[r, "T_1"'] & Im(T_0) \oplus F_2 = F
\end{tikzcd}$$

donde α es el isomorfismo $v \longrightarrow (v_1,v_2)$ donde v_1 (resp: v_2) es la proyección de v sobre E_1 de núcleo $N(T_1)$ (resp: proyección de v sobre $N(T_1)$ de núcleo E_1) y análogamente para β. Así α y β se representan con las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & a \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} E_1 \\ N(T_0) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_1 \\ N(T_1) \end{pmatrix} \qquad a \in Iso(N(T_0),N(T_1))$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} Im(T_1) \\ F_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Im(T_0) \\ F_2 \end{pmatrix} \qquad b \in Iso(Im(T_1),Im(T_0))$$

Por otro lado ψ es la representación de T_1 en la descomposición indicada, así que

$$\psi \text{ corresponde a } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} E_1 \\ N(T_1) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Im(T_1) \\ F_2 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda \in Iso(E_1,Im(T_1))$. Por consiguiente

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\lambda & b\lambda u \\ w\lambda & w\lambda u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

es exactamente la representación de la hipótesis. Sigue que $A: E_1 \longrightarrow Im(T_0)$ es isomorfismo y que $D = w\lambda u = w\lambda(\lambda^{-1}b^{-1})b\lambda u = CA^{-1}B$ como queríamos.

Finalmente, si suponemos $\dim(E_1) = \dim(Im(T_0)) = r$ digamos, y si vale i) claramente debe ser $\dim Im(T_1) = \dim Im(T_0)$ (ambos subespacios tienen el mismo suplemento F_2).

Recíprocamente si $\dim(E_1) < \infty$ y vale iii), veamos que $D = CA^{-1}B$.

El isomorfismo $F \longrightarrow F$ representado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -CA^{-1} & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} Im(T_0) \\ F_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Im(T_0) \\ F_2 \end{pmatrix}$$

compuesto con T_1 tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -CA^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

La aplicación $E \longrightarrow F$ representada por esta matriz debe tener una imagen V de dimensión r. Como $A \in \mathrm{Iso}(E_1, \mathrm{Im}(T_0))$ y ambos E_1, $\mathrm{Im}(T_0)$ tienen dimensión r, forzosamente $V \subset \mathrm{Im}(T_0)$. Luego $D-CA^{-1}B = 0$.

TEOREMA 5.8. Sean E,F espacios de Banach, sea Ω abierto en E, $a \in \Omega$ y sea $f: \Omega \longrightarrow F$ de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$, localmente directo en a.

Entonces existe una representación local de f en a de la forma

$$((U,u),(V,v),T)$$

donde $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es un morfismo directo (cf. ejercicio 2 de 5.11).

DEMOSTRACION. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $a=0$, $f(a) = 0$; por hipótesis hay un entorno Ω_0 de 0 y subespacios directos tales que

$$E = E_1 \oplus N(Df(x)) \qquad\qquad F = \mathrm{Im}(Df(x)) \oplus F_2$$

para todo $x \in \Omega_0$. Pongamos $N_0 = N(Df(0))$, $F_1 = \mathrm{Im}(Df(0))$.

En la descomposición $E = E_1 \oplus N_0$, $F = F_1 \oplus F_2$, $Df(x)$ se representa por la matriz (cf.1.7):

$$\begin{pmatrix} D_1f_1(x) & D_2f_1(x) \\ D_1f_2(x) & D_2f_2(x) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} E_1 \\ N_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

donde $x = (x_1,x_2) \in \Omega_0$. Por el lema anterior

$$\begin{cases} D_1f_1(x) : E_1 \longrightarrow F_1 \quad \text{es isomorfismo} \quad \text{y} \\ D_2f_2(x) = D_1f_2(x)\, D_1f_1(x)^{-1}\, D_2f_1(x) \end{cases}$$

para todo $x \in \Omega_0$.

Sea $\varphi(x_1,x_2) = (f_1(x_1,x_2),x_2)$; φ es de clase C^k y está definida en el entorno Ω_0 de $(0,0) \in E_1 \oplus N_0$, $\varphi: \Omega_0 \longrightarrow F_1 \oplus N_0$, $\varphi(0,0) = 0$.

Claramente $D\varphi(0)$ es isomorfismo, con

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} D_1f_1(x) & D_2f_1(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D\varphi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} D_1f_1(x)^{-1} & -D_1f_1(x)^{-1}D_2f_1(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $\varphi: \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ es un C^k-difeomorfismo para convenientes entornos Ω_1 y Ω_2 de 0 en $E = E_1 \oplus N_0$.

Sea ahora $\psi\colon \Omega_2 \cap (E_1 \times \{0\}) \times F_2 \longrightarrow F = F_1 \times F_2$ dada por

$$\psi(x_1,y) = (f_1\varphi^{-1}(x_1,0), y+f_2\varphi^{-1}(x_1,0))$$

bien de clase C^k (nótese que $\psi(x_1,y) = f\varphi^{-1}(x_1,0) + (0,y)$).

Finalmente si $T\colon E \longrightarrow E_1 \times F_2$ es $T(x_1,x_2) = (x_1,0)$, tendremos $\psi T\varphi(x_1,x_2) =$ $= f\varphi^{-1}(f_1(x_1,x_2),0)$ y por consiguiente

$$D\psi T\varphi(x) \text{ es } \begin{pmatrix} D_1f_1(x) & D_2f_1(x) \\ D_1f_2(x) & D_2f_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1f_1(x)^{-1} & -D_1f_1(x)^{-1}D_2f_1(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1f_1(x) & D_2f_1(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectuando el "producto" indicado se obtiene

$$D\psi T\varphi(x) = Df(x) \qquad x \in \Omega_1$$

Por lo tanto si U es la componente conexa de 0 en Ω_1 resultará $\psi T\varphi = f$ sobre U, lo que da enseguida la tesis.

OBSERVACIONES 5.9. a) Sea Ω abierto en E, $f\colon \Omega \longrightarrow F$ de clase C^k $(k > 1)$ y definamos $r_f\colon \Omega \longrightarrow N \cup \{\infty\}$ por $r_f(x)$ = rango de $Df(x)$ (= dimensión de la imagen de $Df(x)$).

Para cada $s < \infty$, definimos $R_s(f) = \{x\colon r_f(x) = s\}$; decimos que a es un *punto regular* de f si existe un $s < \infty$ tal que $R_s(f)$ es entorno (no necesariamente abierto) de a. O lo que es igual: r_f es constante (y finito) en un entorno de a.

b) El conjunto Reg(f) de los puntos regulares de f es abierto por definición.

c) Si $r_f(x_0) = \ell < \infty$, entonces $r_f(x) \geq \ell$ para todo x en un entorno V de x_0 (o sea: $r_f\colon \Omega \longrightarrow N \cup \{\infty\}$ es semicontinua inferiormente).

En efecto si $E_1 \oplus N(Df(x_0)) = E$ e $Im(Df(x_0)) \oplus F_2 = F$, $Df(x_0)$ se representa mediante

$$\begin{pmatrix} D_1f_1(x_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} E_1 \\ N(Df(x_0)) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Im(Df(x_0)) \\ F_2 \end{pmatrix}$$

con $D_1f_1(x_0) \in Iso(E_1, Im(Df(x_0)))$. Por continuidad de Df, hay un entorno V de x_0 tal que $D_1f_1(x) \in Iso(E_1, Im(Df(x_0)))$ para todo $x \in V$ y por lo tanto $\dim(Im(Df(x))) \geq \ell$ si $x \in V$ puesto que $Df(x)$ resulta inyectiva sobre E_1.

d) Si $r_f\colon \Omega \longrightarrow N \cup \{\infty\}$ es acotada (en particular si E ó F son de dimensión finita), entonces Reg(f) es denso en Ω. PRUEBA: si $W \neq \emptyset$ es un abier to en Ω y $\ell = \max\{r_f(x): x \in W\}$, sea $x_0 \in W$ con $r_f(x_0) = \ell$. Como necesariamente $r_f(x) = \ell$ para todo x en un entorno V de x_0 (cf. c)) obtenemos $\emptyset \neq W \cap V \subset V \cap R_\ell(f)$ y por lo tanto $W \cap V \subset \mathrm{Reg}(f) \cap V$.

De estas disquisiciones resulta:

TEOREMA 5.10 ("teorema del rango constante"). Sean E,F espacios de Banach, sea $\Omega \subset E$ abierto y $f: \Omega \longrightarrow F$ de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$. Entonces si a es punto regular de f, hay una representación local de f de la forma $((U,u),(V,v),T)$ donde $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es de rango $r_f(a)$.

DEMOSTRACION. Pues f es localmente directo en a) por 5.7 iii) (comparar con 5.9 c)).

EJERCICIOS 5.11. 1) Sean E,F espacios normados y sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$; probar que el gráfico $G_f = \{(x,T(x)): x \in E\}$ es un subespacio suplementario de $\{0\}\times F$ en $E\times F$.

2) Sean E,F espacios de Banach, sea $f: \Omega \longrightarrow F$ de clase C^k $(k \geqslant 1)$ donde Ω es abierto en E. Sea $a \in \Omega$; si f tiene una representación local en a del tipo $((U,u),(V,v),T)$ con $T: E \longrightarrow F$ un morfismo directo, entonces f es localmente directo en a.

3) Sea Ω un abierto en K^n, $f: \Omega \longrightarrow K^m$ de clase C^k $(k \geqslant 1)$. Si $a \in \Omega$ es tal que $r_f(x) = r$ para todo x en un entorno de a, probar que hay una representación local de f en a del tipo

$$((U,u),(V,v),s_r)$$

donde $s_r(t_1,\ldots,t_n) = (t_1,\ldots,t_r,0,\ldots,0)$.

(Sug: Usar 5.10 y un cambio de bases en K^n y K^m).

4) Sean E,F espacios de Banach, sea Ω abierto en E y $f: \Omega \longrightarrow F$ de clase C^k $(k \geqslant 1)$.

i) Si $\dim E < \infty$ y f es localmente inyectiva, el conjunto de puntos $x \in \Omega$ en los cuales $Df(x)$ es inyectiva es un abierto denso.

ii) Si $\dim F < \infty$ y f es abierta, el conjunto de los $x \in \Omega$ en los cuales $Df(x)$ es suryectiva es un abierto denso.

iii) Se supone que f es localmente directo en todo $x \in \Omega$; mostrar que si $Df(x)$ no es suryectiva, hay un entorno U de x tal que $f(U)$ es magro en F.

5) Sean E y F espacios de Banach, sea Ω abierto en E y sea $f: \Omega \longrightarrow F$ de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ tal que $Df(x)$ es un monomorfismo directo para todo $x \in \Omega$, y tal que $f(\Omega)$ es abierto en F.

Probar: si E es separable, f es un C^k-difeomorfismo local (Sug: utilizar iii) del ejercicio anterior y el teorema de Baire).

6) Sean E_1,E_2 espacios de Banach, sea $\Omega \subset E_1 \times E_2$ un abierto y sea $(a_1,a_2) \in \Omega$ tal que $f(a_1,a_2) = 0$, $D_2f(a_1,a_2)\colon E_2 \longrightarrow E_2$ es un isomorfismo para una cierta $f\colon \Omega \longrightarrow E_2$ de clase C^k $(k \geqslant 1)$.

Demostrar la siguiente versión del "teorema de funciones implícitas": existen entornos $U_1 \subset E_1$ de a_1, $U_2 \subset E_2$ de a_2 y una única $g\colon U_1 \longrightarrow E_2$ de clase C^k tal que

i) $g(U_1) \subset U_2$ y $g(a_1) = a_2$.

ii) El gráfico de g es $f^{-1}(0) \cap (U_1 \times U_2)$.

(Sug: suponer $a_1 = 0$, $a_2 = 0$; definir $\varphi(x_1,x_2) = (x_1,f(x_1,x_2))$ y verificar que es un C^k-difeomorfismo local en 0, de un entorno Ω_1 en otro Ω_2. Considere $U_1 \times U_2 \subset \Omega_1 \times \Omega_2$, probar que $\psi = \varphi^{-1}$ es de la forma $(x_1,x_2) \longrightarrow$ $\longrightarrow (x_1,h(x_1,x_2))$. Explicitando $\varphi\psi = id$, $\psi\varphi = id$ deducir que g debe ser $x_1 \longrightarrow h(x_1,0)$).

CAPITULO III

§ 1 - MAPAS Y ATLAS.

Supongamos que X es un espacio topológico y E un espacio de Banach.

DEFINICION 1.1. Un *mapa* de X, de *modelo* E consiste de una terna (u,U,E) donde U es un abierto en X y $u: U \longrightarrow E$ es un homeomorfismo entre U y un conjunto abierto $u(U) \subset E$. Si $a \in X$, decimos que (u,U,E) es un mapa *en* a si $a \in U$; si además $u(a) = 0$, diremos que es un mapa *centrado en* a. En cualquier caso U es el *dominio* del mapa y u puede llamarse un "sistema de coordenadas".

Si $0 \leqslant k \leqslant \infty$, dos mapas $(u,U,E),(v,V,F)$ de X se dirán C^k-*compatibles* si $U \cap V = \emptyset$ o bien si $U \cap V \neq \emptyset$ y la biyección continua $vu^{-1}: u(U \cap V) \longrightarrow v(U \cap V)$ es un C^k-difeomorfismo ("cambio de coordenadas").

OBSERVACIONES 1.2. a) Si $U \cap V \neq \emptyset$, decir que los mapas (u,U,E) y (v,V,F) son C^k-compatibles significa que $vu^{-1}: u(U \cap V) \longrightarrow v(U \cap V)$ y $uv^{-1}: v(U \cap V) \longrightarrow u(U \cap V)$ son ambas de clase C^k.

b) Nótese que dos mapas de X son siempre C^0-compatibles.

c) Si (u,U,E) es un mapa de X y $g: u(U) \longrightarrow \Omega$ es un C^k-difeomorfismo de $u(U)$ sobre un abierto $\Omega \subset E$, es claro que (gu,U,E) es otro mapa de X. Ambos mapas son C^k-compatibles,

En particular si (u,U,E) es un mapa en $a \in X$, y $c = u(a)$ el mapa $(\tau_{-c}u,U,E)$ es un mapa centrado en a (cf.4.4a) de cap.II).

d) Si $k \geqslant 1$ y $(u,U,E),(v,V,F)$ son mapas de X, C^k-compatibles con $U \cap V = \emptyset$, necesariamente $Dvu^{-1}(u(x)): E \longrightarrow F$ es un isomorfismo para todo $x \in U \cap V$. En particular si E es de dimensión finita n, resulta también $\dim(F) = n$; y en el caso general, repetimos: necesariamente E y F son isomorfos.

e) Si $k=0$ y $(u,U,E),(v,V,F)$ son mapas de X sólo puede afirmarse algo cuando E (ó F) es de dimensión finita, apelando a la discusión de 4.5 (cap. II): si $\dim(E) = n < \infty$ resulta $\dim(F) = n$ ("invariancia de la dimensión por homeomorfismos"). Por el contrario si E es de dimensión infinita, poco puede deducirse de la C^0-compatibilidad de ambos mapas (ver [4], [5]).

DEFINICION 1.3. Un atlas de clase C^k $(k \geqslant 0)$ en un espacio topológico X es una familia $A = \{(u_i,U_i,E_i)\}_{i\in I}$ de mapas de X, C^k-compatibles dos a dos, y tal que $\bigcup_{i\in I} U_i = X$.

Dados dos atlas $\mathcal{A} = \{(u_i,U_i,E_i)\}_{i\in I}$, $\mathcal{B} = \{(v_j,V_j,F_j)\}_{j\in J}$ en X, ambos de clase C^k, diremos que $\mathcal{A}$ C^k-*precede* a $\mathcal{B}$ (notación $\mathcal{A} \underset{k}{\leq} \mathcal{B}$) si para todo par $(i,j) \in I\times J$ se verifica: $U_i \cap V_j = \emptyset$ o bien

$$v_j u_i^{-1}: u_i(U_i \cap V_j) \longrightarrow v_j(U_i \cap V_j)$$

es de clase C^k.

Pondremos $\mathcal{A} \underset{k}{\simeq} \mathcal{B}$ ("$\mathcal{A}$ es C^k-*equivalente* a $\mathcal{B}$") si $\mathcal{A} \underset{k}{\leq} \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \underset{k}{\leq} \mathcal{A}$; un atlas $\mathcal{A}$ de clase C^k en X se dice *saturado* si contiene a todos los atlas de clase C^k que son C^k-equivalentes con él.

OBSERVACIONES 1.4. a) La relación $\underset{k}{\leq}$ es reflexiva y transitiva, mientras que $\underset{k}{\simeq}$ es de equivalencia; evidentemente $\mathcal{A} \underset{k}{\simeq} \mathcal{B}$ es lo mismo que afirmar que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un atlas de clase C^k.

b) Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son atlas de clase C^k en X, resulta claro que $\mathcal{A} \underset{r}{\simeq} \mathcal{B}$ para todo r con $0 \leq r \leq k$. En cambio es falso que $\mathcal{A} \underset{k}{\leq} \mathcal{B}$ implica $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ (ver ejercicios 1 y 2).

c) Nótese que si k=0, es $\mathcal{A} \underset{0}{\simeq} \mathcal{B}$ para cualquier par de atlas de clase C^0 en X.

d) Si $\mathcal{A}$ es un atlas $\{(u_i,U_i,E_i)\}_{i\in I}$ de clase C^k en X, saturado, entonces los conjuntos U_i $(i \in I)$ constituyen una base de la topología de X.
PRUEBA: si $W \subset X$ es abierto y $x_0 \in W$ hay un mapa $(u_{i_0},U_{i_0},E_{i_0}) \in \mathcal{A}$ tal que $x_0 \in U_{i_0}$. Ponemos $U = U_{i_0} \cap W$, $u = u_{i_0}|U$; entonces (u,U,E_{i_0}) es un mapa en X, $x_0 \in U \subset W$ y claramente $(u,U,E_{i_0}) \in \mathcal{A}$, pues $\mathcal{A}$ es saturado.

LEMA 1.5. Si $\mathcal{A}$ es un atlas de clase C^k en X, existe un único atlas saturado $\mathcal{A}^*$ de clase C^k en X tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ (y por ende $\mathcal{A} \underset{k}{\simeq} \mathcal{A}^*$).

DEMOSTRACION. Tómese $\mathcal{A}^*$ como la unión de todos los atlas $\mathcal{B}$ C^k-equivalentes a $\mathcal{A}$.

EJERCICIOS 1.6. 1) Sean $\mathcal{A} = (1_R,R,R)$ y $\mathcal{B} = (u,R,R)$ los atlas de clase C^∞ en R, donde $u(x) = x^3$. Verificar que $\mathcal{A} \underset{\infty}{\leq} \mathcal{B}$, pero $\mathcal{B} \underset{1}{\leq} \mathcal{A}$ es falso.

2) Sea $\mathcal{A}$ (resp: $\mathcal{B}$) el atlas de clase C^∞ en R^n formado por todos los (u,U,R^n) donde U recorre el conjunto de bolas abiertas (resp: cubos abiertos) y $u: U \longrightarrow R^n$ es la inclusión. Mostrar que $\mathcal{A} \underset{\infty}{\simeq} \mathcal{B}$ y que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

3) Si $\mathcal{A} = \{(u_i,U_i,E_i)\}_{i\in I}$ y $\mathcal{B} = \{(v_j,V_j,F_j)\}_{j\in J}$ son atlas en X e Y respectivamente, ambos de clase C^k $(k \geq 0)$, verificar que $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(u_i\times v_j,U_i\times V_j,E_i\times F_j)\}_{i,j}$ es un atlas de clase C^k en X×Y.

§ 2 - VARIEDADES DIFERENCIABLES.

Una *variedad diferenciable de clase* C^k $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ es un par (X,A), donde X es un espacio topológico separado ("o de Hausdorff") y A es un atlas saturado en X, de clase C^k.

Si $A = \{(u_i,U_i,E_i)\}_{i\in I}$ decimos que la variedad es *pura, de modelo* E si todos los E_i son isomorfos a E; la variedad se dirá de *dimensión finita* si $\dim(E_i)$ es finita para todo $i \in I$, y de *dimensión* n (resp: de *dimensión* $\leqslant n$) si $\dim(E_i) = n$ (resp: $\dim(E_i) \leqslant n$) para todo $i \in I$.

OBSERVACIONES 2.1. a) La hipótesis sobre "separación" de X impuesta en la definición de variedad no es esencial para la validez de algunos resultados, lo que será aclarado en cada caso.

b) El lema 1.5 muestra que la condición de "saturación" del atlas A en la definición no es esencial (aunque sí conveniente por 1.4d)); así un atlas C de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ en X determina automáticamente una variedad (X,C^*). Nótese que (X,A^*) puede coincidir con (X,B^*) aunque $A \neq B$; basta para ello que $A \underset{k}{\sim} B$.

c) Usualmente indicaremos la variedad (X,A) simplemente con X, cuando resulte claro del contexto cual es el atlas A.

Los teoremas de estructura (ver § próximo) permiten construir sistemáticamente nuevas variedades a partir de otras; veamos por ahora algunos ejemplos sencillos.

EJEMPLOS 2.2. a) Si X es una variedad, de atlas $A = \{(u_i,U_i,E_i)\}_{i\in I}$ e $Y \subset X$ es un abierto, es inmediato que $A|Y = \{(u_i|U_i \cap Y, U_i \cap Y, E_i)\}_{i\in I}$ es un atlas saturado en Y. El par $(Y,A|Y)$ se denomina una *subvariedad abierta* de X. Luego veremos una definición general de "subvariedad" que comprende a ésta como caso particular (2.7).

b) Si X_λ $(\lambda \in L)$ es una familia de variedades (con atlas A_λ, $\lambda \in L$) la suma topológica $\sum\limits_\lambda X_\lambda$ es evidentemente una variedad.

c) Si E es un espacio de Banach, el atlas $A = (1_E,E,E)$ define una variedad de clase C^∞ (cf.2.1b)); el atlas saturado A^* consiste de todos los mapas (u,U,E) con $U \subset E$ abierto y $u\colon U \longrightarrow u(U)$ difeomorfismo. Cualquier abierto $\Omega \subset E$ resulta asimismo una subvariedad abierta (con la restricción $U \subset \Omega$ para los mapas (u,U,E)).

Cuando nos referimos a E como variedad diferenciable, se sobreentenderá que se trata de la estructura indicada; análogamente para un abierto

$\Omega \subset E$.

d) Una "variedad topológica" o variedad de clase C^0 es un espacio topológico separado provisto de un atlas de clase C^0; la mayor parte de las disquisiciones topológicas siguientes subsisten para tales objetos.

OBSERVACIONES 2.3. Supongamos que X es una variedad diferenciable de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$, con atlas A. Entonces:

a) X es un espacio localmente conexo por arcos; en efecto esto es claro si X es un abierto en un espacio de Banach (pues toda bola abierta es conexa, luego conexa por arcos). En el caso general basta observar que todo $x \in X$ tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de un espacio de Banach.

b) Sigue de a) que X es suma de subvariedades abiertas conexas por arcos (cf.[7], pág.113), las componentes conexas de X.

c) Sea $\equiv$ la relación de equivalencia definida así en X: $x \equiv y$ significa que existen mapas (u,U,E),(v,V,F) en x e y respectivamente, tales que E y F son isomorfos. Claramente todo $x \in X$ tiene un entorno cuyos puntos son equivalentes a x (tómese un mapa en x), y por consiguiente las clases de equivalencia X_λ $(\lambda \in L)$ son abiertas.

Como éstas contituyen una partición de X, resultan asimismo cerradas. Sigue que X es suma de las subvariedades abiertas X_λ, cada una de las cuales es evidentemente pura; combinando ésto con b) deducimos que toda variedad es suma de subvariedades abiertas conexas puras.

d) Toda variedad es un espacio de Baire (cf.[8],§5); pues esto es válido para cualquier abierto no vacío en un espacio de Banach, y por consiguiente todo dominio U de un mapa (u,U,E) resulta ser un espacio de Baire. Se concluye con prop.4 de [8], §5.

e) Una variedad es metrizable si y sólo si es paracompacta. Pues todo espacio metrizable es paracompacto ([8],§4, n°5); por otro lado es claro que X es localmente metrizable, y un espacio paracompacto, localmente metrizable resulta metrizable ([9]).

f) Toda variedad localmente compacta es de dimensión finita; pues si (u,U,E) es un mapa en $x_0 \in X$ y $V \subset U$ es un entorno compacto de x_0, u(V) resulta un entorno compacto de $u(x_0)$ y por lo tanto $u(V)-u(x_0)$ es un entorno compacto de $0 \in E$. Pero un conocido teorema de Riesz afirma que entonces E es de dimensión finita.

g) Recíprocamente toda variedad *separada* de dimensión finita es localmente compacta; si (u,U,R^n) es un mapa centrado en x_0, se considera un $\varepsilon > 0$

tal que la bola $B_\varepsilon = \{v \in R^n: |v| \leqslant \varepsilon\} \subset u(U)$. Luego $u^{-1}(B_\varepsilon^0)$ es abierto en U - y por lo tanto en X - así que $u^{-1}(B_\varepsilon)$ es un entorno compacto de x_0.

h) Si X es de dimensión finita y conexa, X es paracompacta si y sólo si es unión de una sucesión creciente de compactos. Pues por [7], pág.242, X es paracompacta si y solo sí es suma de subvariedades abiertas σ-compactas.

PROPOSICION 2.4. Sea X una variedad diferenciable (no necesariamente separada). Entonces son equivalentes las afirmaciones:

a) Para todo $x \in X$ y todo entorno Ω de x existe un entorno cerrado V de x tal que $V \subset \Omega$.

b) Para todo $x \in X$ y todo mapa (u,U,E) centrado en x existe un $r_0 > 0$ tal que: para todo $r \in (0,r_0)$ el conjunto $B_r(x) = \{x' \in X: |u(x')| \leqslant r\}$ es un entorno cerrado de x, de interior $B_r(x)^0 = \{x' \in X: |u(x')| < r\}$.

Cualquiera de estas afirmaciones implica que X es separada.

DEMOSTRACION. Como los dominios de los mapas centrados en x forman una base del conjunto de entornos de x (1.4d)), es claro que b) $\Rightarrow$ a).

Recíprocamente supongamos que vale a) y sea (u,U,E) un mapa centrado en $x_0 \in X$; hay un abierto V con $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Luego u(V) es abierto en u(U) (y por ende en E), así que es un entorno abierto de 0.

Si $r_0 > 0$ es tal que $\overline{V_{r_0}(0)} = \{v \in E: |v| \leqslant r_0\} \subset u(V)$ resulta que si $0 < r < r_0$ tendremos $B_r = u^{-1}(\overline{V_r(0)}) \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Como $u^{-1}: u(U) \longrightarrow U$ es homeomorfismo, B_r es cerrado en U; pero como $B_r \subset \overline{V}$, B_r es cerrado en $\overline{V}$ (que es cerrado en X) luego B_r es cerrado.

Con un razonamiento análogo se ve que $B_r^0 = u^{-1}(V_r(0))$.

Para la última afirmación, observamos que de b) se deduce que la intersección de los B_r $(0 < r < r_0)$ se reduce a $\{x\}$; con mayor razón la intersección de todos los entornos cerrados de x se reduce a $\{x\}$. Por lo tanto si vale b), X es un espacio de Hausdorff.

OBSERVACIONES 2.5. a) Si X es separada de dimensión finita, resulta localmente compacta por 2.3g), luego regular; y por lo tanto valen a) y b) de 2.4.

b) Por el contrario una variedad de dimensión infinita separada no necesariamente verifica a) ó b) de 2.4; o sea: para variedades de dimensión infinita las propiedades "separado" y "regular" no son equivalentes.

(Ver en tal sentido [10], págs.202 a 204, donde se muestran algunas situaciones notables).

2.6. APLICACIONES ENTRE VARIEDADES.

Supongamos que X e Y son variedades de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ y sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación. Si $0 \leqslant k \leqslant r$, decimos que f *es de clase* C^k si para cada $x \in X$ existen mapas (u,U,E) en x y (v,V,F) en $f(x)$ tales que

i) $f(U) \subset V$.

ii) La aplicación $vfu^{-1}\colon u(U) \longrightarrow v(V) \subset F$ es de clase C^k.

(Esta aplicación se denomina la "expresión de f en términos de las coordenadas u y v").

Toda aplicación de clase C^k es también de clase C^j si $0 \leqslant j \leqslant k$; de 1.4 d) se deduce que "f de clase C^0" equivale a "f continua".

Si $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ son ambas de clase C^k $(0 \leqslant k \leqslant r)$ y las variedades X,Y,Z son de clase C^r es inmediato verificar que $gf\colon X \longrightarrow Z$ es de clase C^k.

Indicamos con $C^k(X,Y)$ el conjunto de aplicaciones $X \longrightarrow Y$ de clase C^k.

Corresponde señalar que si X,Y son abiertos en sendos espacios de Banach E,F la noción de "aplicación de clase C^k" recién definida coincide con la usual (§3, cap.II) (ver ejercicio 1 de 2.10).

Una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ entre variedades de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ se dirá un C^k-*difeomorfismo* $(0 \leqslant k \leqslant r)$ si

i) f es de clase C^k.

ii) f es biyectiva .

iii) $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ es de clase C^k.

Si $k=r$, diremos simplemente que f es un *difeomorfismo*.

2.7. SUBVARIEDADES.

Sea X una variedad de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ y sea $A \subset X$ un subconjunto. Decimos que A es una *subvariedad* de X si se verifica la condición siguiente:

(S) Para cada $a \in A$ existe un mapa (u,U,E) centrado en a, y un subespacio directo F_U de E tales que

$$u|A \cap U : A \cap U \longrightarrow F_U \cap u(U)$$

es un homeomorfismo.

Tomando entonces las tales ternas $(u|A \cap U, A \cap U, F_U)$ es inmediato que se obtiene un atlas de clase C^r para A, lo que permite (cf.2.1b)) definir una estructura de variedad de clase C^r para A.

OBSERVACIONES 2.8. a) Las subvariedades abiertas (2.2a)) son un caso particular de subvariedades (con $F_U = E$ y (u,U,E) mapa centrado en $a \in A$ y $U \subset A$).

b) Todo subespacio discreto $A \subset X$ es una subvariedad (de dimensión 0) ya que la condición (S) se verifica con $F_U = \{0\}$ y (u,U,E) tal que $\{a\} = U \cap A$.

c) Si $A \subset X$ es una subvariedad, la inclusión $j: A \longrightarrow X$ es de clase C^r.

d) Supongamos $\dim(X) = n$, cada mapa (u,U,R^n) determina aplicaciones $u_i: U \longrightarrow R$ de clase C^r $(1 \leqslant i \leqslant n)$; ahora si $A \subset X$ es subvariedad y $a \in A$ tendremos la condición (S) de arriba. Si $\dim(F_U) = h$, consideramos un $T \in GL(R^n)$ tal que $T(F_U) = \{v \in R^n: v_{h+1} = \ldots = v_n = 0\}$, de modo que si $v = Tu$ obtenemos un mapa (v,U,R^n) centrado en a tal que $v(A \cap U) = v(U) \cap \{\xi \in R^n: \xi_{h+1} = \ldots = \xi_n = 0\}$.
En otras palabras

$$A \cap U = \{x \in U: v_{h+1}(x) = \ldots = v_n(x) = 0\}$$

De ésto resulta que: $A \subset X$ es una subvariedad de dimensión h si y sólo si para cada $a \in A$ hay un mapa (u,U,R^n) centrado en a tal que

$$A \cap U = \{x \in U: u_{h+1}(x) = 0 \ , \ \ldots \ , \ u_n(x) = 0\}$$

2.9. PRODUCTO CARTESIANO.

Supongamos que $(X,\mathcal{A})$ e $(Y,\mathcal{B})$ son variedades de clase C^r; el atlas $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ (1.6, ejercicio 3) permite definir una estructura de variedad para $X\times Y$ (cf.2.1b)). Las proyecciones $\pi_X: X\times Y \longrightarrow X$, $\pi_Y: X\times Y \longrightarrow Y$ resultan de de clase C^r; si $x \in X$, los subconjuntos $\{x\}\times Y$ resultan ser subvariedades de $X\times Y$ y la aplicación $y \longrightarrow (x,y)$ deviene un difeomorfismo entre Y y dicha subvariedad.

Claramente $\dim(X\times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$ si X e Y son de dimensión finita.

EJERCICIOS 2.10. 1) Sea E un espacio de Banach, $\Omega \subset E$ abierto y $f:\Omega \longrightarrow F$ una aplicación (donde F es otro espacio de Banach). Mostrar que - cuando se consideran Ω y F como variedades de clase C^∞, cf.2.2c) - f es de clase C^k $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ si y sólo si f es de clase C^k en el sentido de cap.II,

§3.

2) Sean X,Y variedades de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ y $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación continua.

Demostrar que son equivalentes:

i) f es de clase C^k $(0 \leqslant k \leqslant r)$.

ii) Para todo $x \in X$ y todo par de mapas (u,U,E) en x, (v,V,F) en f(x) tales que $f(U) \subset V$, la aplicación $vfu^{-1}: u(U) \longrightarrow F$ es de clase C^k.

3) Si X es una variedad de clase C^r $(r \geqslant 1)$, pura de modelo E y $F \subset E$ es un subespacio cerrado de codimensión finita h (luego directo, cf. cap.I), una subvariedad $A \subset X$ de modelo F se dirá de *codimensión* h.
Probar: si $A \subset X$ es una subvariedad de codimensión 1, para cada $a \in A$ existe un abierto conexo U tal que $a \in U$ y $U-(U \cap A)$ tiene exactamente dos componentes conexas.

4) Sea X una variedad de dimensión n y $A \subset X$ una subvariedad.
Demostrar que $\dim(A) = n$ si y sólo si A es abierto en X.

5) El cono $A = \{x \in R^3: x_1^2+x_2^2 = x_3^2\}$ no es una subvariedad de R^3.

6) Sea E un espacio de Hilbert. Mostrar que E es difeomorfo a su bola unitaria $V_1(0) = \{\xi: |\xi| < 1\}$ (Sug: considere $g(\xi) = \frac{1}{|\xi|} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi|\xi|}{2} \cdot \xi$, o bien $g(\xi) = \frac{\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}$, cf. cap.II, 3.11 y ejercicio 2 de 1.9).

Deducir que si X es una variedad de clase C^r de modelo E y atlas A, hay un sub-atlas $\mathcal{B} \subset A$ (y por ende $\mathcal{B} \underset{r}{\sim} A$) tal que $u(U) = E$ para todo (u,U,E) en $\mathcal{B}$.

7) Si (u,U,E) es un mapa del atlas A de una variedad X de clase C^r, $u: U \longrightarrow u(U)$ es un C^r-difeomorfismo.

§ 3 - ESPACIO TANGENTE.

Si $J \subset R$ es un intervalo abierto, E un espacio de Banach y $\varphi: J \longrightarrow E$ es una aplicación C^1, para cada $t \in J$ el vector

$$D\varphi(t)(1) = \varphi'(t) = \lim_{s \to t} \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t} \qquad (1)$$

(cf.(7) de §1, cap.II) representa la *velocidad* de recorrido de φ; su dirección es la "dirección instantánea" de la curva en t (o "direccion tan gencial").

Si ahora $X \subset E$ es una subvariedad de clase C^r $(1 \leq r \leq \infty)$ y $a \in X$, consideramos el conjunto $\Gamma(a)$ de todas las curvas $\varphi: J \longrightarrow E$ de clase C^1 tales que $\varphi(J) \subset X$ y $\varphi(0) = a$ (donde J es un intervalo abierto - que depende de φ - tal que $0 \in J$). El conjunto $T_a(X)$ formado por todos los vectores $\varphi'(0)$, $\varphi \in \Gamma(a)$ forma un subespacio de E (como veremos enseguida), que llamamos *espacio de los vectores tangentes a* X *en* a.

Ahora por definición de "subvariedad de E" hay un abierto $U \subset E$ con $a \in U$, un C^r-difeomorfismo $u: U \longrightarrow \Omega$, donde Ω es entorno de 0 y $u(a)=0$ (ver ejercicio 7 de 2.10) y un subespacio directo $F \subset E$ tales que $u(U \cap X) = \Omega \cap F$.

Entonces si $v = \varphi'(0) \in T_a(X)$, $Du(a)(v) = (u\varphi)'(0) \in F$ puesto que $u\varphi(J) \subset F$; recíprocamente si $\xi \in F$ la curva $\varphi(t) = u^{-1}(t\xi)$ está definida en un intervalo $J \subset \{t: t.\xi \in \Omega\}$ y claramente $\varphi \in \Gamma(a)$, con $Du(a)(\varphi(0))= = \xi$. O sea: $Du(a): T_a(X) \longrightarrow F$ es biyectiva; en particular (puesto que $Du(a): E \longrightarrow E$ es isomorfismo), $T_a(X)$ es un subespacio.

Si $v: V \longrightarrow \Omega'$ es otro C^r-difeomorfismo con $a \in V$, $v(a) = 0$ y $v(V \cap X) = = \Omega' \cap F'$ dos elementos $\xi_1 \in F$, $\xi_2 \in F'$ corresponden al mismo vector tangente $\varphi'(0) \in T_a(X)$ si y sólo si $Du(a)(\varphi'(0)) = \xi_1$, $Dv(a)(\varphi'(0)) = \xi_2$ o lo que es igual

$$\xi_1 = Du(a)\ Dv(a)^{-1}(\xi_2) = Du(a)\ Dv^{-1}(0)(\xi_2) = Duv^{-1}(0)(\xi_2)$$

Esto sugiere un método para definir el espacio tangente a una variedad X, no necesariamente una subvariedad de E.

A tal efecto sea X una variedad de clase C^r $(1 \leq r \leq \infty)$ y sea $a \in X$; consideramos el conjunto $V(a) = \{(m,\xi): m = (u,U,E)$ es un mapa en a y $\xi \in E\}$. En $V(a)$ se define la relación de equivalencia $(m,\xi) \sim (m',\xi') \Leftrightarrow D(u'u^{-1})(u(a))(\xi) = \xi'$ y el conjunto cociente $V(a)/\sim \; = T_a(X)$ será el *espacio tangente* ("abstracto") a X en a.

Si $m = (u,U,E)$ es un mapa en a y consideramos la aplicación $\phi_m^a: E \longrightarrow T_a(X)$, $\phi_m^a(\xi) =$ clase de equivalencia de (m,ξ) es inmediato probar que ϕ_m^a es una biyección; ello permite definir una estructura de espacio vectorial en $T_a(X)$ (declarando a ϕ_m^a isomorfismo), estructura que es *independiente* del mapa m puesto que $\phi_{m}^a = \phi_{m'}^a \cdot D(u'u^{-1})(u(a))$ (y siendo $u'u^{-1}$ un C^r-difeomorfismo, su diferencial en $u(a)$ es un isomorfismo; incluso siendo esta diferencial un isomorfismo topológico es posible transportar la topología de E a $T_a(X)$, que deviene un espacio vectorial normable).

Si X,Y son variedades de clase C^r y $f: X \longrightarrow Y$ es de clase C^k $(1 \leq k \leq r)$, sean $a \in X$, $b = f(a) \in Y$. Si consideramos mapas $m = (u,U,E)$ en a y $m' = (v,V,F)$ en b tales que $f(U) \subset V$ (2.6) con $g = vfu^{-1}\colon u(U) \longrightarrow v(V)$ de clase C^k, la aplicación $\phi^b_{m'} Dg(u(a))(\phi^a_m)^{-1}\colon T_a(X) \longrightarrow T_b(Y)$ no depende de los mapas m, m' y es lineal continua. Se la denomina la *aplicación tangente a* f *en* a y será denotada $T_a(f)$.

Si $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ son ambas de clase C^k y $a \in X$, es fácil ver que entonces es

$$T_a(gf) = T_{f(a)}(g)\, T_a(f) \qquad (2)$$

Veamos ahora que las definiciones precedentes constituyen efectivamente una generalización de las ideas indicadas al principio de este §.

EJEMPLOS 3.1. a) Supongamos que $X = \Omega$ es un abierto en un espacio de Banach E y sea $a \in \Omega$. El mapa "privilegiado" $m_0 = (1_\Omega, \Omega, E)$ produce una identificación natural $\phi^a = \phi^a_{m_0}\colon E \longrightarrow T_a(\Omega)$; si se realiza dicha identificación resulta que si $f\colon \Omega \longrightarrow F$ es de clase C^k $(k \geqslant 1)$ entonces $T_a(f)\colon E = T_a(\Omega) \longrightarrow F = T_{f(a)}(F)$ coincide exactamente con la diferencial usual $Df(a)$ (puesto que $T_a(f)\phi^a = \phi^{f(a)}\, Df(a)$).

Hecha esta identificación es claro que la "aplicación tangente" es una generalización de la "diferencial".

b) Si $m = (u,U,E)$ es un mapa en $a \in X$ (variedad de clase C^r), la aplicación $u\colon U \longrightarrow \Omega = u(U) \subset E$ es un C^r-difeomorfismo luego como consecuencia de (2) sigue que $T_a(u)\colon T_a(U) \longrightarrow T_{u(a)}(\Omega) = E$ es un isomorfismo, y es fácil ver que $T_a(u) = (\phi^a_m)^{-1}$ (ver c)).

c) Si $A \subset X$ es una subvariedad abierta y $a \in A$, la inclusión $j\colon A \longrightarrow X$ da una identificación

$T_a(j)\colon T_a(A) \xrightarrow{\sim} T_a(X)$.

d) Cuando $f\colon X \longrightarrow Y$ es de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ y $a \in X$, considerando mapas $m = (u,U,E)$ en a y $m' = (v,V,F)$ en $f(a)$ con $f(U) \subset V$, de b) c) se obtiene una reinterpretación de $T_a(f)$ como

$T_{vf(a)}(v^{-1})\, Dg(u(a))\, T_a(u)$

(cf. diagrama (3), con $p = u(a)$ y $g = vfu^{-1}$).

$$\begin{tikzcd}
T_a(X) \arrow[r, "T_a(u)"'] \arrow[d, "T_a(f)"'] & E \arrow[d, "Dg(p)"] \\
T_{f(a)}(Y) \arrow[r, "T_a(v)"'] & F
\end{tikzcd}$$

(3)

e) Cuando $A \subset X$ es subvariedad, con la notación de 2.7 indicamos con

$$\begin{tikzcd}
T_a(A) \arrow[r, "T_a(j)"', "\sim"] \arrow[d, "T_a(u|U\cap A)"', "\sim"] & T_a(X) \arrow[d, "T_a(u)", "\sim"'] \\
F_U \arrow[r, "\text{inclusión}"'] & E
\end{tikzcd}$$

(4)

$j\colon A \longrightarrow X$ la inclusión. De d) obtenemos el diagrama conmutativo (4) que muestra - en particular - que $T_a(A)$ se identifica a un subespacio directo de $T_a(A)$.

f) Si $J \subset \mathbf{R}$ es un intervalo y $\varphi\colon J \longrightarrow X$ es una aplicación de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant r)$, para cada $t \in J$ se pone $\varphi'(t) = T_t(\varphi)(1) \in T_{\varphi(t)}(X)$ (vector "velocidad" de φ en t); esta definición generaliza (1).

3.2. SUMERSIONES.

Si X,Y son variedades de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ y $f\colon X \longrightarrow Y$ es de clase C^r decimos que f es una *sumersión* si $T_x(f)$ es un epimorfismo directo para todo $x \in X$.

TEOREMA 3.3. Sean X,Y variedades de clase C^r y sea $f\colon X \longrightarrow Y$ de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant r)$. Si $T_{x_0}(f)$ es epimorfismo directo entonces

i) $T_x(f)$ es epimorfismo directo para todo x en un entorno de x_0.

ii) Existe un entorno U de x_0 tal que $f|U\colon U \longrightarrow Y$ es abierta.

En particular si $T_x(f)$ es un epimorfismo directo para todo $x \in X$, f es abierta.

DEMOSTRACION. Consideramos mapas centrados (w,W,E) en x_0 y (w',W',F) en $y_0 = f(x_0)$ tales que $f(W) \subset W'$; si $\Omega = w(W)$ y $\Omega' = w'(W')$ sea $g = vfu^{-1}$. De 3.1d) sigue que $Dg(0)\colon E \longrightarrow F$ es un epimorfismo directo, con $g(0)=0$.

El teorema 5.3 del cap.II nos da un C^k-difeomorfismo $\psi\colon \Omega_1 \longrightarrow \Omega_0$ de entornos de 0 en E, $\Omega_0 \subset \Omega$ de tal forma que $g\psi(\xi) = Dg(0)(\xi)$ para todo $\xi \in \Omega_1$.

Por consiguiente si $U = w^{-1}\psi(\Omega_1)$, $u = \psi^{-1}w\colon U \longrightarrow \Omega_1$ es un C^k-difeomorfismo y resulta el diagrama conmutativo (5). Como $\psi^{-1}u$, w' son homeomorfismos y como $Dg(0)$ es abierta, sigue que $f|U$ es abierta. Por otro lado si $x \in U$ es

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u", "\psi^{-1}w"'] \arrow[d, "f"'] & \Omega_1 \arrow[d, "D_g(0)"] \\ W' \arrow[r, "w'"'] & \Omega' \end{tikzcd}$$

(5)

$$T_x(f) = T_{f(x)}(w')^{-1}Dg(0)\ T_x(u)$$

luego $T_x(f)$ es epimorfismo directo, lo que concluye la prueba.

NOTA. La terna (u,U,E) construída en la demostración es un mapa de X si $k=r$; en todo caso es un mapa de X considerada como variedad de clase C^k.

Obtenemos también otro subproducto importante de lo anterior:

TEOREMA 3.4. ("Variedades definidas implícitamente"). Sean X,Y variedades de clase C^r, sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación de clase C^r y sea $A = f^{-1}(y_0)$. Se supone que:

1°) $A \neq \emptyset$ y 2°) f es una sumersión

Entonces A es una subvariedad cerrada de X y para cada $x \in A$, $T_x(A)$ se identifica al núcleo $N(T_x(f))$ (cf.3.1e)).

DEMOSTRACION. De acuerdo con la construcción precedente (cf.(5)) si $x_0 \in A$ hay mapas centrados (u,U,E) en x_0, (v,V,F) en $f(x_0) = y_0$ tales que $vfu^{-1} = Dg(0): \Omega_1 = u(U) \longrightarrow \Omega_2 = v(V)$.

Por consiguiente $u(A \cap U) = u(f^{-1}(y_0)) = \Omega_1 \cap N(Dg(0))$, así que se verifica la condición (S) de 2.7 (pues $N(Dg(0))$ es subespacio directo de E). En lo que se refiere a $T_x(A)$ notemos que $T_x(u)(T_x(A)) =$ núcleo de $Dg(0)$, así que $T_x(A) = T_x(u)^{-1}(Dg(0)^{-1}(0)) = T_x(f)^{-1}(T_x(v)^{-1}(0)) = T_x(f)^{-1}(0) =$ = núcleo de $T_x(f)$ (cf.(4)).

La noción dual de "sumersión" es la de *inmersión:* se denomina así a toda $f: X \longrightarrow Y$ de clase C^r entre variedades de clase C^r tal que para todo $x \in X$, $T_x(f)$ es un monomorfismo directo.

TEOREMA 3.5. Sean X,Y variedades de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ y sea $f: X \rightarrow Y$ una inversión. Para cada $x_0 \in X$ existe entonces un entorno abierto U de x_0 y un entorno abierto V de $f(x_0)$ tales que

1°) $f(U)$ es una subvariedad cerrada de V (y por ende subvariedad de Y).

2°) $f|U: U \longrightarrow f(U)$ es un C^r-difeomorfismo.

DEMOSTRACION. Se utiliza un método similar al de 3.3, 3.4 (usando ahora el teorema 5.4 de cap.II) y queda como ejercicio.

OBSERVACION 3.6. En la situación de 3.5 en general no resulta $f(X)$ una subvariedad de Y (ver ejercicio 11. de 3.10).

Pero si además $f:X \rightarrow f(X) \subset Y$ es un homeomorfismo (en cuyo caso diremos que f es una *inmersión regular*), entonces $f(X)$ resulta una subvariedad de Y y $f: X \longrightarrow f(X)$ un C^r-difeomorfismo. PRUEBA. Pues para todo abierto $U \subset X$ hay un abierto W en Y tal que $f(U) = f(X) \cap W$; de ésto y lo probado en 3.5 sigue que: para cada $y \in f(X)$ hay un entorno V de y, tal que $f(X) \cap V$ es una subvariedad de Y. De aquí y la definición de subvariedad sigue que $f(X)$ es subvariedad de Y. Que $f: X \longrightarrow f(X)$ es un C^r-difeomorfismo es consecuencia de 3.5. 2°).

Si X,Y son variedades de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ y $f\colon X \longrightarrow Y$ es de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ decimos que f es un C^k-*difeomorfismo local en* $x \in X$ si hay entornos abiertos U de x, V de f(x) tales que $f|U\colon U \longrightarrow V$ es un C^k-difeomorfismo. También decimos que f es un C^k-*difeomorfismo local* si lo es en cada $x \in X$.

TEOREMA 3.6. Sean X,Y variedades de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$, y sea $f\colon X \to Y$ de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant r)$. Si $x \in X$, f es un C^k-difeomorfismo local en x si y sólo si $T_x(f)$ es un isomorfismo.

DEMOSTRACION. Fácil (como 3.4), usando 4.7 de cap.II.

Una última adaptación de la teoría de §5, cap.II: si X,Y son variedades de clase C^r y $f\colon X \longrightarrow Y$ es de clase C^k $(1 \leqslant k \leqslant r)$, decimos que f es una C^k- *subinmersión* (o *subinmersión* si k=r) *en* $x_0 \in X$ si existen mapas (u,U,E) en x_0 y (v,V,F) en $y_0 = f(x_0)$ tales que $vfu^{-1}\colon u(U) \longrightarrow F$ es localmente directo en $u(x_0)$ (ver §5 de cap.II). Cuando ello ocurre en todo $x_0 \in X$ decimos que f es una C^k-*subinmersión* (o *subinmersión* si k=r).

EJEMPLO 3.7. Si el rango de $T_x(f)$ es constante (y finito) para todo x en un entorno de x_0, f es una C^k-subinmersión en x_0 (ver cap.II, 5.10).

TEOREMA 3.8. ("Caracterización de las subinmersiones"). Sean X,Y variedades de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ y sea $f\colon X \longrightarrow Y$ de clase C^r.

Si $x_0 \in X$, son equivalentes:

i) f es una subinmersión en x_0.

ii) Existen mapas (u,U,E) y (v,V,F) centrados en x_0 y $f(x_0) = y_0$ respectivamente tales que $vfu^{-1}\colon u(U) \longrightarrow F$ es (la restricción a u(U) de) un morfismo directo $T\colon E \longrightarrow F$.

iii) Existen espacios de Banach E_1,E_2,F_2 y mapas $(u_0,U,E_1{\times}E_2)$ y $(v_0,V,E_1{\times}F_2)$ centrados en x_0 y $f(x_0) = y_0$ respectivamente tales que $v_0fu_0^{-1}(\xi_1,\xi_2) = (\xi_1,0)$ para todo $(\xi_1,\xi_2) \in u_0(U)$.

iv) Existen un entorno U_0 de x_0, una variedad Z de clase C^r, una sumersión $p\colon U_0 \longrightarrow Z$ y una inmersión $j\colon Z \longrightarrow Y$ tales que $jp = f|U_0$.

DEMOSTRACION. Que i) $\Rightarrow$ ii) es fácil apelando a 5.8 de cap.II (aplicado a vfu^{-1} en la definición de subinmersión en x_0). Para ver que ii) $\Rightarrow$ iii) consideramos $E_1' =$ suplemento de E_2 en E, donde $E_2 =$ núcleo de T; además $E_1 =$ Imagen de T, $F_2 =$ suplemento de E_1 en F. Luego el isomorfismo $\zeta\colon E \longrightarrow E_1'{\times}E_2 \xrightarrow[\alpha]{} E_1{\times}E_2$ con $\alpha(v_1,v_2) = (T(v_1),v_2)$ y el isomorfismo

$\theta: F \longrightarrow E_1 \times F_2$.

Entonces si (u,U,E) y (v,V,F) son como en ii) se obtienen los mapas buscados tomando $u_0 = \zeta u$, $v_0 = \theta v$.

Suponiendo que vale la afirmación iii), consideramos sendos entornos de 0, U_1 y U_2 (en E_1 y E_2) tales que $u_0(U) \supset U_1 \times U_2$.

Sea $U_0 = u_0^{-1}(U_1 \times U_2)$ y sea $Z = U_1$; definimos p como la composición de $u_0: U_0 \longrightarrow U_1 \times U_2$ con la proyección $U_1 \times U_2 \longrightarrow U_1$ que es bien una sumersión (cf.ejercicio 2 de 3.10) mientras que $j: U_1 \longrightarrow Y$ es la inmersión $j(z) = v^{-1}(z,0)$.

Finalmente supongamos que vale iv); podemos encontrar mapas centrados (u,U,E) en x_0 (con $U \subset U_0$), (v,V,F) en $f(x_0) = y_0$ y (w,W,G) de $z_0 = p(x_0)$ tales que $p(U) \subset W$, $j(W) \subset V$ de modo tal que wpu^{-1} es la restricción a $u(U)$ de un epimorfismo directo $T: E \longrightarrow G$, y vjw^{-1} es la restricción a $w(W)$ de un monomorfismo directo $S: G \longrightarrow F$.

La representación de $f|U$ en los mapas dados es por consiguiente $ST: E \longrightarrow F$ (que es $(vjw^{-1})(wpu^{-1})$) y la tesis resulta del ejercicio 1 de 3.10.

NOTA. De lo precedente resulta que la expresión de una sub-inmersión en x_0 en convenientes mapas en x_0 e $y_0 = f(x_0)$ es del tipo

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \xrightarrow[\text{proy.}]{} \Omega_1 \xrightarrow[\text{inyec.}]{} \Omega_1 \times \Omega_2'$$

TEOREMA 3.9. Sean X,Y variedades de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ y sea $f: X \longrightarrow Y$ de clase C^r. Sea $y_0 \in Y$, y $A = f^{-1}(y_0)$. Se supone que

1°) $A \neq \emptyset$ 2°) f es una subinmersión en cada $x \in A$.

Entonces A es una subvariedad de X y para cada $x \in A$ el espacio tangente $T_x(A)$ se identifica al subespacio núcleo de $T_x(f)$.

DEMOSTRACION. Completamente análoga a la de 3.4 (fácil usando 3.8 iii)).

EJERCICIOS 3.10. 1) Si E,F y G son espacios de Banach, $T: E \longrightarrow G$ es un epimorfismo directo y $S: G \longrightarrow F$ un monomorfismo directo, $ST: E \longrightarrow F$ es un morfismo directo.

2) Sean X,Y,Z variedades y $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ sumersiones (resp: inmersiones). Probar que $gf: X \longrightarrow Z$ es sumersión (resp: inmersión).

3) Sean X,Y variedades de clase C^r. Mostrar que $T_{(x,y)}(X \times Y)$ se identifica a $T_x(X) \times T_y(Y)$; las proyecciones $X \times Y \longrightarrow X$, $X \times Y \longrightarrow Y$ son sumersiones.

4) Sean X,Y variedades de clase C^r y sea $f: X \longrightarrow Y$ una función, de gráfico $G = \{(x,f(x)): x \in X\}$. Probar que son equivalentes las afirmaciones

i) f es de clase C^r.

ii) G es subvariedad de XxY y $T_{(x,f(x))}(X\times Y) =$

$= T_{(x,f(x))}(G) \oplus T_{(x,f(x))}(\{x\}\times Y)$ para todo $x \in X$ (Sug: probar que $\pi_X|G: G \longrightarrow X$ es difeomorfismo; considerar luego $\pi_Y(\pi_X|G)^{-1}$).

Probar asimismo que si vale i), $T_{(x,f(x))}(G)$ se identifica al gráfico de $T_x(f): T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$.

5) Sea X una variedad de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$, sea $a \in X$. Si $v \in T_a(X)$, existe una curva $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow X$ de clase C^r tal que $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$.

6) Usando 3.4, probar que los siguientes conjuntos son subvariedades de $\mathbf{R}^n$; calcular en cada caso el espacio tangente en un punto a de los mismos.

i) $T^2 = \{x \in \mathbf{R}^3: ((x_1^2+x_2^2)^{1/2}-2)^2 + x_3^2 = 1\}$

ii) $S^2 = \{x \in \mathbf{R}^3: x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1\}$

iii) $H = \{x \in \mathbf{R}^3: \cos x_3 = x_1, \ \operatorname{sen} x_3 = x_2\}$

7) Si E es un espacio de Hilbert, $S(E) = \{x: |x| = 1\}$ es una subvariedad de codimensión 1 de E (cf.ejercicio 3 de 2.10).

8) Sea $Q: E \longrightarrow R$ un polinomio homogéneo de grado 2, con forma bilineal asociada $\phi: E\times E \longrightarrow R$ no degenerada (cap.I, 2.7). Mostrar que para todo $c \neq 0$ la "cuádrica" de ecuación $Q(x) = c$ es una subvariedad de E de codimensión 1.

9) Sea $f: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x,y) = x^3+y^3+xy+1$. Determinar los valores de (a,b) para que $f^{-1}f(a,b)$ sea una subvariedad de $\mathbf{R}^2$.

10) Una *curva parametrizada* de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ en $\mathbf{R}^n$ es una inmersión $\varphi: J \longrightarrow R^n$ de clase C^r, donde J es un intervalo abierto en R.

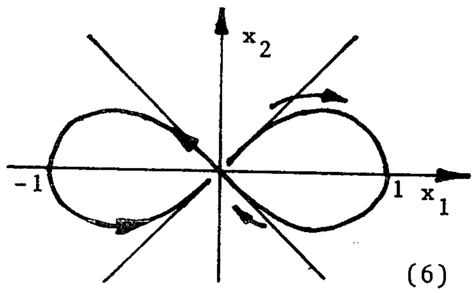
i) Si $t_0 \in J$, la recta $\varphi(t_0) + \lambda.\varphi'(t_0)$ $(\lambda \in R)$ (*recta tangente por* $\varphi(t_0)$) es paralela al subespacio $T_{\varphi(t_0)}(\varphi(U))$ para un entorno $U \subset J$ de t_0 (cf.3.5).

ii) Si $t_0 \in R$, la proyección ortogonal sobre esta recta define un C^r-difeomorfismo de un entorno $U \subset J$ de t_0 sobre un entorno de $\varphi(t_0)$ en dicha recta.

11) Sea φ: $R \longrightarrow R^2$ dada por $\varphi(t) = (t. \frac{(1+t^2)}{1+t^4}, t. \frac{(1-t^2)}{1+t^4})$ (fig.(6))

i) φ es una inmersión.

ii) $\varphi(R)$ no es una subvariedad de R (Sug: no es una variedad; si (u,U,R) es un mapa en 0, $U-\{0\}$ tiene cuatro componentes conexas).



(6)

12) Sea f: $R^2 x R^2 \longrightarrow R^3$ definida por

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (y_2(x_1+2), y_1(x_1+2), x_2).$$

Si S^1 es la circunferencia $\{x \in R^2: |x| = 1\}$, probar que $f|S^1 x S^1$ es un difeomorfismo de $S^1 x S^1$ sobre el toro T^2 del ejercicio 6.

13) Verificar que hay dos mapas (u_i, U_i, R^{n-1}) $(i=1,2)$ tales que $U_1 \cup U_2 = S^{n-1} = \{x \in R^n: |x| = 1\}$, $u_i(U_i) = R^{n-1}$ y $S^{n-1} - U_i$ consiste de un solo punto (= $(0,\ldots,1)$ si $i=1$, $(0,\ldots,0,-1)$ si $i=2$).

(Sug: considerar la proyección estereográfica desde los polos: $u_1(x)$ es la intersección de la semirrecta abierta de origen $e_n = (0,\ldots,1)$ que pasa por x, con el hiperplano $R^{n-1} x \{0\}$).

14) Una aplicación continua f: $X \longrightarrow Y$ entre variedades de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ de dimensión finita se dice *propia* si para todo compacto $K \subset Y$, el conjunto $f^{-1}(K)$ es compacto en X.

i) Si f es propia, para todo cerrado $F \subset X$, $f(F)$ es cerrado en Y.

ii) Si f: $X \longrightarrow Y$ es una inmersión propia, f es una inmersión regular (cf.3.6).

iii) Dar un ejemplo de inmersión regular no propia (Sug: tómese $X = Y = R$, f un difeomorfismo entre R y $(-1,1)$ (ver 2.10, ejercicio 6)). Dar otro ejemplo con $X = R$, $Y = R^2$ y la espiral $r = e^{-\theta}$.

15) Sean X,Y variedades de dimensión finita de clase C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ y sea f: $X \longrightarrow Y$ un C^k-difeomorfismo local propio.

Para todo $y \in Y$ se pone $c(y) = \text{card } f^{-1}(y)$.

i) $c(y)$ es finito para todo $y \in Y$ (Sug: $f^{-1}(y)$ es discreto por 3.4).

ii) c: $Y \longrightarrow N$ es semicontinua inferiormente (o sea $c(y_0) = n \Rightarrow c(y) \geqslant n$ en un entorno de y_0).

iii) Probar que para cada n, $\{y: c(y) \geqslant n\}$ es cerrado en Y.

iv) Deducir que si Y es conexa, $c(y) = n$ para todo $y \in Y$. Probar asimismo que en tal caso para cada $y \in Y$ hay un entorno conexo V de y tal que $f^{-1}(V)$ tiene n componentes U_i ($1 \leq i \leq n$) y que $f|U_i: U_i \longrightarrow V$ es un C^k-difeomorfismo (o sea: $f: X \longrightarrow Y$ es un revestimiento de n hojas, ver [3], §5).

16) Si X,Y son variedades de clase C^r ($1 \leq r \leq \infty$) y $f: X \longrightarrow Y$ es de clase C^r probar:

i) El conjunto de los $x \in X$ tales que $T_x(f)$ es un epimorfismo (resp: monomorfismo) directo es abierto en X.

ii) El conjunto de *puntos regulares* de f, esto es los $x \in X$ tales que f es una subinmersión en x, es abierto en X. Este conjunto es denso en X si el rango de todas las $T_x(f)$ está acotado (ver cap.II, 5.9d)).

17) Sean X,Y variedades de clase C^r ($1 \leq r \leq \infty$) y sea $f: X \longrightarrow Y$ de clase C^k ($1 \leq k \leq r$).

i) Si dim(X) es finita y f es localmente inyectiva, el conjunto de los $x \in X$ tales que $T_x(f)$ es inyectiva es un abierto denso.

ii) Si dim(Y) es finita y f es abierta, el conjunto de los $x \in X$ tales que $T_x(f)$ es suryectiva es un abierto denso. (Ver cap.II, ejercicio 5 de 5.11).

18) Sea $f: X \longrightarrow Y$ una subinmersión; si $T_{x_0}(f)$ no es suryectiva hay un entorno U de x_0 tal que f(U) es magro en Y.

19) Sea $f: X \longrightarrow Y$ una inmersión suryectiva. Se supone que la topología de X tiene una base numerable; probar que f es un difeomorfismo local. (Sug: cap.II, ejercicio 5 de 5.11).

20) Sea $P^n = P^n(R)$ el conjunto de los subespacios de dimensión 1 de R^{n+1}, identificado al cociente de $R^{n+1}-\{0\}$ por la relación de equivalencia "$x \sim y \Leftrightarrow y = \alpha.x$ para algún $\alpha \in R$" (*espacio proyectivo real* de dimensión n), sea $p: R^{n+1}-\{0\} \longrightarrow P^n$ la proyección.

i) P^n es un espacio compacto (Sug: considerar $p|S^n$).

ii) Para cada i ($1 \leq i \leq n+1$) sea $\varphi_i: R^n \longrightarrow P^n$ definida por $\varphi_i(x_1,\dots,x_n) = p(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_i,\dots,x_n)$. Probar que φ_i es un homeomorfismo entre R^n y un abierto $U_i \subset P^n$.

iii) $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = P^n$

iv) Si $u_i = \varphi_i^{-1}: U_i \longrightarrow P^n$ calcular $u_i u_j^{-1} = \varphi_i^{-1}\varphi_j : \{x \in R : x_i \neq 0\} \longrightarrow R^n$ y mostrar que es C^∞.

v) Obtener una estructura de variedad de clase C^∞ para P^n con mapas (u_i, U_i, R^n) $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$. Probar que $p: R^{n+1}-\{0\} \longrightarrow P^n$ es sumersión.

§ 4 - CONSTRUCCIONES.

Veremos aquí como obtener de manera sistemática nuevas variedades diferenciables a partir de otras. Para simplificar la exposición, "variedad" será sinónimo de "variedad de clase C^∞"; sólo trataremos este caso (con modificaciones obvias se obtienen enunciados más generales).

Ante todo, un principio general:

PROPOSICION 4.1. Sea X un conjunto, sea $(X_i)_{i\in I}$ un cubrimiento de X. Se supone que cada X_i es una variedad y que cada $X_i \cap X_j$ es abierto en X_i y en X_j.

Entonces si en cada $X_i \cap X_j$ coinciden las estructuras de variedad inducidas por X_i y X_j, existe una única estructura de variedad para X tal que cada X_i es una subvariedad abierta de X.

Además para toda variedad Y, una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ será de clase C^k $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ si y sólo si cada $f|X_i: X_i \longrightarrow Y$ es de clase C^k.

DEMOSTRACION. La hipótesis dice que cada aplicación identidad

$$X_i \supset X_i \cap X_j \xrightarrow[id]{} X_i \cap X_j \subset X_j \qquad (*)$$

es un difeomorfismo. En particular homeomorfismo; por lo tanto definiendo "$U \subset X$ es abierto $\Leftrightarrow U \cap X_i$ es abierto en X_i para todo $i \in I$" se ve en seguida que se obtiene una topología para X en la cual los X_i son abiertos (y la topología inducida por X sobre cada X_i coincide con la topología original de X_i).

Si ahora A_i es el atlas de cada X_i, $A = \bigcup_i A_i$ resulta un atlas para X gracias a (*); el resto es inmediato.

NOTA. Por lo general, la proposición anterior se aplica al caso en que cada X_i es difeomorfo (mediante una aplicación $u_i: X_i \longrightarrow E$) a un abierto de un espacio de Banach E; en tal caso los (u_i, X_i, E) dan un atlas para X (ver por ejemplo, ejercicio 20 de 3.10).

Es importante señalar asimismo que aunque cada X_i sea separada, no hay garantía alguna de que X lo sea; en cada caso concreto se debe estudiar si ello ocurre o nó (ver ejercicio 10 de 4.19).

De cualquier manera conviene dar un ejemplo de variedad no separada producida por la aplicación de 4.1:

EJEMPLO 4.2. Sea $X \subset R^2$, $X = X_1 \cup X_2$ donde (fig.1)

$X_1 = \{(x_1,0): x_1 > 0\} \cup \{(x_1,1): x_1 \leqslant 0\}$

$X_2 = \{(x_1,0), x_1 > 0\} \cup \{(x_1,-1): x_1 \leqslant 0\}\}$

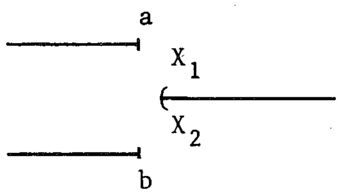


fig.1

Las biyecciones $(x_1,t) \longrightarrow x_1$ definen para X_1 y X_2 estructuras de variedades diferenciables (difeomorfas ambas a R), que están en las condiciones de 4.1.

Pero es claro que la topología de X no es separada: todo entorno U de $a = (0,1)$ y todo entorno V de $b = (0,-1)$ se cortan necesariamente.

De cualquier manera el resultado 4.1 es de utilidad "general" como veremos ahora en la caracterización de las inmersiones:

LEMA 4.3. Sea $f: X \longrightarrow Y$ una inmersión, sea Z otra variedad y sea $g: Z \longrightarrow X$ una aplicación; entonces son equivalentes las afirmaciones:

i) g es de clase C^k $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$.

ii) g es continua y $fg: Z \longrightarrow Y$ es de clase C^k.

DEMOSTRACION. Que i) $\Rightarrow$ ii) es trivial; para la recíproca, dado $z_0 \in Z$ es suficiente mostrar un entorno abierto W de z_0 tal que $g|W$ es de clase C^k. Por 3.5 hay un abierto $U \subset X$ tal que $x_0 = g(z_0) \in U$ y $f|U: U \longrightarrow f(U)$ es un difeomorfismo. Por ser g continua, $W = g^{-1}(U)$ es entorno de z_0 y como $fg|W: W \longrightarrow f(U)$ es de clase C^k también lo será $g|W = (f|U)^{-1}fg|W :$ $: W \longrightarrow U$.

COROLARIO 4.4. Si X es un espacio topológico, Y una variedad y $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación, existe a lo sumo una estructura de variedad para X para la cual f es una inmersión.

DEMOSTRACION. Si hubiera dos, tendríamos dos variedades X_1, X_2 (con el mismo espacio topológico subyacente X), con $f: X_i \longrightarrow Y$ inmersión (i=1,2). Como $1_x: X_1 \longrightarrow X_2$ es continua y $f1_x = f: X_1 \longrightarrow Y$ es de clase C^∞, de 4.3 sigue que $1_x: X_1 \longrightarrow X_2$ es C^∞; simétricamente $1_x: X_2 \longrightarrow X_1$ es C^∞ luego

$X_1 = X_2$.

La condición "exacta" para la existencia de la estructura en X planteada en 4.4 se da en la:

PROPOSICION 4.5. Sea X un espacio topológico, Y una variedad y $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación; son equivalentes entonces:

i) Para todo $x \in X$ se verifica la condición $I_f(x)$: existe un entorno U de x, un mapa (v,V,F) en f(x) y un subespacio F_U directo en F tales que

a) $f(U) \subset V$ y $f|U: U \longrightarrow f(U)$ es homeomorfismo.

b) $vf(U) = (F_U + vf(x)) \cap v(V)$

ii) Existe una (única) estructura de variedad para X para la cual f es inmersión (cf.4.4).

DEMOSTRACION. ii) $\Rightarrow$ i) Inmediato por 3.5.

i) $\Rightarrow$ ii) Aplicando la cláusula $I_f(x)$ a cada $x \in X$ se obtiene un cubrimiento abierto U_i $(i \in I)$ de X; cada U_i es provisto de una estructura de variedad mediante el homeomorfismo $u_i = v_i f|U_i: U_i \longrightarrow (E_i + vf(x_i)) \cap v_i(V_i)$ (entonces u_i es un difeomorfismo por definición).

Cada $f|U_i: U_i \longrightarrow Y$ resulta una inmersión y la tesis resultará de 3.5 si se prueba que hay una estructura de variedad para X para la cual los U_i son subvariedades abiertas.

Pero esto resulta de 4.1 ya que

$$U_i \supset U_i \cap U_j \xrightarrow[\text{id}]{} U_i \cap U_j \subset U_j \qquad \text{(homeomorfismo)}$$

es de clase C^∞, pues compuesta con $f|U_j$ es C^∞ (cf.4.3).

OBSERVACIONES 4.6. a) En la situación de 4.5, la estructura de variedad definida para X (supuesto válida i)) se denomina "*estructura de variedad inducida por* f" (o estructura "imagen inversa por f").

b) La condición (S) de 2.7 es la condición $I_j(a)$ para $j: A \longrightarrow X$ inclusión.

c) Supongamos que Y es una variedad, X un espacio topológico y $f: X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo local; en tal caso es fácil verificar la validez de $I_f(x)$ para todo $x \in X$ (con $F_U = F$).

La estructura de variedad inducida por f sobre X hace que $f: X \longrightarrow Y$ resulte un difeomorfismo local.

d) Mencionemos como caso particular importante de c) aquél en que

$f\colon X \longrightarrow Y$ es un revestimiento ([3], §5).

Antes de pasar a tratar los "duales" de los teoremas anteriores para el caso de sumersiones, veamos un importante concepto.

4.7. TRANSVERSALIDAD.

Supongamos que X,Y son variedades y que $B \subset Y$ es una subvariedad; si $f\colon X \longrightarrow Y$ es una aplicación C^∞ decimos que f es *transversal a* B *en* $x_0 \in X$ si

i) $f(x_0) \notin B$, o bien

ii) $f(x_0) \in B$ y la composición

$$T_{x_0}(X) \xrightarrow[T_{x_0}(f)]{} T_{f(x_0)}(Y) \longrightarrow T_{f(x_0)}(Y)/T_{f(x_0)}(B)$$

es un epimorfismo directo.

Diremos que f es *transversal* a B si lo es en todo $x \in X$ (abreviamos este hecho con la notación $f \pitchfork B$).

OBSERVACIONES 4.8. a) La condición $f \pitchfork B$ significa que para todo $x \in f^{-1}(B)$ valen

1°) $T_x(f)^{-1}(T_{f(x)}(B))$ es subespacio directo de $T_x(X)$

2°) $T_{f(x)}(Y) = T_{f(x)}(B) + \mathrm{Im}(T_x(f))$.

Siendo evidente que la primera condición es superflua si X es de dimensión finita.

b) Si $f \pitchfork \{y\}$ para todo $y \in B$, y f es suryectiva entonces f es una sumersión; recíprocamente: si f es sumersión, entonces $f \pitchfork B$ para toda subvariedad $B \subset Y$.

Localmente la noción de transversalidad se formula como sigue:

LEMA 4.9. Sean X,Y variedades, sea $B \subset Y$ una subvariedad y sea $f\colon X \rightarrow Y$ una aplicación de clase C^∞ entonces si $x_0 \in f^{-1}(B)$ son equivalentes las afirmaciones

i) f es transversal a B en x_0.

ii) Existen mapas (u,U,E) y (v,V,F) centrados en x_0 y $f(x_0)$ respectivamente y subespacios suplementarios F_1,F_2 en F tales que (ver diagrama (2)):

a) $f(U) \subset V$.

b) $v(V) = \Omega_1 \times \Omega_2$ con Ω_i entorno de 0 en F_i $(i=1,2)$.

c) $v(V \cap B) = \Omega_1 \times \{0\}$.

d) $p_2 v f u^{-1}: u(U) \longrightarrow \Omega_2$ es sumersión.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[d, "v"] & V \cap B \arrow[l] \arrow[d, "v|V\cap B"] \\
u(U) \arrow[r, "vfu^{-1}"] \arrow[dr, "g_2"'] & \Omega_1 \times \Omega_2 \arrow[d, "p_2"] & \Omega_1 \times \{0\} \arrow[l] \\
 & \Omega_2 &
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

DEMOSTRACION. Si vale ii), la composición

$$E \xrightarrow[Dvfu^{-1}(0)]{} F_1 \times F_2 \xrightarrow[p_2]{} F_2$$

resulta un epimorfismo directo. Como las flechas verticales de (2) son difeomorfismos, se obtiene la condición de transversalidad.

Recíprocamente, supongamos que vale i); ciertamente hay mapas centrados en x_0 y $f(x_0)$ para los cuales valen a) b) y c). Pero vfu^{-1} debe ser entonces transversal a $\Omega_1 \times \{0\}$ en 0, así que la composición

$$E \xrightarrow[Dvfu^{-1}(0)]{} F \longrightarrow F/F_1$$

debe ser un epimorfismo directo. Sigue que la diferencial en 0 de $p_2 vfu^{-1}$ es epimorfismo directo. Si $g_2 = p_2 vfu^{-1}$ resulta por 3.3 que $g_2: \Omega \longrightarrow \Omega_2$ es una sumersión en un entorno $\Omega \subset u(U)$ de $0 \in E$ y la tesis se obtiene "achicando" U (o sea: reemplazando U por $u^{-1}(\Omega)$).

PROPOSICION 4.10. Sean X,Y variedades sea $f: X \longrightarrow Y$ de clase C^∞ y sea $B \subset Y$ una subvariedad de Y. Se supone que $f \pitchfork B$. Entonces

i) $f^{-1}(B)$ es subvariedad de X.

ii) Si $x_0 \in f^{-1}(B)$, $T_{x_0}(f^{-1}(B)) = T_{x_0}(f)^{-1}(T_{f(x_0)}(B))$.

iii) Si $x_0 \in f^{-1}(B)$, $T_{x_0}(f)$ induce un isomorfismo $T_{x_0}(X)/T_{x_0}(f^{-1}(B)) \approx$ $\approx T_{f(x_0)}(Y)/T_{f(x_0)}(B)$.

DEMOSTRACION. i) Es trivial si $f^{-1}(B) \neq \emptyset$; en caso contrario si $x_0 \in$ $\in f^{-1}(B)$ usando (2) vemos que

$$f^{-1}(B) \cap U = f^{-1}(B \cap V) \cap U = u^{-1} g_2^{-1}(0)$$

Como g_2 es sumersión, $g_2^{-1}(0)$ es subvariedad de $u(U)$ y por ende $f^{-1}(B) \cap U$ es subvariedad de U; de aquí la tesis es inmediata.

ii) De (2) obtenemos

$$T_{x_0}(u)(T_{x_0}(f^{-1}(B))) = \text{núcleo de } Dg_2(0) = Dvfu^{-1}(0)^{-1}(F_1)$$

que nos da inmediatamente lo afirmado.

iii) Evidente por ii).

Vamos ahora a lo que nos interesa:

DEFINICION 4.11. Si X_1, X_2, Y son variedades, dos aplicaciones $f_1: X_1 \longrightarrow Y$ y $f_2: X_2 \longrightarrow Y$ de clase C^∞ se dicen *transversales* si la aplicación

$$f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \longrightarrow Y \times Y$$

es transversal a la subvariedad diagonal $\Delta_Y \subset Y \times Y$.

Indicaremos este hecho con la notación $f_1 \pitchfork f_2$.

OBSERVACIONES 4.12. a) Supongamos que E_1, E_2, F son espacios de Banach y que $T_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ $(i=1,2)$; si $\sigma: F \times F \longrightarrow F$ es $\sigma(\xi,\eta) = \xi - \eta$ de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Delta_F \longrightarrow F \times F \xrightarrow[\sigma]{} F \longrightarrow 0$$

se deduce que son equivalentes las afirmaciones

1°) $E_1 \times E_2 \xrightarrow[T_1 \times T_2]{} F \times F \longrightarrow F \times F / \Delta_F$ es epimorfismo directo

y

2°) $E_1 \times E_2 \xrightarrow{\sigma(T_1 \times T_2)} F$ es epimorfismo directo.

b) Aplicando lo afirmado en a) al caso $E_i = T_{x_i}(X_i)$ $(i=1,2)$, $F = T_y(Y)$ vemos que $f_1 \pitchfork f_2$ significa: para todo $x_1 \in X_1$ y para todo $x_2 \in X_2$ que verifiquen $f(x_1) = f(x_2)$ la aplicación

$$T_{x_1}(X_1) \times T_{x_2}(X_2) \longrightarrow T_{f(x_1)}(Y)$$

definida por $(v_1, v_2) \longrightarrow T_{x_1}(f_1)(v_1) - T_{x_2}(f_2)(v_2)$, es un epimorfismo directo; ello significa que

1°) $\{(v_1,v_2): T_{x_1}(f_1)(v_1) = T_{x_2}(f_2)(v_2)\}$ es subespacio directo de $T_{x_1}(X_1) \times T_{x_2}(X_2)$.

2°) $\operatorname{Im} T_{x_1}(f_1) + \operatorname{Im} T_{x_2}(f_2) = T_{f(x_1)}(Y)$

c) Supongamos $f_1 \pitchfork f_2$ para $f_1: X_1 \longrightarrow Y$ y $f_2: X_2 \longrightarrow Y$ ambas de clase C^∞; el *producto fibrado* $X_1 \underset{Y}{\times} X_2 = (f_1 \times f_2)^{-1}(\Delta_Y)$ es vacío ó bien una subvariedad de $X_1 \times X_2$ (4.10 i)). (ver (3)).

Nótese que en este último caso, de 4.10 ii) se deduce que si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces

$$\begin{tikzcd} X_1 \underset{Y}{\times} X_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\ X_1 \arrow[r, "f_1"'] & Y \end{tikzcd}$$

(3)

$$T_{(x_1,x_2)}(X_1 \underset{Y}{\times} X_2) = T_{x_1}(X_1) \underset{T_{f(x_1)}(Y)}{\times} T_{x_2}(X_2) =$$

$$= \{(v_1,v_2): T_{x_1}(f_1)(v_1) = T_{x_2}(f_2)(v_2)\}$$

El producto fibrado de variedades (definido por aplicaciones transversales) tiene las propiedades "funtoriales" usuales (ver ejercicios 6,7,8 de 4.19), y el resultado 4.12 c) constituye una justificación de la noción de transversalidad.

d) Nótese que $f \pitchfork B$ equivale a $f \pitchfork j_B$ donde $j_B: B \longrightarrow Y$ es la inclusión; en este caso es inmediato ver que $x \longrightarrow (x,f(x))$ define un difeomorfismo de $f^{-1}(B)$ sobre $X \underset{Y}{\times} B$.

Dos subvariedades X_1, X_2 de X se dicen *transversales* (notación $X_1 \pitchfork X_2$) si $j_1 \pitchfork j_2$ (o sea $j_1 \pitchfork X_2$); en tal caso es fácil ver que $X_1 \cap X_2$ es una subvariedad de X con $T_x(X_1 \cap X_2) = T_x(X_1) \cap T_x(X_2)$ para cada $x \in X_1 \cap X_2$ (ejercicio 8 de 4.19).

El siguiente resultado será de utilidad:

LEMA 4.13. Sean $f_1: X_1 \longrightarrow Y$, $f_2: X_2 \longrightarrow Y$ aplicaciones de clase C^∞. Entonces si f_1 es una sumersión, es $f_1 \pitchfork f_2$ y en (3) p_2 es una sumersión.

DEMOSTRACION. Lo primero es inmediato por 4.12 b); para lo segundo nótese primero que $(v_1,v_2) \longrightarrow v_2$ es suryectivo, de $T_{(x_1,x_2)}(X_1 \underset{Y}{\times} X_2)$ sobre $T_{x_2}(X_2)$ puesto que $T_{x_1}(f_1)$ es epimorfismo.

Por otro lado el núcleo de $T_{(x_1,x_2)}(p_2)$ es exactamente

$$(T_{x_1}(X_1) \times \{0\}) \cap T_{(x_1,x_2)}(X_1 \underset{Y}{\times} X_2)$$

que es un subespacio directo de $T_{(x_1,x_2)}(X_1 \underset{Y}{\times} X_2)$ (ver ejercicio 3 de 4.19).

Veamos ahora que ocurre con los análogos de 4.4 y 4.5 para sumersiones.

LEMA 4.14. Si $f: X \longrightarrow Y$ es una sumersión, y Z es otra variedad, supongamos que $g: Y \longrightarrow Z$ es una aplicación. Entonces son equivalentes:

a) g es de clase C^k $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$

b) $gf: X \longrightarrow Z$ es de clase C^k.

DEMOSTRACION. Veamos que b) $\Rightarrow$ a); notemos que como f es abierta, g resulta continua. Sea entonces $y_0 \in Y$, veamos que $g|V$ es de clase C^k para un entorno V de y_0; si $f(x_0) = y_0$ hay mapas (u,U,E) y (v,V,F) centrados en x_0 e y_0 respectivamente con $f(U) \subset V$, tales que vfu^{-1} es (la restricción a $u(U)$ de) un epimorfismo directo $T: E \longrightarrow F$. Si $S: F \longrightarrow E$ es lineal continuo y $TS = 1_E$ obtenemos una aplicación $h: V \longrightarrow U$ de clase C^k tal que $fh = 1_V$. Por consiguiente $g|V = (gf)h$ es de clase C^K.

Utilizando esto se prueba fácilmente (comparar con 4.4):

LEMA 4.15. Si X es una variedad, Y un espacio topológico y $f: X \longrightarrow Y$ es continua, hay a lo más una estructura de variedad para Y para la cual f es una sumersión.

Veamos ahora cual es la condición exacta para que exista una tal estructura.

TEOREMA 4.16. (Godement). Sea X una variedad , R una relación de equivalencia en X, de gráfico $G \subset X\times X$. Entonces son equivalentes:

i) Existe una (única) estructura de variedad en el espacio cociente X/R para la cual la proyección canónica $p: X \longrightarrow X/R$ es una sumersión.

ii) G es una subvariedad de $X\times X$ y $p_2|G: G \longrightarrow X$ es una sumersión (donde $p_2(x_1,x_2) = x_2$).

DEMOSTRACION. i) $\Rightarrow$ ii) En efecto G es el producto fibrado $X \underset{X/R}{\times} X$ (4.12 c)) y se aplica 4.13.

Supongamos ahora que vale ii); supongamos demostrado el siguiente hecho:

1°) Para cada $x_0 \in X$ hay un entorno abierto U de x_0, una subvariedad S_U de U y una aplicación $r_U: U \longrightarrow S_U$ de clase C^∞ tal que $G \cap (U\times S_U)$ = gráfico de r_U.

(O sea: para todo $y \in U$, $r_U(y)$ es el único elemento de S_U equivalente a y). Como $r_U(x) = x$ si $x \in S_U$, vemos que r_U es una sumersión.

Si R_U es la relación de equivalencia inducida sobre U (de gráfico $G_U =$ $= G \cap (U\times U)$) y $p_U: U \longrightarrow U/R_U$ es la correspondiente proyección, de "$x \; R_U \; x' \Rightarrow r_U(x) = r_U(x')$" deducimos que r_U se factoriza como $\bar{r}_U: U/R_U \longrightarrow S_U$ seguida de p_U (esto es : $r_U = \bar{r}_U \, p_U$). Claramente $\bar{r}_U$ es continua y biyectiva, y abierta por serlo r_U. Luego $\bar{r}_U$ es un homeomorfismo, lo que permite definir una estructura de variedad en U/R_U (única por 4.15) para la cual p_U es sumersión (y $\bar{r}_U$ difeomorfismo).

Ahora sea $V = p^{-1}p(U)$; $U \subset V$ y V es abierto en X ya que R es una relación abierta (PRUEBA: $p_2|G$ es abierta y $V = p_2(G \cap (U\times X))$).

La inclusión $U \longrightarrow V$ induce un homeomorfismo $k: U/R_U \longrightarrow V/R_V$, y por consiguiente hay una estructura de variedad para V/R_V para la cual k es un difeomorfismo.

Veamos que $p_V: V \longrightarrow V/R_V$ es sumersión; para ello bastará ver que $\alpha = k^{-1}p_V: V \longrightarrow U/R_U$ es una sumersión. Pero del diagrama conmutativo (4) vemos que $(U\times V) \cap G$ es abierto en G, luego p_2 es sumersión por la hipótesis.

$$\begin{tikzcd}
 & (U\times V) \cap G \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
U \arrow[dr, "p_U"'] & & V \arrow[dl, "\alpha"] \\
 & U/R_U &
\end{tikzcd}$$

(4)

Como $p_1|G = p_2|G$, también lo es p_1; y vimos antes que p_U es sumersión luego $\alpha p_2 = p_U p_1$ es sumersión (ejercicio 2 de 3.10) y por lo tanto α es sumersión (ver ejercicio 2a) de 4.19).

2°) Hemos probado entonces: para cada $x_0 \in X$ hay un abierto saturado V que contiene a x_0 y una estructura de variedad para V/R_V para la cual $p_V: V \longrightarrow V/R_V$ es sumersión.

Recordando que si V es abierto saturado la biyección $V/R_V \longrightarrow p(V) \subset X/R$ es homeomorfismo, y que $p(V)$ es abierto obtenemos: hay un cubrimiento V_i $(i \in I)$ de X por abiertos saturados, y estructuras de variedad para cada $p(V_i)$ tales que cada $p|V_i: V_i \longrightarrow p(V_i)$ es sumersión.

Aplicando 4.1 resultará enseguida el teorema a condición de probar que las estructuras de subvariedad de $p(V_i) \cap p(V_j)$ inducidas por $p(V_i)$ y $p(V_j)$ coinciden.

Pero $p|V_i$ es sumersión y por lo tanto también lo es $(p|V_i)|V_i \cap V_j$: $: V_i \cap V_j \longrightarrow p(V_i \cap V_j) = p(V_i) \cap p(V_j) \subset p(V_i)$; luego hay una única estructura de variedad para $p(V_i) \cap p(V_j)$ para la cual $p|V_i \cap V_j$ es sumersión. Ella debe coincidir entonces con la estructura de subvariedad abierta de $p(V_i)$ (resp: $p(V_j)$); de ahí la tesis.

Para completar la demostración, debemos probar la afirmación 1°); como el problema es local, consideramos un mapa (u,U,E) centrado en x_0 de modo que $u((U\times U) \cap G) = (\Omega\times\Omega) \cap M$, donde $u(U) = \Omega$ es entorno de $0 \in E$ y $M \subset E\times E$ es subespacio directo.

Notemos que siendo $p_2|G$ sumersión, también lo es $p_2|M: M \longrightarrow E$; o sea $p_2|M: M \longrightarrow E$ es un epimorfismo directo.

Si $j: E \longrightarrow E\times E$ es $j(v) = (v,0)$, vemos que $j^{-1}(M)$ es un subespacio directo de E (y la sucesión $0 \longrightarrow j^{-1}(M) \longrightarrow E \longrightarrow E\times E/M \longrightarrow 0$ es exacta, ver ejercicio 3. de 4.19); sea E_1 un suplemento topológico de $j^{-1}(M)$ en E.

Definimos $N = M \cap (E_1 \times E)$ y $p_2|N: N \longrightarrow E$ resulta un isomorfismo; su inversa es necesariamente de la forma $v \longrightarrow (g(v),v)$ con $g \in \mathcal{L}(E,E_1)$ (nótese que $g(v)$ resulta el único elemento $y \in E_1$ tal que $(y,v) \in M$).

Se define entonces $S_U = u^{-1}(E_1 \cap \Omega)$, $r_U = u^{-1}(g|\Omega)u$ y la prueba queda completa.

PROPOSICION 4.17. Sea X una variedad, sea Y un espacio topológico y sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación suryectiva. Las afirmaciones siguientes son entonces equivalentes

a) Existe una (única) estructura de variedad para Y para la cual f es una sumersión.

b) $G = \{(x,x'): f(x) = f(x')\}$ es una subvariedad de $X \times X$, $p_2|G: G \longrightarrow X$ es una sumersión y f es continua y abierta.

DEMOSTRACION. a) $\Rightarrow$ b) resulta del hecho que G es el producto fibrado $X \underset{Y}{\times} X$ (cf. 4.12 c) y 4.13). Recíprocamente si vale b) y R_f es la relación de equivalencia de gráfico G, de 4.16 sigue que X/R_f es una variedad y que $p: X \longrightarrow X/R_f$ es una sumersión.

Pero la biyección $\bar{f}: X/R_f \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo, lo que permite definir para Y una estructura de variedad para la cual $\bar{f}$ resulta un difeomorfismo; como $f = \bar{f}p$ sigue que f es una sumersión.

NOTA 4.18. En general no es fácil producir variedades diferenciables "distintas" sobre un mismo espacio topológico. En tal sentido, supongamos que $(X,\mathcal{A})$ es una variedad y que $f: X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo, donde Y es un espacio topológico. Usando 4.6 c) o 4.17 es obvio que se produce una estructura (única) de variedad para Y para la cual f deviene un difeomorfismo (concretamente si $(u,U,E) \in \mathcal{A}$ se considera $(uf^{-1}, f(U), E) = f_*(u,U,E)$; el conjunto $\mathcal{B} = \{f_*(u,U,E) : (u,U,E) \in \mathcal{A}\}$ nos da un atlas maximal para Y).

En particular, un homeomorfismo $f: X \longrightarrow X$ que no sea un difeomorfismo permite definir una estructura de variedad para X distinta de la original, pero difeomorfa a ella vía f.

Esto nos lleva a plantear la pregunta: ¿Si X es una variedad, existirá sobre X otra estructura de variedad no difeomorfa a la misma? O sea: dada una variedad $(X,\mathcal{A})$ se plantea la existencia de otro atlas maximal $\mathcal{B}$ en X tal que $(X,\mathcal{A})$ y $(X,\mathcal{B})$ no resulten difeomorfas.

El primer ejemplo en tal sentido se debe a J. Milnor [11] para $X = S^7$; ver también Am. J. of Math., 81 (1959), 962-972.

Otro tipo de problema que se plantea naturalmente es la existencia de *alguna* estructura diferenciable; o sea: si X es una variedad topológica (cf. 2.2 d)) ¿existe en X algún atlas A de clase C^r, $r \geq 1$? Este problema fué resuelto por vez primera (en forma negativa) por M. Kervaire (ver [12]).

EJERCICIOS 4.19. 1) Sea A el atlas de la variedad R; sea A' el atlas saturado que contiene a la función f, $f(t) = t^3$. Probar que $A \neq A'$, pero las variedades R y (R,A') son difeomorfas.

2) Sean X,Y,Z variedades y sean $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ aplicaciones continuas. Probar:

a) Si f y gf son sumersiones, entonces g es sumersión

b) Si g y gf son inmersiones, entonces f es inmersión

3) Sean E,F espacios de Banach y sea $M \subset ExF$ un subespacio directo tal que si $p_2: ExF \longrightarrow F$ es $p_2(x,y) = y$ entonces $p_2|M: M \longrightarrow F$ es epimorfismo directo.

Probar que la aplicación $E \xrightarrow{j} ExF \longrightarrow ExF/M$, $(j(x) = (x,0))$ es un epimorfismo directo de núcleo $j^{-1}(M) \cong (Ex\{0\}) \cap M$.

(Sug: ver que $Ex\{0\} + M = ExF$).

4) Sean X,Y variedades y sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación continua, cuyo gráfico se indicará con $G(f) \subset XxY$.

i) Si $p_X: XxY \longrightarrow X$ es la proyección, $p_X|G(f): G(f) \longrightarrow X$ es un homeomorfismo.

ii) Existe una única estructura de variedad para G(f) para la cual la aplicación $p_X|G(f)$ es un difeomorfismo.

iii) Con esta estructura ¿es G(f) una subvariedad de XxY? ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que G(f) sea subvariedad de XxY? (Sug: considerar $p_Y|G$).

5) Si X_i $(1 \leq i \leq r)$, Y son variedades, una familia $f_i: X_i \longrightarrow Y$ de aplicaciones de clase C^∞ se dirá *transversal* si la aplicación $f_1 x \ldots x f_r$: $\prod_{i=1}^{r} X_i \longrightarrow Y^r$ es transversal a la diagonal Δ_Y de Y^r.

Mostrar que en tal caso el producto fibrado $\prod_Y X_i$ (definido como el subconjunto de los $(x_1,\ldots,x_r)$ que satisfacen $f_i(x_i) = f_j(x_j)$ para todo i,j) es una subvariedad de $\prod_{i=1}^{r} X_i$.

6) Sean $f_1: X_1 \longrightarrow Y$, $f_2: X_2 \longrightarrow Y$ aplicaciones de clase C^∞ entre varie-

dades tales que $f_1 \pitchfork f_2$. Mostrar que el producto fibrado $X_1 \underset{Y}{\times} X_2$ satisface la "propiedad universal": para toda variedad Z y para todo par de aplicaciones $g_1: Z \longrightarrow X_1$, $g_2: Z \longrightarrow X_2$ de clase C^∞ tales que $g_1f_1 = g_2f_2$, existe una única $g: Z \longrightarrow X_1 \underset{Y}{\times} X_2$ de clase C^∞ tal que $p_1g = g_1$ y $p_2g = g_2$.

7) Notaciones como en 4.12 c); probar que si $f_2: X_2 \longrightarrow Y$ es una inmersión también lo es $p_1: X_1 \underset{Y}{\times} X_2 \longrightarrow X_1$.

8) Si X_1, X_2 son subvariedades transversales de una variedad X, mostrar que $X_1 \cap X_2$ es una subvariedad de X_1 (y de X_2), naturalmente difeomorfa a $X_1 \underset{X}{\times} X_2$ (Sug: verificar que $p_j: X_1 \underset{Y}{\times} X_2 \longrightarrow X_j$ $(j=1,2)$, son inmersiones regulares).

9) Sean $f: X \longrightarrow Y$, $g: X \longrightarrow Y$ aplicaciones de clase C^∞, cuyos gráficos se indican con $G(f)$ y $G(g)$.

Explicar la relación que existe entre los hechos "$f \pitchfork g$" y "$G(f) \pitchfork G(g)$".

10) Sea E un espacio de Banach, sea $E_* = E-\{0\}$; se considera la relación de equivalencia en E_* definida por "$x \equiv y$ significa $y = \alpha.x$ para algún $\alpha \in R$". El espacio cociente es el *espacio proyectivo* $P(E)$ asociado a E (cf. ejercicio 20 de 3.10).

Sea G el gráfico de la relación de equivalencia $\equiv$.

i) Probar que G satisface las condiciones de 4.16 ii) (Sug: considerar la inmersión $R_* \times E_* \longrightarrow E_* \times E_*$ dada por $(\lambda,x) \longrightarrow (\lambda x,x)$).

ii) G es cerrado en $E_* \times E_*$, así que $\mathbf{P}(E)$ es separado.

Deducir que existe una única estructura de variedad diferenciable para $\mathbf{P}(E)$ para la cual $p: E_* \longrightarrow \mathbf{P}(E)$ es sumersión; $\mathbf{P}(E)$ es separada, y compacta si y sólo si $\dim(E)$ es finita.

iii) $p|S(E): S(E) \longrightarrow \mathbf{P}(E)$ es un difeomorfismo local, revestimiento de dos hojas (cf. ejercicio 7 de 3.10), cuando E es un espacio de Hilbert.

iv) Si $Q: E \longrightarrow \mathbf{R}$ es una forma cuadrática no degenerada, la *cuádrica C proyectiva* asociada a Q es $p\{x \in E_*: Q(x) = 0\}$; mostrar que C es una subvariedad cerrada de $\mathbf{P}(E)$ de codimensión 1.

11) El grupo topológico cociente $T^n = \mathbf{R}^n/Z^n$ admite una única estructura de variedad para la cual la proyección $p: \mathbf{R}^n \longrightarrow T^n$ es una sumersión.

i) T^n es compacto.

ii) T^1 es difeomorfo a S^1 (Sug: considerar $t \longrightarrow \exp(2\pi it)$, identificando S^1 al subconjunto $\{z: |z| = 1\}$ de $\mathbf{C}$).

iii) T^2 es difeomorfo al toro del ejercicio 6 i) de 3.10 (cf. ejercicio 12 de 3.10).

iv) T^n es difeomorfo a $S^1 \times \ldots \times S^1$.

v) Sea $\varphi: R \longrightarrow T^2$, $\varphi(t) = (\exp 2\pi i t, \exp 2\pi i a t)$ con a irracional.

Probar que φ es una inmersión inyectiva y que $\varphi(R)$ es denso en T^2 (no es una subvariedad).

12) Sea E un espacio de Banach; el grupo GL(E) es una variedad y las operaciones $(x,y) \longrightarrow x.y$, $x \longrightarrow x^{-1}$ son C^∞.

i) Si dim(E) es finita, el subgrupo $SL(E) = \{T: \det(T) = 1\}$ es una subvariedad cerrada de codimensión 1.

ii) Si E es un espacio de Hilbert, el *grupo ortogonal* de E, $O(E) = \{A \in GL(E): A^*A = 1_E\}$ es una subvariedad cerrada de GL(E).

Si $\dim(E) = n$, O(E) es compacta de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$.

iii) La aplicación $A \longrightarrow A(x_0)$ (con x fijo, $|x_0| = 1$) es una sumersión de O(E) sobre S(E); el grupo $\{A: A(x_0) = x_0\}$ se identifica a O(H), donde H es el hiperplano ortogonal a x_0.

§ 5 - VARIEDADES DE GRUPO (Generalidades).

Un *grupo de Lie* (o una *variedad de grupo*) consiste de una variedad diferenciable G munida de una estructura de grupo, de tal forma que la operación $(x,y) \longrightarrow x.y$ (de GxG en G) es de clase C^∞.

OBSERVACIONES 5.1. a) Si G es un grupo de Lie, las *traslaciones a izquierda* (resp: *a derecha*) $\ell_a: G \longrightarrow G$ definidas por $\ell_a(x) = a.x$ (resp: $r_a: G \longrightarrow G$, $r_a(x) = x.a$) son difeomorfismos de G sobre G. Consecuencia inmediata: la variedad G es pura.

b) Como ejemplo inmediato de variedad de grupo mencionamos a: todo espacio de Banach E (con su estructura de grupo aditivo).

c) El producto $G_1 \times G_2$ de grupos de Lie es otro grupo de Lie.

d) Si G_1, G_2 son grupos de Lie, llamaremos *homomorfismo* $f: G_1 \longrightarrow G_2$ a toda aplicación C^∞ que es un homomorfismo "algebraico". Nótese que un homomorfismo algebraico $f: G_1 \longrightarrow G_2$ es C^∞ si (y sólo si) hay un entorno U del elemento neutro $e \in G_1$ tal que $f|U: U \longrightarrow G_2$ es C^∞. PRUEBA: si $a \in G_1$, $a.U = \ell_a(U)$ es entorno de a y $f|a.U$ coincide con $\ell_{f(a)}(f|U)\ell_{a^{-1}}$ (cf.a)).

e) Si $x \in G$, $y \in G$ entonces si llamamos ψ: $G\times G \longrightarrow G$ a $\psi(x,y) = x.y$ se verifica

$$T_{(x,y)}(\psi)(v_1,v_2) = T_x(r_y)(v_1) + T_y(\ell_x)(v_2) \qquad (1)$$

para $(v_1,v_2) \in T_x(G)\times T_y(G) \approx T_{(x,y)}(G\times G)$. PRUEBA. Fijados x,y las aplicaciones j_y: $G \longrightarrow G\times G$, h_x: $G \longrightarrow G\times G$ dadas por $j_y(x') = (x',y)$, $h_x(y') = (x,y')$ verifican $p_2 j_y$ = constante, $p_1 j_y$ = identidad y entonces

$$(v_1,v_2) \longrightarrow T_x(j_y)(v_1) + T_y(h_x)(v_2)$$

da un isomorfismo de $T_x(G)\times T_y(G)$ sobre $T_{(x,y)}(G\times G)$.

Como $\psi j_y = r_y$, $\psi h_x = \ell_x$, resulta enseguida (1).

PROPOSICION 5.2. Si G es un grupo de Liê, la aplicación $x \longrightarrow x^{-1}$ es un difeomorfismo de G sobre G.

DEMOSTRACION. Es suficiente ver que $x \longrightarrow x^{-1}$ es C^∞; pero de (1) se deduce que ψ es una sumersión (cf.5.1 a)); por consiguiente $\psi^{-1}(e) = H$ es una subvariedad de $G\times G$, con $T_{(x,y)}(H) = \{(v_1,v_2): T_x(r_y)(v_1) + T_y(\ell_x)(v_2)=0\}$ por 3.4.

Como H es el gráfico de $x \longrightarrow x^{-1}$, y como es inmediato que $T_{(x,x^{-1})}(G\times G) = T_{(x,x^{-1})}(H) \oplus T_{(x,x^{-1})}(\{x\}\times G)$ del ejercicio 4 de 3.10 se deduce que $x \longrightarrow x^{-1}$ es C^∞.

COROLARIO 5.3. Toda variedad de grupo es un grupo topológico separado.

(Pues el conjunto $\{e\}$ formado por el elemento neutro es cerrado). Nótese que entonces todo grupo de Lie es una variedad regular (todo grupo topológico separado es regular) (cf.2.5 b) y 2.4).

Para obtener nuevos grupos de Lie a partir de otros, es útil la:

PROPOSICION 5.4. Sea G un grupo de Lie, sea H un grupo topológico y f: : $H \longrightarrow G$ un homomorfismo que verifica la condición siguiente: existe un entorno U de $e \in H$, un mapa (v,V,F) centrado en $e \in G$ y un subespacio directo $E \subset F$ tales que

a) $f(U) \subset V$ y $f|U$: $U \longrightarrow f(U)$ es homeomorfismo

b) $vf(U) = E \cap v(V)$

Existe entonces una única estructura de grupo de Lie para H para la cual f es un homomorfismo de grupos de Lie y una inmersión.

DEMOSTRACION. Resulta inmediatamente de 4.5, ya que usando traslaciones en G y H se produce la condición $I_f(x)$ para todo $x \in H$.

DEFINICION 5.5. Si G es un grupo de Lie, llamaremos *subgrupo de Lie* $H \subset G$ a todo subgrupo que sea una subvariedad.

(Para algunos ejemplos ver ejercicios 11 y 12 de 4.19).

Todo subgrupo de Lie $H \subset G$ es necesariamente cerrado (pues toda subvariedad es un conjunto localmente cerrado, y todo subgrupo localmente cerrado en un grupo topológico G es cerrado).

Otra forma de producir grupos de Lie es mediante "cocientes", o sea:

PROPOSICION 5.6. Sea G un grupo de Lie, sea $H \subset G$ un subgrupo de Lie. Consideramos el cociente G/H formado por las clases a izquierda; entonces:

i) Existe una única estructura de variedad en G/H para la cual $p: G \longrightarrow G/H$ es una sumersión.

Si H es invariante, G/H es un grupo de Lie y $p: G \longrightarrow G/H$ es un homomorfismo de grupos de Lie.

DEMOSTRACION. Por definición G/H es el cociente de G por la relación de equivalencia R, que identificada a su gráfico es $\{(x,y): x^{-1}.y \in H\}$, de manera que utilizamos 4.17. Vemos que $R = \varphi^{-1}(H)$ donde $\varphi(x,y) = x^{-1}.y$ es la composición de

$$(x,y) \longrightarrow (x^{-1},y) \xrightarrow[\psi]{} x^{-1}.y \qquad (\varphi: G\times G \longrightarrow G)$$

La primera aplicación es un difeomorfismo de $G\times G$ sobre $G\times G$ (por 5.2); además sabemos por (1) que ψ es sumersión. Por consiguiente (4.8 b)) resulta $\varphi \pitchfork H$ así que $R = \varphi^{-1}(H)$ es subvariedad cerrada de $G\times G$.

Como $p_1|R = p_2|R$, veamos que $p_1|R: R \longrightarrow G$ es sumersión; para ello notemos que si $\alpha: G\times G \longrightarrow G\times G$ es $\alpha(x,y) = (x,x^{-1}.y)$, entonces α es C^∞ y $\alpha\gamma = 1_{G\times H}$ donde $\gamma: G\times H \longrightarrow R$ es $\gamma(x,h) = (x,x.h)$.

Como además $\gamma(\alpha|R) = 1_R$ resulta que $\gamma: G\times H \longrightarrow R$ es un difeomorfismo; siendo $(p_1|R)\gamma(x,h) = x$ se ve enseguida que $p_1|R$ es una sumersión.

Hay una operación natural $G\times G/H \xrightarrow{\overline{\psi}} G/H$ inducida por la operación de G, de modo que el diagrama (2) es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "1_G \times p"'] & G \arrow[d, "p"] \\ G \times G/H \arrow[r, "\overline{\psi}"'] & G/H \end{tikzcd}$$

(2)

Como $1_G\times p$ es sumersión resulta claro que $\overline{\psi}$ es de clase C^∞ (4.14); por consiguiente si H es invariante resulta que el grupo topológico G/H es un grupo de Lie, debido al diagrama conmutativo (3) (y nuevamente, a que p es sumersión).

$$\begin{tikzcd} G \times G/H \arrow[rr, "\overline{\psi}"] \arrow[dr, "p\times 1_{G/H}"'] & & G/H \\ & G/H \times G/H \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(3)

NOTA. Aunque H no sea invariante, si indicamos con $(g,x) \longrightarrow g.x = \overline{\psi}(g,x)$ para $g \in G$, $x \in G/H$, el hecho que esta aplicación es de clase C^∞ nos dice que $x \longrightarrow g.x$ es un difeomorfismo de G/H para cada $g \in G$.

Estas consideraciones pueden generalizarse si consideramos "grupos que operan sobre variedades". Seguiremos para ello el siguiente esquema.

DEFINICION 5.7. Si G es un grupo de Lie y X es una variedad diferenciable decimos que G *opera* (a izquierda) sobre X si tenemos una aplicación (de clase C^∞) de $G \times X$ en X, indicada $(g,x) \longrightarrow g.x$ que satisface

$$e.x = x \qquad g_1.(g_2.x) = (g_1g_2).x$$

para todo $x \in X$, g_1 y g_2 en G.

Si para cada $g \in G$ se define $t_g: X \longrightarrow X$ por $t_g(x) = g.x$, resulta un homomorfismo de grupos $t: G \longrightarrow \mathrm{Dif}(X)$ (donde $\mathrm{Dif}(X) \subset C^\infty(X,X)$ es el grupo de los difeomorfismos de X).

Dado $x_0 \in X$, indicamos con $\varphi_{x_0}: G \longrightarrow X$ la aplicación C^∞ definida por $\varphi_{x_0}(g) = g.x_0$; decimos que X es un *espacio homogéneo* (para G) si φ_{x_0} es una aplicación suryectiva.

De cualquier forma el subgrupo cerrado $G(x_0) = \varphi_{x_0}^{-1}(x_0) = \{g \in G: g.x_0 = x_0\}$ se denomina el "estabilizador de x_0 en G".

OBSERVACIONES 5.8. a) Si $g \in G$, el diagrama conmutativo (4) muestra que el comportamiento de todas las $T_g(\varphi_{x_0})$, $g \in G$ es el mismo (ya que es el mismo que el de $T_e(\varphi_{x_0})$).

$$\begin{tikzcd} T_e(G) \arrow[r, "T_e(\varphi_{x_0})"] \arrow[d, "\approx"', "T_e(\ell_g)"] & T_{x_0}(X) \arrow[d, "\approx"', "T_{x_0}(t_g)"] \\ T_g(G) \arrow[r, "T_g(\varphi_{x_0})"'] & T_{g.x_0}(X) \end{tikzcd}$$

(4)

b) Como consecuencia de a) vemos que

i) $T_e(\varphi_{x_0})$ monomorfismo directo $\Rightarrow \varphi_{x_0}$ inmersión.

ii) $T_e(\varphi_{x_0})$ epimorfismo directo $\Rightarrow \varphi_{x_0}$ sumersión.

iii) Si G ó X son de dimensión finita, φ_{x_0} es una subinmersión.

c) En cualquiera de los casos considerados en b), el estabilizador $G(x_0)$ resulta un subgrupo de Lie de G; en el caso i), φ_{x_0} es localmente inyectiva así que $G(x_0)$ es discreto. En los casos ii) iii) se aplica 3.9 directamente.

En cualquiera de estos tres casos la aplicación inducida

$$\bar{\varphi}_{x_0} : G/G(x_0) \longrightarrow X \qquad (5)$$

es C^∞, inmersión inyectiva con imagen la "*órbita*" $G.x_0$ (lo que puede explotarse convenientemente, ver ejercicios).

Un caso importante de operación de G sobre X ocurre cuando se verifican ciertas condiciones (no demasiado restrictivas, ver capítulo IV):

DEFINICION 5.9. Si G es un grupo de Lie que opera sobre una variedad X, decimos que G define un *fibrado principal* si se verifican:

a) G opera sin puntos fijos (o sea $G(x) = \{e\}$ para todo $x \in X$).

b) La relación $R = \{(x,y): \text{existe } g \in G \text{ con } y = g.x\}$ es cerrado en XxX.

c) La aplicación $\eta: R \longrightarrow G$ definida por $\eta(x,y)$ = único $g \in G$ tal que $y = g.x$, es continua.

d) Si $x_0 \in X$, la aplicación $T_e(\varphi_{x_0}): T_e(G) \longrightarrow T_{x_0}(X)$ es un monomorfismo directo.

OBSERVACIONES 5.10. a) Si dim(G) es finita, o si dim(X) es finita de 5.8 b) iii) y 5.9 a) se deduce la condición d) (que es entonces superflua en estos casos).

b) Si G es un subgrupo de Lie de un grupo de Lie X, la operación de G a izquierda en X define un fibrado principal (evidente); así podemos generalizar 5.6 como sigue:

PROPOSICION 5.11. Si G es un grupo de Lie que opera sobre una variedad X definiendo un fibrado principal, existe una única estructura de variedad para el espacio topológico cociente X/R tal que $p: X \longrightarrow X/R$ es sumersión.

DEMOSTRACION. Utilizamos 4.17, considerando $\varphi: G\times X \longrightarrow X\times X$ dada por $\varphi(g,x) = (x,g.x)$; de a) b) c) se deduce enseguida que φ es un homeomorfismo de GxX sobre R. Por otro lado si $g \in G$, $x \in X$ tenemos

$$T_{(g,x)}(\varphi)(v,b) = (b, T_x(t_g)(b) + T_g(\varphi_x)(v))$$

si $(v,b) \in T_g(G)\times T_x(X)$, de donde vemos que φ es una inmersión.

Por lo tanto φ es una inmersión regular, así que R es una subvariedad cerrada de XxX y $\varphi: G\times X \longrightarrow R$ es difeomorfismo (3.6). Siendo $p_1\varphi = p_1$, $p_1|R : R \longrightarrow X$ es una sumersión y concluímos.

OBSERVACION 5.12. En la situación anterior se indica con X/G al espacio cociente X/R (espacio de las órbitas).

EJERCICIOS 5.13. 1) Si G es un grupo de Lie y Γ es la componente conexa de e, probar que Γ es un subgrupo invariante abierto (y por lo tanto un subgrupo de Lie); el grupo G/Γ es discreto.

2) Si $f: G_1 \longrightarrow G_2$ es un homomorfismo de grupos de Lie y Γ_1 es la componente conexa de $e \in G_1$, probar que son equivalentes:

i) $f(\Gamma_1) = \{e\}$ (o sea, f es constante sobre Γ_1).

ii) $T_e(f) = 0$ (Sug: razonar como en 5.1 d)).

3) Sea A un álgebra de Banach real y sea A_* el grupo de Lie formado por los elementos inversibles de A; sea $\exp: A \longrightarrow A_*$ (ver ejercicio 10 de 3.16, cap.II).

i) $\exp$ es un difeomorfismo local en 0 (Sug: $D\exp(0) = 1_A$).

ii) Sea $H \subset A_*$ un subgrupo; supongamos que hay entornos U de $e \in A_*$ y V de $0 \in A$, y un subespacio directo $S \subset A$ tales que

a) $\exp: V \longrightarrow U$ es difeomorfismo

b) $H \cap U = \exp(V \cap S)$

Probar que entonces H es subgrupo de Lie de A_* y que $T_e(H) = S$

4) Aplicando el ejercicio anterior obtener los grupos de Lie (y sus correspondientes espacios tangentes en e) correspondientes a los siguientes subgrupos de A_*; siendo $A = \mathcal{L}(E)$, (cf.ejercicio 12 de 4.19):

i) $\dim(E) < \infty$, $H = S\mathcal{L}(E)$ (aquí $S = \{T: tr(T) = 0\}$)

ii) E espacio de Hilbert, $H = O(E)$ $(S = \{T: T+T^* = 0\})$

iii) $E = \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$, $H = GL(n,\mathbf{C}) = \{T \in GL(E): TJ = JT\}$ donde $J(x,y) = (-y,x)$ (cf.ejercicio 8 de 2.4, cap.II).

5) Sea A el álgebra de cuaterniones identificada a $\mathbf{R}^4$ con base $e_0 = 1$, e_1, e_2, e_3 y sea $V = \{x \in A: \langle x, e_0 \rangle = 0\}$.

i) Probar que S^3 es un subgrupo de $\mathbf{R}^4$.

ii) Si $a \in S^3$, $a.v.a^* \in V$ para todo $v \in V$.

iii) Deducir un homomorfismo de grupo de Lie $p: S^3 \longrightarrow O(V)$, que es un revestimiento de dos hojas.

iv) Las variedades $SO(3)$ y $\mathbf{P}^3$ son difeomorfas (cf.ejercicio 10 iii) de 4.19).

6) Si G es un grupo de Lie y $\widetilde{G}$ es su revestimiento universal, $\widetilde{G}$ es un grupo de Lie y $p: \widetilde{G} \longrightarrow G$ es un homomorfismo de grupos de Lie, difeomorfismo local (cf.[3],6.11).

7) Todo grupo de Lie es una variedad metrizable (cf.[8]).

8) Sea G un grupo de Lie que opera sobre una variedad X, sea $x_0 \in X$; se considera la aplicación $\bar{\varphi}_{x_0}: G/G(x_0) \longrightarrow X$ (cf.5.8 c)).

a) Si $T_e(\varphi_{x_0})$ es epimorfismo local, la órbita $G.x_0$ es abierta y $\bar{\varphi}_{x_0}:$ $: G/G(x_0) \longrightarrow G.x_0$ es un difeomorfismo.

b) En general, $\bar{\varphi}_{x_0}: G/G(x_0) \longrightarrow G.x_0$ es un homeomorfismo si y sólo si $G.x_0$ es una subvariedad de X y $\bar{\varphi}_{x_0}$ es difeomorfismo.

9) Notaciones como en el ejercicio 8, se supone que $\dim(G)$ es finita, G es separable y $G.x_0$ es cerrado en X. Probar que $\bar{\varphi}_{x_0}$ es un homeomorfismo de $G/G(x_0)$ sobre $G.x_0$ (cf.ejercicio 8 b)) (Sug: $G.x_0$ es un espacio de Baire, escribir G como unión $\bigcup_{n\geq 1} V^n$, con V entorno compacto de e).

10) Sea E un espacio de Hilbert, $H \subset E$ un hiperplano y $|x_0| = 1$ con $x_0 \in H^{\perp}$; $O(E)$ opera sobre $S(E)$.

i) El grupo ortogonal $O(H)$ se identifica con el subgrupo estabilizador de x_0 en $O(E)$.

ii) $O(E)/O(H)$ es difeomorfo con $S(E)$ (cf.ejercicio 12 de 4.19).

11) Sea E un espacio de Hilbert, sea $G_r(E)$ el conjunto de todos los subespacios de E de dimensión r.

i) El conjunto $\mathrm{Mono}(R^r,E)$ de los monomorfismos $T: R^r \longrightarrow E$ es un abierto en $\mathcal{L}(R^r,E)$; la aplicación $T \longrightarrow (T(e_1),\dots,T(e_r))$ es un difeomorfismo de $\mathrm{Mono}(R^r,E)$ sobre el subconjunto abierto $St_r(E) \subset E^r$ formado por los $(v_1,\dots,v_r)$ independientes.

ii) El grupo $GL(R^r)$ opera (a derecha) sobre $\mathrm{Mono}(R^r,E)$ mediante $(T,\sigma) \longrightarrow$ $\longrightarrow T\sigma$, y define un fibrado principal.

iii) La aplicación $T \longrightarrow T(R^r)$ induce una biyección entre la variedad $\mathrm{Mono}(R^r,E)/GL(R^r)$ y $G_r(E)$; $G_r(E)$ resulta así una variedad diferenciable ("variedad Grassmanianna, o variedad de Grassmann de los r-planos en E"). Si $\dim(E) = n$, $\dim G_r(E) = r(n-r)$. Caso $r=1$.

iv) Si $\mathrm{Sim}(r)$ es el subespacio de $R^{r\times r}$ formado por las matrices simétricas, la aplicación $(x_1,\dots,x_r) \longrightarrow (\langle x_i,x_j \rangle)$ es una sumersión de $St_r(E)$ sobre $\mathrm{Sim}(r)$. Deducir que el conjunto $St_r^0(E)$ formado por las r-uplas ortogonales es una subvariedad de $St_r(E)$.

v) El conjunto de isometrías $O(\mathbf{R}^r,E)$ de $\mathbf{R}^r$ en E es una variedad difeomorfa a $St_r^0(E)$.

vi) $O(\mathbf{R}^r,E)/O(\mathbf{R}^r)$ es difeomorfa a $G_r(E)$.

vii) $G_r(E)$ es compacto si dim(E) es finita (Sug: $O(\mathbf{R}^r,E)$ lo es).

12) Sea E un espacio de Hilbert de dimensión finita; se considera la aplicación de clase C^∞ h_0: $St_r^0(E) \longrightarrow \Lambda^r(E)$.

i) Mostrar que por pasaje a los cocientes h_0 induce una inmersión regular

$$h\colon G_r(E) \longrightarrow \mathbf{P}(\Lambda^r(E))$$

ii) Si $E = \mathbf{R}^4$, r=2 mostrar que $h(G_2(\mathbf{R}^4))$ es la cuádrica proyectiva K de ecuación

$$y_{12}\cdot y_{34} - y_{13}\cdot y_{24} + y_{14}\cdot y_{23} = 0$$

(cf.ejercicio 10 iv) de 4.19), donde y_{ij} $(i < j)$ son las coordenadas en $\Lambda^2(\mathbf{R}^4)$ ("cuádrica de Klein').

§ 6 - PARTICIONES DE LA UNIDAD.

Es bastante claro (al menos si n=1) que en $\mathbf{R}^n$ hay suficientes funciones C^∞ como para "distinguir" puntos y cerrados (ver abajo); veremos ahora que se puede afirmar en el caso general de variedades, para lo cual precisamos unas construcciones especiales.

NOTA 6.1. a) Si $w\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ es $w(t) = 0$ si $t \leqslant 0$, $w(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$, entonces w es C^∞ (evidente pues el único punto dudoso es t=0, que se trata recordando que $\lim\limits_{t\to\infty} t^n e^{-t} = 0$ para todo $n \geqslant 0$).

b) Si $\lambda\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ es definida por $\lambda(t) = \dfrac{w(t)}{w(t) + w(1-t)}$, λ es creciente, C^∞ con $\lambda(t) = 0$ si $t \leqslant 0$, $\lambda(t) = 1$ si $t \geqslant 1$.

c) Si $\lambda_\varepsilon\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ es $\lambda_\varepsilon(t) = \lambda(t/\varepsilon)$, entonces λ_ε es C^∞ creciente y $\lambda_\varepsilon(t) = 0$ si $t \leqslant 0$, $\lambda_\varepsilon(t) = 1$ si $t \geqslant \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

d) Pongamos $\rho(t) = \lambda(t+2).\lambda(-t+2)$; $\rho\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ es de clase C^∞ y $\rho(t) \geqslant 0$ para todo t, $\rho(t) = 1$ si $|t| \leqslant 1$, $\rho(t) = 0$ si $|t| \geqslant 2$.

f) Dado $a \in \mathbf{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ la aplicación $\varphi\colon \mathbf{R} \longrightarrow [0,1]$ definida por $\varphi(x) = \rho(\frac{|x-a|}{\varepsilon})$ es de clase C^∞, $\varphi(x) = 0$ si $|x-a| \geqslant 2\varepsilon$ y $\varphi(x) = 1$ si $|x-a| \leqslant \varepsilon$.

Sigue de lo precedente que en $\mathbf{R}^n$ hay aplicaciones de clase C^∞ de soporte arbitrariamente pequeño ($y \geq 0$); más precisamente si $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ es abierto y $a \in \Omega$, hay una φ: R $\longrightarrow [0,1]$ de clase C^∞, soporte compacto contenido en Ω y tal que $\varphi(x) = 1$ para todo x en un entorno de a. De esto sigue inmediatamente el:

LEMA 6.2. Si $K \subset R^n$ es compacto y U es un entorno abierto de K, existe una aplicación ψ: $R^n \longrightarrow [0,1]$ de clase C^∞ tal que

1°) $\psi(x) = 1$ si $x \in K$.

2°) sop(ψ) es compacto, contenido en U.

DEMOSTRACION. De lo que precede sigue que hay un cubrimiento finito de K por abiertos $V_1,\ldots,V_r$ y aplicaciones φ_i: $R^n \longrightarrow [0,1]$ de clase C^∞ con soportes compactos contenidos en U y tales que $\varphi_i(V_i) = 1$ para $i = 1,\ldots,r$.

Si φ: $R^n \longrightarrow R$ es $\varphi = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i$, claramente φ es C^∞ y sop(φ) es compacto contenido en U, con $\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \in R^n$ y $\varphi(x) > 0$ si $x \in K$. Entonces si $\varepsilon = \min\{\varphi(x)\colon x \in K\}$ basta tomar $\psi = \lambda_\varepsilon \varphi$, donde λ_ε es como en 6.1 c).

Las siguientes definiciones nos introducen en el tema:

DEFINICION 6.3. Una variedad (separada) X se dice C^r-*normal* ($0 \leq r \leq \infty$) si para cada par de cerrados disjuntos A,B en X existe una aplicación φ: X $\longrightarrow [0,1]$ de clase C^r tal que $\varphi(A) = 1$, $\varphi(B) = 0$.

DEFINICION 6.4. Si X es una variedad (separada), decimos que X *admite particiones* C^r de la unidad si para todo cubrimiento abierto localmente finito U_i ($i \in I$) de X existe una familia de aplicaciones φ_i: X $\longrightarrow$ R de C^r ($i \in I$) tal que

a) $\varphi_i(x) \geq 0$ para todo $i \in I$

b) $\mathrm{sop}(\varphi_i) \subset U_i$ para todo $i \in I$

c) $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$ para todo $x \in X$.

OBSERVACIONES 6.5. a) Conviene observar que la condición 6.4 c) tiene sentido; de manera completamente general si φ_i: X $\longrightarrow$ R ($i \in I$) es una familia de aplicaciones de clase C^r cuyos soportes forman una familia localmente finita la suma $\sum_{i\in I} \varphi_i$ está bien definida y es una aplicación de clase C^r.

En efecto, para cada $x_0 \in X$ hay un entorno Ω de x_0 y un subconjunto fini to $J \subset I$ tal que $sop(\varphi_i) \cap \Omega = \emptyset$ si $i \notin J$; por consiguiente $\varphi_i|\Omega = 0$ si $i \notin J$, de manera que - por definición - tendremos

$$(\sum_{i \in I} \varphi_i)|\Omega = \sum_{i \in J} \varphi_i|\Omega$$

Claramente esto define sin ambigüedad $\sum_{i \in I} \varphi_i$, al mismo tiempo que muestra que es una aplicación de clase C^r.

b) En la situación de 6.4, decimos que la familia φ_i $(i \in I)$ es una *partición de la unidad de clase* C^r *subordinada al cubrimiento* dado U_i $(i \in I)$.

c) La noción de C^r-normalidad es una generalización de la caracterización (vía el teorema de Urysohn) de la correspondiente noción de "espacio normal" (cf.[7] ,[8]).

PROPOSICION 6.6. Una variedad es C^r-normal si y sólo si admite particiones C^r de la unidad.

DEMOSTRACION. Si A,B son cerrados disjuntos en X y $\{\varphi_1,\varphi_2\}$ es una partición de la unidad de clase C^r subordinada al cubrimiento $U_1 = X - A$, $U_2 = X - B$, es evidente que $\varphi = \varphi_2: X \longrightarrow R$ es de clase C^r y verifica $\varphi(B) = 0$, $\varphi(A) = 1 - \varphi_1(A) = 1$ (y siendo $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, es $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ para todo $x \in X$).

Recíprocamente supongamos X C^r-normal y sea U_i $(i \in I)$ un cubrimiento abierto localmente finito de X; es posible obtener otro cubrimiento abierto V_i $(i \in I)$ de X tal que $\overline{V}_i \subset U_i$ para cada $i \in I$ (ver [8], §4, n°3).

Por la misma razón hay otro cubrimiento abierto W_i $(i \in I)$ con $\overline{W}_i \subset V_i$ para cada $i \in I$, ahora si para cada $i \in I$ consideramos una aplicación $\psi_i: X \longrightarrow [0,1]$ de clase C^r tal que $\psi_i(\overline{W}_i) = 1$, $\psi_i(X - V_i) = 0$, la función $\psi = \sum_{i \in I} \psi_i$ está bien definida (6.5 a)), es de clase C^r y $\psi(x) > 0$ para todo $x \in X$.

Entonces $\varphi_i = \psi_i|\psi$ $(i \in I)$ es una partición de la unidad de clase C^r subordinada al cubrimiento U_i $(i \in I)$.

La noción de "partición de la unidad" puede generalizarse como sigue:

PROPOSICION 6.7. Sea X una variedad C^r-normal y paracompacta. Entonces para *todo* cubrimiento abierto U_i $(i \in I)$ de X existe una familia $\varphi_i: X \longrightarrow [0,1]$ de aplicaciones de clase C^r $(i \in I)$ tales que

i) $sop(\varphi_i) \subset U_i$ para todo $i \in I$.

ii) La familia $sop(\varphi_i)$ $(i \in I)$ es localmente finita.

iii) $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$ para todo $x \in X$ (cf.6.5 a)).

DEMOSTRACION. Hay un cubrimiento abierto Ω_λ $(\lambda \in L)$ localmente finito, que refina al cubrimiento dado; consideramos entonces una aplicación τ: $L \longrightarrow I$ tal que $\Omega_\lambda \subset U_{\tau(\lambda)}$ para todo $\lambda \in L$.

Si g_λ $(\lambda \in L)$ es una partición de la unidad de clase C^r subordinada al cubrimiento Ω_λ $(\lambda \in L)$, definimos $\varphi_i = \sum_{\tau(\lambda)=i} g_\lambda$ (bien de clase C^ry $\geqslant 0$) y la demostración se concluye como en [8], corollaire de prop.4, §4,n°4).

PROPOSICION 6.8. Sea X una variedad paracompacta. Entonces son equivalentes:

i) X es C^r-normal.

ii) Para todo abierto $U \subset X$ existe una aplicación φ: $X \longrightarrow [0,1]$ de clase C^r tal que $U = \{x \in X: \varphi(x) > 0\}$.

DEMOSTRACION. i) $\Rightarrow$ ii) Para cada $x \in U$ hay un entorno Ω tal que $x \in \Omega \subset \subset \overline{\Omega} \subset U$; como U es paracompacto (por ser X metrizable, cf.2.3 e)), hay un refinamiento localmente finito del cubrimiento de U por tales Ω; ello produce entonces un cubrimiento abierto V_i $(i \in I)$ de U, localmente finito y tal que $\overline{V}_i \subset U$ para todo $i \in I$.

Si W_i $(i \in I)$ es otro cubrimiento abierto de U tal que $\overline{W}_i \subset V_i$ para cada $i \in I$, consideramos para cada $i \in I$ una aplicación ψ_i: $X \longrightarrow [0,1]$ de clase C^r tal que $\psi_i(\overline{W}_i) = 1$ y $\psi_i(X - V_i) = 0$. Como $\mathrm{sop}(\psi_i) \subset \overline{V}_i$, sigue que $\psi = \sum_{i\in I} \psi_i$ está bien definida y es de clase C^r, $\psi \geqslant 0$.

Ahora si $x \in U$ es $\psi(x) > 0$ (pues x estará en algún W_i); por otro lado si $\psi(x) > 0$, necesariamente deberá ser $\psi_{i_0}(x) > 0$ para algún $i_0 \in I$ y por ende $x \in \overline{V}_{i_0} \subset U$. Finalmente basta poner $\varphi(x) = \lambda(\psi(x))$, donde λ es como en 6.1 b).

ii) $\Rightarrow$ i) Sean A,B cerrados disjuntos en X y sean φ: $X \longrightarrow [0,1]$ y ψ: $X \longrightarrow [0,1]$ de clase C^r con $\varphi(x) = 0$ si (y sólo si) $x \in A$, y con $\psi(x) = 0$ si (y sólo si) $x \in B$.

La aplicación f: $X \longrightarrow [0,1]$ definida por $f = \psi/\varphi+\psi$ es de clase C^r (nótese que es imposible que $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ para un mismo x), y $f(B) = 0$, $f(A) = 1$.

Veamos ahora una caracterización de la C^r-normalidad.

PROPOSICION 6.9. Sea E un espacio de Banach C^r-normal. Entonces toda variedad paracompacta X de modelo E es C^r-normal.

DEMOSTRACION. Sea $\Omega \subset X$ un abierto; hay una familia de mapas (u_i, U_i, E) tales que la familia U_i $(i \in I)$ es un cubrimiento localmente finito de Ω. Sea V_i $(i \in I)$ otro cubrimiento abierto de Ω tal que $\overline{V}_i \subset U_i$ para todo $i \in I$.

Como $u_i(U_i)$ es C^r-normal (por 6.8) y como $u_i(V_i)$ es abierto en E, sigue que hay una aplicación $\psi_i\colon u_i(U_i) \longrightarrow [0,1]$ de clase C^r para cada $i \in I$, tal que $\psi_i(\xi) > 0$ equivale a $\xi \in u_i(V_i)$.

Ahora si $g_i\colon X \longrightarrow [0,1]$ se define por

$$g_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin U_i \\ \psi_i u_i(x) & x \in U_i \end{cases}$$

es inmediato que g_i es C^r y que $\mathrm{sop}(g_i) \subset \overline{V}_i \subset U_i$; luego $g = \sum\limits_i g_i$ es de clase C^r y $g \geqslant 0$. Claramente $g(x) > 0$ equivale a $x \in \Omega$, así que $\varphi = \lambda g$ (cf. 6.1 b)) es de clase C^r, $\varphi(X) \subset [0,1]$ y $\varphi(x) > 0$ equivale a $x \in \Omega$; la tesis resulta así de 6.8.

El resultado anterior reduce el problema de caracterizar las variedades C^r-normales al problema análogo para los espacios de Banach. Esto es fácil en el caso de dimensión finita, gracias a la compacidad local:

PROPOSICION 6.10. $\mathbf{R}^n$ es C^r-normal para todo r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$.

DEMOSTRACION. Basta considerar el caso $r=\infty$, y usaremos 6.8. Si $U \subset \mathbf{R}^n$ es abierto hay un cubrimiento abierto V_i $(i \in I)$ de U, que es localmente finito y con cada $\overline{V}_i$ compacto (NOTA. I puede suponerse numerable, pero esto no es imprescindible. Aplicando 6.2 obtenemos aplicaciones $\psi_i\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow [0,1]$ de clase C^∞ tales que $\mathrm{sop}(\psi_i) \subset V_i$ y $\psi_i(\overline{W}_i) = 1$ donde W_i $(i \in I)$ es otro cubrimiento de U que satisface $\overline{W}_i \subset V_i$ para todo $i \in I$.

Ahora $\psi = \sum\limits_{i \in I} \psi_i$ es C^∞, $\psi \geqslant 0$ y $\psi(x) > 0$ equivale a $x \in U$, y de aquí la tesis es inmediata.

Más generalmente (pero más complicado):

PROPOSICION 6.11. Sea E un espacio de Banach separable; entonces son equivalentes:

i) E es C^r-normal.

ii) Existe una aplicación $\psi\colon E \longrightarrow [0,1]$ de clase C^r y soporte acotado, $\psi(0) = 1$.

iii) Existe una aplicación $\varphi\colon E \longrightarrow [0,1]$ de clase C^r y $\mathrm{sop}(\varphi) \subset B_1(0)$ (aquí $B_1(0) = \{x\colon |x| \leqslant 1\}$), $\varphi(0) = 1$).

DEMOSTRACION. ii) $\Leftrightarrow$ iii) es trivial: si $sop(\psi) \subset B_r(0) = \{x: |x| \leqslant r\}$ entonces $\varphi(x) = \psi(rx)$ verifica $sop(\varphi) \subset B_1(0)$.

Claramente i) $\Rightarrow$ iii) (tómese $A = \{0\}$, $B = E - V_1(0) = \{x: |x| \geqslant 1\}$ en la definición 6.3); veamos que iii) $\Rightarrow$ i). Por de pronto es claro - por composición con traslaciones y homotecias, que para cada $a \in E$ y cada $r > 0$ hay una $\varphi: E \longrightarrow [0,1]$ de clase C^r con $\varphi(a) = 1$, $sop(\varphi) \subset B_r(a)$.

Ahora sean A,B cerrados disjuntos en E; hay una $g: E \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $g(A) = 1$, $g(B) = 0$ ("lema de Urysohn"), así que consideraremos el caso $r > 0$.

Para cada $x \in E$ hay una bola abierta $V_{\delta(x)}(x)$, $\delta(x) > 0$ tal que

$$|g(y) - g(x)| < 1/4 \quad \text{si} \quad y \in V_{\delta(x)}(x) \quad (\text{o sea si } |y-x| < \delta(x))$$

Sea entonces $\varphi_x: E \longrightarrow [0,1]$ de clase C^r tal que $\varphi_x(x) = 1$ y $sop(\varphi_x) \subset$ $\subset B_{\delta(x)}(x) = \overline{V_{\delta(x)}(x)}$; sea $W_x = \varphi_x^{-1}(0,1] \subset V_{\delta(x)}(x)$.

Como E es separable, hay una sucesión W_{x_i} $(i \geqslant 1)$ que cubre E, y definimos inductivamente $\varphi_k = \varphi_{x_k}$ $(k \geqslant 1)$ y :

$$V_1 = W_{x_1}$$

$$V_{p+1} = W_{x_{p+1}} \cap \bigcap_{k=1}^{p} \varphi_k^{-1}[0,\tfrac{1}{p}) \quad (p \geqslant 1)$$

Para cada $x \in E$ hay además un $N(x)$ tal que

$$\begin{cases} \varphi_j(x) = 0 \ , & 1 \leqslant j < N(x) \\ \varphi_{N(x)}(x) > 0 & \end{cases}$$

(luego $x \in V_{N(x)}$). Ciertamente los V_p $(p \geqslant 1)$ son abiertos y cubren E; pero además este cubrimiento es localmente finito ya que dado $a \in E$ el abierto

$$\Omega = \{x \in E : \varphi_{N(a)}(x) > \frac{\varphi_{N(a)}(a)}{2}\}$$

es entorno de a disjunto de V_p para p suficientemente grande.

Ahora para cada $n \geqslant 1$ consideramos una aplicación $\psi_n: R^n \longrightarrow R$ de clase C^∞ como sigue:

a) Si n=1, $\psi_1(t) = 0$ si $t \leqslant 0$, $\psi_1(t) > 0$ si $t > 0$

b) $\psi_n(t_1,\dots,t_n) \geqslant 0$ y $\psi_n(t_1,\dots,t_n) > 0$ si y sólo si

$$t_1 < \frac{1}{n-1} \ , \ \dots \ , \ t_{n-1} < \frac{1}{n-1} \ , \ t_n > 0$$

(cf.6.8 y 6.10), para cada $n > 1$.

Pongamos $f_n: E \longrightarrow R$ de clase C^r por

$$f_n(x) = \psi_n(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$$

así que $f_n \geqslant 0$ y $V_p = \{x \in E: f_p(x) > 0\}$ para todo $p \geqslant 1$.

Sigue que $f = \sum_{p\geq 1} f_p$ está bien definida y es C^r, luego

$$u_p = f_p/f \qquad (p \geqslant 1)$$

es C^r y $u_p: E \longrightarrow [0,1]$ (nótese que $f(x) > 0$ para todo $x \in E$); además $\{x \in E: u_p(x) > 0\} \subset V_p \subset W_{x_p} \subset V_{\delta(x_p)}(x_p)$ para todo $p \geqslant 1$.

Finalmente $h: E \longrightarrow R$ definida por

$$h(x) = \sum_{p\geq 1} g(x_p).u_p(x)$$

es de clase C^r (pues $\operatorname{sop}(u_p) = \operatorname{sop}(f_p) \subset \overline{V}_p$, y $(\overline{V}_p)_{p\geq 1}$ es localmente finita) y se tiene para todo $x \in E$:

$$|h(x) - g(x)| = |\sum_{p\geq 1} (g(x_p)-g(x)).u_p(x)| \leqslant \sum_{p\geq 1} \frac{u_p(x)}{4} = 1/4$$

Por lo tanto si $\theta: R \longrightarrow [0,1]$ es de clase C^∞ con $\theta(t) = 0$ $(t \leqslant 1/3)$ y $\theta(t) = 1$ $(2/3 \leqslant t)$ la aplicación $\varphi = \theta h : E \longrightarrow [0,1]$ es de clase C^r con $\varphi(A) = 1$ y $\varphi(B) = 0$

COROLARIO 6.12. Si E es un espacio de Banach separable cuya norma $|\ |: E \longrightarrow R$ es de clase C^r en $E-\{0\}$. Entonces E (y por lo tanto toda variedad paracompacta de modelo E (cf.6.9) es C^r-normal.

DEMOSTRACION. Pues si ρ es como en 6.1 d) , $\varphi(x) = \rho(|x|)$ es de clase C^r, $\varphi(0) = 1$ y $\operatorname{sop}(\varphi) \subset B_2(0)$, que es 6.11 ii).

OBSERVACIONES 6.13. a) En particular el corolario 6.12 es aplicable al caso de E = espacio de Hilbert separable, $r=\infty$ (pues $x \longrightarrow |x|^2$ es un polinomio, luego de clase C^∞ así que $|\ |$ es de clase C^∞ en $E-\{0\}$).

b) Puede probarse que todo espacio de Hilbert (separable o nó) es C^∞-normal (ver H. Torunczyk, Studia Mathematica XLVI (1973), pág.43-51, donde se caracterizan completamente los espacios de Banach C^r-normales).

EJERCICIOS 6.14. 1) Sea X una variedad paracompacta y C^r-normal $(r > 1)$; si F es un espacio de Banach y $g: X \longrightarrow F$ es continua, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una $h: X \longrightarrow F$ de clase C^r tal que $|g(x)-h(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$. (Sug: $h(x) = \sum_{i\in I} g(x_i)\ \varphi_i(x)$, para una partición de la unidad de clase C^r $(\varphi_i)_{i\in I}$ subordinada a un conveniente cubrimiento abierto de X, cf. demostración de 6.11).

2) Sea $c_0 \subset \ell^\infty$ el subespacio cerrado formado por las sucesiones $(\xi_k)_{k\geq 1}$ tales que $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = 0$; sea $p\colon c_0 \longrightarrow \mathbf{R}$ la norma de c_0.

i) p es diferenciable en a si y sólo si existe un n_0 con $a_{n_0} > a_n$ para todo $n \neq n_0$; en tal caso $Dp(a)(v) = sg(a_{n_0}).v_{n_0}$.

ii) Mostrar que c_0 verifica la condición 6.11 iii) (y por ende es C^∞-normal) (Sug: si $\psi\colon \mathbf{R} \longrightarrow [0,1]$ verifica $\psi(t) = 1$ si $|t| \leqslant 1/2$ y $\psi(t) = 0$ para $|t| \geqslant 1$, $\psi(t) > 0$ si $|t| < 1$, poner $\varphi((\xi_k)_{k\geq 1}) = \prod\limits_{k\geq 1} \psi(\xi_k))$.

3) Sea X una variedad y sea A un subconjunto cualquiera, sea F un espacio de Banach. Una aplicación $f\colon A \longrightarrow F$ se dice de clase C^r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ si para cada $a \in A$ existe un entorno U de a (en X) y una aplicación $g\colon U \longrightarrow F$ de clase C^r tal que $g|U \cap A = f|U \cap A$.

i) Si A es subvariedad de X, esta definición coincide con la usual.

ii) Si X es paracompacta y C^r-normal, una aplicación $f\colon A \longrightarrow F$ es de clase C^r si y sólo si existe un abierto Ω que contiene a A y una $h\colon U \longrightarrow$ $\longrightarrow F$ de clase C^r tal que $h|A = f$.

CAPITULO IV

§ 1 - FIBRACIONES.

Sean E, X espacios topológicos y sea $p: E \longrightarrow X$ una aplicación continua; si $U \subset X$ es un subespacio, una *trivialización de* p *sobre* U es una terna $\{U,F_U,\psi_U\}$ donde F_U es un espacio topológico y $\psi_U: p^{-1}(U) \longrightarrow U\times F_U$ es un homeomorfismo tal que $\pi_U\,\psi_U = p|U$ (vale decir es conmutativo el diagrama (1)).

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\sim", "\psi_U"'] \arrow[dr, "p"'] & & U\times F_U \arrow[dl, "\pi_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

(1)

Si $V \subset U$ es inmediato entonces que la terna $\{V,F_U,\psi_U|p^{-1}(V)\}$ es una trivialización de p sobre V. Además es claro que si para cada $x \in U$ se pone $\psi_{U,x} = \psi_U|p^{-1}(x)$, cada $\psi_{U,x}: p^{-1}(x) \longrightarrow F_U$ resulta ser un homeomorfismo.

Una aplicación continua $p: E \longrightarrow X$ se dice un *fibrado localmente trivial* (o una *fibración*) si hay un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X y trivializaciones $\{U,F_U,\psi_U\}$ para cada $U \in \mathcal{U}$; se dirá asimismo que X es la *base*, E es el *espacio* y p es la *proyección del fibrado*, situación que abreviaremos con la notación $\xi = (X,E,p)$.

Los abiertos $U \in \mathcal{U}$ se denominan *abiertos trivializadores* del fibrado ξ; es claro que hay una base de la topología de X formada por abiertos trivializadores.

Los conjuntos $E_x = p^{-1}(x)$ $(x \in X)$ se denominan las *fibras* del fibrado ξ.

Ahora nos ubicaremos en el contexto de variedades diferenciables, aunque los resultados generales son válidos en la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas.

Así un *fibrado diferenciable* será un fibrado $\xi = (X,E,p)$ donde además X y E son variedades, p es C^∞ y los homeomorfismos ψ_U de (1) son difeomorfismos (cada F_U una variedad).

OBSERVACIONES 1.1. a) Si $\xi = (X,E,p)$ es un fibrado diferenciable, p resulta una sumersión - ya que salvo un difeomorfismo, p es localmente una proyección π_U - y por ende cada fibra E_x es una subvariedad cerrada de E (cap.III, 3.4)

b) Si además $A \subset X$ es una subvariedad, $p^{-1}(A)$ es subvariedad de E (cap. III, 4.10) y es fácil ver que $(A,p^{-1}(A),p|p^{-1}(A))$ es un fibrado localmente trivial, indicado $\xi|A$ ("*restricción* de ξ a A").

c) Diremos que ξ tiene *fibra tipo* F cuando todas las variedades F_U de (1) son iguales a F. De cualquier manera la relación "$x \sim x'$ significa que las fibras E_x y $E_{x'}$ son difeomorfas" es una relación de equivalencia con clases abiertas, lo que implica que X se expresa como unión disjunta de subvariedades abiertas X_i, y cada $\xi|X_i$ es un fibrado localmente trivial con fibra tipo.

Si $\xi = (X,E,p)$ y $\eta = (X',E',p')$ son fibrados localmente triviales, una *aplicación* (f,g): $\xi \longrightarrow \eta$ es un par de aplicaciones de clase C^∞, $f\colon E \longrightarrow E'$ y $g\colon X \longrightarrow X'$ tales que $p'f = gp$. En tal caso cada $f_x = f|E_x$: $: E_x \longrightarrow E'_{g(x)}$ es de clase C^∞.

Si (f_1,g_1) y (f_2,g_2) son aplicaciones y tiene sentido componer f_2f_1 y g_2g_1, la composición (f_2f_1,g_2g_1) es una aplicación de fibrados.

Un *morfismo* es un caso particular de aplicación, y ocurre cuando $X = X'$ y $g = 1_X$; o sea: un morfismo de fibrados localmente triviales $f\colon\xi \longrightarrow \eta$ (ambos de base X) es una aplicación $f\colon E \longrightarrow E'$ de clase C^∞ tal que $p'f = $ $= p$.
La composición de morfismos es evidentemente otro morfismo; además hay un morfismo *idéntico* 1_ξ (determinado por la aplicación idéntica 1_E).

Un morfismo $f\colon (X,E,p) \longrightarrow (X,E',p')$ es un *isomorfismo* si $f\colon E \longrightarrow E'$ es un difeomorfismo; en tal caso es claro que $f^{-1}\colon E' \longrightarrow E$ define el morfismo "inverso".

Finalmente una *sección* s de un fibrado $\xi = (X,E,p)$ es una aplicación de clase C^∞ $s\colon X \longrightarrow E$ tal que $ps = 1_X$; a veces sólo interesa hablar de secciones continuas, ó C^r $(r \geq 1)$ lo que se aclarará en cada caso.

Indicamos con $\Gamma^r(\xi)$ $(0 \leq r \leq \infty)$ el conjunto de secciones de clase C^r del fibrado ξ.

EJEMPLOS 1.2. a) El *fibrado producto* (de base X y fibra F) es $\varepsilon_X^F =$ $= (X,X\times F,\pi_X)$. Aquí la correspondencia $s \longrightarrow \pi_F s$ da una biyección entre $\Gamma^r(\varepsilon_X^F)$ y $C^r(X,F)$. Un morfismo $f\colon \varepsilon_X^F \longrightarrow \varepsilon_X^F$ es una aplicación de clase C^∞ de la forma $f(x,v) = (x,g(x,v))$ donde $g\colon X\times F \longrightarrow F$ es de clase C^∞ (que puede interpretarse como una familia g_x $(x \in X)$ de aplicaciones $F \longrightarrow F$).

b) Todo fibrado ξ isomorfo a un fibrado producto se denomina un *fibrado trivial*. Nótese que de (1) y la definición resulta que para todo fibrado localmente trivial $\xi = (X,E,p)$ hay un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tal que cada $\xi|U$ es trivial, $U \in \mathcal{U}$.

c) Un revestimiento $f\colon X \longrightarrow Y$ es un fibrado localmente trivial (Y,X,f) con fibra discreta ([3]); aquí f es un difeomorfismo local.

d) Si $\xi = (X,E,p)$ y $\eta = (X',E',p')$ son fibrados localmente triviales también lo es $\xi\times\eta = (X\times X', E\times E', p\times p')$ ("fibrado producto cartesiano").

Veamos un ejemplo importante (en el que usaremos libremente la notación de 5.9 y 5.11 de cap.III).

PROPOSICION 1.3. Sea G un grupo de Lie que opera sobre una variedad X, definiendo un fibrado principal. Entonces $\xi = (X/G,X,p)$ es un fibrado localmente trivial de fibra G.

DEMOSTRACION. Sea $x_0 \in X$, $y_0 = p(x_0)$; hay mapas centrados en y_0 y x_0 respectivamente, (u,U,E) y (v,V,F) tales que $upv^{-1}\colon v(V) \longrightarrow u(U)$ es la restricción a $v(V)$ de un epimorfismo directo $T\colon F \longrightarrow E$. Si $j \in \mathcal{L}(E,F)$ verifica $T_j = 1_E$ definimos $s\colon U \longrightarrow X$ por $s = v^{-1}ju$.

Claramente $s \in \Gamma^\infty(V)$; por otro lado sabemos que $G\times X \longrightarrow R \subset X\times X$ definida por $\varphi(g,x) = (x,g.x)$ así que la aplicación $\eta\colon R \longrightarrow G$ de 5.9 c) es C^∞. Definimos $\psi\colon p^{-1}(V) \longrightarrow V\times G$ de clase C^∞ mediante $\psi(x) = (p(x),\eta(sp(x),x))$; obviamente ψ es biyectiva con inversa $k(y,g) = g.s(y)$ así que ψ es un difeomorfismo que verifica el requerimiento de "trivialidad local": $\{V,G,\psi\}$ es una trivialización de p sobre V.

COROLARIO 1.4. Sea G un grupo de Lie, $H \subset G$ un subgrupo de Lie. Entonces $(G/H,G,p)$ es un fibrado localmente trivial de fibra H.

DEMOSTRACION. En efecto la operación a izquierda de H sobre G define un fibrado principal (5.10 b) de cap.III).

1.5. IMAGEN RECIPROCA.

Supongamos que $\xi = (Y,M,\pi)$ es un fibrado localmente trivial y que $f\colon X \longrightarrow Y$ es una aplicación C^∞.

El producto fibrado $E = X \underset{Y}{\times} M$ define entonces un fibrado localmente trivial (X,E,p) y una aplicación (f,g). (ver 4.12 c) de cap.III). En efecto sólo es necesario demostrar que para cada $x_0 \in X$ hay un entorno U de x_0 y una trivialización $\{U,F_U,\psi_U\}$ de p sobre U. Ahora, hay una trivialización $\{V,F,\varphi_V\}$ de π sobre un abierto V entorno de $y_0 = f(x_0)$; tomando $U = f^{-1}(V)$ vemos que $p^{-1}(U) = U \underset{V}{\times} \pi^{-1}(V)$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

y basta definir $\psi_U(x,v)=(x,\varphi_{V_2}(v))$ (con inversa $(x,a) \to (x,\varphi_V^{-1}(f(x),a))$)

para obtener lo pedido.

Nótese que $E_x = \{x\} \times M_{f(x)}$, de modo que las "fibras de E son las de M".

Indicaremos con $f^*(\xi)$ al fibrado localmente trivial de base X recién definido ("*imagen recíproca de* ξ *por* f").

De la definición sigue inmediatamente que si $X \subset Y$ es una subvariedad y $j: X \longrightarrow Y$ es la inclusión entonces $j^*(\xi) = \xi|X$ (1.1 b)).

Asimismo si $(f,g_1): (X,E',p') \longrightarrow (Y,M,\pi)$ es cualquier aplicación de fibrados, existe un único morfismo $h: (X,E',p') \longrightarrow (X,E,p)$, dado por $h(z) = (p(z),g_1(z))$; se verifica $gh = g_1$.

Dejamos como ejercicio verificar que si $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ son aplicaciones C^∞ entonces $(gf)^*(\xi) = f^*(g^*(\xi))$ para todo fibrado de base Z.

EJERCICIOS 1.6. 1) Demostrar directamente que la aplicación $T \longrightarrow T(x_0)$ define un fibrado principal localmente trivial $(S(E),O(E),p)$ de fibra $O(H)$ (ver cap.III, ejercicio 10 de 5.13).

2) Sea $(X,E,p) = \xi$ un revestimiento (1.2 c)).

i) Toda sección continua de ξ es C^∞

ii) Si E es conexo y $s: X \longrightarrow E$ es una sección, ξ es trivial (Sug: probar que $sp = 1_E$ calculando la aplicación tangente).

3) Si $\xi = (X,E,p)$ es un fibrado principal de grupo G. Probar que ξ es trivial si y sólo si existe una sección de ξ (Sug: $(x,g) \longrightarrow g.s(x)$).

4) Si ξ y η son fibrados localmente triviales de base Y, isomorfos y $f: X \longrightarrow Y$ es C^∞, mostrar que $f^*(\xi)$ y $f^*(\eta)$ son isomorfos.

§ 2 - FIBRADOS VECTORIALES.

Sean E,X variedades diferenciables; una aplicación C^∞ $p: E \longrightarrow X$ se dirá un "campo de espacios de Banach" si para cada $x \in X$ cada $E_x = p^{-1}(x)$ admite estructura de espacio de Banach (para la topología inducida).

Si $U \subset X$, una *trivialización lineal de* p *sobre* U es una trivialización $\{U,F_U,\psi_U\}$ de p sobre U (§1) tal que:

1°) F_U es un espacio de Banach (sobre R ó C)

2°) Cada $\psi_{U,x} = \psi_U|E_x: E_x \longrightarrow F_U$ es un isomorfismo $(x \in U)$.

Un *casi - fibrado vectorial* $\xi = (X,E,p)$ es un campo de espacios de Banach para el cual hay un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X y trivializaciones lineales $\{U,F_U,\psi_U\}$ de p sobre cada $U \in \mathcal{U}$.

OBSERVACIONES 2.1. a) Un casi - fibrado vectorial es evidentemente un fibrado localmente trivial (§1) de base X.

b) Disquisiciones análogas a las de 1.1 c) muestran que si $\xi = (X,E,p)$ es un casi - fibrado vectorial entonces X es suma de subvariedades abiertas X_i de tal manera que cada $\xi|X_i$ tiene fibra tipo F_i (espacio de Banach).

Si $\sup \dim(F_i) < \infty$ decimos que ξ es de *dimensión finita*; si ξ tiene fibra tipo F de dimensión n, decimos que ξ tiene *dimensión* n.

Análogamente si ξ tiene fibra tipo un espacio de Hilbert F se dirá que ξ es un casi - fibrado vectorial hilbertiano.

c) Supongamos que $\{U_i,F,\psi_i\}$ y $\{U_j,F,\psi_j\}$ son trivializaciones lineales de un casi - fibrado vectorial ξ, con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. La *función de transición* $h_{ij}\colon U_i \cap U_j \times F \longrightarrow U_i \cap U_j \times F$ es el difeomorfismo $\psi_i\ \psi_j^{-1}$ (ver diagrama (1)) y claramente la condición 2°) de la definición obliga a que

$$
\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[d, "\psi_j", "\sim"'] \arrow[dr, "\psi_i", "\sim"'] & \\
U_i \cap U_j \times F \arrow[r, "h_{ij}"] & U_i \cap U_j \times F
\end{tikzcd}
$$

(1)

$h_{ij}(x,v) = (x,\psi_{ix}\ \psi_{jx}^{-1}(v)) =$
$= (x,g_{ij}(x)(v))$ para cada $x \in U_i \cap U_j$,
donde $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \longrightarrow GL(F)$ (2)
es dada por $g_{ij}(x) = \psi_{ix}\ \psi_{jx}^{-1}$.

Diremos que dos trivializaciones lineales $\{U_i,F,\psi_i\}$, $\{U_j,F,\psi_j\}$ de un casi - fibrado vectorial son *compatibles* si $U_i \cap U_j = \emptyset$ o bien $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ y la aplicación (2) es C^∞.

Un casi - fibrado vectorial se llamará un *fibrado vectorial* si hay un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X y trivializaciones lineales de p sobre cada $U \in \mathcal{U}$, dos a dos compatibles.

OBSERVACIONES 2.2. a) Se habla de fibrados vectoriales *reales* o *complejos* según que los espacios de Banach involucrados en la definición sean reales o complejos.

b) Las definiciones precedentes ocurren en el contexto de variedades diferenciables; en el caso de fibrados vectoriales "topológicos" sólo se requiere que X sea un espacio topológico. En cada caso hay que reemplazar "C^∞" por "aplicación continua", "difeomorfismo" por "homeomorfismo", etc para obtener la correspondiente teoría.

c) Es importante señalar que si $\xi = (X,E,p)$ es un casi - fibrado vectorial con $\dim(E_x) < \infty$ para todo $x \in X$, el requerimiento de compatibilidad para las trivializaciones es innecesario. En otras palabras: todo casi -

fibrado vectorial de dimensión finita es un fibrado vectorial. En efecto, con la notación de 2.1 c) siendo h_{ij} de clase C^∞ resulta que la aplicación $(x,v) \longrightarrow g_{ij}(x)(v)$ (de $U_i \cap U_j \times F$ en F) es C^∞ y se aplica el

LEMA 2.3. Sea Ω una variedad y sean F_1, F_2 espacios de Banach con $\dim(F_1) < \infty$.

Si $g\colon \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(F_1,F_2)$ es tal que la aplicación $\varphi\colon \Omega \times F_1 \longrightarrow F_2$ dada por $\varphi(x,v) = g(x)(v)$ es de clase C^k $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$, entonces g es de clase C^k.

DEMOSTRACION. Si $v_1,\dots,v_n$ es una base de F_1 hay un isomorfismo (en particular difeomorfismo) $\beta\colon \mathcal{L}(F_1,F_2) \longrightarrow F_2^n$ dado por $\beta(T) = (T(v_i))_{1\le i\le n}$.

Por consiguiente es suficiente demostrar que $\beta g\colon \Omega \longrightarrow F_2^n$ es de clase C^k; pero $\beta g(x) = (\varphi(x,v_j))_{1\le j\le n}$ (y φ - por hipótesis - es de clase C^k).

Si $\xi = (X,E,p)$ y $\xi' = (X',E',p')$ son fibrados vectoriales, una *aplicación de fibrados vectoriales* $(f,g)\colon \xi \longrightarrow \xi'$ será una aplicación de fibrados localmente triviales (§1) que además verifica las condiciones siguientes:

A_1) Cada $f_x\colon E_x \longrightarrow E'_{f(x)}$ es lineal (continuo por serlo f)

A_2) Para cada trivialización $\{V,F',\psi'_V\}$ de ξ' hay una trivialización $\{U,F,\psi_U\}$ de ξ tal que $g(U) \subset V$ y la aplicación

$$f_U\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(F,F')$$

definida por $f_U(x) = \psi'_{V,g(x)} f_x \psi^{-1}_{U,x}$ $(x \in U)$ es de clase C^∞.

OBSERVACIONES 2.4. a) Si $\dim(\xi) < \infty$ la condición A_2) es innecesaria; en efecto siendo g de clase C^∞ y siendo la familia $\{U\colon U$ es abierto en X y hay una trivialización lineal $\{U,F,\psi_U\}$ de p sobre $U\}$ una base de la topología de X resulta claro que dada una trivialización $\{V,F',\psi'_V\}$ (lineal) de ξ' hay una trivialización lineal $\{U,F,\psi_U\}$ de ξ con $g(U) \subset V$. Se obtiene así el diagrama conmutativo (3), con $h = \psi'_V\, f\, \psi_U^{-1}$, de clase C^∞.

Pero $h(x,v) = (g(x), f_U(x)(v))$ y se aplica entonces el lema 2.3.

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[r, "h"] & V \times F \\
p^{-1}(U) \arrow[u, "\psi_U"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & p'^{-1}(V) \arrow[u, "\psi'_V"'] \arrow[d, "p'"'] \\
U \arrow[r, "g"] & V
\end{tikzcd}$$

(3)

b) Cuando $X = X'$ y $g = 1_X$ obtenemos como en §1 la noción de morfismo de fibrados vectoriales.

Análogamente la noción de *isomorfismo* (para fibrados vectoriales con la misma base X); indicaremos con la notación $\mathrm{Hom}_X(\xi,\eta)$ el conjunto de morfismos de fibrados vectoriales de base X (ver ejercicio 5 de 2.7).

PROPOSICION 2.5. Si ξ,η son fibrados vectoriales de base X y $f:\xi \longrightarrow \eta$ es un morfismo, son equivalentes:

a) f es un isomorfismo

b) Cada f_x es un isomorfismo.

DEMOSTRACION. Que a) $\Rightarrow$ b) es evidente; recíprocamente sea $x_0 \in X$. Hay trivializaciones lineales $\{U,F,\psi_U\}$ y $\{U,F',\psi'_U\}$ de ξ y η respectivamente, con $x_0 \in U$. De la definición de "aplicación" sigue que en el diagrama (4) es $h(x,v) = (x,f_U(x)(v))$ con $f_U: U \longrightarrow \mathcal{L}(F,F')$ de clase C^∞.

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[rr, "h"'] & & U \times F' \\
p^{-1}(U) \arrow[u, "\psi_U"] \arrow[rr, "f"'] \arrow[dr, "p"'] & & p'^{-1}(U) \arrow[u, "\psi'_U"'] \arrow[dl, "p'"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

(4)

Por hipótesis $f_U(x) \in \mathrm{Iso}(F,F')$ para cada $x \in U$, así que $x \longrightarrow f_U(x)^{-1}$ es C^∞ (de U en $\mathrm{Iso}(F',F) \subset \mathcal{L}(F',F)$) (ver ejercicio 1 de 4.9 de cap.II).Por lo tanto h es un difeomorfismo con inversa $(x,u) \longrightarrow (x,f_U(x)^{-1}(u))$; de (4) se deduce entonces que $f|p^{-1}(U): p^{-1}(U) \longrightarrow p'^{-1}(U)$ es un difeomorfismo, y como los $p^{-1}(U)$ cubren E, $f: E \longrightarrow E'$ es un difeomorfismo local. Pero es claro por otro lado que f es biyectiva, luego f es un difeomorfismo y entonces es evidente que $f^{-1}: E' \longrightarrow E$ define el morfismo inverso.

OBSERVACIONES Y EJEMPLOS 2.6. a) Las condiciones a) b) de 2.5 son evidentemente equivalentes a: c) Cada f_x es biyectiva.

b) Un fibrado vectorial se dice *trivial* si es isomorfo (como fibrado vectorial) a un fibrado producto $\varepsilon_X^F = (X,X\times F,\pi_X)$, donde F es un espacio de Banach. Es inmediato entonces que si ξ es cualquier fibrado vectorial de base X, hay un cubrimiento abierto U_i $(i \in I)$ de X tal que cada fibrado vectorial $\xi|U_i$ es trivial. Escribimos $\varepsilon_X = \varepsilon_X^F$ para $F = R^n$.

c) Si $\xi = (Y,E',p')$ es un fibrado vectorial y $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación C^∞, hemos visto en §1 que el objeto $f^*(\xi)$ es un fibrado localmente trivial. Dejamos como tarea para el lector diligente el verificar que $f^*(\xi)$ es un fibrado vectorial.

d) Si ξ es un fibrado vectorial de base X, el conjunto de secciones $\Gamma^r(\xi)$ de clase C^k $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ es un espacio vectorial (sobre R ó C) en forma evidente: en efecto la "suma" $s_1 + s_2$ es definida por la regla obvia $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$ para cada $x \in X$. Análogamente para el "producto por escalares". Por supuesto debe verificarse - por ejemplo - que $s_1 + s_2$ es de clase C^k cuando s_1 y s_2 lo son, pero esto no ofrece dificultad ya que se reduce a probar que $s_1 + s_2|U$ es C^k para cada abierto $U \subset X$ con una trivialización $\{U,F,\psi_U\}$, lo que es inmediato.

Más generalmente si $s \in \Gamma^k(\xi)$ y $\varphi: X \longrightarrow R$ (ó C según corresponda) es de clase C^k está definida $\varphi.s \in \Gamma^k(\xi)$ (vía $\varphi.s(x) = \varphi(x).s(x)$) y es fácil ver entonces que $\Gamma^k(\xi)$ es un $C^k(X,R)$-módulo (ó un $C^k(X,C)$-módulo según corresponda).

e) FIBRADO TANGENTE A UNA SUBVARIEDAD DE R^n. Supongamos que X es una subvariedad de dimensión r de R^n y consideremos el conjunto

$$T(X) = \{(x,v) : v \in T_x(X)\} \subset X \times R^n$$

Sea $p: T(X) \longrightarrow X$, $p(x,v) = x$.

Veamos que $(X,T(X),p)$ es un fibrado vectorial de dimensión r.

Dado $x_0 \in X$, de 2.8 d) (cap.III) resulta que hay entornos U de x_0, V de $0 \in R^n$ y un difeomorfismo $u: U \longrightarrow V$, $u(x_0) = 0$ tales que $u(U \cap X) = V \cap (R^r x\{0\})$.

Entonces siendo $p^{-1}(U \cap X) = \{(x,v): x \in U \cap X,\ v \in T_x(X)\} \subset U \cap X \times R^n$, se obtiene una trivialización lineal de p sobre $U \cap X$ por $\psi(x,v) = (x,Du(x)(v))$ con $\psi: p^{-1}(U \cap X) \longrightarrow U \cap X \times (R^r x\{0\})$. Nótese de paso que la aplicación $h: U x R^n \longrightarrow V x R^n$ dada por $h(x,v) = (u(x),Du(x)(v))$ es un difeomorfismo tal que $h(p^{-1}(U \cap X)) = V \cap (R^r x\{0\}) \times (R^r x\{0\})$, lo que muestra que $T(X)$ es una subvariedad de $X x R^n$.

El fibrado vectorial así definido se indica $\tau(X) = (X,T(X),p)$ y se denomina el *fibrado tangente* a la subvariedad $X \subset R^n$; evidentemente $p^{-1}(x) = T_x(X)$ para cada $x \in X$.

Una sección $s \in \Gamma^k(\tau(X))$ $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ se denomina un *campo de vectores tangentes* (de clase C^k) y evidentemente es $s(x) = (x,a(x))$ donde $a: X \longrightarrow R^n$ es una aplicación de clase C^k tal que $a(x) \in T_x(X)$ para todo $x \in X$.

Cuando $X = \Omega$ es un abierto en R^n, $T(X) = T(\Omega) = \Omega x R^n$ así que - en este caso - $\tau(\Omega)$ es el fibrado producto.

Dejamos como ejercicio para el lector el generalizar este ejemplo al caso de una subvariedad $X \subset E$, donde E es un espacio de Banach (con cambios obvios, reemplazando $R^r x\{0\}$ por un subespacio directo F).

Esta construcción será generalizada luego (ver §5).

f) SUMA DE WHITNEY. Supongamos que $\xi = (X,E,p)$ y $\eta = (X,E',p')$ son dos fibrados vectoriales de base X, y consideremos la variedad $E \underset{X}{\times} E'$ (diagrama (5)) con la

$$\begin{array}{ccc} E \underset{X}{\times} E' & \xrightarrow{\pi'} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ E & \xrightarrow[p]{} & X \end{array}$$

(5)

aplicación obvia $q = p'\pi' = p\pi$. Claramente para cada $x \in X$ es $q^{-1}(x) = E_x \times E'_x$ ($\approx E_x \oplus E'_x$); veamos que $(X, E \underset{X}{\times} E', q)$ es un fibrado vectorial.

Consideramos un abierto $U \subset X$ con $\xi|U$ y $\eta|U$ triviales (2.6 b)), y sean ψ: $p^{-1}(U) \longrightarrow U\times F_1$, $\varphi: p'^{-1}(U) \longrightarrow U\times F_2$ las trivializaciones. Debe ser $\psi(\xi) = (p(\xi), \psi_1(\xi))$, $\varphi(\xi') = (p'(\xi'), \varphi_2(\xi'))$ y definimos

$$\gamma : q^{-1}(U) \longrightarrow U \times (F_1 \times F_2)$$

$\gamma(\xi, \xi') = (p(\xi), (\psi_1(\xi), \varphi_2(\xi')))$. Queda como ejercicio el verificar que $\{U, F_1\times F_2, \gamma\}$ es una trivialización lineal de q sobre U, así como la compatibilidad de dos tales trivializaciones (utilícese la compatibilidad de las trivializaciones de ξ y η). El fibrado vectorial así definido se indica con la notación $\xi \oplus \eta$ ("suma de Whitney de ξ y η").

Dejamos asimismo a cargo del lector el probar que $\xi \oplus \eta$ tiene la propiedad formal de la suma directa, o sea: si ξ_1, ξ_2, η son fibrados vectoriales de base X y f_i: $\xi_i \longrightarrow \eta$ (i=1,2) son morfismos, entonces hay un único morfismo f: $\xi_1 \oplus \xi_2 \longrightarrow \eta$ tal que $f_{jk} = f_k$ (k=1,2) donde los jk son los morfismos "canónicos" $\xi_1 \longrightarrow \xi_1 \oplus \xi_2$, $\xi_2 \longrightarrow \xi_1 \oplus \xi_2$ definidos por $v \longrightarrow (v,0)$, $u \longrightarrow (0,u)$.

En tal sentido corresponde señalar que el conjunto de fibrados vectoriales de base X constituye una categoría *aditiva*, con morfismos justamente los conjuntos $\mathrm{Hom}_X(\xi,\eta)$(ver ejercicio 5 de 2.7),que son a su vez espacios vectoriales. El "objeto nulo" es el fibrado trivial $0 = \varepsilon_X^0$.

Ahora la suma de Whitney es exactamente la suma directa en la categoría indicada.

Denotaremos con Vect(X) la categoría de fibrados vectoriales de base X (se entiende: fibrados reales ó fibrados complejos; si es necesario aclarar se usará la notación $\mathrm{Vect}_R(X)$ ó $\mathrm{Vect}_C(X)$).

EJERCICIOS 2.7. 1) Si $\xi = (X,E,p)$ y $\eta = (X',E',p')$ son fibrados vectoriales, mostrar que el producto cartesiano $\xi\times\eta$ (1.2 d)) es un fibrado vectorial de base $X\times X'$.

2) Si ξ,η son fibrados vectoriales de base X y Δ: $X \longrightarrow X\times X$ es la aplicación diagonal $\Delta(x) = (x,x)$ mostrar que $\Delta^*(\xi\times\eta) = \xi\oplus\eta$.

3) Sea ξ un fibrado vectorial de base Y y sea f: $X \longrightarrow Y$ de clase C^∞; si (f,g_1): $\eta \longrightarrow \xi$ es una aplicación de fibrados vectoriales, mostrar que existe un único morfismo h: $\eta \longrightarrow f^*(\xi)$ tal que $gh = g_1$ (cf.1.5).

4) Si ξ_1, ξ_2, ξ_3 son fibrados vectoriales de base X, mostrar que

$$\xi_1 \oplus \xi_2 \approx \xi_2 \oplus \xi_1 \qquad\qquad \xi_1 \oplus 0 \approx \xi_1$$

$$\xi_1 \oplus (\xi_2 \oplus \xi_3) \approx (\xi_1 \oplus \xi_2) \oplus \xi_3$$

5) Demostrar en detalle que $Hom_X(\xi,\eta)$ es un espacio vectorial (sobre R ó C según corresponda). Si f: $\xi \longrightarrow \eta$ es un morfismo y φ: $X \longrightarrow R$ es C^∞, definir el morfismo $\varphi.f$: $\xi \longrightarrow \eta$.

Deducir que $Hom_X(\xi,\eta)$ es un $C^\infty(X)$-módulo.

6) Si $\xi = (X,E,p)$ es un fibrado vectorial, probar que la función σ: : $E \underset{X}{\times} E \longrightarrow E$ definida por $\sigma(a,b) = a+b$ es C^∞ y define un morfismo (indicado +) de $\xi\oplus\xi$ en ξ.

7) Si E es un espacio de Hilbert y $S(E) = \{x \in E: |x| = 1\}$, probar que $T(S(E)) = \{(x,v):\langle x,v \rangle = 0\} \subset S(E)\times E$ (ver ejercicio 7 de 3.10, cap.III).

8) Una subvariedad X de R^n de dimensión r se dice *paralelizable* si su fibrado tangente $\tau(X)$ es trivial. Probar que son equivalentes las afirmaciones:

i) X es paralelizable

ii) Existen r campos vectoriales tangentes $s_1,\dots,s_r$ en X, de clase C^∞ tales que para cada $x \in X$, $\{s_1(x),\dots,s_r(x)\}$ es linealmente independiente.
(Sug: considerar $(x,(\lambda_1,\dots,\lambda_r)) \longrightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i.s_i(x)$, de $X\times R^r$ en $T(X)$).

9) Probar que $S^1 \subset R^2$ es paralelizable (cf.ejercicio anterior) (Sug: considerar $s(x) = (-x_2,x_1)$).

10) Se supone que en R^n hay una aplicación bilineal $R^n\times R^n \longrightarrow R^n$ (indicada $(x,y) \longrightarrow x.y$) para la cual vale $|x.y| = |x|.|y|$, y que además hay un vector $e \in R^n$ con $e.x = x$ para todo $x \in R^n$.

i) Si $H = \{x \in R^n: \langle e,x \rangle = 0\}$ probar que $\langle x.y,y \rangle = 0$ para todo $x \in H$, $y \in R^n$.

ii) Si $\langle a,b \rangle = 0$ entonces $\langle a.y,b.y \rangle = 0$ para todo $y \in R^n$.

iii) Tomando una base ortonormal $e_1 = e,e_2,\dots,e_n$ de R^n, construir n-1 campos de vectores tangentes $s_2,\dots,s_n$ a S^{n-1} tales que $\{s_2(x),\dots,s_n(x)\}$ es linealmente independiente para cada $x \in S^{n-1}$ (Sug: $s_j(x) = e_j.x$).

Deducir que S^{n-1} es paralelizable.

iv) Existe un producto como el indicado para R^n si n=2,4 ó 8 (Sug: complejos, cuaterniones y octavas de Cayley). Deducir que S^1, S^3 y S^7 son paralelizables. Comparar el caso n=2 con el ejercicio 9, $e_2 = i = (0,1)$.

NOTA. Puede probarse, pero no es elemental, que éstas son las únicas esferas paralelizables.

11) Se admitirá que si n es impar, las aplicaciones $x \longrightarrow x$ y $x \longrightarrow -x$ (de S^{n-1} en S^{n-1}) no son homotópicas (ver [3], 16.4).

Probar que si s es un campo continuo de vectores tangentes a S^{n-1}, n impar, entonces es $s(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in S^{n-1}$ ([3], 16.5).

Deducir que S^{n-1} no puede ser paralelizable si n es impar.

§ 3 - SUBFIBRADOS, SECCIONES.

Supongamos que $\xi = (X,E,p)$ es un fibrado vectorial y que para cada $x \in X$ se tiene un subespacio directo $E'_x \subset E_x$; si $E' = \bigcup_{x\in X} E'_x$, decimos que $\xi' = (X,E',p|E')$ es un *subfibrado vectorial de* ξ si hay un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X y para cada $U \in \mathcal{U}$ una trivialización lineal $\{U,F,\psi_U\}$ de ξ y un subespacio directo $F' \subset F$ tales que cada $\psi_U: p^{-1}(U) \longrightarrow U\times F$ induce (por restricción) un difeomorfismo entre $p^{-1}(U) \cap E'$ y $U\times F'$.

Si ello ocurre cada $\{U,F',\psi'_U\}$ resulta una trivialización lineal de $p|E'$ sobre U (donde $\psi'_U = \psi_U|p^{-1}(U) \cap E'$), ξ' resulta un fibrado vectorial y la inclusión $\xi' \longrightarrow \xi$ es un morfismo.

Si $\xi' \subset \xi$ es un subfibrado vectorial podemos definir un fibrado vectorial *cociente* como sigue. Consideramos $E'' = E/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por "$a \sim b$ significa $p(a) = p(b) = x$, y $a-b \in E'_x$"

Es fácil ver que esta relación de equivalencia está en las condiciones de 4.16 ii) (cap.III) (ver ejercicio 9 de 3.15) y que $p: E \longrightarrow X$ induce $p'': E'' \longrightarrow X$.

Veamos que $\xi'' = (X,E'',p'')$ es realmente un fibrado vectorial; tomemos para ello un cubrimiento abierto U_i $(i \in I)$ de X con trivializaciones lineales $\{U_i,F,\psi_i\}$ de ξ tales que para cada una de ellas hay un subespacio directo $F'_i \subset F$ de modo que $\psi_i|p^{-1}(U_i) \cap E': p^{-1}(U_i) \cap E' \longrightarrow U_i\times F'_i$ es difeomorfismo.

Sea $F''_i \subset F$ de modo que F''_i sea un suplemento topológico de F'_i; de las definiciones precedentes sigue que es posible definir $\psi''_i: p''^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i\times F''_i$ de manera de hacer conmutativo (1), y siendo ψ_i un difeomorfismo también lo es ψ''_i (que es biyectiva y sumersión).

$$\begin{array}{ccc} U_i \times F & \xleftarrow{\psi_i} & p^{-1}(U_i) \\ \downarrow{\scriptstyle 1\times\text{proy.}} & & \downarrow \\ U_i \times F''_i & \xleftarrow[\psi''_i]{} & p''^{-1}(U_i) \end{array}$$

(1)

La compatibilidad de las trivializaciones no es del todo obvia y se prueba así: la representación $F = F'_i \oplus F''_i$, $F'_j \oplus F''_j$, nos da la función de transición

$g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow GL(F)$ en la forma

$$g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix}$$

donde para cada $x \in U_i \cap U_j$ es $\alpha(x) \in \mathcal{L}(F'_i,F'_j)$, $\beta(x) \in \mathcal{L}(F''_i,F'_j)$, $\gamma(x) \in \hat{\mathcal{L}}(F'_i,F''_j)$ y $\delta(x) \in \mathcal{L}(F''_i,F''_j)$.

Pero $\psi_i(p^{-1}(U_i) \cap E') = U_i \times F'_i$ y $\psi_j(p^{-1}(U_j) \cap E') = U_j \times F'_j$ obliga a $g_{ij}(x)(F'_i) \subset F'_j$, o sea $\gamma(x) = 0$ para todo $x \in U_i \cap U_j$.

Por consiguiente $\alpha(x) \in \mathrm{Iso}(F'_i,F'_j)$; $\delta(x) \in \mathrm{Iso}(F''_i,F''_j)$ si $x \in U_i \cap U_j$, tomando $F'' \approx F''_i$, $F'' \approx F''_j$ (vía isomorfismos fijos A y B) sigue enseguida que $\psi''_i\psi''^{-1}_j(x,v) = (x,B^{-1}\delta(x)A(v))$ es la función de transición con $\delta'': U_i \cap U_j \longrightarrow GL(F'')$ de clase C^∞. Hecho todo esto el fibrado vectorial $\xi'' = (X,E'',p'')$ se indica ξ/ξ'; nótese que $E''_x = E_x/E'_x$ para todo $x \in X$.

EJEMPLO 3.1. Supongamos que $X \subset R^n$ es una subvariedad; entonces $\tau(X)$ es un subfibrado vectorial de $\tau(R^n)\ X = \varepsilon^n_X$, según se deduce de las definiciones dadas en 2.6 e). El fibrado cociente $\varepsilon^n_X/\tau(X)$ se denomina el *fibrado transversal* a X.

3.2. MORFISMOS LOCALMENTE DIRECTOS.

Supongamos que ξ,η son fibrados vectoriales de base X y que $f: \xi \longrightarrow \eta$ es un morfismo. Definimos: f es *localmente directo* si

$$\mathrm{Ker}(f) = \bigcup_x N(f_x) \qquad \mathrm{Im}(f) = \bigcup_x \mathrm{Im}(f_x) \qquad (2)$$

definen sub-fibrados vectoriales (de ξ y η respectivamente). En tal caso es inmediato (usando 2.5) que f induce un isomorfismo $\xi/\mathrm{Ker}(f) \approx \mathrm{Im}(f)$ de fibrados vectoriales.

Si f es localmente directo, los subfibrados (2) se denominan (como es lógico) "*núcleo*" e "*imágen*" de f.

No todo morfismo es localmente directo (ver ejercicio 6 de 3.15); la condición precisa general para que un morfismo sea localmente directo es engorrosa, aunque veremos enseguida un criterio sencillo válido en casos particulares.

De cualquier manera una sucesión

$$\xi_0 \xrightarrow[f_0]{} \xi_1 \xrightarrow[f_1]{} \xi_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow[f_{n-1}]{} \xi_n \qquad (3)$$

de fibrados vectoriales y morfismos se dice *exacta* si cada f_i es localmente directo y $\mathrm{Ker}(f_{i+1}) = \mathrm{Im}(f_i)$ para todo i $(0 \leqslant i \leqslant n-2)$.

Por ejemplo si $\xi' \subset \xi$ es un subfibrado vectorial, la sucesión

$$0 \longrightarrow \xi' \longrightarrow \xi \longrightarrow \xi/\xi' \longrightarrow 0$$

es exacta.

LEMA 3.3. Sean $\xi = (X,E,p)$ y $\xi' = (X,E',p')$ dos fibrados vectoriales y sea $f\colon \xi \longrightarrow \xi'$ un morfismo. Entonces son equivalentes:

i) f es localmente directo.

ii) Para cada $x_0 \in X$ existe un entorno U de x_0 y trivializaciones $\{U,F,\psi\}$, $\{U,F',\psi'\}$ de ξ y ξ' respectivamente tales que (cf.2.5) si $(x,v) \in U\times F$ es:

$$\psi' f \psi^{-1}(x,v) = (x,T(v))$$

donde $T \in \mathcal{L}(F,F')$ es un morfismo directo (cf.cap.I, 1.13).

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[r, "h"] & U \times F' \\ p^{-1}(U) \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "f"'] & p'^{-1}(U) \arrow[u, "\psi'"'] \end{tikzcd}$$

(4)

DEMOSTRACION. ii) $\Rightarrow$ i) es fácil; en efecto si $E_1 = \bigcup_x N(f_x)$ es inmediato que $\psi(p^{-1}(U) \cap E_1) = U\times N(T)$ y análogamente para las imágenes.

i) $\Rightarrow$ ii) Sea $x_0 \in X$, y sean $\{U,F,\psi\}$ y $\{U,F',\psi'\}$ trivializaciones de ξ y ξ' (con $x_0 \in U$) de tal manera que si $(X,E_1,p|E_1) = \mathrm{Ker}(f)$, $(X,E_2,p'|E_2) = \mathrm{Im}(f)$ entonces $\psi(p^{-1}(U) \cap E_1) = U\times N$, $\psi'(p'^{-1}(U) \cap E_2) = U\times I$, donde $N \subset F$ e $I \subset F'$ son sendos subespacios directos.

Si $h\colon U\times F \longrightarrow U\times F'$ se define por (4) ciertamente será

$$h(x,v) = (x,\lambda(x)(v))$$

con $\lambda\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(F,F')$ de clase C^∞.

Tomando suplementos topológicos $V \subset F$, $S \subset F'$ de N e I respectivamente, podemos escribir

$$\lambda(x) = \begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{pmatrix}$$

con $A\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(V,I)$, $B\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(N,I)$, $C\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(V,S)$, $D\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(N,S)$ de clase C^∞.

Pero si $x \in U$ forzosamente $h_x\colon F \longrightarrow F'$ tiene núcleo N e imagen I, luego $B = 0$, $D = 0$, $C = 0$ y $A(x)\colon V \longrightarrow I$ es isomorfismo para cada $x \in U$.

La tesis resulta tomando como nueva trivialización de ξ a la terna $\{U,I\times N,\varphi\}$ (manteniendo $\{U,F',\psi'\}$ como trivialización de ξ'), donde φ es la composición $p^{-1}(U) \xrightarrow[\psi]{} U\times F \xrightarrow[\gamma]{} U\times(I\times N)$ donde $\gamma(x,v,n) = (x,A(x)(v),n)$. En efecto en tal caso si $(x,v,n) \in U\times(I\times N)$ se tendrá $\psi' f\varphi^{-1}(x,v,n) = (x,v,0)$ y aquí es $T(v,n) = (v,0)$.

DEFINICION 3.4. Si $\xi = (X,E,p)$ y $\xi' = (X,E',p)$ son fibrados vectoriales, un morfismo $f\colon \xi \longrightarrow \xi'$ se dirá un *epimorfismo* (resp: un *monomorfismo*) si cada $f_x\colon E_x \longrightarrow E'_x$ es un epimorfismo directo (resp: un monomorfismo directo).

PROPOSICION 3.5. Todo epimorfismo (resp: monomorfismo) de fibrados vectoriales es localmente directo.

DEMOSTRACION. Con las notaciones de 3.4, sea $x_0 \in X$ así que hay trivializaciones $\{U,F,\psi\}$ y $\{U,F',\psi'\}$ de ξ y ξ' respectivamente con $x_0 \in U$. Si $h = \psi' f\psi^{-1}$ entonces $h(x,v) = (x,\lambda(x)(v))$ con $\lambda\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(F,F')$ de clase C^∞ (cf.(4)).

Supongamos f epimorfismo, sea N_0 el núcleo de $\lambda(x_0)$ y sea $V \subset F$ un suplemento topológico de N_0; así que siendo $F = V \oplus N_0$ será

$$\lambda(x)(v,n) = a(x)(v) + b(x)(n)$$

donde $a\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(V,F')$ y $b\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(N,F')$ son C^∞. Ciertamente $a(x_0)$ es un isomorfismo y $b(x_0) = 0$. Sea $U_0 = \{x \in U\colon a(x) \in \mathrm{Iso}(V,F')\}$ entorno abierto de x_0.

Consideramos trivializaciones $\{U_0,V \oplus N_0,\varphi\}$ y $\{U_0,V,\varphi'\}$ de ξ y ξ' respectivamente, definidas así: φ es la composición de ψ con $(x,v,n) \longrightarrow (x,v+a(x)^{-1}b(x)(n),n)$ de $U\times F$ sobre $U\times(V \oplus N_0)$.

Además φ' es la composición de ψ' con $(x,w) \longrightarrow (x,a(x)^{-1}(w))$. Entonces $\varphi' f\varphi^{-1}(x,v,n) = (x,v)$ está en las condiciones de 3.3 ii).

El caso en que f es monomorfismo se trata análogamente y queda como ejercicio.

OBSERVACION 3.6. Hay otro caso particular importante de morfismos localmente directos, que pasamos a describir. Un morfismo $f\colon \xi \longrightarrow \xi'$ se dirá de *rango finito* si $\mathrm{ran}(f_x) < \infty$ para todo $x \in X$; tal es el caso si ξ (ó bien ξ') es un fibrado de dimensión finita. Entonces: si $f\colon \xi \longrightarrow \xi'$ es un morfismo de rango finito son equivalentes

i) f es localmente directo.

ii) La función $x \longrightarrow \mathrm{ran}(f_x)$ es localmente constante.

PRUEBA. Que i) $\Rightarrow$ ii) es inmediato a partir de 3.3; pues con las notaciones allí utilizadas será $\operatorname{ran}(f_x) = \operatorname{ran}(T)$ para todo $x \in U$. Veamos la recíproca; dado $x_0 \in X$ consideramos un abierto $U \subset X$, entorno de x_0 y trivializaciones $\{U,F,\psi\}$ y $\{U,F',\psi'\}$ de ξ y ξ' respectivamente, así que $\psi' f \psi^{-1}(x,v) = (x,h(x)(v))$ con $h\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(F,F')$ de clase C^∞. Podemos suponer $\operatorname{ran}(f_x) = r$ para todo $x \in U$, así que $\operatorname{ran}(h(x)) = r$ si $x \in U$.

Si $V \oplus N_0 = F$ con $N_0 =$ núcleo de $h(x_0)$ y $F' = I_0 \oplus S_0$ con $I_0 =$ imágen de $h(x_0)$, podemos representar h en la forma

$$h(x) = \begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{pmatrix}$$

con $A\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(V,I_0)$, $B\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(N_0,I_0)$, $C\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(V,S_0)$ y $D\colon U \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathcal{L}(N_0,S_0)$ de clase C^∞. Claramente $A(x_0)\colon V \longrightarrow I_0$ es isomorfismo así que si $U_0 = \{x\colon A(x)$ es isomorfismo$\}$ del lema 5.7 iii) del capítulo II se deduce que $D(x) = C(x)A(x)^{-1}B(x)$ para todo $x \in U_0$.

Entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
U_0 \times (V \oplus N_0) \arrow[r, "\psi' f \psi^{-1}"'] \arrow[d, "\alpha"] & U_0 \times (I_0 \oplus S_0) \\
U_0 \times (V \oplus N_0) \arrow[r] & U_0 \times (V \oplus S_0) \arrow[u, dash, "\beta"'] \\
(x,v,n) \arrow[r] & (x,v,0)
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha(x,v,n) = (x,v+A(x)^{-1}B(x)(n),n)$ y $\beta(x,v,s) = (x,A(x)(v),s+C(x)(v))$ son isomorfismos de fibrados triviales permite ver que $\{U_0,V \oplus S_0,\beta^{-1}\psi'\}$ y $\{U_0,V \oplus N_0,\alpha^{-1}\psi\}$ están en las condiciones de 3.3 ii), con $T(v,n) =$ $= (v,0)$.

3.7. SUPLEMENTOS.

Si ξ es un fibrado vectorial y $\xi' \subset \xi$ es un subfibrado vectorial, diremos que ξ' admite un *suplemento* en ξ si existe un subfibrado vectorial $\xi'' \subset \xi$ tal que el morfismo $+\colon \xi' \oplus \xi'' \longrightarrow \xi$ (cf.ejercicio 6 de 2.7) es un isomorfismo. En tal caso se dirá que ξ'' es *un* suplemento de ξ'. Como en álgebra lineal se ve que son equivalentes las afirmaciones

a) ξ' admite un suplemento en ξ.

b) Existe un morfismo $f\colon \xi \longrightarrow \xi$ tal que $f_x|E'_x =$ identidad de E'_x para todo $x \in X$.

(Considérese $\xi \longrightarrow \xi' \oplus \xi/\xi'$ dada por $v \longrightarrow (f(v),\pi(v))$, donde

$\pi: \xi \longrightarrow \xi/\xi')$.

Evidentemente si $\xi' \subset \xi$ es un subfibrado vectorial que admite un suplemento (digamos $\xi'' \subset \xi$) se obtiene un "*proyector*", esto es un morfismo $f: \xi \longrightarrow \xi$ tal que $f^2 = f$ con $f_x(E_x) = E_x'$ para todo $x \in X$ (y entonces $1_E - f$ es el proyector asociado a ξ''). Este proyector es lógicamente localmente directo, con $\mathrm{Ker}(f) = \xi''$ e $\mathrm{Im}(f)$; pero este hecho es general, como se ve en:

PROPOSICION 3.8. Sea $\xi = (X,E,p)$ un fibrado vectorial y sea $f: \xi \longrightarrow \xi$ un proyector, esto es un morfismo que verifica $f^2 = f$. Entonces f es localmente directo; para cada $x \in X$ la fibra en x de $\mathrm{Im}(f)$ (resp: $\mathrm{Ker}(f)$) es $\mathrm{Im}(f_x)$ (resp: $N(f_x)$) y $\xi \approx \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

DEMOSTRACION. Utilizaremos 3.3; dado $x_0 \in X$ consideramos una trivialización $\{U,F,\psi\}$ de ξ con $x_0 \in U$, de modo que $h = \psi f \psi^{-1}: U\times F \longrightarrow U\times F$ es de la forma $h(x,v) = (x,\lambda(x)(v))$ con $\lambda: U \longrightarrow \mathcal{L}(F)$ de clase C^∞.

Claramente $\lambda(x)^2 = \lambda(x)$ para cada $x \in U$.

Si $N_0 = N(\lambda(x_0))$ e $I_0 = \mathrm{Im}(\lambda(x_0))$, N_0 e I_0 son suplementarios topológicos, $F = I_0 \oplus N_0$ y λ se representa como

$$\lambda(x) = \begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} I_0 \\ N_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I_0 \\ N_0 \end{pmatrix}$$

Como $A(x_0) = 1_{I_0}$ y $B(x_0) = 0$, $C(x_0) = 0$, $D(x_0) = 0$, hay un entorno $U_0 \subset U$ de x_0 tal que

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & 1_{N_0} - D(x) \end{pmatrix}$$

es isomorfismo $F \longrightarrow F$ para todo $x \in U_0$. Explicitando $\lambda(x)^2 = \lambda(x)$ se ve que para todo $x \in U_0$ vale

$$\gamma(x) \, . \begin{pmatrix} 1_{I_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda(x).\gamma(x)$$

Por consiguiente definiendo $\beta: U_0\times F \longrightarrow U_0\times F$ por $\beta(x,v) = (x,\gamma(x)(v))$, β es un isomorfismo del fibrado trivial y $\{U_0,F,\beta^{-1}\psi\}$ es una trivialización lineal de ξ (con $x_0 \in U_0$) para la cual se verifica 3.3 ii) con $T(v) = \lambda(x_0)(v)$ (= proyección de v sobre I_0).

De esta manera la correspondencia (usual en álgebra lineal) entre subfibrados que admiten suplementos y proyectores se mantiene; el problema que trataremos ahora es el de establecer condiciones suficientemente generales como para que todo subfibrado vectorial admita un suplemento.

PROPOSICION 3.9. Sea $\xi = (X,E,p)$ un fibrado vectorial y $\xi' \subset \xi$ un subfibrado vectorial. Se supone que la variedad X es paracompacta y C^∞-normal (cf. cap.III, 6.7).

Entonces ξ' admite un suplemento.

DEMOSTRACION. Por 3.8 es suficiente construir un morfismo $f\colon \xi \longrightarrow \xi$ tal que $f^2 = f$ y tal que $\mathrm{Im}(f) = \xi'$.

i) $\xi = (X, X\times F, \pi_X)$ fibrado producto, $\xi' = (X, X\times F', \pi_X)$ con $F' \subset F$ subespacio directo. Inmediato tomando $f(x,v) = (x,v')$ con v' = proyección de v sobre v' (recordar que $F' \subset F$ es directo).

ii) Caso general; por i) para cada trivialización $\{U_i, F_i, \psi_i\}$ de ξ hay un proyector $f_i\colon \xi|U_i \longrightarrow \xi|U_i$ tal que $\mathrm{Im}(f_i) = \xi'|U_i$.

Consideremos una partición C^∞ de la unidad subordinada al cubrimiento U_i $(i \in I)$ de X, digamos $\varphi_i\colon X \longrightarrow [0,1]$ $(i \in I)$; con ella podemos definir morfismos $f_i'\colon \xi \longrightarrow \xi$ vía $f_i' = \varphi_i . f_i$; más precisamente ponemos $f_{ix}' = 0$ si $x \notin U_i$, $f_{ix}' = \varphi_i(x).f_{ix}$ si $x \in U_i$.

Entonces $f = \sum\limits_{i\in I} f_i'\colon \xi \longrightarrow \xi$ es un morfismo bien definido y claramente $f_x(v) = v$ si $v \in E_x'$ para cada $x \in X$.

En general "el" suplemento así construído de ξ' no es canónico; pero hay una situación particular en la cual es posible definir un suplemento intrínseco, que desarrollaremos en el § próximo (ver §4, luego de 4.9).

Veamos ahora que - bajo convenientes condiciones - dado un fibrado vectorial $\xi = (X,E,p)$ y un $x_0 \in X$ siempre hay secciones $s \in \Gamma^k(\xi)$ $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ que toman valores prefijados en x_0; vale decir,estudiaremos la aplicación lineal

$$r_{x_0} : \Gamma^k(\xi) \longrightarrow E_{x_0} \qquad (r_{x_0}(s) = s(x_0)) \tag{5}$$

LEMA 3.10. En las condiciones anteriores supongamos que X es una variedad C^k-normal. Entonces para todo $x_0 \in X$ la aplicación (5) es suryectiva.

DEMOSTRACION. La tesis es evidente (sin hipótesis sobre X) si ξ es un fibrado trivial. En el caso general hay un abierto $U \subset X$ tal que $x_0 \in U$ y $\xi|U$ es trivial; dado $v \in E_{x_0}$ hay una $s_1 \in \Gamma^k(\xi|U)$ tal que $s_1(x_0) = v$. Ahora si $\varphi\colon X \longrightarrow [0,1]$ es de clase C^k con $\varphi(x_0) = 1$ y $\mathrm{sop}(\varphi) \subset U$, la sección $\varphi.s_1$ sobre U se extiende trivialmente a una $s \in \Gamma^k(\xi)$, para la cual es claro que $s(x_0) = v$.

PROPOSICION 3.11. Sea $\xi = (X,E,p)$ un fibrado vectorial de dimensión n; entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) ξ es trivial.

ii) Existen n secciones $s_i \in \Gamma^\infty(\xi)$ $(1 \leq i \leq n)$ tales que $\{s_1(x),\ldots,s_n(x)\}$ es base de E_x para todo $x \in X$.

Además si valen i) ó ii) se verifica:

iii) $\Gamma^\infty(\xi)$ es un $C^\infty(X)$-módulo libre de rango n.

Si X es C^∞-normal, iii) $\Rightarrow$ ii) (y entonces i) ii) y iii) son equivalentes).

DEMOSTRACION. i) $\Rightarrow$ ii) es evidente: si $f: \varepsilon_X^n \longrightarrow \xi$ es un isomorfismo basta tomar $s_i(x) = f(x,e_i)$ $(1 \leq i \leq n)$.

ii) $\Rightarrow$ i) Se define $f: \varepsilon_X^n \longrightarrow \xi$ por $f(x,(t_1,\ldots,t_n)) = \sum_{i=1}^{n} t_i\, s_i(x)$ y esto da un isomorfismo (cf.2.5).

Que i) $\Rightarrow$ iii) es inmediato pues $\Gamma^\infty(\varepsilon_X^n) \approx C^\infty(X)^n$ ya que cada sección de ε_X^n es una aplicación $x \longrightarrow (x,a(x))$ con $a(x) = (a_1(x),\ldots,a_n(x)) \in R^n$.

Veamos que iii) $\Rightarrow$ ii) (bajo la hipótesis suplementaria sobre X).

La caracterización "algebraica" 3.11 iii) de los fibrados vectoriales de dimensión finita triviales se extiende al caso general; para ello introducimos la siguiente:

DEFINICION 3.12. Un fibrado vectorial $\xi = (X,E,p)$ se dice de *tipo finito* si existe un cubrimiento abierto finito U_i $(1 \leq i \leq r)$ de X tal que $\xi|U_i$ es trivial para cada i.

OBSERVACIONES 3.13. a) Si X es una variedad compacta, todo fibrado vectorial ξ de base X es de tipo finito.

b) Más generalmente (aunque menos evidente) si X es una variedad de dimensión finita, todo fibrado vectorial de base X es de tipo finito.

Nos limitaremos a indicar los elementos necesarios para probar este hecho; utilizando "teoría de la dimensión topológica" (en particular IV.2, II.1 y II.7 de [13]) se ve enseguida que una variedad diferenciable X de dimensión n tiene dimensión topológica n. Luego se aplica el ejercicio 12 de 3.15, lo que da la tesis.

c) Si $f: X \longrightarrow Y$ es C^∞ y ξ es un fibrado vectorial de tipo finito de base Y, $f^*(\xi)$ es de tipo finito; inmediato pues $f^*(\xi)|f^{-1}(U)$ es trivial si $\xi|U$ es trivial.

PROPOSICION 3.14. Sea $\xi = (X,E,p)$ un fibrado vectorial de dimensión finita, cuya base X es una variedad C^∞-normal. Entonces son equivalentes las afirmaciones

i) ξ es de tipo finito.

ii) El $C^\infty(X)$-módulo $\Gamma^\infty(\xi)$ es finitamente generado.

iii) El $C^\infty(X)$-módulo $\Gamma^\infty(\xi)$ es proyectivo y finitamente generado.

iv) Existe un epimorfismo f: $\varepsilon_X^n \longrightarrow \xi$ (para un n conveniente).

v) Existe un monomorfismo g: $\xi \longrightarrow \varepsilon_X^n$ (para un n conveniente).

vi) Existe un fibrado vectorial η de base X tal que $\xi \oplus \eta \approx \varepsilon_X^n$.

DEMOSTRACION. iv) y v) son equivalentes gracias a 3.9 (que expresa que toda "sucesión exacta se escinde"); claramente v) $\Rightarrow$ vi), tomando un suplemento η de Im(g).

Como $\Gamma^\infty(\xi \oplus \eta) = \Gamma^\infty(\xi) \oplus \Gamma^\infty(\eta)$ y como $\Gamma^\infty(\varepsilon_X^n) \cong C^\infty(X)^n$, es inmediato que vi) $\Rightarrow$ iii); por supuesto iii) $\Rightarrow$ ii). Veamos que ii) $\Rightarrow$ i).

Supongamos $\dim(\xi) = m$ y sea $\{s_1,\ldots,s_r\}$ un conjunto finito de secciones que engendran $\Gamma^\infty(\xi)$; de 3.10 resulta que para cada $x \in X$ el conjunto $\{s_1(x),\ldots,s_r(x)\}$ genera E_x.

Por consiguiente si para cada subconjunto no vacío $J \subset \{1,\ldots,r\}$ definimos

$$U_J = \{x : (s_i(x))_{i\in J} \text{ es base de } E_x\}$$

resulta que los U_J son abiertos (cf.ejercicio 1 de 3.15),cubren X por lo precedente y $\xi|U_J$ es trivial (por 3.11) para cada J. Así ξ es de tipo finito.

Veamos finalmente que i) $\Rightarrow$ v); con la notación de 3.12 sea para cada $i \leqslant r$ un isomorfismo f_i: $\xi|U_i \longrightarrow \varepsilon_{U_i}^n$. Si φ_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ es una partición C^∞ de la unidad subordinada a éste cubrimiento se obtiene un morfismo h_i: $\xi \longrightarrow \varepsilon_X^n$ vía $h_i = \varphi_i . f_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Luego se define

f: $\xi \longrightarrow \underbrace{\varepsilon_X^n \oplus \ldots \oplus \varepsilon_X^n}_{r}$ con los h_i (vale decir $f(v) = (h_1(v),\ldots,h_r(v))$)

y f resulta un monomorfismo.

EJERCICIOS 3.15. 1) Sea ξ un fibrado vectorial y sean $s_1,\ldots,s_r$ secciones de ξ, de clase C^k $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$. Probar: el conjunto $Y \subset X$ formado por los $x \in X$ para los cuales $\{s_1(x),\ldots,s_r(x)\}$ es linealmente independiente (resp: genera E_x) es abierto (Sug: reducirlo al caso ξ trivial).

2) Sea $\xi = (X,E,p)$ un fibrado vectorial, sea $E'_x \subset E_x$ un subespacio de dimensión r (para cada $x \in X$) y sea $\xi' = (X,E',p|E')$. Probar que son equivalentes las afirmaciones:

i) ξ' es un subfibrado vectorial de ξ.

ii) Existen secciones $s_1,\ldots,s_r$ de clase C^∞ de ξ en un entorno U de cada $x_0 \in X$ tales que $\{s_1(x),\ldots,s_r(x)\}$ es base de E'_x para todo $x \in U$. (Sug: reducirlo al caso $\xi = \varepsilon_X^F$).

3) Sea $X \subset R^n$ una subvariedad; para cada $x \in X$ se define el espacio de los *vectores normales* $N_x(X) = T_x(X)^\perp$ y $N(X) = \{(x,v): v \in N_x(X)\} \subset X\times R^n$.

i) $\nu(X) = (X,N(X),\pi_x)$ es un subfibrado vectorial de ε_X^n ("*fibrado normal*") (Sug: usar el ejercicio anterior; con la notación de 2.6 e) considerar los gradientes $\nabla u_i(x)$ para $r < i \leqslant n$).

ii) $\nu(X)$ es un suplemento de $\tau(X)$.

iii) Probar directamente que $\nu(S^{n-1}) = \{(x,t.x): x \in S^{n-1},\ t \in R\}$ es trivial (Sug: 3.11).

iv) Si X es una subvariedad de R^n definida implícitamente como $X = f^{-1}(0)$ para $f: R^n \longrightarrow R^m$ (con $Df(x)$ epimorfismo en cada $x \in X$, cf. 3.4 de cap. III), entonces $\nu(X)$ es trivial (Sug: considerar ∇f_i para $1 \leqslant i \leqslant m$).

v) Probar que en el caso general es $\tau(X) \oplus \nu(X) \approx \varepsilon_X^n = \varepsilon_{R^n}^n|X$.

4) De 3.14 y v) del ejercicio anterior deducir ejemplos de módulos proyectivos M sobre un anillo A tales que $M \oplus A \approx A^n$ y M no es libre.

(Sug: $A = C^\infty(S^{n-1})$ con n impar, $M = \Gamma^\infty(\tau(S^{n-1}))$; ver ejercicio 11 de 2.7). Ver ejercicio 7.

5) Verificar que el morfismo $(x,t) \longrightarrow (x,x.t)$ de ε_R^1 no es localmente directo.

6) Sean ξ,η dos fibrados vectoriales de base X y sea $f: \xi \longrightarrow \eta$ un morfismo de rango finito. Mostrar que $x \longrightarrow \mathrm{ran}(f_x)$ es semicontinua inferiormente (comparar con 5.9 c) de cap.II).

Deducir que si $f^2 = f$ entonces f es localmente directo (Sug: considerar 1-f), y obtener una nueva demostración de 3.8 en este caso.

7) Sea X una variedad y Vect(X) la categoría aditiva de los fibrados vectoriales de tipo finito de base X, de dimensión finita. Si $A = C^\infty(X)$, indicamos con P(A) la categoría de A-módulos proyectivos finitamente generados.

i) Si M es un objeto de P(A), existe un fibrado vectorial ξ tal que

$\Gamma^\infty(\xi) \approx M$ (Sug: si $T: A^n \longrightarrow A^n$ es A-lineal, $T^2 = T$ e $Im(T) = M$, considerar el morfismo $f: \varepsilon_X^n \longrightarrow \varepsilon_X^n$ dado por $f(x,v) = (x, \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} T_{ij}(x)v_i)e_j)$ y tomar $Im(f)$).

ii) Deducir que Γ^∞: $Vect(X) \longrightarrow P(A)$ es una equivalencia de categorías si X es C^∞-normal. (ver también [14]).

8) Sea ξ un fibrado vectorial de base X, sea $A \subset X$ una subvariedad cerrada. Probar que si X es C^∞-normal, $s \longrightarrow s|A$ es suryectiva de $\Gamma^\infty(\xi)$ sobre $\Gamma^\infty(\xi|A)$. (Sug: considerar primero el caso ξ trivial, y luego un cubrimiento de X formado por X-A y abiertos U_i que cubren A).

9) Demostrar en detalle que si $\xi' \subset \xi$ es un subfibrado vectorial, la relación de equivalencia $\sim$ que define ξ/ξ' está en las condiciones de 4.16 ii) de cap.III.

10) Sea E un espacio de Hilbert, sea $G_r(E)$ la variedad de Grassmann de los r-planos en E (ver ejercicio 11 de 5.13, cap.III).

Se define $F_r = \{(x,v)\colon x \in G_r(E) \text{ y } v \in x\} \subset G_r(E) \times E$; probar que $\gamma_E^r = (G_r(E), F_r, \pi)$ es un fibrado vectorial de dimensión r (denominado el "*fibrado canónico* sobre $G_r(E)$") (Sug: usar el ejercicio 2 y el fibrado principal $Mono(R^r,E) \longrightarrow G_r(E)$).

i) γ_E^r es de tipo finito si $\dim(E) < \infty$.

ii) Si $r=1$, probar que $C^\infty(P(E))$ se identifica al subanillo de $C^\infty(S(E))$ de las funciones pares (esto es, $\varphi(x) = \varphi(-x)$ si $|x| = 1$). Probar asimismo que $\Gamma^\infty(\gamma_E^1)$ se identifica al $C^\infty(P(E))$-módulo de los elementos impares ($\varphi(x) = -\varphi(-x)$) de $C^\infty(S(E))$.

iii) Deducir que si $E = \ell^2$, γ_E^1 no es de tipo finito.

11) Si $\xi = (X,E,p)$ es un fibrado vectorial de dimensión r de tipo finito, existe una aplicación $f\colon X \longrightarrow G_r(\ell^2)$ de clase C^∞ tal que $\xi = f^*(\gamma_{\ell^2}^r)$ (Sug: suponer $\xi \subset \varepsilon_X^n$ con 3.14 v) y tomar $f(x) = E_x$, con R^n considerado como subespacio de ℓ^2; usar el ejercicio 2 y el fibrado principal $Mono(R^r,\ell^2)$ para ver que f es C^∞).

Deducir que $f \longrightarrow f^*(\gamma_{\ell^2}^r)$ es suryectiva, de $C^\infty(X,G_r(\ell^2))$ en el conjunto de fibrados vectoriales de dimensión r de tipo finito de base X.

12) Sea X un espacio topológico normal, sea $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ un cubrimiento abierto localmente finito de X. Probar que existe un cubrimiento abierto numerable V_j $(j \geq 1)$ de X tal que

1°) $(V_j)_{j\geq 1}$ es localmente finito

2°) Cada V_k es unión disjunta de abiertos W_j^k con $\overline{W}_j^k$ incluído en algún U_λ.

3°) Si $U_{\lambda_0} \cap \ldots \cap U_{\lambda_{m+1}} = \emptyset$ para toda sucesión $\{\lambda_0,\ldots,\lambda_{m+1}\}$ de índices distintos, entonces $V_k = \emptyset$ si $k > m+1$.

(Sug: sea φ_λ ($\lambda \in L$) una partición C^0 de la unidad subordinada al cubrimiento original; para cada $J \subset L$ finito sea

$$W_J = \{x: \min_{\lambda\in J} \varphi_\lambda(x) > \max_{\lambda\notin J} \varphi_\lambda(x)\}$$

Tomar $V_k = \cup\, \mathcal{W}_k$ con $\mathcal{W}_k = \{W_J : J$ tiene k elementos$\}$).

Deducir que si ξ es un fibrado vectorial de base X con cada $\xi|U_\lambda$ trivial, entonces $\xi|V_k$ ($k \geqslant 1$) es trivial.

§ 4 - CONSTRUCCIONES.

Hemos visto en 2.1 c) que la definición de fibrado vectorial involucra unas aplicaciones g_{ij} asociadas a un cubrimiento por abiertos trivializadores; veamos como con este dato es posible reconstruir el fibrado vectorial en cuestión.

PROPOSICION 4.1. Sea X una variedad, F un espacio de Banach y sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X; se supone que para cada $(i,j) \in I\times I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ hay una aplicación

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(F) \qquad (1)$$

de clase C^∞, de modo que se verifica la condición

CZ) $g_{ij}(x) = g_{ik}(x)\cdot g_{kj}(x)$ si $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$

para todo $(i,j,k) \in I\times I\times I$ con $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

Existe entonces un fibrado vectorial $\xi = (X,E,p)$ con fibra tipo F y trivializaciones $\{U_i,F,\psi_i\}$ tales que

$$\psi_i\, \psi_j^{-1}(x,v) = (x,g_{ij}(x)(v)) \qquad (2)$$

para todo $(x,v) \in U_i \cap U_j \times F$ (si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$).

Todo otro fibrado vectorial de base X con estas propiedades es isomorfo a ξ.

DEMOSTRACION. Para probar la unicidad, supongamos que $\xi' = (X,E',p')$ con trivializaciones $\{U_i,F,\varphi_i\}$ también verifica las condiciones enunciadas. Definimos f_i: $\xi'|U_i \longrightarrow \xi|U_i$ por $f_i = \psi_i\, \varphi_i^{-1}$, lo que da un isomorfismo de fibrados vectoriales para cada $i \in I$. Es inmediato verificar que

$$f_i | p'^{-1}(U_i \cap U_j) = f_j | p'^{-1}(U_i \cap U_j)$$

lo que evidentemente produce un isomorfismo $f\colon \xi' \longrightarrow \xi$.

Para la construcción tomamos la variedad suma $S = \sum_i (U_i \times F)$ y definimos una relación de equivalencia $\sim$ en S poniendo "$(x,v) \sim (x',v')$" significa que existen i,j con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ y

$$\begin{cases} (x,v) \in U_i \times F \quad , & (x',v') \in U_j \times F \\ x = x' \in U_i \cap U_j \quad , & v' = g_{ij}(x)(v) \end{cases}$$

Como de la condición (1) se deduce $g_{ii}(x) = 1_F$ y $g_{ji}(x) = g_{ij}(x)^{-1}$ si $x \in U_i \cap U_j$, efectivamente $\sim$ es una relación de equivalencia en S.

Si $E = S/\sim$ y $\pi\colon S \longrightarrow E$ es la proyección canónica, es claro que se puede definir unívocamente $p\colon E \longrightarrow X$ de modo que $p\pi(x,v) = x$ si $(x,v) \in S$.

La relación $\sim$ está en las condiciones de 4.16 (cap.III), ya que si R es su gráfico, se tiene $R \cap [(U_i \times F)\times(U_j \times F)] = \emptyset$ si $U_i \cap U_j = \emptyset$, y si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ esta intersección es

$$\{(x,x,v,g_{ij}(x)(v)) \ : \ x \in U_i \cap U_j \ , \ v \in F\}$$

que es el gráfico de $(x,v) \longrightarrow (x,g_{ij}(x)(v))$.

Sigue que $p\colon E \longrightarrow X$ es C^∞ y como $\pi_i = \pi | U_i \times F\colon U_i \times F \longrightarrow p^{-1}(U_i)$ es un difeomorfismo se obtiene la tesis poniendo $\psi_i = \pi_i^{-1}$.

OBSERVACIONES 4.2. a) El resultado anterior puede generalizarse bastante, incluso al caso de fibrados no vectoriales (ver [18]).

b) Puede ocurrir que las aplicaciones g_{ij} de (1) verifiquen $g_{ij}(U_i \cap U_j) \subset G$, donde G es un subgrupo de Lie de GL(F); se dirá entonces que el *grupo estructural de* ξ *es* G. Cuanto más "pequeño" sea G, más sencillo es el estudio de ξ (por ejemplo si G se reduce al elemento neutro es inmediato que ξ es trivial, por la unicidad afirmada en 4.1 y (2)).

c) A título de ejemplo veamos como se obtiene la suma de Whitney $\xi \oplus \eta$ de dos fibrados vectoriales ξ,η de base X (y fibra tipo F_1 y F_2, respectivamente). Consideramos un cubrimiento abierto U_i $(i \in I)$ de X y trivializaciones $\{U_i,F_1,\psi_i\}$ y $\{U_i,F_2,\varphi_i\}$ de ξ y η respectivamente; ello produce $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \longrightarrow GL(F_1)$, $g'_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(F_2)$ para cada (i,j) con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Entonces

$$g_{ij} \oplus g'_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(F_1 \times F_2)$$

$(g_{ij} \oplus g'_{ij}(x)(v_1,v_2) = (g_{ij}(x)(v_1),g_{ij}(x)(v_2)))$ están en las condiciones de 4.1 y definen un fibrado vectorial de base X que se reconoce fácilmente como $\xi \oplus \eta$ por la unicidad allí afirmada.

Veamos dos ejemplos de aplicación de 4.1 que permiten obtener nuevos fibrados vectoriales a partir de otros dados.

EJEMPLOS 4.3. a) FIBRADO DUAL. Dado un fibrado vectorial $\xi = (X,E,p)$ con trivializaciones $\{U_i,F,\psi_i\}$ y $g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow GL(F)$, consideramos el homomorfismo $T \longrightarrow (T^{-1})^t$ de grupos de Lie, $GL(F) \longrightarrow GL(F^*)$ (donde "t" indica *traspuesto*).

Ello produce

$$g^*_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(F^*)$$

vía $g^*_{ij}(x) = (g_{ij}(x)^{-1})^t$, que están en las condiciones de 4.1 y por lo tanto queda definido un nuevo fibrado vectorial ξ^* de fibra tipo F^*, denominado el *dual* de ξ.

Este fibrado puede ser definido directamente por el siguiente procedimiento: se toma $E^* = \bigcup_x E^*_x$ (como conjunto) con $\bar{p}: E^* \longrightarrow X$ evidente y luego se consideran las biyecciones $\psi^*_i : \bar{p}^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F$ mediante la regla $\psi^*_{ix} = (\psi^{-1}_{ix})^t$, para cada $x \in U_i$.

De aquí resulta enseguida que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$,

$$\psi^*_i \psi^{*-1}_j : U_i \cap U_j \times F^* \longrightarrow U_i \cap U_j \times F^*$$

es $(x,\varphi) \longrightarrow (x,g_{ij}(x)^*(\varphi))$ (difeomorfismo). Usando entonces las biyecciones ψ^*_i se obtienen estructuras de variedad para cada $\bar{p}^{-1}(U_i)$ y aplicando 4.1 de cap.III se define finalmente la variedad E^* y el fibrado vectorial $(X,E^*,\bar{p})$. Por la unicidad asegurada en 4.1 este fibrado vectorial coincide con ξ^*.

b) APLICACIONES LINEALES. Dados fibrados vectoriales $\xi = (X,E,p)$ y $\eta = (X,E',p')$ con trivializaciones $\{U_i,F,\psi_i\}$, $\{U_i,F',\psi'_i\}$ respectivamente y $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(F)$ y $g'_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(F')$ consideramos la aplicación C^∞ dada por

$$\theta : GL(F) \times GL(F') \longrightarrow GL(\mathcal{L}(F,F'))$$

con $\theta(A,B)(T) = ATB^{-1}$. Definiendo $\mathring{g}_{ij}(x) = \theta(g_{ij}(x),g'_{ij}(x))$ estamos en la situación de 4.1, con lo que queda definido un fibrado vectorial indicado $\mathcal{L}(\xi,\eta)$. ("fibrado de aplicaciones lineales").

Dejamos a cargo del lector el verificar que $\mathcal{L}(\xi,\eta)$ puede ser también definido a partir de $\bigcup_x \mathcal{L}(E_x,E'_x)$, como se indicó para el fibrado dual.

De manera general cada operación que se realiza sobre espacios vectoriales "induce" una operación análoga en fibrados vectoriales; formalizaremos este principio general como sigue.

Indiquemos con <u>Ban</u> la categoría de espacios de Banach sobre R ó C (con "morfismos" las aplicaciones lineales continuas) y sea $L = \{1,\ldots,r\}$ un conjunto finito de índices; la categoría producto $\underline{\mathrm{Ban}}^L$ tiene como objetos las familias ordenadas $(F_1,\ldots,F_r)$ de objetos de <u>Ban</u> y como "morfismos" se define

$$\mathrm{Hom}((F_1,\ldots,F_r),(G_1,\ldots,G_r)) = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{L}(F_i,G_i)$$

con composición evidente.

Si Vect(X) indica la categoría de fibrados vectoriales de base X (reales o complejos, según corresponda), cuyos "morfismos" son los morfismos de fibrados vectoriales, se define de manera análoga la categoría producto $\mathrm{Vect}(X)^L$. Nótese que hay una "inclusión" definida por un funtor covariante $\varepsilon_X : \underline{\mathrm{Ban}}^L \longrightarrow \mathrm{Vect}(X)$ dado por

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_X(F_1,\ldots,F_r) &= (\varepsilon_X^{F_1},\ldots,\varepsilon_X^{F_r}) \\ \varepsilon_X(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) &= (\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_r) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

donde $\bar{\alpha}(x,v) = (x,\alpha(v))$.

Para cada subvariedad $A \subset X$ hay un funtor "restricción" $\mathrm{Vect}(X) \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathrm{Vect}(A)$ dado por $\xi \longrightarrow \xi|A$; claramente $\varepsilon_X(F_1,\ldots,F_r)|A =$ $= \varepsilon_A(F_1,\ldots,F_r)$.

Supongamos dado un funtor covariante $T: \underline{\mathrm{Ban}}^L \longrightarrow \underline{\mathrm{Ban}}$; como T opera sobre los morfismos, resulta que si $F_1,\ldots,F_r$ y $G_1,\ldots,G_r$ son espacios de Banach hay una función

$$T((F_1,\ldots,F_r),(G_1,\ldots,G_r)) : \prod_{i=1}^{r} \mathcal{L}(F_i,G_i) \longrightarrow \mathcal{L}(T(F_1,\ldots,F_r),T(G_1,\ldots,G_r))$$

Decimos que T es un *funtor diferenciable* si esta función es C^∞ para todo par de objetos $(F_1,\ldots,F_r)$ y $(G_1,\ldots,G_r)$ en $\underline{\mathrm{Ban}}^L$. (definición aplicable incluso a funtores contravariantes, con modificación obvia). Como T transforma isomorfismos en isomorfismos y composición en composición en particular para cada $F_1,\ldots,F_r$ hay un homomorfismo de grupos de Lie

$$T(F_1,\ldots,F_r) : \prod_{i=1}^{r} GL(F_i) \longrightarrow GL(T(F_1,\ldots,F_r)) \qquad (4)$$

(supuesto T diferenciable).

Por el momento sólo consideraremos funtores covariantes.

Si $T: \underline{\mathrm{Ban}}^L \longrightarrow \underline{\mathrm{Ban}}$ es un funtor diferenciable, definiremos una "extensión"

$\mathcal{T}_X : Vect(X)^L \longrightarrow Vect(X)$ de T como sigue.

Supongamos que $\xi_i = (X,E^i,p_i)$ son fibrados vectoriales de base X $(1 \leqslant i \leqslant r)$ y pongamos

$$E = \bigcup_{x\in X} T(E_x^1,\ldots,E_x^r)$$

con p: $E \longrightarrow X$ evidente. Supongamos que $U \subset X$ es abierto y que hay trivializaciones lineales ψ^i: $p_i^{-1}(U) \longrightarrow U\times F_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$; si $x \in U$ hay un isomorfismo

$$\psi_x : p^{-1}(x) \longrightarrow T(F_1,\ldots,F_r) \qquad (5)$$

dado por $\psi_x(v) = T(\psi_x^1,\ldots,\psi_x^r)(v)$ y por ende una biyección

$$\psi_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U\times T(F_1,\ldots,F_r) \qquad (6)$$

vía $\psi_U(v) = (p(v),\psi_{p(v)}(v))$.

Entonces declarando a ψ_U un difeomorfismo se obtiene una estructura de variedad para $p^{-1}(U)$; mas aún $(U,p^{-1}(U),p)$ resulta un fibrado vectorial trivial isomorfo por ψ_U con el fibrado producto $\varepsilon_U^{T(F_1,\ldots,F_r)}$.

Si V es otro abierto en X y hay trivializaciones lineales $\{V,F_i,\varphi_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ y $U \cap V \neq \emptyset$, tendremos las funciones de transición

$$\psi^i\, \varphi^{i-1} : U \cap V \times F_i \longrightarrow U \cap V \times F_i$$

dadas por $(x,v) \longrightarrow (x,g^i(x)(v))$ con g^i: $U \cap V \longrightarrow GL(F_i)$ de clase C^∞ para $i = 1,\ldots,r$. Por lo tanto

$$\psi_U\, \psi_V^{-1}(x,y) = (x,\psi_x\varphi_x^{-1}(y)) = (x,g(x)(y)) \qquad (7)$$

donde g: $U \cap V \longrightarrow GL(T(F_1,\ldots,F_r))$ es

$$g(x) = T_{(F_1,\ldots,F_r)}(g^1(x),\ldots,g^r(x))$$

Por ser T un funtor diferenciable, g: $U \cap V \longrightarrow GL(T(F_1,\ldots,F_r))$ es C^∞ y por consiguiente (7) es un difeomorfismo. De ésto y la definición resulta que en $p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V)$ coinciden las estructuras de variedad diferenciable inducidas por $p^{-1}(U)$ y $p^{-1}(V)$, de modo que de 4.1 (cap.III) se obtiene una estructura de variedad para E. Y ahora es inmediato que $\xi = (X,E,p)$ es un fibrado vectorial, que denotamos $\mathcal{T}_X(\xi_1,\ldots,\xi_r)$.

Si f_i: $\xi_i \longrightarrow \eta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ son morfismos, es fácil definir un morfismo

$$f: \mathcal{T}_X(f_1,\ldots,f_r) : \mathcal{T}_X(\xi_1,\ldots,\xi_r) \longrightarrow \mathcal{T}_X(\eta_1,\ldots,\eta_r)$$

por medio de $f_x = T(f_{1x},\ldots,f_{rx})$; apelando a (6) se ve enseguida que esto define efectivamente un morfismo de fibrados vectoriales.

OBSERVACIONES 4.4. a) De la definición sigue inmediatamente que

$$T_X(\varepsilon_X^{F_1},\dots,\varepsilon_X^{F_r}) = \varepsilon_X^{T(F_1,\dots,F_r)}$$

b) Si $A \subset X$ es una subvariedad entonces

$$T_X(\xi_1,\dots,\xi_r)|A = T_A(\xi_1|A,\dots,\xi_r|A)$$

para toda r-upla de fibrados vectoriales $\xi_1,\dots,\xi_r$ de base X.

Más generalmente si $f\colon X \longrightarrow Y$ es C^∞ y $\xi_1,\dots,\xi_r$ son fibrados vectoriales de base Y se tiene

$$f^*(T_Y(\xi_1,\dots,\xi_r)) = T_X(f^*(\xi_1),\dots,f^*(\xi_r))$$

c) Supongamos que $\phi\colon T \longrightarrow T'$ es una transformación natural de funtores diferenciables en $\underline{\text{Ban}}^L$; es posible "extender" ϕ a una transformación natural $\Phi_X\colon T_X \longrightarrow T'_X$ de tal modo que $\Phi_X(\varepsilon_X^{F_1},\dots,\varepsilon_X^{F_r})$ coincida con $\varepsilon_X(\Phi(F_1,\dots,F_r))$. Dejando a cargo del lector los detalles, digamos que basta definir $\Phi_U\colon p^{-1}(U) \longrightarrow p'^{-1}(U)$ de modo que resulte conmutativo (8),

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\psi_U"] & p'^{-1}(U) \arrow[d, "\psi'_U"] \\
U\times T(F_1,\dots,F_r) \arrow[r, "1_U\times\Phi"'] & U\times T'(F_1,\dots,F_r)
\end{tikzcd} \qquad (8)$$

verificando luego que Φ_U y Φ_V coinciden sobre $p^{-1}(U \cap V)$.

d) Todas las consideraciones anteriores se aplican igualmente al caso de un funtor contravariante $T\colon \underline{\text{Ban}}^L \longrightarrow \underline{\text{Ban}}$; la única modificación que debe efectuarse para que la construcción hecha siga siendo válida es la definición (5) de $\psi_x\colon p^{-1}(x) \longrightarrow T(F_1,\dots,F_r)$ que se rehace por $\psi_x = T(\psi_x^1,\dots,\psi_x^r)^{-1} = T((\psi_x^1)^{-1},\dots,(\psi_x^r)^{-1})$. El resto sigue igual.

Incluso es posible considerar el caso de un funtor diferenciable covariante en ciertas variables y contravariante en otras, que dejamos como ejercicio.

Veamos algunos ejemplos importantes:

EJEMPLOS 4.5. a) SUMA DE WHITNEY. Se reobtiene la definición de $\xi_1 \oplus \xi_2$ considerando el funtor "suma directa" $\oplus : \underline{\text{Ban}}^2 \longrightarrow \underline{\text{Ban}}$ dado en forma evidente por $(F_1,F_2) \longrightarrow F_1 \times F_2$.

b) DUAL. Se origina a partir del funtor contravariante $T(F) = F^*$, $T(\alpha) = \alpha^t$ (cf.4.3 a)). Mencionemos (cf.4.4 c)) que la transformación natural

J_F: $F \longrightarrow F^{**}$ induce un morfismo J: $\xi \longrightarrow \xi^{**}$ para cada fibrado vectorial ξ de base X, siendo evidente que cada J_x $(x \in X)$ es inyectivo.

En particular J es un isomorfismo si ξ es de dimensión finita.

c) APLICACIONES LINEALES. El fibrado $\mathcal{L}(\xi,\eta)$ (4.3 b)) se obtiene partiendo del funtor $\mathcal{L}$: $\underline{\text{Ban}}^2 \longrightarrow \underline{\text{Ban}}$; $\mathcal{L}(F_1,F_2)$ es covariante en F_2, contravariante en F_1 (lo que explica el porqué de la aplicación θ de 4.3 b)).

Nótese que $\mathcal{L}(\xi,\varepsilon_X^1) = \xi^*$, $\mathcal{L}(\varepsilon_X^1,\xi) \cong \xi$.

Como detalle interesante sobre este fibrado, mencionemos que la aplicación

$$\gamma\colon \mathrm{Hom}_X(\xi,\eta) \longrightarrow \Gamma^\infty(\mathcal{L}(\xi,\eta)) \tag{9}$$

dada por $\gamma(f)(x) = f_x$ $(x \in X)$, es un isomorfismo de $C^\infty(X)$-módulos. (cf. 2.6 d)).

d) APLICACIONES BILINEALES. Trataremos sólo el caso derivado del funtor contravariante S_2: $\underline{\text{Ban}} \longrightarrow \underline{\text{Ban}}$, donde $S_2(F)$ = formas bilineales simétricas sobre F (cf. §2 de cap.I). Esto produce el fibrado $S_2(\xi)$ de las formas bilineales simétricas de ξ.

La inclusión $S_2(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E,E^*)$ (cf.(7) de §2, cap.I) induce - para cada fibrado vectorial ξ de base X - un morfismo $S_2(\xi) \longrightarrow \mathcal{L}(\xi,\xi^*)$.

4.6. METRICAS.

Supongamos que F es un espacio de Hilbert real con producto escalar indicado $\langle a,b \rangle$; se sabe que entonces hay un isomorfismo isométrico λ: $F \longrightarrow F^*$ dado por $\lambda(a)(b) = \langle a,b \rangle$, lo que permite identificar el traspuesto de una $T \in \mathcal{L}(F,F)$ con una aplicación $T^* \in \mathcal{L}(F,F)$ vía $\langle T^*(a),b \rangle = \langle a,T(b) \rangle$.

Por consiguiente se tiene el subespacio

$$H(F) \subset \mathcal{L}(F,F)$$

formado por las aplicaciones *autoadjuntas*, esto es, verificando $T = T^*$; es conocido que $H(F)$ puede identificarse con $S_2(F)$ mediante $T \longrightarrow \Phi$ donde $\Phi(a,b) = \langle T(a),b \rangle$.

Distinguimos asimismo el subconjunto abierto $\mathrm{Pos}(F) \subset H(F)$ formado por las aplicaciones autoadjuntas T para las cuales es $\langle v,T(v) \rangle > 0$ para todo $v \neq 0$. La identificación precedente induce una identificación entre $\mathrm{Pos}(F)$ y el conjunto $E(F)$ de los productos escalares en F equivalentes a $\langle\ ,\ \rangle$ (ver ejercicio 5 de 4.11).

Estas consideraciones pueden extenderse al caso de fibrados vectoriales, lo que requiere ciertas definiciones: si $\xi = (X,E,p)$ es un fibrado vectorial, llamaremos *métrica* en ξ a una sección $\phi \in \Gamma^{\infty}(S_2(\xi))$ (cf.4.5 d)) tal que

M_1) Para cada $x \in X$ y para cada $v \in E_x$ es $\phi_x(v,v) > 0$ si $v \neq 0$. (Por consiguiente cada ϕ_x es un producto escalar en E_x).

M_2) La topología de E_x es la inducida por la norma asociada al producto escalar ϕ_x, para cada $x \in X$.

(Este requerimiento M_2) es innecesario si $\dim \xi < \infty$).

OBSERVACIONES 4.7. a) Si ϕ es una métrica en ξ, necesariamente cada E_x resulta un espacio de Hilbert.

b) Cuando $\xi = \varepsilon_X^F$, una métrica en ξ resulta ser una aplicación $X \xrightarrow{f} S_2(F)$ de clase C^{∞} tal que cada $f(x)$ es un producto escalar en F que define la topología de F; la "métrica" es $x \longrightarrow \phi_x = (x,f(x))$ con $\phi_x(v_1,v_2) = f(x)(v_1,v_2)$.

Si $\dim(F) = n$, $S_2(F)$ puede identificarse con el conjunto de matrices simétricas $n\times n$, de modo que la métrica puede ser dada directamente por una aplicación $f: X \longrightarrow R^{n\times n}$ de clase C^{∞} (con $f_{ij}(x) = f_{ji}(x)$ para cada $x \in X$ y de tal modo que los autovalores de $f(x)$ sean > 0 para cada x).

c) Si Φ es una métrica, el morfismo $\lambda: S_2(\xi) \longrightarrow \mathcal{L}(\xi,\xi^*)$ produce una sección $\lambda(\Phi) \in \Gamma^{\infty}(\mathcal{L}(\xi,\xi^*)) \approx \mathrm{Hom}_X(\xi,\xi^*)$ (cf.(9)) y por lo tanto un morfismo $h_{\Phi}: \xi \longrightarrow \xi^*$, y es inmediato verificar que - para cada $x \in X$ - la aplicación lineal $(h_{\Phi})_x: E_x \longrightarrow E_x^*$ es la isometría correspondiente al producto escalar Φ_x en E_x. Luego $h_{\Phi}: \xi \longrightarrow \xi^*$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales (2.5).

A partir de ahora, para simplificar la escritura supondremos que $\xi =$ $= (X,E,p)$ es un fibrado con métrica que escribiremos $x \longrightarrow \langle\ ,\ \rangle_x$; con esta notación el isomorfismo h_{ϕ} de arriba se escribirá $h: \xi \longrightarrow \xi^*$, siendo $h_x(a)(b) = \langle a,b \rangle_x$ para cada $(a,b) \in E_x\times E_x$ (y cada $x \in X$).

Podemos considerar el subfibrado vectorial $H(\xi) \subset \mathcal{L}(\xi,\xi)$ cuya fibra en cada $x \in X$ es $H(E_x)$; cada sección de $H(\xi)$ define un morfismo $f: \xi \longrightarrow \xi$ tal que $f_x = f_x^*$.

El interés por los fibrados con métrica reside en la siguiente simplificación de la estructura:

PROPOSICION 4.8. Si $\xi = (X,E,p)$ es un fibrado vectorial con métrica, para cada $x_0 \in X$ existe un entorno U de x_0, un espacio de Hilbert F y una trivialización lineal $\{U,F,\sigma\}$ tal que cada $\sigma_x: E_x \longrightarrow F$ es una isometría.

DEMOSTRACION. Sea $\{U,F,\psi\}$ una trivialización lineal de ξ con $x_0 \in U$; definiendo una aplicación $g: U \longrightarrow S_2(F)$ de clase C^∞ que corresponda por el isomorfismo $S_2(\varepsilon_U^F) \cong S_2(\xi|U)$ con la métrica $\langle\ ,\ \rangle|U$ de ξ tendremos $g(x)(v_1,v_2) = \langle \psi_x^{-1}(v_1), \psi_x^{-1}(v_2) \rangle_x$ para cada $(x,v_1,v_2) \in U \times F \times F$.

Definimos una estructura de espacio de Hilbert para F introduciendo el producto escalar $\langle v_1,v_2 \rangle = g(x_0)(v_1,v_2)$; por consiguiente se tiene una aplicación $A: U \longrightarrow Pos(F)$ de clase C^∞ tal que $g(x)(v_1,v_2) = \langle A(x)(v_1),v_2 \rangle$ para todo $(x,v_1,v_2) \in U \times F \times F$ y claramente $A(x_0) = 1_F$.

Del ejercicio 5 iv) de 4.11 resulta que $A(x) = B(x)^2$ donde $B: U \longrightarrow Pos(F)$ es de clase C^∞; si definimos el isomorfismo $\beta: \varepsilon_U^F \longrightarrow \varepsilon_U^F$ como $\beta(x,v) = (x,B(x)(v))$ se obtiene una trivialización $\sigma: \xi|U \longrightarrow \varepsilon_U^F$ por $\sigma = \beta\psi$ que satisface lo enunciado en la tesis.

OBSERVACION 4.9. Si se considera un cubrimiento abierto U_i $(i \in I)$ de X y trivializaciones $\{U_i,F,\sigma_i\}$ en las condiciones de 4.8, las funciones de transición $\sigma_i\sigma_j^{-1}(x,v) = (x,g_{ij}(x)(v))$ verifican "$g_{ij}(x)$ es ortogonal para cada $x \in U_i \cap U_j$", o sea

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathcal{O}(F)$$

expresan que el grupo estructural de ξ es el grupo ortogonal $\mathcal{O}(F)$.

Otra cuestión interesante es la existencia de "complemento ortogonal"; más precisamente si $\xi = (X,E,p)$ es un fibrado vectorial con métrica y $\eta = (X,E_1,p|E_1)$ es un subfibrado vectorial podemos considerar la inclusión $j: \eta \longrightarrow \xi$ y enseguida el morfismo autoadjunto $f = jj^*: \xi \longrightarrow \xi$. Evidentemente $f^2 = f$, de modo que 3.8 nos da una descomposición $\xi \approx Ker(f) \oplus Im(f)$.

Pero es inmediato que $Im(f) = \eta$ mientras que $Ker(f) = (X,E_2,p|E_2)$ donde

$$E_2 = \bigcup_{x\in X} E_{1x}^{\perp}$$

de manera que f es *el* proyector ortogonal de ξ sobre η, con núcleo el fibrado $\eta^\perp$.

Finalmente veamos un criterio de existencia de "métricas":

PROPOSICION 4.10. Sea $\xi = (X,E,p)$ un fibrado vectorial cuya fibra tipo es un espacio de Hilbert F y tal que X es C^∞-normal y paracompacta.

Existe entonces al menos una métrica en ξ.

DEMOSTRACION. La afirmación es evidente si ξ es trivial; por consiguiente podemos conseguir un cubrimiento abierto U_i $(i \in I)$ de X y para cada $i \in I$ una métrica Φ_i en $\xi|U_i$. Sea f_i $(i \in I)$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento en cuestión; ciertamente $f_i.\Phi_i$ está definida en todo X y es una sección C^∞ del fibrado $S_2(\xi)$ de formas bilineales simétricas.

Si $\Phi = \sum_i f_i.\Phi_i$, Φ es una sección de clase C^∞ de $S_2(\xi)$; veamos que es una métrica: si $x \in X$ y $v \neq 0$ en E_x será

$$\Phi_x(v,v) = \sum_i f_i(x).\phi_{ix}(v,v) > 0$$

puesto que $\Phi_{ix}(v,v) \geqslant 0$ (y para algún $i_0 \in I$ es $f_{i_0}(x) > 0$ y por consiguiente $\phi_{i_0 x}(v,v) > 0$).

En cuanto a la condición M_2) es consecuencia del hecho que para cada $x_0 \in X$ hay un entorno V tal que $\mathrm{sop}(f_i) \cap V \neq \emptyset$ sólo para finitos $i_1,\ldots,i_n$ en I.

Con mayor razón hay un conjunto finito $J \subset I$ para el cual es $f_i(x_0) = 0$ si $i \notin J$ y por ende $\phi_{x_0} = \sum_{i \in J} f_i(x_0).\phi_{ix_0}$ es un producto escalar que define la topología de E_{x_0} (ya que ello es válido para los ϕ_{ix_0}).

EJERCICIOS 4.11. 1) Dados dos fibrados vectoriales ξ,η de dimensiones finitas, de base X, definir $\xi \otimes \eta$ y probar que hay isomorfismos canónicos

$$\xi \otimes \eta \cong \eta \otimes \xi \qquad\qquad \xi \otimes \varepsilon^1_X \cong \xi$$

$$\xi_1 \otimes (\xi_2 \otimes \xi_3) \cong (\xi_1 \otimes \xi_2) \otimes \xi_3 \qquad\qquad \xi \otimes \xi^* \cong \mathcal{L}(\xi,\xi)$$

2) Demostrar en detalle el isomorfismo (9).

3) Si T: $\underline{\mathrm{Ban}}^L \longrightarrow \underline{\mathrm{Ban}}$ es un funtor diferenciable y T_X es su extensión a Vect(X), probar que $T_X(\xi_1,\ldots,\xi_r)$ es de tipo finito si $\xi_1,\ldots,\xi_r$ son fibrados vectoriales de tipo finito (cf.3.12).

4) Sea T: $\underline{\mathrm{Ban}}^L \longrightarrow \underline{\mathrm{Ban}}$ un funtor diferenciable y sea $\mathcal{M}$ la categoría de $C^\infty(X)$-módulos, X variedad diferenciable. Se supone que $\mathbf{T}$: $\mathcal{M}^L \longrightarrow \mathcal{M}$ es un funtor tal que

$$C^\infty(X,T(F_1,\ldots,F_r)) \cong \mathbf{T}(C^\infty(X,F_1),\ldots,C^\infty(X,F_r))$$

es un isomorfismo en $\mathcal{M}$ para toda r-upla $(F_1,\ldots,F_r)$ de espacios de Banach. Probar que si $\xi_1,\ldots,\xi_r$ son fibrados vectoriales de base X es

$$\Gamma^\infty(T_X(\xi_1,\ldots,\xi_r)) \cong \mathbf{T}(\Gamma^\infty(\xi_1),\ldots,\Gamma^\infty(\xi_r)) \,\_$$

5) Sea F un espacio de Hilbert real o complejo, sea H(F) el conjunto de elementos autoadjuntos de $\mathcal{L}(F,F)$ y sea $Pos(F) \subset H(F)$ el conjunto de elementos positivos de H(F) (o sea $T \in Pos(F) \Leftrightarrow \langle T(v),v \rangle > 0$ para todo $v \neq 0$).

i) H(F) es un subespacio real de $\mathcal{L}(F,F)$.

ii) Pos(F) es un cono convexo abierto en H(F) (Sug: utilizar 26 G de [1]; observar que por ser Sp(T) compacto es $\inf\{\langle T(v),v \rangle : \|v\| = 1\} = m > 0$. Probar luego que si $\|S-T\| < m/2$ y $S \in H(F)$, entonces $S \in Pos(F)$).

iii) Mostrar que si $A \in H(F)$ entonces son equivalentes

a) $A \in Pos(F)$.

b) Existe un único $B \in Pos(F)$ tal que $B^2 = A$.

Deducir que φ: Pos(F) $\longrightarrow$ Pos(F), $\varphi(B) = B^2$ es un homeomorfismo.

Su inversa se denota con $\sqrt{}$: Pos(F) $\longrightarrow$ Pos(F). (ver 26 O de [1], así como 26 J).

iv) Sea $\sqrt{1+\lambda} = 1 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2.4}\lambda^2 + \frac{1.3}{2.4.6}\lambda^3 - \ldots = \sum_{j\geq 0} c_j\ t^j$ el desarrollo de $\sqrt{1+\lambda}$ ($\lambda \in R$) convergente para $|\lambda| < 1$. Probar que $\sqrt{t.1_F + C} = \sqrt{t}\ .\ \sum_{j\geq 0} c_j.(\frac{C}{t})^j$ es convergente si $Sp(t.1_F + C) \subset [0,2t]$. Deducir de ello que $\sqrt{}$: Pos(F) $\longrightarrow$ Pos(F) es C^∞ (y por ende un difeomorfismo).

v) Probar que $\mathcal{O}(F) \times Pos(F) \longrightarrow GL(F)$, $(U,A) \longrightarrow U.A$ es un difeomorfismo (ver [1], 26 Q).

6) Sea $\xi = (X,E,p)$ un fibrado vectorial con métrica $\langle\ ,\ \rangle$

i) Sea $S(\xi) = \bigcup_{x\in X} S(E_x)$ con $S(E_x) = \{v \in E_x : \langle v,v \rangle_x = 1\}$. Probar que $p: S(\xi) \longrightarrow X$ es un fibrado localmente trivial (Sug: 4.8).

ii) $p: S(\xi) \longrightarrow X$ es un revestimiento de dos hojas si $\dim(\xi) = 1$.

7) Sea $X \subset R^n$ una subvariedad, sea $\varepsilon^n_X = \varepsilon^n_{R^n} X$ el fibrado producto con métrica "trivial" $\phi_x(a,b) = \langle a,b \rangle$ para todo $x \in X$.

Mostrar que $\tau(X)^\perp = \nu(X)$ (cf.3.15, ejercicio 3).

8) Sea $\xi = (X,E,p)$ un fibrado vectorial con métrica $\langle\ ,\ \rangle$ y sean $s_1,\ldots,s_r$ secciones C^∞ de ξ tales que $\{s_1(x),\ldots,s_r(x)\}$ es linealmente independiente para todo $x \in X$.

Probar: existen secciones $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ de clase C^∞ de ξ tales que

i) $\langle \sigma_i(x),\sigma_j(x) \rangle_x = \delta_{ij}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant r)$ para todo $x \in X$

ii) Para todo $x \in X$, $\{s_1(x),\ldots,s_r(x)\}$ y $\{\sigma_1(x),\ldots,\sigma_r(x)\}$ generan el mismo subespacio de E_x.

(Sug: utilizar el método de ortonormalización).

9) Sea $\xi = (X,E,p)$ un fibrado vectorial de dimensión finita n.

i) Definir los fibrados vectoriales $\Lambda^r(\xi)$, $r \geq 0$.

ii) Si $\{U_i,R^n,\psi_i\}$ y $\{U_j,R^n,\psi_j\}$ son trivializaciones de ξ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ y $\psi_i\ \psi_j^{-1}(x,v) = (x,g_{ij}(x)(v))$ mostrar que la correspondiente función de transición para $\Lambda^n(\xi)$ es $(x,t) \longrightarrow (x,\det(g_{ij}(x)).t)$.

iii) Si ξ tiene una métrica, $\Lambda^r(\xi) \approx \Lambda^r(\xi^*) \approx \Lambda^r(\xi)^*$ para todo $r \geq 0$.

9) Sea ξ un fibrado vectorial de dimensión 1, trivial; si s_1 y s_2 son dos secciones de clase C^k $(0 \leq k \leq \infty)$ tales que $s_1(x) \neq 0 \neq s_2(x)$ para todo $x \in X$, entonces es $s_2 = \varphi.s_1$ para una φ: $X \longrightarrow R - \{0\}$ de clase C^k.

10) Un fibrado vectorial $\xi = (X,E,p)$ de dimensión n se dice *orientable* si $\Lambda^n(\xi)$ es un fibrado trivial.

Si ξ es orientable y Γ_0 es el conjunto de secciones $s \in \Gamma^\infty(\Lambda^n(\xi))$ tales que $s(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, la relación "$s_1 \sim s_2$ si y solo sí $s_2 = \varphi.s_1$ para una φ: $X \longrightarrow R - \{0\}$ de clase C^∞" es de equivalencia en Γ_0. El conjunto $\Gamma_0/\sim$ se denomina el *conjunto de orientaciones de* ξ; indicamos con $o(s)$ la clase de equivalencia de s.

i) Si X es conexo, todo fibrado ξ de base X, orientable, tiene exactamente dos orientaciones.

ii) Si ξ es orientable, $\xi|A$ es orientable para toda subvariedad $A \subset X$.

iii) Se supone que ξ tiene una métrica $\langle\ ,\ \rangle$. Probar que son equivalentes

a) ξ es orientable.

b) Existe un cubrimiento abierto U_i $(i \in I)$ de X y trivializaciones $\{U_i,R^n,\psi_i\}$ tales que $\psi_i\ \psi_j^{-1}(x,v) = (x,g_{ij}(x)(v))$ con $g_{ij}(x) \in SO(R^n)$.

c) El grupo estructural de ξ es $SO(R^n)$.

d) Cada E_x está orientado, y para cada $x_0 \in X$ existe un entorno U de x_0 y secciones $S_i \in \Gamma^\infty(\xi|U)$ $(1 \leq i \leq n)$ tales que, para todo $x \in U$ el conjunto $\{s_1(x),\ldots,s_n(x)\}$ es una base ortonormal de E_x que define su orientación.

11) Si ξ,η son fibrados vectoriales de dimensión finita de base X, probar

$$\bigoplus_{i+j=r} \Lambda^i(\xi) \otimes \Lambda^j(\eta) \approx \Lambda^r(\xi \oplus \eta) \qquad (r \geq 0)$$

12) Sean ξ, η fibrados vectoriales de dimensiones r y n-r, respectivamente, de base X. Se supone que $\xi \oplus \eta$ es orientable.

Probar: ξ es orientable $\Leftrightarrow$ η es orientable. (Sug: ejercicio 11).

13) Sea $X \subset \mathbf{R}^n$ una subvariedad de dimensión r; usando el ejercicio anterior y el ejercicio 7, probar: $\tau(X)$ es orientable si y solo sí $\nu(X)$ es trivial.

Deducir: si r = n-1, $\tau(X)$ es orientable y solo sí existe un "campo C^∞ de vectores normales en X" (o sea: una $s \in \Gamma^\infty(\nu(X))$ con $|s(x)| = 1$ para todo $x \in X$).

14) Si ξ es un fibrado vectorial de dimensión 1, $\xi \otimes \xi^*$ es orientable (y por lo tanto trivial). Deducir que si η es un fibrado vectorial de dimensión n de base una variedad paracompacta y C^∞-normal, entonces $\eta \oplus \eta$ es orientable (Sug: ejercicio 11).

§ 5 - FIBRADO TANGENTE.

Sea X una variedad diferenciable; vamos a definir un fibrado vectorial de base X cuyas fibras sean los diversos espacios tangentes $T_x(X)$, $x \in X$. Para ello tomamos $T(X) = \bigcup_{x \in X} T_x(X)$, con $p: T(X) \longrightarrow X$ obvia; para cada mapa $\{u,U,E\}$ de X podemos definir una biyección

$$\psi_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times E \qquad (1)$$

poniendo $\psi_U(a) = (p(a), T_{p(a)}(u)(a))$; declarando a ψ_U un difeomorfismo se obtiene una estructura de variedad para $p^{-1}(U) = T(U)$ de tal forma que $(U, p^{-1}(U), p|p^{-1}(U))$ es un fibrado vectorial trivial, isomorfo mediante ψ_U al fibrado producto ε_U^F.

Para obtener la estructura deseada debemos verificar que estamos en las condiciones de 4.1 de cap.III; para ello consideramos otro mapa $\{V,v,E\}$ y la correspondiente "trivialización" $\{V,E,\psi_V\}$, suponiendo $U \cap V \neq \emptyset$. Entonces $\psi_U \psi_V^{-1}(x,b) = (x, Duv^{-1}(v(x))(b))$, así que

$$\psi_U \psi_V^{-1} : U \cap V \times E \longrightarrow U \cap V \times E$$

es un difeomorfismo con la estructura de fibrados vectoriales triviales.

Por consiguiente $\tau(X) = (X, T(X), p)$ resulta un fibrado vectorial, que se denomina *fibrado tangente* a la variedad X; sus trivializaciones vienen dadas por (1) a través de los mapas $\{u,U,E\}$ de X.

(Este fibrado puede definirse también usando 4.1, con $g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow$

$\longrightarrow GL(E)$ dadas por $g_{ij}(x) = Du_i u_j^{-1}(u_j(x)))$.

El fibrado tangente es un funtor covariante; más precisamente si $f\colon X \longrightarrow Y$ es una aplicacion de clase C^∞, se obtiene una aplicación $(T(f),f)\colon \tau(X) \longrightarrow \tau(Y)$ de fibrados vectoriales (cf. §2) poniendo $T(f)_x = T_x(f)\colon T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$. Para verificar que esto da realmente una "aplicación" se consideran mapas (u,U,E) de X, (v,V,F) de Y tales que $f(U) \subset V$; luego el diagrama conmutativo (2), donde $h(x,a) = (f(x),Dg(u(x))(a))$ siendo $g = vfu^{-1}\colon u(U) \longrightarrow v(V)$ la expresión de f en coordenadas.

$$\begin{tikzcd} p_X^{-1}(U) \arrow[r, "T(f)"'] \arrow[d, "\psi_U"] & p_Y^{-1}(V) \arrow[d, "\psi_V"] \\ U \times E \arrow[r, "h"'] & V \times F \end{tikzcd}$$

(2)

Como $x \longrightarrow Dg(u(x))$ es C^∞ (de U en $\mathcal{L}(E,F)$) lo afirmado es entonces inmediato.

EJEMPLOS 5.1. a) Si $\Omega \subset X$ es una subvariedad abierta, es claro de la definición que $\tau(\Omega) = \tau(X)|\Omega$.

b) Si $A \subset X$ es una subvariedad, $\tau(A)$ deviene un subfibrado vectorial de $\tau(X)|A$ vía las inclusiones $T_a(A) \longrightarrow T_a(X)$, $a \in A$.

c) De la definición resulta que si (u,U,E) es un mapa de X entonces $\tau(U)$ es trivial. En particular si Ω es un abierto en E, $\tau(\Omega)$ es trivial.

d) De las consideraciones precedentes sigue sin dificultad la identidad del "fibrado tangente" (tal como fue definido recién) con el objeto definido en 2.6 e) en el caso de una subvariedad $X \subset R^n$.

e) Las secciones de $\tau(X)$ se denominan "*campos de vectores tangentes*" (de clase C^k, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, según corresponda).

Llamaremos *variedad de Riemann* a toda variedad X para la cual se ha fijado una métrica $\langle\ ,\ \rangle$ en $\tau(X)$; más precisamente se trata de un par $(X,\langle\ ,\ \rangle)$, donde $\langle\ ,\ \rangle$ es una métrica en $\tau(X)$.

Si X es una subvariedad de R^n (o de un espacio de Hilbert E), salvo advertencia, se considerará a X como variedad de Riemann con la métrica usual (inducida por la métrica de ε_X^F).

5.2. CAMPOS DE VECTORES Y DERIVACIONES.

Sea X una variedad; la letra A denotará al álgebra de funciones $C^\infty(X)$.

Para todo A-módulo M indicamos con $Der(A,M)$ el A-módulo de las derivaciones $D\colon A \longrightarrow M$ (ver ejercicio 5 de 5.10); abreviaremos $Der(A)$ por $Der(A,A)$.

Hay una aplicación A-lineal canónica

$$\theta_A : \Gamma^\infty(\tau(X)) \longrightarrow \mathrm{Der}(A) \qquad (3)$$

definida por $(\theta(s)(f))(x) = T_x(f)(s(x))$ para todo $x \in X$.

LEMA 5.3. a) Si X es un abierto en un espacio de Banach E, θ es inyectiva.
b) Si además X es convexo y $\dim(E) < \infty$, θ es isomorfismo.

DEMOSTRACION. a) En este caso θ_A deviene en $\theta: C^\infty(X,E) \longrightarrow \mathrm{Der}(C^\infty(X))$ con $(\theta(s)(f))(x) = Df(x)(s(x))$; así si $\theta(s) = 0$ tomando $f \in E^*$ resultará $f(s(x)) = 0$ para toda $f \in E^*$ y todo $x \in X$, luego $s=0$.

b) Sin pérdida de generalidad podemos suponer $E = R^n$, en cuyo caso la aplicación resulta ser $\theta: C^\infty(X,R)^n \longrightarrow \mathrm{Der}(C^\infty(X))$ dada por $(\theta(s_1,\ldots,s_n)(f))(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).s_j(x)$; basta entonces probar que en este caso $\mathrm{Der}(C^\infty(X))$ es un $C^\infty(X)$-módulo libre de base $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, para lo cual apelamos al ejercicio 6 de 5.10.

LEMA 5.4. Sea X una variedad C^∞-normal (ver cap.III, 6.3). Entonces toda derivación $L \in \mathrm{Der}(A)$ es un operador local, esto es: para todo abierto $U \subset X$ y para toda $f \in C^\infty(X)$, $f|U = 0 \Rightarrow L(f)|U = 0$. En particular será $\mathrm{sop}(L(f)) \subset \mathrm{sop}(f)$ para toda $f \in A$.

DEMOSTRACION. Sea U abierto y sea $f \in A$ con $f|U = 0$. Veamos que si $x_0 \in U$ entonces $L(f)(x_0) = 0$; ahora existe $\varphi \in A$ con $\varphi(x_0) = 1$ y $\mathrm{sop}(\varphi) \subset U$. Por lo tanto $\varphi.f = 0$, así que $L(\varphi f) = \varphi.L(f) + L(\varphi).f = 0$. En consecuencia $0 = 1.L(f)(x_0) + L(\varphi)(x_0).f(x_0) = L(f)(x_0)$ y concluímos.

Para aclarar finalmente la situación tenemos el:

LEMA 5.5. Sea X una variedad C^∞-normal; entonces para cada abierto $U \subset X$ existe una única aplicación R-lineal $r^X_U: \mathrm{Der}(C^\infty(X)) \longrightarrow \mathrm{Der}(C^\infty(U))$ que hace conmutativo el diagrama (4).

Además si $V \subset U$ es otro abierto, vale $r^X_V = r^U_V\, r^X_U$.

DEMOSTRACION. Sea $L \in \mathrm{Der}(C^\infty(X))$, definiremos $r^X_U(L)(f)$ para cada $f \in C^\infty(U)$; si $x \in U$ hay una $\varphi \in C^\infty(X)$ tal que $\varphi(X) \subset [0,1]$, $\mathrm{sop}(\varphi) \subset U$ y $\varphi(x') = 1$ para todo x' en un entorno $U_0 \subset U$ de x.

Claramente hay una $\overline{f} \in C^\infty(X)$ tal que $\overline{f}|U = \varphi.f$ y definimos $r^X_U(L)(f)(x) = L(\overline{f})(x)$.

El lema anterior muestra que esto no depende de la φ particular, y queda como ejercicio el verificar que esta operación r_U^X tiene las propiedades enunciadas

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^\infty(\tau(X)) & \xrightarrow[\theta_X]{} & \mathrm{Der}\ C^\infty(X) \\ \Big\downarrow \mathrm{restr.} & & \Big\downarrow r_U^X \\ \Gamma^\infty(\tau(U)) & \xrightarrow[\theta_U]{} & \mathrm{Der}\ C^\infty(U) \end{array} \qquad (4)$$

PROPOSICION 5.6. Si X es una variedad paracompacta de dimensión finita, la aplicación (3) es un isomorfismo de $C^\infty(X)$-módulos.

DEMOSTRACION. Supongamos que $\theta_X(s) = 0$ y sea (u,U,R^n) un mapa de X; por (4) será $\theta_U(s|U) = 0$ y entonces 5.3 a) nos da $s|U = 0$. Como X es cubierta por tales dominios de mapas U sigue que $s=0$.

Sea ahora $L \in \mathrm{Der}\ C^\infty(X)$ y sea (u_i,U_i,R^n) una familia de mapas de X $(i \in I)$ tales que $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ y cada $u_i(U_i) \subset R^n$ es abierto convexo. Por 5.3 b) para cada $i \in I$ hay un campo vectorial $s_i \in \Gamma^\infty(\tau(U_i))$ tal que $\theta_{U_i}(s_i) = r_{U_i}^X(s)$; por la última parte de 5.5 resulta que $s_i|U_i \cap U_j = s_j|U_i \cap U_j$ para todo i,j de modo que obtenemos una $s \in \Gamma^\infty(\tau(X))$ tal que $s|U_i = s_i$ para cada $i \in I$.

Claramente $\theta_X(s) = L$ ya que cada θ_{U_i} es un isomorfismo.

COROLARIO 5.7. Si X es una variedad paracompacta de dimensión finita, el $C^\infty(X)$-módulo $\mathrm{Der}(C^\infty(X))$ es proyectivo finitamente generado.

DEMOSTRACION. Por 3.13 b) y 3.14.

5.8. NOTACION CLASICA.

El resultado 5.6 constituye el nexo entre la presentación actual y la clásica, que pasamos a explicar.

Si (u,U,R^n) es un mapa de una variedad, cada una de las aplicaciones $u_i = p_i u: U \longrightarrow R$ $(p_i(t_1,\dots,t_n) = t_i)$ da lugar a un campo vectorial $s_i \in \Gamma^\infty(\tau(U))$ y a una derivación $D_i \in \mathrm{Der}\ C^\infty(U)$ vinculadas por el isomorfismo θ_U por la regla $\theta_U(s_i) = D_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

O sea $T_x(u)(s_i(x)) = e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ define los campos vectoriales s_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, mientras que $D_i(f) = \theta_U(s_i)(f)$ para toda $f \in C^\infty(U)$.

Clásicamente la notación de las D_i es

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(x)$$

(como "operador" sobre $C^\infty(U)$), y se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(x) = \frac{\partial}{\partial t_i}(fu^{-1})(u(x)) \qquad (5)$$

para cada $x \in U$, $f \in C^\infty(U)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Lógicamente si se identifica $T_x(X)$ con el espacio vectorial de base $\frac{\partial}{\partial u_i}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, todo vector tangente $a \in T_x(X)$ se escribe de manera única

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i^U \frac{\partial}{\partial u_i}(x) \qquad (6)$$

con $(a_1^U,\dots,a_n^U) \in R^n$.

Si se utiliza otro mapa (v,V,R^n) con $x \in V$, tendremos

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i^V \frac{\partial}{\partial v_i}(x)$$

con los $(a_1^V,\dots,a_n^V) \in R^n$, relacionados con los anteriores por la regla

$$a_j^U = \sum_{i=1}^{n} a_i^V \frac{\partial u_j}{\partial v_i}(x) \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

(Para encontrar esto hay que retroceder a la descripción de los $s_1,\dots,s_n$ definidos por $T_x(u)(s_i(x)) = e_i$ y a la de los $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ definidos por $T_x(v)(\sigma_i(x)) = e_i$; nótese que de acuerdo con (5) los $\frac{\partial u_j}{\partial v_i}(x)$ no son otra cosa que los elementos de la matriz de $D(uv^{-1})(v(x))$.

Para concluir mencionaremos que si $f\colon X \longrightarrow Y$ es una aplicación C^∞ entre variedades y $A \in \Gamma^\infty(\tau(X))$, en general no es posible definir un campo vectorial $B \in \Gamma^\infty(\tau(X))$ tal que $T_x(f)(A(x)) = Bf(x)$; cuando un tal campo existe decimos que A y B están "f-*relacionados*" y ponemos $A \underset{f}{\sim} B$, o también $B = f_*(A)$.

El criterio más práctico en tal sentido está dado por la

PROPOSICION 5.9. Sean X,Y variedades y sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una inmersión inyectiva.

Si $B \in \Gamma^\infty(\tau(Y))$ es tal que $Bf(x) \in \mathrm{Im}\, T_x(f)$ para todo $x \in X$, entonces existe un único $A \in \Gamma^\infty(\tau(X))$ tal que $f_*(A) = B$.

DEMOSTRACION. Dado $x \in X$, existe un único $a \in T_x(X)$ tal que $T_x(f)(a) =$

$= Bf(x)$ (puesto que $T_x(f)\colon T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$ es en particular inyectiva); definimos $a = A(x)$ y sólo es necesario demostrar que la sección $x \longrightarrow A(x)$ de $\tau(X)$ es C^∞. Para ello apelamos a 3.5, cap.III; con ello reducimos (*localmente*) el problema al caso en que $X \subset Y$ es subvariedad de Y y f es la inclusión; y todavía usando un mapa centrado en un $x_0 \in X$ (digamos (u,U,E)) para el cual $u(U \cap X) = u(U) \cap F$ (con F subespacio directo de E) se reduce el problema al caso en que Y es un abierto en E y $X = Y \cap F$, F subespacio directo de E. Y en este caso la tesis es trivial.

Este tipo de inconvenientes sobre los campos vectoriales (comportamiento "no funtorial" respecto de las aplicaciones entre variedades) motiva que en ciertos contextos sea preferible manipular con *formas diferenciales*, según se explica en V, 3 de [15] (ó [17]).

EJERCICIOS 5.10. 1) Una variedad X de dimensión n se dice *orientable* si $\tau(X)$ es un fibrado orientable (ver ejercicios 10, 12, 13, 14, de 4.11).

i) Probar que son equivalentes:

a) X es orientable.

b) Existe un cubrimiento abierto U_i $(i \in I)$ de X y mapas (u_i,U_i,R^n) de X tales que $\det Du_iu_j^{-1}(u_j(x)) > 0$ para todo $x \in U_i \cap U_j$.

ii) Se supone X paracompacta y simplemente conexa; probar que X es orientable (cf. ejercicio 6 ii) de 4.11; más generalmente todo fibrado vectorial de dimensión finita de base X es orientable).

2) Sea $X \subset R^n$ una subvariedad definida implícitamente por una ecuación $X = f^{-1}(0)$, donde $f\colon R^n \longrightarrow R^m$ es una sumersión en cada $x \in X$ (3.4, cap. III). Si $A \in \Gamma^\infty(\varepsilon_X^n)$, entonces $A \in \Gamma^\infty(\tau(X))$ si y sólo si $\theta(A)(f_i) = 0$ para todo $i = 1,\dots,m$.

3) Sea A el álgebra $C^\infty(S^{n-1})$; probar que el núcleo del epimorfismo A-lineal $\varphi\colon A^n \longrightarrow A$ dado por $\varphi(a_1,\dots,a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i$ se identifica con el A-módulo $\mathrm{Der}(A)$.

4) Sean X_1,X_2 subvariedades transversales de una variedad X (ver cap.III, 4.12 d)); probar que es exacta la sucesión de fibrados vectoriales

$$0 \to \tau(X_1 \cap X_2) \to \tau(X_1)|X_1 \cap X_2 \oplus \tau(X_2)|X_1 \cap X_2 \to \tau(X)|X_1 \cap X_2 \to 0 .$$

5) Sea A una R-álgebra conmutativa, M un A-módulo; una *derivación* $D\colon A \longrightarrow M$ es una aplicación R-lineal que verifica $D(a.b) = a.D(b) + b.D(a)$.

i) Las derivaciones $D\colon A \longrightarrow M$ forman un A-módulo, indicado $\mathrm{Der}(A,M)$.

ii) Si A tiene unidad 1, $D(1) = 0$ para toda $D \in Der(A,M)$.

iii) Si D_1, D_2 son derivaciones de A en A, también lo es $[D_1,D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$; verificar que con esta operación $[\ ,\ ]$, Der(A) resulta un álgebra de Lie.

6) Sea $\Omega \subset R^n$ un abierto convexo, y sea $a \in \Omega$. Probar que toda $f \in C^\infty(\Omega)$ se escribe $f = f(a) + \sum_{i=1}^{n} g_i.(p_i - a_i)$, donde $p_i(x_1,\dots,x_n) = x_i$ para $i = 1,\dots,n$ (Sug: utilizar 2.2 de cap.II).

Verificar que $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Deducir que si $L \in Der(C^\infty(\Omega))$ entonces para toda $f \in C^\infty(\Omega)$ es

$$L(f) = \sum_{i=1}^{n} L(p_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

de modo que $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ es una base de $Der(C^\infty(\Omega))$.

7) Sea X una variedad de Riemann, $J \subset \mathbf{R}$ un intervalo y $\gamma: J \longrightarrow X$ una aplicación C^∞. Se define $|\gamma'(t)| = (\langle \gamma'(t),\gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)})^{1/2}$

i) $t \longrightarrow |\gamma'(t)|$ es C^∞ si γ es inmersión; en general es sólo una función continua.

ii) La *longitud del arco* $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$ se define por

$$\ell(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)|\, dt$$

Probar: si γ es inmersión, la función $t \longrightarrow \ell(t_1,t)$ es C^∞ creciente.

iii) Si $J = (a,b)$ y γ es inmersión, $t \longrightarrow \ell(a,t) = \ell(t)$ es un difeomorfismo de J sobre un intervalo $J' \subset R$.

iv) Si γ es inmersión y $\sigma = \gamma\ell^{-1}: J' \longrightarrow X$, σ es una inmersión con $|\sigma'(t)| = 1$ para todo $t \in J'$ ("parametrización mediante la longitud de arco").

CAPITULO V

§ 1 - CURVAS INTEGRALES.

Supongamos que Ω es un abierto en un espacio de Banach E, y supongamos que $f: \Omega \longrightarrow E$ es una aplicación de clase C^k $(k \geqslant 1)$; podemos interpretar f como un campo vectorial en la variedad Ω, que asigna a cada $x \in \Omega$ un vector tangente $f(x) \in T_x(\Omega) = E$.

Nos interesan las "curvas integrales" de este campo, esto es las aplicaciones $\varphi: J \longrightarrow \Omega$ diferenciables, donde $J \subset R$ es un intervalo abierto, que tienen la propiedad que en cada $t \in J$ la tangente $\varphi'(t)$ coincide con el valor del campo $f(\varphi(t))$. Así si f se interpreta como un campo de "velocidades", cada curva integral representa la trayectoria de una partícula.

Evidentemente las curvas integrales del campo f son las soluciones de la ecuación diferencial

$$\varphi'(t) = f\,\varphi(t) \qquad (1)$$

y la teoría general nos provee el siguiente resultado:

TEOREMA 1.1. En la situación anterior se tiene:

a) "EXISTENCIA LOCAL DE SOLUCIONES". Para cada $x_0 \in \Omega$ y cada $t_0 \in R$ existe un intervalo abierto $J \subset R$ con $t_0 \in J$ y una única $\varphi: J \longrightarrow \Omega$ para la cual valen

$$\varphi(t_0) = x_0 \qquad \varphi'(t) = f\,\varphi(t) \qquad (t \in J)$$

Esta aplicación φ es de clase C^{k+1}.

b) "DEPENDENCIA DE LOS VALORES INICIALES". Para cada $x_0 \in \Omega$ y cada $t_0 \in R$ hay un entorno $U_0 \subset \Omega$ de x_0, un intervalo abierto $J_0 \subset R$ con $t_0 \in J_0$ y una aplicación $\alpha: J_0 \times U_0 \longrightarrow \Omega$ de clase C^k tal que

$$\alpha(t_0,x) = x \qquad \alpha'(t,x) = f\,\alpha(t,x)$$

para todo $t \in J_0$ y todo $x \in U_0$.

(Se utiliza la notación $\alpha'(t,x)$ para designar al vector $D_1\alpha(t,x)(1)$).

Para la demostración ver por ejemplo cap.IV. de [15], o bien [16].

Nótese que por la condición de unicidad asegurada en a), dado $x \in \Omega$ hay un intervalo $J' \subset J_0$ que contiene a t_0 tal que $t \longrightarrow \alpha(t,x)$ es la única solución de (1) definida en J' que en $t=t_0$ vale x_0.

Ahora supongamos que A es un campo vectorial de clase C^k $(k \geqslant 1)$ en una variedad X; generalizando las definiciones precedentes diremos que una aplicación φ: $J \longrightarrow X$ es una curva integral de A si vale $\varphi'(t) = A(\varphi(t))$ para todo $t \in J$.

OBSERVACIONES 1.2. a) Si $\varphi: J \longrightarrow X$ es una curva integral del campo A y $t_0 \in \mathbf{R}$ entonces es evidente que $\psi: J+t_0 \longrightarrow X$ definida por $\psi(t) = \varphi(t-t_0)$ también es una curva integral de A.

b) Si A es un campo vectorial de clase C^k $(k \geqslant 1)$ en X, dados $x_0 \in X$ y $t_0 \in \mathbf{R}$, existe un intervalo J en $\mathbf{R}$ con $t_0 \in J$ y una única curva integral $\varphi: J \longrightarrow X$ de A que verifica $\varphi(t_0) = x_0$, de clase C^{k+1}.

PRUEBA. Consideramos un mapa (u,U,E) en x_0 con lo cual resulta una ecuación diferencial en $\Omega = u(U)$, (ver diagrama (1)) con $su(x) = T(u)(A(x)) = (u(x), T_x(u)(A(x)))$, así que $s(y) = (y, f(y))$ para $y \in \Omega$ con $f: \Omega \longrightarrow E$ de clase C^k. Entonces hay un intervalo J con $t_0 \in J$ y una única $\beta: J \longrightarrow \Omega$ tal que $\beta(t_0) = u(x_0)$ y $\beta'(t) = f\beta(t)$ (teorema 1) y la tesis resulta haciendo $\varphi = u^{-1}\beta$.

$$\begin{tikzcd} T(U) \arrow[r, "T(u)"] \arrow[d, shift right, "p"'] & U \times E \arrow[d, shift right] \\ U \arrow[u, dashed, shift right, "A"'] \arrow[r, "u"] & \Omega \arrow[u, dashed, shift right, "s"'] \end{tikzcd}$$

(1)

c) Si $\varphi_1: J_1 \longrightarrow X$ y $\varphi_2: J_2 \longrightarrow X$ son dos curvas integrales de un mismo campo vectorial A y $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ para un cierto $t_0 \in J_1 \cap J_2$, entonces $\varphi_1|J_1 \cap J_2 = \varphi_2|J_1 \cap J_2$.

PRUEBA. Sea $P = \{t \in J_1 \cap J_2 : \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\} \subset J_1 \cap J_2$; ciertamente $t_0 \in P$ y P es cerrado en $J_1 \cap J_2$.

Ahora sea $t' \in P$ y sea J un intervalo con $0 \in J$ y $t'+J \subset J_1 \cap J_2$; consideremos $\psi_i(t) = \varphi_i(t+t')$, $i=1,2$. Ambas son curvas integrales de A (cf.a)), definidas en J y $\psi_1(0) = \psi_2(0)$. Por la unicidad asegurada en b) deberá ser $\psi_1|J_0 = \psi_2|J_0$ para algún intervalo abierto J_0 con $0 \in J_0$.

Por lo tanto $\varphi_1|t'+J_0 = \varphi_2|t'+J_0$ así que $t'+J_0 \subset P$, lo que prueba que P es abierto. Como $J_1 \cap J_2$ es conexo, concluímos.

Veamos ahora que las curvas integrales dependen bien de los "datos iniciales"; más general:

TEOREMA 1.3. Sea A un campo vectorial en X, de clase C^k $(k \geqslant 1)$. Existen entonces un conjunto abierto $D(A) \subset \mathbf{R} \times X$ y una aplicación $\alpha: D(A) \longrightarrow X$ de clase C^k tales que para cada $x \in X$, $t \longrightarrow \alpha(t,x)$ es de clase C^{k+1} y :

i) $\{0\} \times X \subset D(A)$, $\alpha(0,x) = x$ para todo $x \in X$.

ii) $\alpha'(t,x) = A(\alpha(t,x))$ para todo $(t,x) \in D(A)$ (así que cada $t \longrightarrow \alpha_x(t) = \alpha(t,x)$ es una curva integral de A que en 0 vale x).

iii) Si φ: $J \longrightarrow X$ es una curva integral de A con $0 \in J$ y $\varphi(0) = x$, necesariamente es $\{x\}xJ \subset D(A)$ y $\varphi(t) = \alpha(t,x)$ para todo $t \in J$ (así que $t \longrightarrow \alpha(t,x)$ es la curva integral "máxima" que en 0 vale x).

iv) Si $(t_0,x) \in D(A)$ y $(t+t_0,x) \in D(A)$ entonces es $(t,\alpha(t_0,x)) \in A$ y vale $\alpha(t,\alpha(t_0,x)) = \alpha(t+t_0,x)$.

DEMOSTRACION. Como en 1.2 b) (con $t_0 = 0$) vemos que para cada $x \in X$ hay un intervalo $J \subset R$ con $0 \in J$ y una (única de dominio J) curva integral φ: $J \longrightarrow X$ de A tal que $\varphi(0) = x$, φ de clase C^{k+1}.

Dado $x \in X$ consideramos entonces $C(x) = \{(\varphi,J)$: J es intervalo en R , $0 \in J$, φ: $J \longrightarrow X$ es curva integral de A con $\varphi(0) = x\}$; por lo anterior es $C(x) \neq \emptyset$ y por 1.2 b) resulta que

$$(\varphi_1,J_1) \in C(x) \ , \ (\varphi_2,J_2) \in C(x) \Rightarrow \varphi_1|J_1 \cap J_2 = \varphi_2|J_1 \cap J_2$$

Es claro entonces - ordenando $C(x)$ de manera evidente - que hay un elemento *máximo* de $C(x)$, que denotaremos $(\alpha_x,J(x))$; ponemos

$$D(A) = \bigcup_{x\in X} (J(x)\times\{x\}) = \{(t,x): t \in J(x)\}$$

y $\alpha(t,x) = \alpha_x(t)$.

Entonces i) ii) son inmediatas, y iii) es fácil. Veamos que vale iv); para ello probamos primero:

$$t_o \in J(x) \Rightarrow J(x) - t_0 = J(\alpha(t_0,x))$$

Si β: $J(x)-t_0 \longrightarrow X$ es $\beta(t) = \alpha(t+t_0,x)$, β es una curva integral y $\beta(0) = \alpha(t_0,x)$ luego por iii) debe ser $J(x)-t_0 \subset J(\alpha(t_0,x))$ y $\beta(t) = \alpha(t,\alpha(t_0,x))$ si $t \in J(x)-t_0$.

Pero por otro lado si γ: $J(\alpha(t_0,x))+t_0 \longrightarrow X$ es $\gamma(t) = \alpha(t+t_0,\alpha(t_0,x))$ resulta que γ es una curva integral y $\gamma(t_0) = \alpha(t_0,x)$, así que por 1.2 b) γ y α_x coinciden sobre $J(x) \cap (J(\alpha(t_0,x))+t_0) = J(x)$.

Esto prueba lo afirmado y como además $(\alpha_x,J(x))$ es máximo en $C(x)$ resulta que $J(x) = J(\alpha(t_0,x))+t_0$ y $\gamma = \alpha_x$.

Sólo falta demostrar que D(A) es abierto y que α es C^k.

Definamos para cada $x \in X$

$$J(x) = (w^-(x),w^+(x)) \qquad (2)$$

así que

$$D(A) = \{(t,x) : w^-(x) < t < w^+(x)\} \qquad (3)$$

donde w^+: $X \longrightarrow R^+ \cup \{\infty\}$ y w^-: $X \longrightarrow R^- \cup \{-\infty\}$.

Manipulando localmente como en 1.2 b), pero usando 1.1 b) resulta: para cada $x_0 \in X$ hay un entorno U_0 de x_0 y un intervalo J_{x_0} que contiene a 0, y una ψ: $J_{x_0} x U_0 \longrightarrow X$ de clase C^k con $\psi(0,x) = x$ si $x \in U_0$ y $\psi'(t,x) = A\psi(t,x)$ si $(t,x) \in J_{x_0} x U_0$. Forzosamente debe ser $J_{x_0} \subset J(x)$ para todo $x \in U_0$ y $\psi = \alpha| J_{x_0} x U_0$; por consiguiente $J_{x_0} x U_0 \subset D(A)$ y α es C^k en $J_{x_0} x U_0$.

Entonces es claro que $W = \bigcup_{x_0} J_{x_0} x U_{x_0}$ es un entorno abierto de $\{0\} x X$, contenido en $D(A)$ y que $\alpha|W$ es C^k.

Ahora si $x_0 \in X$, definimos $S(x_0) \subset R$ mediante: $t \in S(x_0)$ significa:

1°) $t > 0$ y $t \in J(x_0)$.

2°) Existe un intervalo abierto H, un entorno U de x_0 tales que $0 \in H$ y

$$H \times U \subset D(A) \qquad \alpha|H \times U \text{ es } C^k.$$

Por lo anterior es $S(x_0) \neq \emptyset$; además $S(x_0) \subset J(x_0)$ y si $0 < t_1 < t_2$, $t_2 \in S(x_0)$ entonces también $t_1 \in S(x_0)$.

Por consiguiente $S(x_0)$ es un intervalo $(0,a)$ o bien $(0,a]$ con $a = \sup S(x_0)$. Afirmamos que $a = w^+(x_0)$.

De lo contrario tendríamos $0 < a < w^+(x_0)$, luego $a \in J(x_0)$; por consiguiente hay un entorno U_0 de $\alpha(a,x_0)$, un intervalo J_0 que contiene a a y una ψ: $J_0 x U_0 \longrightarrow X$ de clase C^k con $\psi(a,x) = x$, $\psi'(t,x) = A\psi(t,x)$ si $(t,x) \in J_0 x U_0$ (todo esto usando 1.1 b) localmente).

Como $\{t: \alpha(t,x_0) \in U_0\} \cap J_0$ es entorno abierto de a resulta que hay un $t_0 \in J(x_0)$ con

$$t_0 \in J(x_0) \qquad \alpha(t_0,x_0) \in U_0 \qquad t_0 \in S(x_0).$$

Por lo tanto existirá un intervalo abierto H con $0 \in H$, $t_0 \in H$ y un entorno abierto U de x_0 con $H x U \subset D(A)$, $\alpha|H x U$ de clase C^k.

Si $V = \{x \in U: \alpha(t_0,x) \in U_0\}$, V es entorno abierto de x_0, $V \subset U$; definimos β: $(H \cup J_0) x V \longrightarrow X$ por

$$\beta(t,x) = \begin{cases} \alpha(t,x) & (t,x) \in H \times V \\ \psi(t+a-t_0,\alpha(t_0,x)) & (t,x) \in J_0 \times V. \end{cases}$$

Nótese que $(t+a-t_0,\alpha(t_0,x)) \in J_0 x U_0$ si $(t,x) \in J_0 x V$; además si $x \in V$, $t \longrightarrow \alpha(t,x)$ y $t \longrightarrow \psi(t+a-t_0,\alpha(t_0,x))$ son curvas integrales de A que coinciden en t_0, luego coinciden en $J_0 \cap H$.

Claramente β es de clase C^k y si $x \in V$, $t \longrightarrow \beta(t,x)$ es una curva integral de A que manda 0 en x; por consiguiente $H \cup J_0 \subset J(x)$ si $x \in V$.

Además $t \longrightarrow \beta(t,x)$ coincide con α_x sobre $H \cup J_0$ si $x \in V$. Resulta así que $(H \cup J_0) \times V \subset D(A)$ y $\alpha|(H \cup J_0)\times V$ es C^k, lo que evidentemente es absurdo ya que daría $H \cup J_0 \subset S(x_0)$, $a \in J_0$.

Vemos entonces que $a = \sup S(x_0) = w^+(x_0)$ y por lo tanto $S(x_0) = J(x_0) \cap \mathbf{R}^+$ para todo $x_0 \in X$; así que

$$\{(t,x) \ : \ 0 < t < w^+(x)\} = D^+(A)$$

es abierto en $\mathbf{R}\times X$, y α $D^+(A)$ es C^k.

Análogamente se ve que $D^-(A) = \{(t,x): w^-(x) < t < 0\}$ es abierto y que $\alpha|D^-(A)$ es C^k. Juntando esto con W resulta la tesis.

OBSERVACIONES 1.4. a) La aplicación α: $D(A) \longrightarrow X$ dada por 1.3 se denomina el *flujo* asociado al campo vectorial A.

b) De 1.3 resulta que w^+ (resp: w^-) es una función semicontinua inferiormente (resp: superiormente).

c) Supongamos que $Y \subset X$ es una subvariedad cerrada y que A es un campo vectorial en X tal que $A(y) \in T_y(Y)$ para cada $y \in Y$. Entonces si $y_0 \in Y$ es $\alpha(t,y_0) \in Y$ para todo $y \in J(y_0)$.

PRUEBA. Sea $P(y_0) = \{t \in J(y_0): \alpha(t,y_0) \in Y\}$; claramente $0 \in P(y_0)$ y $P(y_0)$ es cerrado en $J(y_0)$. Veamos que es abierto: si $B = A|Y$, B es un campo vectorial en Y y la teoría precedente nos da una curva integral máxima β: $J'(y_0) \longrightarrow Y$ de B con $\beta(0) = y_0$.

Es evidente que $J'(y_0) \subset J(y_0)$ y que $\beta = \alpha_{y_0}$ $J'(y_0)$, y por lo tanto $J'(y_0) \subset P(y_0)$.

Finalmente si $t_1 \in P(y_0)$ y V es entorno de 0 en R con $V \subset J'(y_0)$, $t_1+V \subset J(y_0)$ y definimos γ: $V \longrightarrow X$ por $\gamma(t) = \alpha_{y_0}(t+t_1)$ vemos que γ es curva integral de A y $\gamma(0) = \alpha_{y_0}(t_1) = y_1 \in Y$. Por lo probado antes hay un entorno W de 0 con $W \subset P(y_1)$ de manera que $\gamma(W) \subset Y$ y por lo tanto $t_1+W \subset P(y_0)$, y $P(y_0)$ es abierto.

d) Como caso particular de c) resulta que si $A(x_0) = 0$, la curva integral α_{x_0} es constante (y por lo tanto $J(x_0) = \mathbf{R}$).

Basta hacer $Y = \{x_0\}$ en c).

Los puntos $x_0 \in X$ para los cuales $A(x_0) = 0$ se denominan "*puntos estacionarios*" y corresponden a "puntos de equilibrio" (inmóviles).

Veamos ahora como el desplazamiento a lo largo del tiempo constituye una transformación en la variedad; definimos para ello

$$D_t(A) = \{x: t \in J(x)\}$$

subconjunto abierto de X y α_t: $D_t(A) \longrightarrow X$ es $\alpha_t(x) = \alpha(t,x)$ (convenimos en que $\alpha_t = \emptyset$ si $D_t(A) = \emptyset$).

Claramente si $x \in X$ hay un entorno U de x y un $\varepsilon > 0$ tal que $U \subset D_t(A)$ para todo $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Por otro lado se tiene $\bigcup_{t>0} D_t(A) = X$ y $D_t(A) \subset D_s(A)$ si $0 < s < t$ o si $t < s < 0$.

Notemos que α_t: $D_t(A) \longrightarrow D_{-t}(A)$ es un difeomorfismo (de clase C^k si A es de clase C^k, 1.3) con inversa α_{-t}.

En general $\alpha_s\ \alpha_t$ no está definido en todo $D_t(A)$. Pero de 1.3 iv) resulta que

$$\mathrm{dom}(\alpha_s\ \alpha_t) = \alpha_t^{-1}(D_s(A)) = D_t(A) \cap D_{t+s}(A)$$

y en tal conjunto vale $\alpha_s\alpha_t = \alpha_{s+t}$. Por consiguiente $\mathrm{dom}(\alpha_s\alpha_t) = D_{t+s}(A)$ si t y s tienen igual signo.

Los diversos α_t forman una suerte de "homomorfismo" $t \longrightarrow \alpha_t$ (de R En el grupo de difeomorfismos de X), no siendo esto muy exacto en general ya que $\mathrm{dom}(\alpha_t) \neq X$ puede ocurrir para ciertos $t \in R$.

Diremos que el campo vectorial A es *completo* si $D(A) = R\times X$ (o lo que es igual: $D_t(A) = X$ para todo $t \in R$, esto es $J(x) = R$ para todo $x \in X$).

OBSERVACIONES 1.6. a) Si A es completo la aplicación $t \longrightarrow \alpha_t$ es un homomorfismo del grupo aditivo R en el grupo $\mathrm{Dif}^k(X)$ de los C^k-difeomorfismos de X; se lo denomina "grupo uniparamétrico asociado al campo A".

b) No todo campo vectorial es completo, como se ve en el sencillo ejemplo en que $X = R^2-\{0\}$ y $A(x_1,x_2) = ((x_1,x_2),(1,0))$, cuyas curvas integrales son las rectas $t \longrightarrow (t+a_1,a_2)$.

Veamos un criterio sencillo para estudiar esta cuestión; por de pronto para todo subconjunto $M \subset X$ definimos

$$\delta^+(M) = \inf\{w^+(x): x \in M\}$$

$$\delta^-(M) = \sup\{w^-(x): x \in M\}.$$

LEMA 1.7. Con las notaciones anteriores, si $M \subset X$ y $\alpha(J(x_0)\times\{x_0\}) \cap M \neq \emptyset$, es:

i) $w^+(x_0) \geqslant \sup\{t \in J(x_0): \alpha(t,x_0) \in M\} + \delta^+(M)$.

ii) $w^-(x_0) \leqslant \inf\{t \in J(x_0): \alpha(t,x_0) \in M\} + \delta^-(M)$.

DEMOSTRACION. Sea $H = \{t \in J(x_0): \alpha(t,x_0) \in M\}$; $H \neq \emptyset$ por hipótesis e $\inf\{w^+(\alpha(t,x_0)): t \in H\} \geq \inf\{w^+(x): x \in M\} = \delta^+(M)$.

Pero $w^+(\alpha(t,x_0)) = w^+(x_0)-t$, y de esto i) resulta fácilmente.

Análogamente para ii).

COROLARIO 1.8. Sea $M \subset X$ y sea $x_0 \in X$; se supone que $\alpha(J(x_0)\times\{x_0\}) \cap M \neq \emptyset$. Entonces si $\delta^+(M) > 0$ se tiene:

$$\alpha(t,x_0) \notin M \quad \text{para todo} \quad t \in J(x_0) \quad \text{con} \quad t > w^+(x_0)-\delta^+(M).$$

Análogamente si $\delta^-(M) < 0$.

COROLARIO 1.9. Si A es un campo vectorial de soporte compacto, A es completo. En particular si X es compacta todo campo vectorial en X es completo.

DEMOSTRACION. Sea $M = \mathrm{sop}(A) = \{x: A(x) \neq 0\}^-$. Ciertamente es $J(x) = \mathbf{R}$ si $x \notin M$ (1.4 d)), veamos que lo mismo ocurre si $x \in M$.

Si fuera por ejemplo $x_0 \in M$ y $w^+(x_0) < \infty$, como $\delta^+(M) > 0$ (ya que D(A) es abierto y contiene a $\{0\}\times M$) tendremos $\alpha(t_1,x_0) \notin M$ para un $t_1 \in (w^+(x_0) - \delta^+(M), w^+(x_0))$ por 1.8. Por lo anterior será entonces $w^+(\alpha(t_1,x_0)) = \infty$, así que $w^+(x_0) - t_1 = +\infty$, dando un absurdo.

Del mismo modo se prueba que $w^-(x_0) = -\infty$ si $x_0 \in M$.

COMPLEMENTO 1.10 DEPENDENCIA DE PARAMETROS.

Si X y L son variedades, una aplicación de clase C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ $A: X\times L \longrightarrow T(X)$ tal que $A(x,\lambda) = A_\lambda(x) \in T_x(X)$ para cada $\lambda \in L$ (y $x \in X$) se denomina un campo vectorial que depende de la variedad de "parámetros L" y puede interpretarse como una familia A_λ $(\lambda \in L)$ de campos vectoriales en X de clase C^k que depende en forma C^k de λ.

La teoría de estos entes se reduce a la precedente por medio del siguiente artificio: se considera el campo vectorial $B \in \Gamma^k(T(X\times L))$ definido por $B(x,\lambda) = (A(x,\lambda),0) \in T_x(X)\times T_\lambda(L) = T_{(x,\lambda)}(X\times L)$ para cada $(x,\lambda) \in X\times L$.

Si $\beta: D(B) \longrightarrow X\times L$ es su flujo, será $\beta(t,x,\lambda) = (\beta_1(t,x,\lambda),\beta_2(t,x,\lambda))$ para cada $(t,x,\lambda) \in D(B)$ y se ve enseguida que debe ser $\beta_2(t,x,\lambda) = \lambda$ para todo $(t,x,\lambda) \in D(B)$.

Por consiguiente si llamamos $\alpha = \beta_1$ resulta que el "flujo" de A es una aplicación $\alpha: D(B) \longrightarrow X$ de clase C^k, donde $D(B) \subset \mathbf{R}\times X\times L$ es un abierto que contiene a $\{0\}\times X\times L$; para cada $\lambda \in L$ la aplicación $(t,x) \longrightarrow \alpha(t,x,\lambda)$ es el flujo del campo vectorial A_λ en X.

EJERCICIOS 1.11. 1) Se considera el campo vectorial $x \longrightarrow A(x) = (x,x^2)$ sobre $X = \mathbf{R}$.

i) $J(x) = (-\infty, 1/x)$ si $x > 0$, $J(0) = \mathbf{R}$ y $J(x) = (1/x,\infty)$ si $x < 0$.

ii) El flujo α de A es $\alpha(t,x) = \frac{x}{1-tx}$; describir D(A).

2) Sea A un campo vectorial de clase C^k $(k \geqslant 1)$ en una variedad X y sea $\alpha\colon D(A) \longrightarrow X$ su flujo; si $f_A\colon D(A) \longrightarrow RxX$ es definida por $f_A(t,x) = (t,\alpha(t,x))$, probar que f_A es un C^k-difeomorfismo de D(A) sobre D(-A), con $f_A|\{0\}xX = 1_{\{0\}xX}$. (Sug: la inversa es f_{-A}).

3) Sea $x \longrightarrow A(x) = (x,f(x))$ el campo vectorial en R^2 definido por $f(x) = (ax_1-bx_2, ax_2+bx_1)$, donde $a^2+b^2 = 1$.

i) A es completo y su flujo es $\alpha(t,x) = e^{at}(x_1 \cos bt - x_2 \operatorname{sen} bt \;,\; x_1 \operatorname{sen} bt + x_2 \cos bt)$.

ii) Describir las curvas integrales para los diversos valores $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ (ó $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$, etc).

4) Sea $\lambda\colon \mathbf{R} \longrightarrow [0,1]$ de clase C^∞ tal que $\lambda(0) = 1$, $\lambda(t) > 0$ si $0 < t < 1$ y $\lambda(t) = 0$ si $|t| \geqslant 1$. Si φ es la curva integral máxima del campo vectorial $x \longrightarrow (x,\lambda(x))$ tal que $\varphi(0) = 0$, probar:

i) $\operatorname{dom}(\varphi) = \mathbf{R}$ (cf.1.9).

ii) $\varphi\colon \mathbf{R} \longrightarrow (-1,1)$ es un difeomorfismo.

(Sug: considerar $\psi\colon (-1,1) \longrightarrow R$ dada por

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{d\xi}{\lambda(\xi)}$$

y verificar que $\varphi = \psi^{-1}$).

5) Sea $\alpha\colon D(A) \longrightarrow X$ el flujo de un campo vectorial A de clase C^k $(k \geqslant 1)$ en una variedad X; se supone que la "trayectoria" $\alpha(J(x_0)\times\{x_0\})$ de un cierto $x_0 \in X$ es relativamente compacta.

Probar que $J(x_0) = R$ (Sug: aplicar 1.8 a $M = \alpha(J(x_0)\times\{x_0\})$).

Deducir una nueva prueba de 1.9.

6) Sea $\alpha\colon D(A) \longrightarrow X$ como en el ejercicio anterior; se supone ahora que $J(x_0) = \mathbf{R}$ para un cierto $x_0 \in X$.

Sea $G_{x_0} = \{t \in \mathbb{R}: \alpha(t,x_0) = x_0\}$; G es un subgrupo del grupo aditivo $\mathbb{R}$. Si $\alpha(t_1,x_0) = x_1$ entonces $G_{x_1} = G_{x_0}$.

i) $G_{x_0} = \mathbb{R}$ si y sólo si x_0 es un punto estacionario de A.

ii) $G_{x_0} = \{0\}$ si y sólo si $t \longrightarrow \alpha(t,x_0)$ es una inmersión inyectiva de $\mathbb{R}$ en X.

iii) Si $G_{x_0} = Z.\tau$, $\tau \neq 0$ ("solución periódica, de período τ"), $\alpha_{x_0}(\mathbb{R})$ es una subvariedad compacta de X, difeomorfa a S^1.

7) Sea Ω un entorno abierto de 0 en un espacio de Banach E, sea $f: \Omega \longrightarrow E$ de clase C^k $(k \geqslant 1)$ con $f(0) = a \neq 0$. Sea $H \subset E$ un hiperplano cerrado tal que $a \notin H$. Probar que existen entornos Ω_0 y Ω_1 de 0 y un C^k-difeomorfismo $\zeta: \Omega_0 \longrightarrow \Omega_1$ tal que $\zeta(0) = 0$, $\zeta(x) = x$ si $x \in H \cap \Omega_0$ y $D\zeta(x)(f(x)) = a$ para todo $x \in \Omega_0$.

(Sug: Sea $h \in E^*$ con $h(a) = 1$, $h^{-1}(0) = H$ y sea α el flujo del campo vectorial $x \longrightarrow (x,f(x))$; poner $u(x) = \alpha(h(x),x-h(x).a)$ y verificar que $Du(x)(a) = fu(x)$, $Du(x)(v) = v$ si $v \in H$. Deducir que $Du(0) = 1_E$ y tomar $\zeta = u^{-1}$ con 4.7 del cap.II).

8) Sea A un campo vectorial de clase C^k $(k \geqslant 1)$ en una variedad X (de modelo E) y sea $x_0 \in X$ con $A(x_0) \neq 0$. Sea $b \neq 0$ en E.

Probar que existe un mapa centrado en x_0, (u,U,E) de clase C^k tal que $T_x(u)(A(x)) = (u(x),b)$ para todo $x \in U$ (ver diagrama).

(O sea, A se representa localmente como un campo constante).

(Sug: usar el ejercicio anterior).

$$\begin{tikzcd}
T(U) \arrow[r, "T(u)"] \arrow[d, "p"] & \Omega \times E \arrow[d] \\
U \arrow[r, "u"] \arrow[u, bend left, "A"] & \Omega \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

§ 2 - ALGEBRA DE LIE DE CAMPOS VECTORIALES ([17]).

Supongamos que X es una variedad diferenciable y que A es un campo vectorial en X, de clase C^k $(k \geqslant 1)$. Si $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación de clase C^k y $x \in X$, la función $t \longrightarrow f\alpha(t,x)$ está definida en un entorno de 0 y es de clase C^k. Su derivada en $t=0$ representa "a la derivada de f en x según la dirección de la curva integral $t \longrightarrow \alpha(t,x)$" y se indica

$$\mathcal{L}_A(f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f\alpha(t,x) - f(x)}{t} \qquad (1)$$

Esta misma fórmula muestra que $x \longrightarrow \mathcal{L}_A(f)(x)$ es una aplicación de clase C^{k-1}; decimos que $\mathcal{L}_A(f)$ es la *derivada de Lie* de f según la dirección del campo A, y dejamos como ejercicio el verificar que

$$\mathcal{L}_A : C^k(X,R) \longrightarrow C^{k-1}(X,R) \qquad (2)$$

es R-lineal.

Por otra parte de la definición sigue que

$$\mathcal{L}_A(f)(x) = T_x(f)\ (A(x)) \qquad (3)$$

(puesto que $\alpha'(t,x) = A\alpha(t,x)$). Esto muestra que si $k=\infty$, $\mathcal{L}_A(f)$ no es otra cosa que la derivación $\theta_A(f)$ definida en §5 del cap.IV.

Por otro lado sabemos que el $C^\infty(X)$-módulo $Der(C^\infty(X))$ es un álgebra de Lie vía $[D_1,D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ (ver ejercicio 5 de 5.10, cap.IV). Nos proponemos definir una estructura de álgebra de Lie para el $C^\infty(X)$-módulo de los campos vectoriales C^∞ sobre X, de tal manera que la aplicación

$$\theta : \Gamma^\infty(\tau(X)) \longrightarrow Der\ C^\infty(X) \qquad (4)$$

resulte un homomorfismo de álgebras de Lie.

A tal efecto consideramos dos campos vectoriales C^∞ en X, A y B y sean $\alpha: D(A) \longrightarrow X$, $\beta: D(B) \longrightarrow X$ sus respectivos flujos.

En un entorno abierto $\mathcal{E}$ de $\{0\}x\{0\}xX$ en RxRxX está definida la aplicación $q_A^B: \mathcal{E} \longrightarrow X$ de clase C^∞ dada por

$$q_A^B(t,s,x) = \alpha(-t,\beta(s,\alpha(t,x))$$

Derivando en s=0 nos queda una aplicación G_A^B definida en un entorno de $\{0\}xX$ en RxX, de clase C^∞ y con valores en T(X):

$G_A^B(t,x) = \frac{d}{ds}\, q(t,s,x)\,|_{s=0}$. Se tiene

$$G_A^B(t,x) = T_{\alpha(t,x)}(\alpha_{-t})(B\alpha(t,x)) \qquad (5)$$

Nótese que $G_A^B(t,x) \in T_x(X)$ para todo t, así que $G_A^B(0,x)'$ = derivada en t=0 de G_A^B resulta un campo vectorial C^∞ en X.

Definimos entonces

$$[A,B](x) = \frac{d}{dt}\ G_A^B(t,x)\,|_{t=0}$$

vale decir

$$[A,B](x) = \lim_{t\to 0} \frac{T_{\alpha(t,x)}(\alpha_{-t})(B\alpha(t,x))-B(x)}{t} \qquad (6)$$

Veamos como se ve esto usando coordenadas; supongamos que $x_0 \in X$ y que (u,U,E) es un mapa en x_0. Obtenemos dos campos vectoriales sobre $\Omega = u(U)$, indicados s_a y s_b: dados por

$$T_x(u)(A(x)) = s_a(u(x)) = (u(x),au(x))$$

$$T_x(u)(B(x)) = s_b(u(x)) = (u(x),bu(x))$$

$$\begin{tikzcd} T(U) \arrow[r, "T(u)"] \arrow[d] & \Omega\times E \arrow[d] \\ U \arrow[u, bend left=60, "A"] \arrow[u, bend left, "B"'] \arrow[r, "u"'] & \Omega \arrow[u, bend right=60, "s_a"'] \arrow[u, bend right, "s_b"] \end{tikzcd}$$

para sendas aplicaciones $a,b\colon \Omega \longrightarrow E$ de clase C^∞. Ahora sea γ la aplicación de clase C^∞ definida en un entorno de $\{0\}\times\Omega$ en $R\times\Omega$ dada por $\gamma(t,y) = \alpha(t,u^{-1}(y))$; ciertamente cada $t \longrightarrow \gamma(t,y)$ es una curva integral del campo s_a así que $\gamma'(t,y) = a\gamma(t,y)$ para todo t,y. (y $\gamma(0,y) = y$ para todo $y \in \Omega$).

En particular diferenciando γ respecto de la segunda variable obtendremos las ecuaciones

$$(7) \quad \begin{cases} D_2\gamma'(t,y) = Da(\gamma(t,y))(D_2\gamma(t,y)) \\ D_2\gamma(0,y) = 1_E \end{cases}$$

Definamos asimismo $g_a^b(t,y) = G_A^B(t,u^{-1}(y))$; claramente

$$T_x(u)([A,B](x)) = g_a^{b\prime}(0,u(x))$$

de modo que debemos calcular la derivada en $t=0$ de g_a^b. Pero siendo

$$T_x(\alpha_t)(G_A^B(t,x)) = B\alpha(t,x)$$

deducimos que

$$D_2\gamma(t,y)(g_a^b(t,y)) = b\gamma(t,y) \qquad (8)$$

para todo t,y; de manera que (derivando (8) en t, operación indicada con $'$) obtenemos

$$D_2\gamma'(t,y)(g_a^b(t,y)) + D_2\gamma(t,y)(g_a^{b\prime}(t,y)) = b\gamma(t,y)'$$

Haciendo $t=0$ y usando (7) resulta

$$Da(y)(b(y)) + g_a^{b\prime}(0,y) = Db(y)(a(y))$$

Por consiguiente

$$T_x(u)([A,B](x)) = Db(u(x))(au(x)) - Da(u(x))(bu(x)) \qquad (9)$$

para todo $x \in U$.

OBSERVACIONES 2.1. a) Utilizando la expresión local (9) es fácil probar que $\Gamma^\infty(\tau(X))$ es un álgebra de Lie; en particular la "identidad de Jacobi":

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

b) Cuando X es un abierto en un espacio de Banach E, las consideraciones anteriores muestran que dados dos campos vectoriales s_a, s_b en X, con $s_a(x) = (x,a(x))$ y $s_b(x) = (x,b(x))$ para sendas $a,b: X \longrightarrow E$ de clase C^∞ entonces $[s_a,s_b] = s_c$ con

$$c(x) = Db(x)(a(x)) - Da(x)(b(x)) \qquad (10)$$

para todo $x \in X$.

En particular si $E = R^n$, con la notación de 5.8 resulta

$$[\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j}] = 0 \qquad (1 \leqslant i,j \leqslant n)$$

c) De cualquier manera usando la expresión local (9) es fácil ver que la aplicación $C^\infty(X)$-lineal (4) es un homomorfismo de R-álgebras de Lie, es decir

$$\theta_{[A,B]}(f) = \theta_A(\theta_B(f)) - \theta_B(\theta_A(f))$$

para toda $f: X \longrightarrow R$ de clase C^∞.

d) Del mismo modo se ve que si A,B son campos vectoriales C^∞ en X y si $\varphi \in C^\infty(X)$ entonces

$$[A,\varphi.B] = \theta_A(\varphi).B + \varphi.[A,B] \qquad (11)$$

(En particular vemos que [,] *no* es $C^\infty(X)$-bilineal).

El siguiente resultado es importante (ver 5.9 de cap. IV):

PROPOSICION 2.2. Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación C^∞ entre variedades y sean A,A_1 (resp: B,B_1) campos vectoriales C^∞ en X (resp: Y) tales que $f_*(A) = B$, $f_*(A_1) = B_1$; entonces $f_*([A,A_1]) = [B,B_1]$.

DEMOSTRACION. Aunque una prueba usando (9) es posible, veamos como podemos probar esto usando directamente la definición de [,] : sea $x_0 \in X$ y sea $y_0 = f(x_0)$.

Sean α y β los respectivos flujos de A y B y consideremos la curva $\gamma: J(x_0) \longrightarrow Y$ definida por $\gamma(t) = f\alpha(t,x_0)$; claramente $\gamma(0) = y_0$ y $\gamma'(t) = T_{\alpha(t,x_0)}(f)(A\alpha(t,x_0)) = Bf\alpha(t,x_0) = B\gamma(t)$ así que γ es una curva integral de B que pasa por y_0. Se deduce que $J(x_0)$ es un subintervalo del intervalo de definición de $t \longrightarrow \beta(t,y_0)$ y que $f\alpha(t,x_0) = \beta(t,y_0)$ si $t \in J(x_0)$.

Como esto vale para todo $x \in X$ resulta

$$f\alpha(t,x) = \beta(t,f(x)) \quad \text{si} \quad (t,x) \in D(A)$$

Ahora $[B,B_1](f(x))$ es la derivada en $t=0$ de $t \longrightarrow G_B^{B_1}(t,f(x))$ y como $f\alpha_{-t} = \beta_{-t}\, f$ resulta

$$G_B^{B_1}(t,f(x)) = T_{\beta(t,f(x))}(\beta_{-t})(B_1\beta(t,f(x))) = T_{f\alpha(t,x)}(\beta_{-t})(B_1\beta(t,f(x))) =$$

$$= T_{f\alpha(t,x)}(\beta_{-t})(B_1(f(\alpha(t,x))) =$$

$$= T_{f\alpha(t,x)}(\beta_{-t})T_{\alpha(t,x)}(f)(A_1\alpha(t,x)) =$$

$$= T_{\alpha(t,x)}(\beta_{-t}f)(A_1\alpha(t,x)) = T_{\alpha(t,x)}(f\alpha_{-t})(A_1\alpha(t,x)) =$$

$$= T_x(f)T_{\alpha(t,x)}(\alpha_{-t})(A_1\alpha(t,x)) = T_x(f)(G_A^{A_1}(t,x))$$

Como $T_x(f)\colon T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$ es lineal continua sigue que

$$[B,B_1](f(x)) = T_x(f)([A,A_1](x))$$

como se quería probar.

COROLARIO 2.3. Si $Y \subset X$ es una subvariedad, y sean A,B campos vectoriales C^∞ en X tales que $A(y) \in T_y(Y)$, $B(y) \in T_y(Y)$ para todo $y \in Y$.
Entonces $[A,B]|Y = [A|Y,B|Y]$.

DEMOSTRACION. Pues si $j\colon Y \longrightarrow X$ es la inclusión, es $j_*(A|Y) = A$ y $j_*(B|Y) = B$.

EJERCICIOS 2.4. 1) Calcular $[A,B]$, donde A y B son los campos vectoriales definidos en $R^3-\{0\}$ por $A(x) = (x,a(x))$ y $B(x) = (x,b(x))$ con
$a(x) = (x_1,-x_2,x_3)$, $b(x) = (1/|x|,-x_3,x_2)$.

2) Si A,B son campos vectoriales en una variedad X y $\varphi \in C^\infty(X)$, demostrar la fórmula (11) usando la definición de $[\ ,\ ]$.

3) Sean A,B campos vectoriales en una variedad X y sean $\varphi\colon X \longrightarrow R$, $\psi\colon X \longrightarrow R$ de clase C^∞. Probar la fórmula.

$$[\psi A,\varphi.B] = \psi.\theta_A(\varphi).B - \varphi.\theta_B(\psi).A + \psi.\varphi.[A,B]$$

(Sug: ejercicio anterior).

4) Sean A,B campos vectoriales en R^n definidos por $A = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial t_i}$,

$B = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial t_j}$ (cf.5.8). Probar que

$$[A,B] = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial b_j}{\partial t_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial t_i} \right) \frac{\partial}{\partial t_j}$$

(Sug: ejercicio anterior).

5) Sean A y B campos vectoriales en una variedad X; si G_A^B es definida por la fórmula (5), probar:

i) Si $x \in X$ y $t \in J(x)$, $t+s \in J(x)$ entonces

$$G_A^B(s,\alpha(t,x)) = T_x(\alpha_t)(G_A^B(t+s,x))$$

(Sug: usar la propiedad de "grupo" 1.3 iv) de los α_t).

ii) Deducir de i) que para todo $(t,x) \in D(A)$ es

$$T_x(\alpha_t)(G_A^{B\prime}(t,x)) = [A,B](\alpha(t,x))$$

6) Si A y B son campos vectoriales en una variedad X, con flujos respectivos α y β probar que son equivalentes:

i) $[A,B] = 0$

ii) Para todo $x \in X$ es $\alpha(t,\beta(t,x)) = \beta(t,\alpha(t,x))$ cada vez que ambos miembros están definidos.

iii) $\alpha_t\beta_s = \beta_s\alpha_t$ para todo t,s para los cuales están definidos ambos miembros.

(Sug: Usar la parte ii) del ejercicio anterior).

§ 3 - APLICACION A LOS GRUPOS DE LIE.

Consideremos ahora el caso de un grupo de Lie G (ver §5 de cap.III) y su fibrado tangente $\tau_G = (G,T(G),p)$; un campo vectorial (no necesariamente C^k a priori) A se dirá *invariante (a izquierda)* si verifica

$$A(x.y) = T_y(\ell_x)(A(y)) \qquad (1)$$

para todo x,y en G. Análogamente A será *invariante a derecha* si

$$A(y.x) = T_y(r_x)(A(y)) \qquad (2)$$

para todo x,y en G.

Nos restringiremos en lo que sigue al caso de campos invariantes a izquierda da (considerando el grupo "opuesto" se obtiene el correspondiente enunciado para campos invariantes a derecha).

PROPOSICION 3.1. Sea G un grupo de Lie. Entonces :

i) Los campos invariantes a izquierda forman un R-espacio vectorial.

ii) Un campo vectorial es invariante a izquierda si y sólo si

$$A(x) = T_e(\ell_x)(A(e)) \qquad (3)$$

para todo $x \in G$.

iii) Un campo invariante a izquierda es C^∞.

DEMOSTRACION. i) es inmediato. Para ii), una aplicación es trivial y la otra se deduce de $\ell_x \ell_y = \ell_{xy}$. iii) Evidente por (3).

Indicaremos con L(G) el espacio vectorial de los campos invariantes a izquierda de G (subespacio de $\Gamma^\infty(\tau_G)$).

Nótese que por (1), un campo vectorial A sobre G es invariante a izquierda si y sólo si $(\ell_x)_*(A) = A$ para todo $x \in G$ (cf.5.9 de cap.IV).

O sea

$$A \in L(G) \Leftrightarrow (\ell_x)_*(A) = A \quad \text{para todo } x \in G \qquad (4)$$

Entonces

PROPOSICION 3.2. L(G) es una subálgebra de Lie de $\Gamma^\infty(\tau_G)$.

DEMOSTRACION. Sólo hay que probar que $[A,B] \in L(G)$ si A,B son invariantes a izquierda. Pero para todo $x \in G$ es $(\ell_x)_*[A,B] = [(\ell_x)_*(A),(\ell_x)_*(B)] = [A,B]$ por 2.2 así que $[A,B]$ verifica (4).

Decimos que L(G) es el *álgebra de Lie del grupo* G.

PROPOSICION 3.3. i) La aplicación $A \longrightarrow A(e)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales de L(G) sobre $T_e(G)$ (que indicamos o: $L(G) \longrightarrow T_e(G)$).

En particular si dim(G) = n, L(G) es un R-espació vectorial de dimensión n.

ii) La aplicación $(x,v) \longrightarrow T_e(\ell_x)(v)$ define un isomorfismo de fibrados vectoriales $\varepsilon_G^{T_e(G)} \xrightarrow{\sim} \tau(G)$. En particular τ_G es trivial.

DEMOSTRACION. i) Inmediato por 3.1 ii). Para ii) observemos que el diagra ma adjunto es conmutativo y que para cada $x \in G$ la aplicación $v \longrightarrow T_e(\ell_x)(v)$ es un isomorfismo de $T_e(G)$ sobre $T_x(G)$ (2.5,cap. IV).

$$\begin{tikzcd}
G \times T_e(G) \arrow[rr] \arrow[dr] & & T(G) \arrow[dl, "p"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Supongamos ahora que $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ es un homomorfismo de grupos de Lie; es posible definir una aplicación lineal $L(f)\colon L(G_1) \longrightarrow L(G_2)$ sin más que completar el diagrama (5).

$$\begin{tikzcd}
L(G_1) \arrow[r, "L(f)"'] \arrow[d, "\sigma_1"] & L(G_2) \arrow[d, "\sigma_2"] \\
T_e(G_1) \arrow[r, "T_e(f)"'] & T_e(G_2)
\end{tikzcd}$$

(5)

Equivalente:

$$(L(f)(A))(x) = T_e(\ell_x)T_e(f)(A(e)) \qquad (6)$$

Notemos que si $x \in G_1$ será $\ell_{f(x)}f = f\,\ell_x$ (ya que f es homomorfismo); por lo tanto resulta inmediatamente

$$(L(f)(A))(x) = T_x(f)(A(x)) \qquad (7)$$

para todo $x \in G_1$, así que $L(f)(A) = f_*(A)$.

Como consecuencia de ello obtenemos que $L(f)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, y entonces la correspondencia $G \dashrightarrow L(G)$ resulta un funtor covariante (de grupos de Lie en álgebras de Lie).

Veamos ahora que ocurre con las curvas integrales de los campos invariantes, para lo cual usaremos el siguiente

LEMA 3.4. Sea G un grupo topológico, sea J un entorno conexo de 0 en R y sea $\varphi\colon J \longrightarrow G$ una aplicación que verifica

$$t,s,t+s \text{ en } J \Rightarrow \varphi(t+s) = \varphi(t).\varphi(s)$$

Existe entonces un único homomorfismo $\overline{\varphi}\colon R \longrightarrow G$ tal que $\overline{\varphi}|J = \varphi$; $\overline{\varphi}$ es continuo si φ lo es. Si G es además un grupo de Lie y φ es de clase C^k $(k \geqslant 1)$, también lo es $\overline{\varphi}$.

DEMOSTRACION. La unicidad de $\overline{\varphi}$ es evidente ya que J genera R; asimismo $\overline{\varphi}$ es continuo (resp: C^k) si φ lo es ya que J es entorno de 0.

Para la existencia, como $R = \cup\{n.J,\ n > 0\}$ definimos $\varphi_n\colon n.J \longrightarrow G$ por $\varphi_n(t) = \varphi(t/n)^n$.

Veamos que $\varphi_n(t) = \varphi_m(t)$ si $t \in (n.J) \cap (m.J)$; si $t/n \in J$ también $t/n.m \in$ $\in J$, luego

$$\varphi(t/n.m)^n = \varphi(t/n.m) \ldots \varphi(t/n.m) = \varphi(t/n.m + \ldots + t/n.m) = \varphi(t/m)$$

y análogamente $\varphi(t/n.m)^m = \varphi(t/n)$.

Por lo tanto

$$\varphi_n(t) = \varphi(t/n)^n = \varphi(t/n.m)^{n.m} = \varphi(t/m)^m = \varphi_m(t)$$

De lo anterior se deduce que $\bar{\varphi}: R \longrightarrow G$ está bien definida por la regla $\bar{\varphi}|n.J = \varphi_n$ y trivialmente es $\bar{\varphi}|J = \varphi$; sólo falta probar que $\bar{\varphi}$ es homomorfismo.

Sean t y s en R; para $n > 0$ conveniente será $t/n \in J$ y $s/n \in J$, y también $\frac{t+s}{n} \in J$. Por lo tanto $\varphi(\frac{t+s}{n}) = \varphi(t/n).\varphi(s/n)$, así que $\bar{\varphi}(t+s) = \varphi(\frac{t+s}{n})^n =$
$= \varphi(t/n)^n.\varphi(s/n)^n = \bar{\varphi}(t).\bar{\varphi}(s)$ ya que $\varphi(t/n)$ y $\varphi(s/n)$ conmutan.

DEFINICION 3.5. Si G es un grupo de Lie, un homomorfismo de grupo de Lie $\varphi: R \longrightarrow G$ se denomina un *subgrupo uniparamétrico*.

PROPOSICION 3.6. Sea G un grupo de Lie, sea $v \in T_e(G)$ y sea $\varphi: R \longrightarrow G$ una aplicación. Entonces son equivalentes:

a) φ es un subgrupo uniparamétrico y $\varphi'(0) = v$

b) φ es la curva integral máxima del campo invariante $\sigma^{-1}(v)$ que verifica $\varphi(0) = e$.

DEMOSTRACION. a) $\Rightarrow$ b) Si $s \in R$ es $\varphi\ell_s = \ell_{\varphi(s)}\varphi$, como $T_0(\ell_s)$ = diferencial en t=0 de $t \longrightarrow t+s$, vemos que $\varphi(0) = e$ y

$$\varphi'(s) = T_s(\varphi)(1) = T_s(\varphi)T_0(\ell_s)(1) = T_0(\varphi\ell_s)(1) = T_0(\ell_{\varphi(s)}\varphi)(1) =$$
$$= T_e(\ell_{\varphi(s)})T_0(\varphi)(1) = T_e(\ell_{\varphi(s)})(\varphi'(0)) = T_e(\ell_{\varphi(s)})(v) = \sigma^{-1}(v)(\varphi(s))$$

lo que prueba b).

Para b) $\Rightarrow$ a), sea $A = \sigma^{-1}(v)$ y sea $\varphi: J_0 \longrightarrow G$ la curva integral máxima de A que verifica $\varphi(0) = e$. Ciertamente $\varphi'(0) = v$ y sólo hay que probar:

i) $J_0 = R$ y ii) φ es homomorfismo.

Si $s \in J_0$ y consideramos $t \longrightarrow \varphi(s+t)$ (de J_0-s en G) y también $t \longrightarrow \varphi(s).\varphi(t)$ (de J_0 en G) es inmediato que ambas aplicaciones son curvas integrales de A que mandan 0 en $\varphi(s)$.

Por 1.2 resulta que ambas coinciden en $J_0 \cap (J_0-s)$ así que en consecuencia es $\varphi(t+s) = \varphi(t).\varphi(s)$ si $t \in J_0$, $s \in J_0$ y $t+s \in J_0$.

Entonces 3.4 nos provee de un subgrupo uniparamétrico $\bar{\varphi}: R \longrightarrow G$ con $\bar{\varphi}|J_0 = \varphi$; en particular $\bar{\varphi}'(0) = \varphi'(0) = v$. Por lo probado en la primera parte resulta que $\bar{\varphi}$ *es la curva integral máxima* de A que en t=0 pasa por e y se concluye que $J_0 = R$, $\bar{\varphi} = \varphi$.

COROLARIO 3.7. Todo campo vectorial invariante es completo.

COROLARIO 3.8. La aplicación $\varphi \longrightarrow \varphi'(0)$ es una biyección entre el conjunto de subgrupos uniparamétricos de G y $T_e(G)$.

DEMOSTRACION. Si φ_1, φ_2 son subgrupos uniparamétricos con $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0)$, ambos resultan ser las curvas integrales máximas del mismo campo vectorial, que mandan 0 en e; por consiguiente $\varphi_1 = \varphi_2$.

Por otro lado si $v \in T_e(G)$ y $A = \sigma^{-1}(v)$ acabamos de ver en 3.6 que la curva integral máxima de A que manda 0 en e es un subgrupo uniparamétrico con $\varphi'(0) = v$.

Pasamos ahora a definir la *exponencial* $\exp: T_e(G) \longrightarrow G$; para cada $v \in T_e(G)$ indicamos con $t \longrightarrow \varphi(t,v)$ el subgrupo uniparamétrico de G que verifica $\varphi'(0,v) = v$, y se pone $\exp(v) = \varphi(1,v)$.

Claramente $\exp(0) = e$ (pues $\varphi(t,0) = e$ para todo $t \in R$). Para establecer las propiedades básicas de la exponencial consideramos la familia - parametrizada por $T_e(G)$ - de campos vectoriales

$$A : G \times T_e(G) \longrightarrow T(G)$$

dada por $A(x,v) = T_e(\ell_x)(v)$.

La teoría de 1.10 nos provee de una aplicación $\alpha: R \times G \times T_e(G) \longrightarrow G$ de clase C^∞ tal que

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha(0,x,v) = x \quad \text{para todo } x \in G, \ v \in T_e(G) \\ \alpha'(t,x,v) = A(\alpha(t,x,v),v) = T_e(\ell_{\alpha(t,x,v)})(v) \end{cases}$$

Por supuesto para v fijo, $(t,x) \longrightarrow \alpha(t,x,v)$ es el flujo del campo invariante A_v; luego (haciendo x=e) resulta que $t \longrightarrow \alpha(t,x,v) = \varphi(t,v)$. Por ende φ es de clase C^∞, así que exp es de clase C^∞.

Pero por otro lado si $x \in G$ es evidente que (fijado v) la aplicación $t \longrightarrow x.\alpha(t,e,v) = x.\varphi(t,v)$ es la curva integral máxima de A_v que manda 0 en x.

CONCLUSION. $\alpha(t,x,v) = x.\varphi(t,v) = x.\alpha(t,e,v)$ y por consiguiente obtenemos $\alpha(1,x,v) = x.\exp(v)$ si $x \in G$, $v \in T_e(G)$.

Sea finalmente $v \in T_e(G)$; si $s \in R$ y consideramos las aplicaciones

$$t \longrightarrow \varphi(t,sv) \qquad\qquad t \longrightarrow \varphi(st,v)$$

ambas son subgrupos uniparamétricos de G, cuya derivada en t=0 es s.v.

Entonces 3.8 nos da $\varphi(t,s\,v) = \varphi(st,v)$ y haciendo t=1 deducimos que

$\varphi(s,v) = \varphi(1,s.v) = \exp(s.v)$.

Finalmente $\alpha(t,x,v) = x.\varphi(1,t.v) = x.\exp(t.v)$. Resumiendo:

PROPOSICION 3.9. La aplicación $\exp: T_e(G) \longrightarrow G$ es de clase C^∞; para cada $v \in T_e(G)$ la aplicación $t \longrightarrow \exp(t.v)$ es el único subgrupo uniparamétrico de G cuya derivada en t=0 es v.

Además $(t,x) \longrightarrow x.\exp(t.v)$ es el flujo del campo invariante $\sigma^{-1}(v)$.

PROPOSICION 3.10. $T_0(\exp) = 1_{T_e(G)}$.

DEMOSTRACION. Sea $\psi: R \longrightarrow T_e(G)$, $\psi(t) = t.v_0$ con $v_0 \in T_e(G)$ y sea $t \longrightarrow \exp \psi(t)$. Por definición éste es el subgrupo uniparamétrico de G cuya derivada en t=0 es v_0; pero esta derivada es $T_0(\exp)(\psi'(0)) = T_0(\exp)(v_0)$.

COROLARIO 3.11. Existen entornos U de $0 \in T_e(G)$ y V de $e \in G$ tales que

$$\exp|U : U \longrightarrow V$$

es un difeomorfismo.

COROLARIO 3.12. El subgrupo de G generado por $\exp(T_e(G))$ es la componente G_0 de e.

DEMOSTRACION. Ciertamente $\exp(T_e(G)) = \mathcal{E}$ es conexo y contiene a e, así que $\mathcal{E} \subset G_0$ es evidente. Por otro lado el corolario anterior muestra que $\mathcal{E}$ contiene un entorno de e, así que el subgrupo generado por $\mathcal{E}$ es abierto (y cerrado) y entonces contiene a G_0.

OBSERVACIONES Y EJEMPLOS 3.13. a) Sea A un álgebra de Banach y sea $A_* = G$ el grupo de Lie de elementos inversibles de A (ver 5.13 de cap.III, ej.3) y la aplicación exponencial "clásica" definida por la serie $e^x = \sum_{k\geq 0}^{\infty} x^k/k!$. Claramente $T_1(G) = A$ y operando se ve que $t \longrightarrow e^{tx}$ es un homomorfismo C^∞ cuya derivada en t=0 es x.

Se deduce entonces que $\exp(tx) = e^{tx}$ para todo $t \in R$, $x \in A$.

En particular $(t,x) \longrightarrow x.e^{tv}$ es el flujo del campo invariante $A_v = \sigma^{-1}(v)$; nótese que $A_v(x) = (x,x.v)$.

b) De lo anterior - ó directamente - es fácil calcular el álgebra de Lie $L(A_*)$, que como espacio vectorial consiste de las aplicaciones $s_v: A_* \longrightarrow A_* \times A$, $s_v(x) = (x,x.v)$.

Pues $[s_{v_1}, s_{v_2}]$ deberá ser s_{v_3}; donde $v_3 \in A$ deberá verificar $x.v_3 =$ $= Dr_{v_2}(x)(r_{v_1}(x)) - Dr_{v_1}(x)(r_{v_2}(x))$ (cf.2.1 b)). O sea $x.v_3 = x.v_1.v_2 -$ $- x.v_2.v_1$ para todo $x \in A_*$, luego $v_1.v_2 - v_2.v_1 = v_3$.

Finalmente $[s_{v_1}, s_{v_2}] = s_{v_1 v_2 - v_2 v_1}$.

c) En particular $L(GL(E)) \approx \mathcal{L}(E)$ con $[T,S] = TS-ST$.

d) Supongamos ahora un espacio de Banach E, considerado como grupo de Lie aditivo; siendo $\ell_x(y) = x+y$ resulta $D\ell_x = 1_E$ para todo $x \in E$, de modo que los campos invariantes son los campos "constantes" $x \longrightarrow (x,v)$. Es claro que entonces $[A,B] = 0$ para todo par de campos invariantes ("álgebra de Lie abeliana").

e) Si $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ es un homomorfismo de grupos de Lie, el diagrama (9) es conmutativo. Pues si $v \in T_e(G_1)$, $t \longrightarrow f(\exp(tv))$ es un subgrupo uniparamétrico de G_2 cuya derivada en $t=0$ es $T_e(f)(v) = u$. Luego éste debe ser el subgrupo uniparamétrico $t \longrightarrow \exp(tu)$ y lo afirmado resulta haciendo $t=1$.

$$\begin{array}{ccc} T(G_1) & \xrightarrow[T_e(f)]{} & T_e(G_2) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \exp} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G_1 & \xrightarrow[f]{} & G_2 \end{array}$$

(9)

PROPOSICION 3.14. Sea $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces son equivalentes:

a) $T_e(f)$ es isomorfismo.

b) f es un difeomorfismo local.

c) $L(f)\colon L(G_1) \longrightarrow L(G_2)$ es isomorfismo.

DEMOSTRACION. a) $\Leftrightarrow$ c) es evidente por 3.3 i) mientras que a) $\Leftrightarrow$ b) es consecuencia de (9) y 3.11.

PROPOSICION 3.15. Sean $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ y $g\colon G_1 \longrightarrow G_2$ dos homomorfismos de grupos de Lie; G_1 se supone conexo. Son entonces equivalentes:

a) $T_e(f) = T_e(g)$.

b) $L(f) = L(g)$.

c) $f = g$.

DEMOSTRACION. a) $\Leftrightarrow$ b) es evidente; para a) $\Rightarrow$ c) vemos que por (9) f y g coinciden sobre $\exp(T_e(G_1))$ y se aplica 3.12.

PROPOSICION 3.16. Si G es un grupo de Lie conexo, son equivalentes:

a) G es conmutativo.

b) exp: $T_e(G) \longrightarrow G$ es homomorfismo.

c) L(G) es abeliana.

DEMOSTRACION. a) $\Rightarrow$ b) Si G es conmutativo, ϕ: GxG $\longrightarrow$ G dada por $\phi(x,y) = x.y$ es homomorfismo. Luego por (9) será

$\exp(v_1+v_2) = \exp(T_{(e,e)}(\phi)(v_1,v_2)) = \phi(\exp(v_1),\exp(v_2)) = \exp(v_1).\exp(v_2)$

para v_1,v_2 en $T_e(G)$ (ver 5.1 e) de cap.III).

b) $\Rightarrow$ c) Evidente por 3.14).

Veamos c) $\Rightarrow$ a) Como $[A,B] = 0$ para todo par de campos invariantes A.B del ejercicio 6 de 2.4 se deduce que

$$\alpha_1(t,\alpha_2(t,x)) = \alpha_2(t,\alpha_1(t,x))$$

para todo $(t,x) \in$ RxG, donde $\alpha_i(t,x) = x.\exp(t.v_i)$ para v_1,v_2 en $T_e(G)$. En consecuencia $\exp(v_1).\exp(v_2) = \exp(v_2).\exp(v_1)$, así que el subgrupo generado por la imagen de exp. es conmutativo, y se concluye apelando a 3.12.

EJERCICIOS 3.17. 1) Sean G_1 y G_2 grupos de Lie y sea f: $G_1 \longrightarrow G_2$ de clase C^∞ con $f(e) = e$; se supone G_1 conexo. Probar que son equivalentes

i) f es homomorfismo

ii) Para todo $A \in L(G_1)$, $B(y) = T_e(\ell_y)(T_e(f)(A(e))$ define un campo invariante en G_2, con $f_*(A) = B$.

2) Sea G un grupo de Lie conexo y conmutativo.

i) exp: $T_e(G) \longrightarrow G$ es el revestimiento universal de G.

ii) $\{v: \exp(v) = e\}$ es un subgrupo D discreto de $T_e(G)$.

iii) $T_e(G)/D \approx G$.

NOTA. La clasificación de los subgrupos discretos de R^n muestra que todo grupo de Lie conexo, conmutativo de dimensión n es de la forma $T^k \times R^{n-k}$.

3) Sea $a \in GL(n,C)$ tal que $(1-a)^m = 0$ para un cierto $m > 0$; se define

$$x = -\sum_{k\geq 1}^{\infty} \frac{(1-a)^k}{k}.$$

i) Probar que $\exp(x) = a$ (Sug: operar con las series).

ii) Deducir que $\exp\colon \mathcal{L}(C^n) \longrightarrow GL(n,C)$ es suryectiva (Sug: usar la forma de Jordan).

iii) Mostrar con ejemplos que la conclusión de ii) es falsa en el caso real.

4) Sea G un grupo de Lie, sea $\mathcal{E}$ la imagen de exp. Se pone $\sqrt[n]{G} = \{x \in G\colon$ $\colon y^n = x$ para álgún $y \in G\}$ para cada $n \geqslant 2$.

Probar que $\mathcal{E} \subset \bigcap_{n\geq 2} \sqrt[n]{G}$.

5) Deducir del ejercicio anterior que $\exp\colon \mathcal{L}(R^2) \longrightarrow GL^+(2,R)$ no es suryectiva (Sug: $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$).

6) Si G es un grupo de Lie, existen entornos U y V de e en G tales que $x \longrightarrow x^m$ es un difeomorfismo de U sobre V $(m \geqslant 1)$ (Sug: 3.11).

7) Sea G un grupo de Lie y sea $\varphi\colon R \longrightarrow G$ un homomorfismo algebraico. Probar que son equivalentes:

i) φ es continuo.

ii) φ es C^∞.

iii) Existe un $a \in T_e(G)$ tal que $\varphi(t) = \exp(ta)$ para todo $t \in R$ (Sug: para i) $\Rightarrow$ iii) considerar U y V como en ejercicio 7 con m=2, de tal modo que $\exp\colon U_0 \longrightarrow U$ sea difeomorfismo. Si $\varphi([-t_0,t_0]) \subset U$ y $\exp(a) = \varphi(t_0)$ probar que $\varphi(t) = \exp((t/t_0).a)$ considerando el subgrupo $S = \{t \in R\colon \varphi(t) = \exp((t/t_0).a)\}$).

8) Sea G un grupo de Lie y sea E_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ una familia de subespacios directos de $T_e(G)$ tales que $\bigoplus_{i=1}^{r} E_i = T_e(G)$.

Probar: existen entornos U_i de 0 en cada E_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ y un entorno V de e en G tales que $(a_1,\ldots,a_r) \longrightarrow \exp(a_1)\ldots \exp(a_r)$ es un difeomorfismo de $\prod_{i=1}^{r} U_i$ sobre V.

9) Sean G, H grupos de Lie con G de dimensión finita. Si $f\colon G \longrightarrow H$ es un homomorfismo continuo, probar que f es C^∞ (Sug: sean E_i subespacios de dimensión 1 de $T_e(G)$ como en el ejercicio anterior, y considerar $0 \neq v_i \in$ $\in E_i$ para $1 \leqslant i \leqslant r$; luego $(t_1,\ldots,t_r) \longrightarrow f\exp(t_1.v_1) \ldots f\exp(t_r.v_r)$ y ejercicio 7).

10) Calcular el álgebra de Lie de los subgrupos indicados en el ejercicio 4 de 5.13 cap.III.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.BONIC - Linear functional analysis, Gordon and Breach (1960).

[2] J.BOCHNAK, J.SICIAK - Polinomials and multilinear mappings, Studia Math. XXXIX (1971), 59-76.

[3] M.GREENBERG - Lectures on algebraic topology, Benjamin (1967).

[4] A.PELCYŃSKI - On almost diffeomorfic Banach spaces, Indag. Math. 30 (1968), 202-208.

[5] J.EELLS - A setting for global analysis, Bull. A.M.S. 72 (1966), 751-807.

[6] R.ABRAHAM, J.ROBBIN - Transversal mappings and flows, Benjamin 1967.

[7] J.DUGUNDJI - Topology.

[8] N.BOURBAKI - Topologie Générale, Livre III, Ch.9.

[9] R.SMIRNOV - Uspehi Matem. Nauk 6(1951), 100-111.

[10] R.PALAIS - Critical point set theory and the minimax principle, Proc. Sym. Pure Math. XV (1970), 185-212.

[11] J.MILNOR - On Manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Annals of Math. 64 (1956), 395-405.

[12] S.SMALE - Differential and combinatorial structures on manifolds, Annals of Math. 74 (1961), 498-502.

[13] J.NAGATA - Modern dimension theory, North-Holland Publ. (1965).

[14] R.SWAN - Vector bundles and proyective modules, Trans. A.M.S. 105 (1962), 264-277.

[15] S.LANG - Differential manifolds, Addison-Wesley (1972).

[16] H.CARTAN - Calcul differential, Hermann (1967).

[17] C.GODBILLON - Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann (1969).

[18] N.STEENROD - Topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, Prin. N.J., 1951.

INDICE