

NOTAS DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

2

Graciela S. Birman y Graciela M. Desideri

UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE LORENTZ

2012

INSTITUTO DE MATEMÁTICA (INMABB)

CONICET / UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHÍA BLANCA - ARGENTINA

INSTITUTO DE MATEMÁTICA (INMABB)

CONICET / UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHÍA BLANCA - ARGENTINA

Comité editorial:

Sebastián Ferraro
Rodrigo Iglesias
Sheldy Ombrosi
Pablo Panzone
Luis Piovan
María Inés Platzeck
María Julia Redondo

Las publicaciones del Instituto de Matemática están destinadas principalmente a reunir los trabajos de investigación, notas de cursos, seminarios y actas de congresos realizados en la Universidad Nacional del Sur en el campo de la matemática.

Estas publicaciones no tienen carácter periódico, y sus fascículos –cada uno de los cuales contiene en general un solo trabajo– son numerados en forma continuada.

Las universidades, academias, sociedades científicas y los editores de revistas de matemática quedan invitados a canjear sus publicaciones por las del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Toda correspondencia relativa a estas colecciones deberá ser dirigida a:

I N M A B B



CONICET

U N S

SERVICIO DE CANJE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
AV. ALEM 1253
(8000) BAHÍA BLANCA - ARGENTINA
bibima@inmabb-conicet.gob.ar

NOTAS DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

2

Graciela S. Birman y Graciela M. Desideri

UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE LORENTZ

2012

INSTITUTO DE MATEMÁTICA (INMABB)

CONICET / UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHÍA BLANCA - ARGENTINA

Introducción

En esta monografía deseamos presentar una manera de iniciarse en el estudio de la Geometría Lorentziana basada en el estudio que hemos hecho de la misma y en la contribución realizada desde 1998.

Es destacable la escasa bibliografía en el tema enfocada desde el punto de vista estrictamente matemático y, en tal sentido, presentamos resultados que recorren desde la geometría elemental plana hasta variedades lorentzianas n -dimensionales, incluyendo aplicaciones de operadores diferenciales y obtención de fórmulas integrales.

Estas no son las notas de un curso aunque la organización de su presentación puede ser una guía apropiada para uno dirigido a quienes tengan conocimientos básicos de Geometría Diferencial Riemanniana. A pesar de ello, es posible que el lector encuentre cierta insistencia en algunas nociones bien conocidas y su correlato en la Lorentziana. Mostramos construcciones, ya que comparamos con resultados de la Geometría Euclídea, así como de la Riemanniana, y enfatizamos la diferente manera en que se piensa y se trabaja la Geometría Lorentziana.

Este trabajo ha sido organizado de la siguiente manera: se exponen principalmente tópicos de Geometría Lorentziana Plana, Espacial, n -dimensional y Variedades Lorentzianas n -dimensionales, la mayoría de ellos como resultados de investigación propios; también se presentan capítulos dedicados a operadores aplicados a funciones y campos vectoriales en superficies del espacio lorentziano, y a distintas curvaturas tanto en el plano como en el espacio de Lorentz y, cuando es posible, su generalización en el espacio lorentziano n -dimensional. El desarrollo de estos últimos temas se muestra separado del espacio que los contiene para una mejor primera lectura de estas notas.

El lector encontrará una bibliografía clásica, moderna y que supera el material necesario para la lectura de este trabajo, ya que se encuentran referencias a O'Neill, Bonnor, Nomizu, Beem, Santaló, Chen, entre otros.

Las demostraciones de los teoremas, lemas y corolarios se podrán encontrar en las publicaciones correspondientes; no todas ellas fueron incluidas a efectos de evitar repeticiones innecesarias.

Es nuestra esperanza que esta labor pueda despertar curiosidad e interés en jóvenes investigadores, motivándolos a continuar este estudio agregando y completando conocimiento en esta área de la Matemática.

En septiembre de 2008 la Dra. G. M. Desideri se ha incorporado al Instituto de Matemática de Bahía Blanca (INMABB) y al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur. Hasta entonces ambas autoras desarrollaron sus tareas de investigación en

el Núcleo Consolidado de Matemática Pura y Aplicada (NuCOMPA) y en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). La primera autora es miembro de la carrera de Investigador Científico del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Graciela S. Birman & Graciela M. Desideri

Índice general

Introducción	I
1. El plano de Lorentz	1
1.1. El plano de Lorentz	1
1.2. Triángulos puros	3
1.3. Ángulos	4
1.3.1. Ángulos centrales	5
1.3.2. Ángulos inscritos en un par de círculos lorentzianos opuestos	6
1.3.3. Ángulos exteriores	7
1.3.4. Ángulos interiores	8
1.3.5. Ángulos semi-inscritos en un círculo lorentziano	9
1.4. Polígonos	9
1.4.1. Cuadriláteros	11
2. Espacio lorentziano tridimensional	13
2.1. El espacio L^3	13
2.2. Sobre la pseudoesfera	15
2.3. Una superficie especial	17
2.3.1. Cono proyectivo euclideo	18
2.3.2. Cono proyectivo lorentziano	19
2.3.3. Propiedades topológicas	20
2.4. Algunas aplicaciones proyección	21
2.4.1. La proyección cilíndrica	21
2.4.2. Proyección ortográfica	25
2.4.3. Proyección estereográfica	26
3. Espacio lorentziano n-dimensional	28
3.1. El espacio L^n	28
3.2. Curvas nulas	29
3.2.1. Curvas y marcos de referencia de Frénet nulos	29
3.2.2. Curvas nulas congruentes en L^n	30

4. Variedades semi-riemannianas	32
4.1. Variedades semi-riemannianas	32
4.1.1. Subvariedades semi-riemannianas	35
4.1.2. Producto de variedades semi-riemannianas	35
4.1.3. Isometrías	36
4.1.4. La conexión de Levi-Civita	37
4.1.5. Curvaturas	39
4.1.6. Productos deformados	40
4.2. Subvariedades en espacios lorentzianos	41
4.2.1. Tangentes y normales	41
4.2.2. La conexión inducida	42
4.2.3. Hipersuperficies lorentzianas	43
4.2.4. Campo vectorial curvatura media	46
4.3. Variedades lorentzianas	48
4.3.1. Espacio-tiempo	48
4.3.2. Caminos y curvas	49
4.3.3. Condición cronológica y topología	50
4.3.4. Espacios hiperbólico y de de Sitter	51
4.3.5. Imagen esférica en L^{n+1}	52
5. Curvaturas	54
5.1. Curvas planas	54
5.1.1. Curvatura total de curvas planas	55
5.1.2. Recta soporte de una curva cerrada convexa	55
5.1.3. Curvatura total	56
5.1.4. Curvatura total absoluta	57
5.2. Curvatura total según Milnor	59
5.2.1. La curvatura total absoluta de polígonos	59
5.2.2. Curvatura total absoluta de una curva	60
5.2.3. Imagen esférica	63
5.3. Curvatura total según van Rooij	64
5.4. Curvatura total central según Banchoff	66
5.4.1. Curvatura total central de curvas cerradas en el plano euclideo	66
5.4.2. Curvatura total central de curvas cerradas en espacios euclideos	68
5.5. Curvatura total central en el plano de Lorentz	69
5.5.1. Curvatura total central de curvas planas cerradas	69
5.5.2. Curvatura total central de polígonos puros espaciales	73
5.5.3. Curvatura total central de curvas \mathcal{C}^2	74
5.6. Curvatura total central en L^3	76
5.7. Curvatura total central en L^{n+1}	81

6. Operadores	86
6.1. Operador de Laplace-Beltrami	86
6.1.1. Laplaciano de funciones en variedades semi-riemannianas	86
6.1.2. Laplaciano del campo vectorial curvatura media de hipersuperficies de L^{n+1}	89
6.2. Casos particulares	92
6.2.1. Superficies lorentzianas	93
6.2.2. Operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de la superficie S_1^2	95
6.2.3. Operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de la superficie H_0^2	97
6.2.4. Operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de la superficie $S_1^1 \times \mathbb{R}$	99
6.2.5. Operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de la superficie $H_0^1 \times \mathbb{R}$	102
6.2.6. Operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de la superficie $L \times S^1$	105
6.2.7. Operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de la superficie L^2	108
6.2.8. Comentarios sobre superficies de L^3 y los resultados del operador Δ aplicado a sus campos vectoriales curvatura media	109
6.3. Operador d'alembertiano	109
6.3.1. Operador d'alembertiano de campos vectoriales sobre hipersuperficies de L^{n+1}	110
6.3.2. Cuadro comparativo de los operadores Δ y \square aplicados al campo vectorial curvatura media en superficies de L^3	113

Capítulo 1

El plano de Lorentz

1.1. El plano de Lorentz

Sean $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ dos vectores en el espacio vectorial bidimensional \mathbb{R}^2 ; el producto interno lorentziano de x e y es definido por

$$\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2.$$

El plano \mathbb{R}^2 , con signatura $(-, +)$, es llamado espacio vectorial bidimensional lorentziano L^2 . El plano afín asociado a L^2 es llamado el plano lorentziano.

Un vector x en L^2 es llamado temporal si $\langle x, x \rangle < 0$, espacial si $\langle x, x \rangle > 0$, y nulo si $\langle x, x \rangle = 0$. Los vectores nulos son, también, llamados de luz (*lightlike*).

En L^2 , se dice que x es ortogonal a y si $\langle x, y \rangle = 0$ y ambos son no nulos.

Sea $\vec{x} \in L^2$, entonces $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$ es llamado la norma del vector x . En particular, decimos que x es un vector unitario si $\langle x, x \rangle = 1$ o $\langle x, x \rangle = -1$.

La base canónica del espacio vectorial L^2 está formada por el vector temporal $e_1 = (1, 0)$ y el vector espacial $e_2 = (0, 1)$, siendo éstos dos vectores unitarios y ortogonales entre sí.

Es bien conocido que en L^2 se considera la orientación temporal de un vector temporal x como sigue:

- x es temporal hacia futuro si $\langle x, e_1 \rangle < 0$,
- x es temporal hacia pasado si $\langle x, e_1 \rangle > 0$.

Por otro lado, los vectores nulos $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ forman una base nula de L^2 , donde $\langle u_1, u_1 \rangle = \langle u_2, u_2 \rangle = 0$ y $\langle u_1, u_2 \rangle = 1$.

En [4] se define una orientación para segmentos nulos en el plano de Lorentz: un segmento nulo se dice segmento nulo hacia futuro si la recta nula a la cual pertenece el segmento está orientada en la dirección del vector u_1 , y segmento nulo hacia pasado, si la recta está orientada en la dirección del vector u_2 .

Análogamente, se define a continuación una orientación espacial en el plano de Lorentz.

Definición 1 Sea x un vector espacial en L^2 . Se dice que x es un vector espacial hacia futuro si $\langle x, e_2 \rangle > 0$, y que x es un vector espacial hacia pasado si $\langle x, e_2 \rangle < 0$.

Las rectas nulas dividen el plano de Lorentz en cuatro regiones o cuadrantes:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{x \in L^2 : x \text{ es temporal hacia futuro}\}, \\ \Omega_2 &= \{x \in L^2 : x \text{ es espacial hacia futuro}\}, \\ \Omega_3 &= \{x \in L^2 : x \text{ es temporal hacia pasado}\}, \\ \Omega_4 &= \{x \in L^2 : x \text{ es espacial hacia pasado}\}.\end{aligned}$$

En el plano euclideo un movimiento es una combinación de una rotación y una traslación; en el plano lorentziano, el grupo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \omega & \sinh \omega & a \\ \sinh \omega & \cosh \omega & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

actúa, en la misma forma, como grupo de movimientos. Es bien conocido que G preserva el producto interno lorentziano y que no se puede pasar con continuidad de un cuadrante a otro.

El elemento de arco, ds , está dado por $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2$.

Definición 2 Una curva α parametrizada y diferenciable en L^2 es un mapeo diferenciable $\alpha : I \rightarrow L^2$, con $I \subset \mathbb{R}$.

Definición 3 Sea $\alpha : [0, k] \rightarrow L^2$ un mapeo continuo del intervalo real $[0, k]$ en L^2 . Se dice que α es una curva parametrizada a trozos, simple y cerrada si existe una subdivisión $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} = k$ de $[0, k]$ tal que α es diferenciable en cada intervalo $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \dots, i$, y:

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= \alpha(k), \\ \forall t, s \in [0, k], t \neq s &\text{ implica que } \alpha(t) \neq \alpha(s).\end{aligned}$$

Definición 4 Una curva parametrizada α se dice pura temporal, pura espacial o pura nula si, en todo punto, sus vectores tangentes son temporales, espaciales o nulos, respectivamente.

Definición 5 Si una curva α es parametrizada a trozos, se dice temporal, espacial o nula si todas las restricciones $\alpha|_{(t_j, t_{j+1})}$ de α a (t_j, t_{j+1}) , $\forall j = 0, \dots, i$, son curvas puras temporales, puras espaciales o puras nulas, respectivamente.

Clásicamente ([14] y [41]), denotamos $S_1^1(O, r)$ al lugar geométrico de todos los puntos X del plano lorentziano tales que $\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} \rangle = r^2$, donde O es un punto en el plano lorentziano y r es un número real positivo. Es decir,

$$S_1^1(O, r) = \{X \in L^2 : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} \rangle = r^2\}.$$

Observemos que $S_1^1(O, r)$ tiene dos ramas y cada una de ellas es llamada círculo de Lorentz con centro O y radio r .

Notamos cada rama de $S_1^1(O, r)$ por:

$$\begin{aligned} S_1^1(O, r)_+ &= \{(x_1, x_2) \in S_1^1(O, r) : x_2 - o_2 > 0\}, \\ S_1^1(O, r)_- &= \{(x_1, x_2) \in S_1^1(O, r) : x_2 - o_2 < 0\}, \end{aligned}$$

donde $O = (o_1, o_2)$. Así, todo círculo de Lorentz es una curva pura temporal.

Se dice que $S_1^1(O, r)_+$ y $S_1^1(O, r)_-$ son círculos de Lorentz opuestos en el plano L^2 .

En lo sucesivo, denotaremos $S_1^1(r)$ al lugar geométrico $S_1^1((0, 0), r)$, y cada rama de $S_1^1(r)$ será notada por:

$$\begin{aligned} (S_1^1)_+(r) &= \{(x_1, x_2) \in S_1^1(r) : x_2 > 0\}, \\ (S_1^1)_-(r) &= \{(x_1, x_2) \in S_1^1(r) : x_2 < 0\}. \end{aligned}$$

El lugar geométrico $H_0^1(O, r) = \{X \in L^2 : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} \rangle = -r^2\}$ es llamado el 1-espacio hiperbólico, [41], y tiene dos ramas cada una de las cuales es una curva pura espacial. Si $O = (0, 0)$, notaremos $H_0^1(O, r)$ con $H_0^1(r)$, y

$$\begin{aligned} (H_0^1)^+(r) &= \{(x_1, x_2) \in H_0^1(r) : x_1 > 0\}, \\ (H_0^1)^-(r) &= \{(x_1, x_2) \in H_0^1(r) : x_1 < 0\}. \end{aligned}$$

1.2. Triángulos puros

En esta sección, se presentan algunos resultados obtenidos por Birman y Nomizu para vectores temporales hacia futuro en L^2 . Estos conceptos se encuentran en [14].

Son de interés, para posteriores secciones de este trabajo, los siguientes resultados:

- (i) Para todo par de vectores temporales hacia futuro x, y en L^2 , $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$ (en [14] los autores llaman a este resultado la desigualdad inversa de Cauchy-Schwarz).
- (ii) Para todo par de vectores temporales hacia futuro x, y en L^2 , el vector suma $x + y$ es también un vector temporal hacia futuro en L^2 .

Notación: $\mathbf{T}[A, B, C]$ denota un triángulo con vértices A, B, C , los cuales no son colineales, en el plano lorentziano.

Definición 6 Un triángulo $\mathbf{T} = \mathbf{T}[A, B, C]$ en L^2 es el conjunto de puntos $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$. A los puntos A, B, C se los denomina vértices de \mathbf{T} y a los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$, lados o aristas de \mathbf{T} .

Definición 7 $\mathbf{T}[A, B, C]$ es llamado triángulo temporal puro o espacial puro si $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ y \overrightarrow{AC} son tres vectores temporales o tres vectores espaciales, respectivamente, con igual orientación temporal o espacial.

- (iii) Si $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ y \overrightarrow{AC} son vectores temporales hacia futuro (o espaciales hacia futuro), se dice que B es vértice medio y vale que $\hat{B} = \hat{A} + \hat{C}$, donde \hat{A} es el ángulo entre \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} , \hat{B} es el ángulo entre \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC} , y \hat{C} es el ángulo entre \overrightarrow{CB} y \overrightarrow{CA} .

- (iv) Leyes del coseno hiperbólico: si \widehat{A} es el ángulo entre \vec{AB} y \vec{AC} , \widehat{B} es el ángulo entre \vec{AB} y \vec{BC} , y \widehat{C} es el ángulo entre \vec{CB} y \vec{CA} , entonces

$$\begin{aligned}\|\vec{AB}\|^2 &= \|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - 2\|\vec{BC}\|\|\vec{AC}\|\cosh\widehat{C}, \\ \|\vec{BC}\|^2 &= \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - 2\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|\cosh\widehat{A}, \\ \|\vec{AC}\|^2 &= \|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 + 2\|\vec{BC}\|\|\vec{AB}\|\cosh\widehat{B}.\end{aligned}$$

- (v) Un triángulo inscripto en un círculo de Lorentz es un triángulo puro temporal. Recíprocamente, un triángulo puro temporal puede ser inscripto en un círculo de Lorentz.

Observación 8 Gráficamente, el ángulo \widehat{B} entre \vec{AB} y \vec{BC} se parece más a un ángulo exterior de un triángulo euclideano; el ángulo \widehat{B} es llamado ángulo medio de \mathbf{T} , [14].

Es fácil ver que resultados análogos también se satisfacen para vectores temporales hacia pasado y, por simetría, para vectores espaciales hacia futuro y hacia pasado y para triángulos espaciales puros en L^2 .

Respecto de triángulos equiláteros, usando la inversa de la desigualdad de Cauchy–Schwarz, resulta que triángulos temporales puros equiláteros no existen. Tampoco existen los triángulos rectángulos pues no existe ángulo definido entre lados ortogonales entre sí; por orto triángulos se entenderá triángulos en L^2 que tienen un par de lados ortogonales entre sí, por lo que les corresponde diferente causalidad (cf.[14] y [41] para más detalles).

1.3. Ángulos

Las demostraciones de las proposiciones mencionadas a continuación pueden verse en [19], [21].

En [14] encontramos la siguiente definición de ángulo no-orientado en el plano de Lorentz.

Definición 9 Sean \overleftarrow{x} e \overleftarrow{y} dos rectas temporales (a través del vector cero) en el plano de Lorentz. El ángulo entre ellos es el ángulo no-orientado α , $\alpha \geq 0$, entre los dos vectores temporales x e y orientados a futuro, los cuales yacen sobre las rectas dadas. Así tenemos:

$$\cosh \alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

Si \overleftarrow{x} e \overleftarrow{y} son dos rectas espaciales (a través del vector cero), el ángulo no-orientado α , $\alpha \geq 0$, entre ellas se define de manera similar y tenemos:

$$\cosh \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

Notemos que no están definidos ángulos entre rectas de diferente causalidad ni entre rectas nulas. Por lo tanto, siempre tomaremos pares de rectas ambas temporales o ambas espaciales.

Decimos que el ángulo $\angle ABC$ es el ángulo medio de un triángulo temporal puro $\mathbf{T}[A, B, C]$ y el vértice B es su vértice medio. En [14] se prueba la siguiente propiedad:

Proposición 10 *Si $\mathbf{T}[A, B, C]$ es un triángulo temporal puro en el plano de Lorentz con vértice medio B , entonces $\angle ABC = \angle CAB + \angle ACB$.*

Destacamos que un resultado análogo puede ser obtenido para triángulos espaciales puros usando la simetría $(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1)$.

En consonancia con el caso euclideo, los ángulos en el plano de Lorentz están relacionados con la longitud de arco del círculo de Lorentz y del 1-espacio hiperbólico según su causalidad: dados $S_1^1(O, r)$ y $H_0^1(O, r)$ de centro O y radio $r > 0$, se definen ángulos de acuerdo a la causalidad de sus lados y, sin pérdida de generalidad, se relaciona su magnitud con la longitud de arcos en $(S_1^1)_+(r)$ y $(H_0^1)^+(r)$.

Es así que la magnitud de un ángulo $\angle XVY$ de vértice V está relacionada con la longitud de arco en $(S_1^1)_+(r)$ si las rectas \overleftrightarrow{XV} y \overleftrightarrow{VY} son espaciales, y con la longitud de arco en $(H_0^1)^+(r)$ si las rectas \overleftrightarrow{XV} y \overleftrightarrow{VY} son temporales.

Notamos \widehat{XY} al arco entre los puntos X e Y contenidos en un círculo lorentziano y por $\text{long}(\widehat{XY})$ a la longitud lorentziana del arco \widehat{XY} .

A continuación se presentan definiciones y resultados referidos a ángulos en un círculo de Lorentz, los cuales son determinados por rectas espaciales. Resultados análogos se obtienen para ángulos determinados por rectas temporales por la simetría $(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1)$.

1.3.1. Ángulos centrales

Definición 11 *Sean A, B dos puntos que pertenecen a la misma rama de $S_1^1(O, r)$. El ángulo central $\omega = \angle AOB$ está definido por*

$$\omega = \frac{\text{long}(\widehat{AB})}{r}.$$

En particular, si $O = (o_1, o_2)$, $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ tales que el signo de a_1 es distinto del signo de b_1 , entonces

$$\begin{aligned} \text{long}(\widehat{AB}) &= \text{long}(\widehat{AC}) + \text{long}(\widehat{CB}) = \\ &= \log\left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1}\right) + \log\left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 1}\right) = \\ &= 2 \text{área}(T), \end{aligned}$$

donde T es la región del plano de Lorentz limitada por el arco \widehat{AB} y los segmentos \overline{OA} y \overline{OB} .

1.3.2. Ángulos inscritos en un par de círculos lorentzianos opuestos

Definición 12 Un ángulo inscrito $\angle AVB$ en $S_1^1(O, r)$ es el que tiene su vértice V en $S_1^1(O, r)$.

Obsérvese que se distinguen tres casos:

- i) El vértice V está en distinta rama que los puntos A, B .
- ii) El vértice V está en la misma rama que los puntos A, B .
- iii) Los puntos A, B están en distintas ramas.

En el segundo caso, las rectas \overleftrightarrow{VA} y \overleftrightarrow{VB} son temporales; por lo tanto, el ángulo determinado por ellas no se relaciona con arcos en $(S_1^1)_+(r)$, se relaciona con arcos en $(H_0^1)^+(r)$.

En el último caso no queda definido ángulo $\angle AVB$, pues las rectas \overleftrightarrow{AV} y \overleftrightarrow{BV} tienen diferente causalidad.

Proposición 13 Sea $\angle AVB$ un ángulo inscrito en $S_1^1(O, r)$ tal que V está en distinta rama que los puntos A, B . Entonces

$$\angle AVB = \frac{\text{long}(\widehat{AB})}{2r}.$$

Demostración.

Sea V un punto que está en distinta rama que los puntos A, B . Entonces:

i) Si un lado de $\angle AVB$ es diámetro de $S_1^1(O, r)$, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $O \in \overleftrightarrow{VB}$. El triángulo $\mathbf{T} = \mathbf{T}[V, O, A]$ es un triángulo isósceles y por lo tanto, $\angle AVB = \angle OAV$.

Por otro lado, dado que O es vértice medio de \mathbf{T} , se tiene que:

$$\angle VOA = \angle AVB + \angle OAV = 2\angle AVB$$

pero $\angle VOA = \frac{\text{long}(\widehat{AB})}{r}$ pues es ángulo central.

Luego,

$$\angle AVB = \frac{1}{2}\angle VOA = \frac{\text{long}(\widehat{AB})}{2r}.$$

ii) En cualquier otro caso, se traza la semirrecta \overrightarrow{VO} . Sea D el punto de intersección entre \overrightarrow{VO} y la rama de $S_1^1(O, r)$ a la cual pertenecen los puntos A, B .

Si $D \in \widehat{AB}$, entonces por i), se tiene que:

$$\angle AVB = \angle AVD + \angle DVB = \frac{\text{long}(\widehat{AD})}{2r} + \frac{\text{long}(\widehat{DB})}{2r} = \frac{\text{long}(\widehat{AB})}{2r}.$$

Si $D \notin \widehat{AB}$, entonces por i), se tiene que:

$$\angle AVB = \angle AVD - \angle DVB = \frac{\text{long}(\widehat{AD})}{2r} - \frac{\text{long}(\widehat{DB})}{2r} = \frac{\text{long}(\widehat{AB})}{2r}$$

o

$$\angle AVB = \angle DVB - \angle AVD = \frac{\text{long}(\widehat{DB})}{2r} - \frac{\text{long}(\widehat{AD})}{2r} = \frac{\text{long}(\widehat{AB})}{2r}. \blacksquare$$

1.3.3. Ángulos exteriores

Definición 14 Un ángulo exterior a $S_1^1(O, r)$ es el que tiene su vértice en un punto exterior de $S_1^1(O, r)$.

De todos los casos posibles, solo dos definen ángulos: uno, cuando el ángulo está determinado por dos rectas espaciales, y el otro cuando ambas rectas son temporales. En este último caso, dicho ángulo está relacionado con $H_0^1(O, r)$.

Proposición 15 Si θ es un ángulo exterior a $S_1^1(O, r)$, de vértice V y determinado por dos rectas espaciales \overleftrightarrow{l}_1 y \overleftrightarrow{l}_2 , entonces

$$\theta = \frac{\text{long}(\widehat{CD}) - \text{long}(\widehat{AB})}{2r}$$

donde $A, C \in \overleftrightarrow{l}_1 \cap S_1^1(O, r)$ y $B, D \in \overleftrightarrow{l}_2 \cap S_1^1(O, r)$ de forma tal que $\|\overrightarrow{VA}\| < \|\overrightarrow{VC}\|$ y $\|\overrightarrow{VB}\| < \|\overrightarrow{VD}\|$.

Demostración.

Sea θ un ángulo exterior a $S_1^1(O, r)$, de vértice V y determinado por las rectas espaciales \overleftrightarrow{l}_1 y \overleftrightarrow{l}_2 , y sean $A, C \in \overleftrightarrow{l}_1 \cap S_1^1(O, r)$ y $B, D \in \overleftrightarrow{l}_2 \cap S_1^1(O, r)$ de forma tal que $\|\overrightarrow{VA}\| < \|\overrightarrow{VC}\|$ y $\|\overrightarrow{VB}\| < \|\overrightarrow{VD}\|$.

i) Si $O \in \overline{AD}$, entonces queda determinado el triángulo puro espacial $\mathbf{T} = \mathbf{T}[V, A, D]$, con vértice medio A .

El ángulo $\angle CAD$ es ángulo medio de \mathbf{T} y, por lo tanto,

$$\angle CAD = \angle ADV + \angle AVD = \angle ADB + \theta.$$

Dado que los ángulos $\angle ADB$ y $\angle CAD$ son ángulos inscritos en $S_1^1(O, r)$, se tiene que

$$\theta = \frac{\text{long}(\widehat{CD})}{2r} - \frac{\text{long}(\widehat{AB})}{2r}.$$

ii) Si $O \in \overline{CB}$, se procede en forma análoga a i).

iii) En otro caso, se traza la recta \overleftrightarrow{OV} y se determinan sus puntos de intersección con $S_1^1(O, r)$.

Sean $E, F \in \overleftrightarrow{OV} \cap S_1^1(O, r)$ tales que $\|\overrightarrow{VE}\| < \|\overrightarrow{VF}\|$.

Se distinguen dos situaciones:

1) Si $B \in \widehat{AE}$, sea $\theta' = \angle BVE$. Por casos anteriores, se tiene que

$$\theta + \theta' = \frac{\text{long}(\widehat{CF})}{2r} - \frac{\text{long}(\widehat{AE})}{2r}$$

y

$$\theta' = \frac{\text{long}(\widehat{DF})}{2r} - \frac{\text{long}(\widehat{BE})}{2r},$$

de ahí que

$$\theta = \left(\frac{\text{long}(\widehat{CF})}{2r} - \frac{\text{long}(\widehat{DF})}{2r} \right) - \left(\frac{\text{long}(\widehat{AE})}{2r} - \frac{\text{long}(\widehat{BE})}{2r} \right).$$

Entonces

$$\theta = \frac{\text{long}(\widehat{CD})}{2r} - \frac{\text{long}(\widehat{AB})}{2r}.$$

2) Si $A \in \widehat{BE}$, se procede en forma análoga a 1). ■

1.3.4. Ángulos interiores

Definición 16 Un ángulo de vértice V se dice interior a $S_1^1(O, r)$ si V es un punto interior de $S_1^1(O, r)$.

Nuevamente, solo quedan determinados dos tipos de ángulos interiores: los determinados por rectas espaciales y los determinados por rectas temporales.

Proposición 17 La medida de un ángulo $\angle AVB$ interior a $S_1^1(O, r)$, con vértice V y lados espaciales es dada por:

$$\angle AVB = \frac{\text{long}(\widehat{AB})}{2r} + \frac{\text{long}(\widehat{CD})}{2r}$$

o

$$\angle AVB = \frac{\text{long}(\widehat{AD})}{2r} + \frac{\text{long}(\widehat{BC})}{2r}$$

donde $C \in \overleftrightarrow{AV} \cap S_1^1(O, r)$ y $D \in \overleftrightarrow{BV} \cap S_1^1(O, r)$, tal que $C \neq A$ y $D \neq B$.

Demostración.

Sea $\angle AVB$ un ángulo interior a $S_1^1(O, r)$ con vértice V y lados espaciales. Se distinguen dos casos:

i) Si A y B pertenecen a la misma rama de $S_1^1(O, r)$, entonces se trazan las rectas \overleftrightarrow{AV} y \overleftrightarrow{BV} y se determinan los puntos de intersección con la otra rama de $S_1^1(O, r)$; a esos puntos se los denotará C y D respectivamente.

El ángulo $\angle AVB$ es ángulo medio del triángulo $\mathbf{T}[A, V, D]$, por lo que

$$\angle AVB = \angle DAV + \angle VDA = \angle DAC + \angle VDA.$$

Dado que los ángulos $\angle DAC$ y $\angle VDA$ son ángulos inscritos de $S_1^1(O, r)$, se obtiene que

$$\angle AVB = \frac{\text{long}(\widehat{AB})}{2r} + \frac{\text{long}(\widehat{CD})}{2r}.$$

ii) Si A y B pertenecen a distintas ramas de $S_1^1(O, r)$, se procede en forma análoga a i) y se obtiene que

$$\angle AVB = \frac{\text{long}(\widehat{AD})}{2r} + \frac{\text{long}(\widehat{BC})}{2r}. \blacksquare$$

1.3.5. Ángulos semi-inscritos en un círculo lorentziano

Definición 18 Sean A, V dos puntos en la misma rama de $S_1^1(O, r)$ y sea B un punto en la recta tangente a $S_1^1(O, r)$ en V tal que \overrightarrow{VA} y \overrightarrow{VB} son dos vectores temporales hacia futuro. El ángulo $\angle AVB$ es llamado un ángulo semi-inscrito en $S_1^1(O, r)$.

Sea $\angle AVB$ un ángulo semi-inscrito en $S_1^1(O, r)$. La magnitud φ de $\angle AVB$ está dada por

$$\varphi = \frac{\text{long}(\widehat{A'B'})}{2r} + \frac{\text{long}(\widehat{C'D'})}{2r}$$

donde $A' = \overleftrightarrow{AV} \cap (H_0^1)^+(O, r)$, $B' = \overleftrightarrow{BV} \cap (H_0^1)^+(O, r)$, $C' = \overleftrightarrow{AV} \cap (H_0^1)^-(O, r)$, $D' = \overleftrightarrow{BV} \cap (H_0^1)^-(O, r)$.

1.4. Polígonos

Las siguientes definiciones y resultados forman parte del artículo *On polygons in Lorentzian plane*, [19].

Definición 19 Para cada $n \geq 1$, se define una poligonal de orden n como el conjunto de puntos dados por $\overline{P_0P_1} \cup \dots \cup \overline{P_nP_{n+1}}$, donde los puntos $P_0, \dots, P_{n+1} \in L^2$ son los vértices y los segmentos orientados $\overline{P_0P_1}, \dots, \overline{P_nP_{n+1}}$ son los lados de la poligonal.

Dicha poligonal se notará $[P_0, \dots, P_{n+1}]$.

Definición 20 Si una poligonal $[P_0, \dots, P_{n+1}]$ es cerrada, es decir si $P_0 = P_{n+1}$, y si ninguna terna de vértices consecutivos es colineal, entonces la poligonal es llamada polígono y denotada por $\mathbf{P}[P_0, \dots, P_n]$.

Si un polígono tiene a lo sumo dos vértices diferentes, se dice que el polígono es degenerado. En el desarrollo que se presenta a continuación se asume que los polígonos son no degenerados.

Definición 21 Un polígono $\mathbf{P} = \mathbf{P}[P_0, \dots, P_n]$ se dice puro espacial, puro temporal o puro nulo si todo lado de \mathbf{P} es espacial, temporal o nulo, respectivamente.

Definición 22 Un polígono $\mathbf{P}[P_0, \dots, P_n]$ se dice regular si todos sus lados tienen igual longitud.

En forma clásica, un polígono $\mathbf{P}[P_0, \dots, P_n]$ se dice convexo si ninguno de sus lados es intersecado en un punto interior por la recta generada por otro de sus lados.

Los ángulos entre rectas nulas o rectas de distinta causalidad no están definidos. Es así que solo consideraremos ángulos de polígonos temporales puros o espaciales puros, diferenciando dos tipos.

Definición 23 Sea $\mathbf{P}[P_0, \dots, P_n]$ un polígono puro espacial o puro temporal. Se dice que P_i es un vértice medio si $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ y $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ tienen igual orientación espacial o temporal, respectivamente; se dice que P_i es un vértice no medio si $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ y $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ tienen diferente orientación espacial o temporal, respectivamente.

Aplicando un apropiado movimiento en el plano lorentziano, se puede asumir que en un polígono puro temporal y convexo $\mathbf{P}[P_0, \dots, P_n]$ el vértice P_0 coincide con el origen de coordenadas y es un vértice no medio.

Proposición 24 Un polígono puro temporal convexo $\mathbf{P}[P_0, \dots, P_n]$ tiene exactamente $n - 1$ vértices medios.

Demostración.

La demostración se deriva de las definiciones de polígono y polígono convexo. ■

Proposición 25 Sea $\mathbf{P} = \mathbf{P}[P_0, \dots, P_n]$ un polígono puro temporal y convexo. Si P_0 y P_j son los vértices no medios de \mathbf{P} , entonces

$$\widehat{P}_0 + \widehat{P}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \widehat{P}_i + \sum_{i=j+1}^n \widehat{P}_i.$$

Demostración.

Sin pérdida de generalidad, se consideran todos los triángulos $\mathbf{T}[P_0, P_i, P_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n - 1$, y se aplica a cada uno de ellos el resultado de [14]:

$$\widehat{P}_i = \widehat{P}_0 + \widehat{P}_{i+1}.$$

Sumando los correspondientes ángulos, se obtiene el resultado. ■

Proposición 26 Si $\mathbf{P}[P_0, \dots, P_n]$ es un polígono puro nulo, entonces n es impar.

Demostración.

Sean $u = (1, 1)$ y $v = (-1, 1)$, y sea $\mathbf{P} = \mathbf{P}[P_0, \dots, P_n]$ un polígono puro nulo. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $\overline{P_0P_1}$ es paralelo a u ; entonces, por construcción de \mathbf{P} , $\overline{P_1P_2}$ es paralelo a v , $\overline{P_2P_3}$ es paralelo a u y así sucesivamente.

Por ser \mathbf{P} cerrado, $\overline{P_nP_{n+1}}$ es paralelo a v y $P_0 = P_{n+1}$; de ahí que n es impar. ■

Observación 27 Todo polígono puro nulo es regular y su perímetro es igual a cero.

Proposición 28 El único polígono puro nulo y convexo es el cuadrilátero nulo.

Demostración.

Si $n = 3$, es inmediato que el cuadrilátero nulo $\mathbf{Q}[Q_0, Q_1, Q_2, Q_3]$ es convexo.

Sea $\mathbf{P} = \mathbf{P}[P_0, \dots, P_n]$ es un polígono puro nulo con $n \geq 5$ y sean $u = (1, 1)$ y $v = (-1, 1)$.

Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que $\overline{P_0P_1}$ es paralelo a u ; entonces $\overline{P_1P_3}$ o $\overline{P_1P_4}$ no está contenido en la región del plano limitada por \mathbf{P} . Por lo tanto, \mathbf{P} es cóncavo. ■

1.4.1. Cuadriláteros

Primero, se considerarán dos significativos ítems: área y ángulos. La definición de área se encuentra en [41].

Definición 29 El cuadrado del área de un paralelogramo con lados v_1 y v_2 es igual al valor absoluto $|\mathbf{q}(v_1, v_2)|$ si $\mathbf{q}(v_1, v_2) \neq 0$, donde

$$\mathbf{q}(v_1, v_2) = \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle^2.$$

Proposición 30 Sea ω el ángulo entre v_1 y v_2 . Si v_1 y v_2 son ambos espaciales o ambos temporales, entonces el área del paralelogramo \mathbf{P} de lados v_1 y v_2 es dada por

$$\text{área}(\mathbf{P}) = \|v_1\| \|v_2\| |\sinh \omega|.$$

Demostración.

Si v_1 y v_2 son espaciales, entonces

$$\begin{aligned} [\text{área}(\mathbf{P})]^2 &= \left| \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle^2 \right| \\ &= \left| \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 (1 - \cosh^2 \omega) \right| = \|v_1\| \|v_2\| |\sinh \omega|. \end{aligned}$$

Si v_1 y v_2 son temporales, entonces

$$\begin{aligned} [\text{área}(\mathbf{P})]^2 &= \left| \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle^2 \right| \\ &= \left| \left(-\|v_1\|^2 \right) \left(-\|v_2\|^2 \right) (1 - \cosh^2 \omega) \right| = \|v_1\| \|v_2\| |\sinh \omega|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En el plano euclideo es suficiente que dos ángulos de un cuadrilátero sean rectos para que el cuadrilátero sea un rectángulo. En el plano de Lorentz no es suficiente que dos lados de un cuadrilátero sean ortogonales para que el cuadrilátero tenga todos sus lados ortogonales, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 31 Sea $\mathbf{Q}[Q_0, Q_1, Q_2, Q_3]$ un cuadrilátero en el plano de Lorentz con vértices $Q_0 = (0, 0)$, $Q_1 = (0, \frac{2}{3})$, $Q_2 = (1, 1)$ y $Q_3 = (\frac{2}{3}, 0)$. Se tiene que $\langle \overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_3Q_0} \rangle = 0$ y $\langle \overrightarrow{Q_1Q_2}, \overrightarrow{Q_2Q_3} \rangle = 0$, pero $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ y $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ no son ortogonales, y $\overrightarrow{Q_3Q_0}$ y $\overrightarrow{Q_2Q_3}$ no son ortogonales.

El ejemplo anterior también muestra que diagonales nulas en un cuadrilátero no implican lados ortogonales.

Teorema 32 Sea $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}[Q_0, Q_1, Q_2, Q_3]$ un cuadrilátero en el plano de Lorentz tal que $Q_2 = -Q_0$, $\|\overrightarrow{Q_0Q_1}\| = \|\overrightarrow{Q_3Q_0}\| = a > 0$, y $\overrightarrow{Q_0}$, $\overrightarrow{Q_1}$ y $\overrightarrow{Q_3}$ son vectores espaciales. Entonces \mathbf{Q} es un cuadrilátero regular y $Q_3 = -Q_1$.

Demostración.

Sean $\|\overrightarrow{Q_2Q_3}\| = b > 0$, $\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\| = c > 0$ y $\|\overrightarrow{Q_0}\| = d > 0$. Se supone, por el absurdo, que $Q_3 \neq -Q_1$. Por ley del seno hiperbólico, se tiene que:

$$\frac{a}{2d} = \cosh \widehat{Q_0} = \sinh \widehat{Q_2} \quad \text{y} \quad \frac{b}{2d} = \cosh \widehat{Q_2} = \sinh \widehat{Q_0}$$

Dado que los triángulos $\mathbf{T}[Q_0, Q_2, Q_3]$ y $\mathbf{T}[Q_0, Q_1, Q_2]$ son orto triángulos, entonces

$$\frac{a}{2d} = \sinh \widehat{Q_0} = \sinh \widehat{Q_2} \Rightarrow \widehat{Q_0} = \widehat{Q_2},$$

por ser la función seno hiperbólico una función inyectiva. Entonces $c = b$ y $\mathbf{T}[Q_0, Q_2, Q_3] = \mathbf{T}[Q_0, Q_1, Q_2]$. Por ley del coseno hiperbólico, se tiene que $\langle \overrightarrow{Q_0}, \overrightarrow{Q_3} \rangle = -\langle \overrightarrow{Q_0}, \overrightarrow{Q_1} \rangle$. De aquí que $\frac{a^2+2d^2}{2} = \frac{a^2-2d^2}{2}$ y, por lo tanto, $d = 0$. Pero por hipótesis, $d > 0$. La contradicción proviene de suponer que $Q_3 \neq -Q_1$. Luego, $Q_3 = -Q_1$. ■

Capítulo 2

Espacio lorentziano tridimensional

2.1. El espacio L^3

Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ dos vectores en el espacio vectorial 3-dimensional \mathbb{R}^3 . Se define producto interno lorentziano de x e y por

$$\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Así, su elemento de arco, ds , está dado por

$$ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

El espacio \mathbb{R}^3 junto con esta métrica es llamado espacio tridimensional de Lorentz o de Lorentz–Minkowski. Escribimos L^3 o \mathbb{R}_1^3 en lugar de (\mathbb{R}^3, ds) .

Decimos que un vector x en L^3 es temporal si $\langle x, x \rangle < 0$, espacial si $\langle x, x \rangle > 0$, y nulo o de luz si $\langle x, x \rangle = 0$.

Para $x \in L^3$, es usual llamar a $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$ la norma del vector x .

Un vector temporal x es llamado hacia futuro si $\langle x, e_1 \rangle < 0$ y hacia pasado si $\langle x, e_1 \rangle > 0$, donde $e_1 = (1, 0, 0)$.

Cualesquiera sean $x, y \in L^3$, el producto vectorial lorentziano de x e y es definido por $x \wedge y = (x_3y_2 - x_2y_3, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$, [7] y [8].

En [8] encontramos que el producto exterior en L^3 puede ser expresado por medio de una matriz. Siendo I, E, F , vectores ortonormales que satisfacen

$$\langle I, I \rangle = -1, \langle E, E \rangle = 1, \langle F, F \rangle = 1,$$

tenemos que

$$x \wedge y = \det \begin{pmatrix} I & E & F \\ x_1 & -x_2 & -x_3 \\ -y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Como es usual, este producto satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} x \wedge x &= 0, & x \wedge y &= -y \wedge x, & \lambda x \wedge y &= x \wedge \lambda y = \lambda(x \wedge y), \\ \langle x \wedge y, x \rangle &= \langle x \wedge y, y \rangle = 0, & (x + y) \wedge z &= x \wedge z + y \wedge z, \\ (x \wedge y) \wedge z &= \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x. \end{aligned}$$

También en [8] se muestra la relación entre vectores de L^3 y pseudocuaterniones.

Decimos que x es ortogonal a y si $\langle x, y \rangle = 0$ y ambos no nulos. Claramente, $x \wedge y$ es ortogonal a x y a y .

Consideraremos una superficie M en L^3 expresando sus coordenadas por x_i . Cada x_i es una función real de dos parámetros reales definidos en un cierto intervalo.

La pseudoesfera S_1^2 en L^3 es la superficie

$$S_1^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in L^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$

Recordemos que S_1^2 puede ser parametrizada por:

$$\begin{cases} x_1 = \cos \theta \cosh \omega \\ x_2 = \sin \theta \cosh \omega \\ x_3 = \sinh \omega \end{cases}, \text{ donde } \omega \in \mathbb{R} \text{ y } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Una superficie M es no degenerada si para cada $p \in M$ y $x \neq 0$, $x \in T_p M$, existe algún $y \in T_p M$ con $\langle x, y \rangle \neq 0$. Si, además, para cada $p \in M$ la restricción de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $T_p M \times T_p M$ es definida positiva, entonces decimos que M es una superficie espacial; si para cada $p \in M$ la restricción $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $T_p M \times T_p M$ es una métrica lorentziana decimos que M es una superficie temporal, [5]. Si M es una superficie espacial o temporal entonces se dice que M es una superficie no nula.

La pseudoesfera de radio $r > 0$ es la superficie

$$S_1^2(r) = \{(x_1, x_2, x_3) \in L^3 : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\},$$

y el espacio hiperbólico de radio $r > 0$ es la superficie

$$H_0^2(r) = \{(x_1, x_2, x_3) \in L^3 : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -r^2\}.$$

La pseudoesfera $S_1^2(r)$ es una superficie temporal.

Una curva parametrizada es llamada temporal, espacial o nula si en cada punto su vector tangente es temporal, espacial o nulo, respectivamente.

El lugar geométrico $\mathcal{C}(O, r) = \{X \in \Pi_L : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} \rangle = r^2\}$ consta de un par de círculos de Lorentz coplanares y opuestos, con centro O y radio r , donde O es un punto en un plano temporal $\Pi_L \subset L^3$ y r es un número real positivo.

Los círculos de Lorentz son curvas temporales.

Decimos que la curva plana $\mathcal{E}(O, r) = \{X \in \Pi_E : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} \rangle = r^2\}$ es un círculo euclidiano con centro O y radio r , donde O es un punto en un plano espacial $\Pi_E \subset L^3$ y r es un número real positivo.

El círculo euclidiano $\mathcal{E}(O, r)$ es una curva espacial.

Sea x_1, x_2, x_3 un sistema de coordenadas en L^3 . En lo que sigue consideraremos el conjunto $\left\{ \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$ como base ortonormal o marco de referencia para L^3 , es decir, $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ son tres vectores ortogonales dos a dos tales que $\langle \partial_1, \partial_1 \rangle = -1$ y $\langle \partial_2, \partial_2 \rangle = \langle \partial_3, \partial_3 \rangle = 1$.

La conexión de Levi-Civita, $\bar{\nabla}$, de L^3 , de manera natural, da una función $\nabla : \Xi(M) \times \bar{\Xi}(M) \rightarrow \bar{\Xi}(M)$, llamada conexión inducida sobre $M \subset L^3$. En [41] encontramos la definición de conexión inducida.

Sean $V \in \Xi(M)$ y $X \in \bar{\Xi}(M)$, y para cada $p \in M$ sean \bar{V} y \bar{X} extensiones locales diferenciables de V y X sobre un entorno coordinado \mathcal{U} de p en L^3 . Entonces, la conexión inducida $\nabla_V X$ es definida sobre cada $\mathcal{U} \cap M$ como la restricción de $\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{X}$ a $\mathcal{U} \cap M$.

En [41], O'Neill define el operador de forma (*shape operator*) para una hipersuperficie de una variedad semi-riemanniana. En particular, si N es un campo vectorial unitario sobre $M \subset L^3$, entonces el $(1, 1)$ campo tensorial S sobre M que satisface, para todo $V, W \in \Xi(M)$, $\langle S(V), W \rangle = \langle II(V, W), N \rangle$ es llamado operador de forma de $M \subset L^3$ derivado de N .

En cada punto $p \in M$, S determina un operador lineal $S : T_p M \rightarrow T_p M$ definido por

$$S(\partial_{t_i}) = -\bar{\nabla}_{\partial_{t_i}} N, \quad i = 1, 2,$$

donde t_1, t_2 es un sistema de coordenadas en M .

2.2. Sobre la pseudoesfera

Ahora, queremos mostrar algunas caracterizaciones de la pseudoesfera en el espacio lorentziano tridimensional.

Problemas análogos en espacios euclidianos tridimensionales han sido estudiados, [40], [50], [51]. En [29] y [30], encontramos algunos resultados de [40] y [50] generalizados a espacios de Minkowski tridimensionales.

En [40], K. Ogiue y R. Takagi probaron el siguiente teorema junto con varias generalizaciones: Sea M una superficie en el espacio euclideo tridimensional E^3 , y supongamos que por cada $p \in M$, existen dos círculos de E^3 los cuales son tangentes entre sí en p , y están contenidos en M alrededor de p ; entonces M es localmente un plano o una esfera.

Caracterizaciones geométricas de una esfera en E^3 pueden hallarse en [50], donde N. Takeuchi probó la siguiente proposición: Sea M una superficie compacta, simplemente conexa y diferenciable en E^3 , y supongamos que por cada punto $p \in M$, pasan tres círculos de E^3 contenidos en M ; entonces M es una esfera. En [51], Takeuchi estudió un problema similar reemplazando la condición “tres círculos” por “un círculo contenido en un plano normal”.

Muchos de los resultados obtenidos por Takeuchi en [50] y por Ogiue y Takagi en [40] fueron generalizados al espacio tridimensional de Lorentz–Minkowski, L^3 , por S. Izuyima y A. Takiyama en [29] y [30].

En [29], se probó que si S es una superficie temporal en L^3 y, por cada punto $p \in S$, la intersección de S y $T_p S$ son dos rectas nulas, entonces S es una pseudoesfera.

En [30], se prueba el siguiente teorema:

Teorema A: Sea S una superficie temporal en L^3 . Supongamos que a través de cada $p \in S$, pasan dos pseudocírculos γ_1, γ_2 de L^3 tales que:

- i) γ_1, γ_2 están contenidos en S en un entorno de p ,
- ii) γ_1, γ_2 son tangentes entre sí para cada p .

Entonces S es localmente una pseudoesfera o un plano temporal.

En [51], Takeuchi enuncia que una esfera en E^3 puede caracterizarse como una superficie compacta diferenciable M la cual contiene un círculo que pasa por cada $p \in M$ contenido en un plano normal de M en p .

Uno de los problemas que surgen cuando queremos generalizar este resultado a espacio de Lorentz tridimensional es el hecho de que la pseudoesfera no es una superficie compacta. Por esta razón, en nuestro caso caracterizamos la pseudoesfera vía su sección normal y usamos fuertemente el operador de forma, [41].

En este sentido, aportamos los siguientes importantes resultados.

Teorema 33 *Sea M una superficie conexa temporal en L^3 . Supongamos que para cada $p \in M$, existen un par de círculos de Lorentz opuestos y un círculo euclídeo a través de p en M los cuales tienen la misma curvatura y ellos son secciones normales a la superficie en p en la dirección de un vector temporal orientado hacia el futuro y un vector espacial, respectivamente. Entonces M es una pseudoesfera.*

También tenemos los siguientes teoremas duales.

Teorema 34 *Sea M una superficie temporal conexa en L^3 . Para cada vector temporal hacia futuro u , supongamos que $u^\perp \cap M$ es un círculo euclideano sobre una sección normal de la superficie en la dirección de u . Entonces, M es localmente una pseudoesfera.*

Teorema 35 *Sea M una superficie temporal conexa en L^3 . Para cada vector espacial u , supongamos que $u^\perp \cap M$ es un par de círculos de Lorentz opuestos sobre una sección normal de la superficie en la dirección de u . Entonces M es localmente una pseudoesfera.*

En [49] se encuentra una definición de sección normal, y ahora la generalizamos del espacio euclideano tridimensional al espacio lorentziano tridimensional.

Las siguientes definiciones y lemas conducen al resultado principal.

Definición 36 *Sea M una superficie no nula en L^3 . Una sección normal en $p \in M$ es una curva que es intersección de M con el plano en p que contiene al vector u_p y al vector normal N_p en p .*

En lo que sigue supondremos que las curvas están parametrizadas por el parámetro tiempo propio t , el cual es la contrapartida lorentziana del parámetro longitud de arco.

Algunas propiedades del operador de forma se enuncian en los dos lemas siguientes.

Lema 37 *Sea σ una curva no nula que es intersección de una superficie no nula M y un plano no nulo Π . Para cada p en σ , N_p y V_p denotan vectores normales de M y Π , respectivamente. Si $\langle N_p, V_p \rangle$ es constante a lo largo de σ , entonces $S(\sigma') = \lambda \sigma'$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Lema 38 *Sea σ la sección normal en p en la dirección de u_p . Entonces $k_n(u_p) = \pm \kappa_\sigma(0)$, donde $k_n(u_p)$ denota la curvatura normal.*

Las definiciones de pseudocírculos en [30] evitan la mención a la condición de causalidad de las curvas. Elegimos decir que una curva temporal (espacial) en L^3 es un círculo de Lorentz (euclideano) si existe un plano temporal (espacial) π en L^3 tal que esta curva es un círculo de Lorentz (euclideano) de π en el sentido clásico.

Observación 39 Si α es la sección normal de M en p en la dirección de un vector hacia pasado, entonces $M = S_1^2 / -1$. Si la orientación temporal no es considerada, esto es, si α es la sección normal de M en p en la dirección de un vector temporal, entonces $M = S_1^2 / \pm 1$.

2.3. Una superficie especial

El plano proyectivo es un ejemplo de variedad diferenciable abstracta, tal vez una de las primeras en la historia matemática, [2]. Es bien sabido que el plano proyectivo P^2 es obtenido por identificación de puntos diametralmente opuestos de la esfera euclideana bidimensional, o sea, puntos antipodales. Si dos puntos antipodales $p_1, p_2 \in S^2$ definen un punto p en P^2 , podemos tomar dos discos abiertos U_1 y U_2 en S^2 alrededor de p_1 y p_2 , respectivamente, tales que los puntos de U_2 sean antipodales de los de U_1 . Entonces los pares de puntos pertenecientes al par de entornos U_1 y U_2 conforman un entorno de p en P^2 . La topología de P^2 es definida tomando como entorno de p un conjunto que contenga un entorno del tipo antes descrito, [44].

La compactificación conforme de un cono como espacio de Minkowski fue estudiada por Penrose, [43], [44], Frauendiener, [25], y Wald, [54], entre otros.

Este tema involucra cuestiones de la Física y una de las ideas principales es mantener invariantes las propiedades de causalidad y, en consecuencia, las propiedades de la propagación de la onda. Para obtener un espacio de Minkowski compactificado (Penrose, [44], pp. 296–298), el vértice del cono es también considerado como punto final pasado y futuro de una curva causal; entonces los tres puntos son identificados y se presentan como uno.

Matemáticamente, el teorema de inmersión de Whitney (*imbedding*), [2], asegura la inclusión diferenciable de una variedad cerrada en \mathbb{R}^6 , ver Penrose, [44].

Nuestro punto de vista es diferente del expuesto.

Queremos construir un cono proyectivo compactificado en espacios tridimensionales, tanto euclideanos como lorentzianos, sin otra consideración que la continuidad, es decir, esencialmente desde el punto de vista topológico.

Ya que un cono de luz está en el espacio de Lorentz tridimensional, nos cuestionamos acerca de un cono de luz proyectivo, al cual llamaremos cono proyectivo lorentziano.

En lo que sigue obtendremos la compactificación con un punto o de Alexandroff de un cono doble en el espacio euclideano tridimensional; este espacio compacto es notado por X^* . Consideraremos el espacio cociente X^*/\sim , donde \sim indica una relación de equivalencia en X^* definida por una aplicación antipodal. Luego construiremos el cono proyectivo euclideano uniendo dos espacios cocientes X^*/\sim y S^1/\sim . Por último, daremos una estructura topológica al cono proyectivo euclideano.

Para construir el cono proyectivo lorentziano, primero obtendremos una compactificación Y^* de un cono de luz en el espacio de Lorentz tridimensional; en este caso no puede

aplicarse la compactificación con un punto. El cono proyectivo lorentziano es construido uniendo dos espacios cocientes: Y^*/\sim y S^1/\sim .

Los detalles de ambas construcciones pueden encontrarse en [13].

2.3.1. Cono proyectivo euclideo

Sea $X \subset \mathbb{R}^3$ una superficie cuadrática dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

esto es, X es un doble cono en el espacio euclideo tridimensional. Notamos los subconjuntos de X :

$$\begin{aligned} X^+ &= \{(x, y, z) \in X : z > 0\}, \\ X^- &= \{(x, y, z) \in X : z < 0\}, \\ B_\varepsilon^+ &= \{(x, y, z) \in X^+ : z > \varepsilon > 0\}, \\ B_\varepsilon^- &= \{(x, y, z) \in X^- : z < -\varepsilon; \varepsilon > 0\}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que $X = X^+ \cup X^- \cup \{o\}$, donde $o = (0, 0, 0)$.

En lo sucesivo, consideraremos el espacio topológico (X, τ_X) , donde τ_X es una topología natural inducida desde \mathbb{R}^3 .

Un espacio topológico se dice compacto si todo cubrimiento por abiertos tiene subcubrimiento finito. Formalmente, esto significa que para toda colección arbitraria $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $\bigcup_{i \in I} U_i = X$, existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que $\bigcup_{i \in J} U_i = X$.

Observemos que (X, τ_X) es un espacio no compacto y que $B_\varepsilon^+, B_\varepsilon^-$ son subconjuntos abiertos de X .

Ahora, volvamos a la compactificación con un punto de un espacio no compacto, [32].

Teorema 40 *Para cualquier espacio no compacto X la compactificación con un punto de X se obtiene agregando un punto extra $q \notin X$ (comúnmente llamado punto del infinito) y definiendo como conjuntos abiertos del nuevo espacio a los abiertos de X junto con los conjuntos de la forma $G \cup \{q\}$, donde G es un subconjunto abierto de X tal que $X^* \setminus (G \cup \{q\})$ es un subconjunto cerrado y compacto de X . La compactificación con un punto de X es Hausdorff si y solo si X es Hausdorff y localmente compacto.*

Sea q un punto en $\mathbb{R}^3 \setminus X$. Definimos el espacio

$$X^* = X \cup \{q\}.$$

La topología τ^* define los conjuntos abiertos de X^* como los conjuntos abiertos de X junto con los conjuntos de la forma $G \cup \{q\}$, donde $G = A \cup B_\varepsilon^+ \cup B_\varepsilon^-$ y A es un subconjunto abierto de X . Consideraremos $X^* = X \cup \{q\}$ junto con la topología τ^* .

Teorema 41 *(X^*, τ^*) es un espacio compacto.*

Para facilitar la comprensión del cono proyectivo, X^* puede ser visualizado como un bicono, es decir, como dos conos simples identificando sus respectivas bases.

Consideramos el espacio cociente X^*/\sim , donde \sim es una relación de equivalencia sobre X^* definida por la aplicación antipodal sobre $X^+ \cup X^-$, y $q \sim o$.

Notamos por $[p] = \{p' \in X^* : p \sim p'\}$ la clase de equivalencia de p , y para un subconjunto $S \subset X^*$, notamos por $[S]$ al conjunto $\bigcup_{p \in S} [p]$, o sea, todo p es equivalente a algún elemento de S .

Consideremos el conjunto de clases de equivalencia X^*/\sim y notemos por $\pi : X^* \rightarrow X^*/\sim$ la proyección natural que aplica cada $p \in X^*$ en su clase de equivalencia $\pi(p) = [p]$. Con esta notación, $W \subset X^*/\sim$ es un subconjunto abierto si $\pi^{-1}(W)$ es abierto en X^* ; la proyección π es entonces continua.

El espacio cociente S^1/\sim , donde \sim denota la relación de equivalencia sobre S^1 definida por la aplicación antipodal sobre S^1 , es bien conocido.

Teorema 42 Sean S^1 con la topología inducida y $\sigma : S^1 \rightarrow S^1/\sim$ la aplicación proyección, entonces S^1/\sim es un espacio compacto.

Definición 43 Llamaremos cono proyectivo euclideo a $\Lambda_E^2 = X^*/\sim \cup S^1/\sim$.

En lo que sigue, por entorno entenderemos entorno abierto.

Teorema 44 El cono proyectivo euclideo es un espacio topológico.

2.3.2. Cono proyectivo lorentziano

Siguiendo [41], sea L^3 el espacio de Lorentz tridimensional de curvatura cero con signatura $(+, +, -)$, y sea $Y' \subset L^3$ la superficie cuadrática dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

es decir, Y' es un cono de luz en L^3 .

Indicamos los subconjuntos de Y' :

$$\begin{aligned} Y^+ &= \{(x, y, z) \in Y' : z > 0\}, \\ Y^- &= \{(x, y, z) \in Y' : z < 0\}, \\ B_\varepsilon^+ &= \{(x, y, z) \in Y^+ : z > \varepsilon > 0\}, \\ B_\varepsilon^- &= \{(x, y, z) \in Y^- : z < -\varepsilon; \varepsilon > 0\}, \\ V_\delta^+ &= \{(x, y, z) \in Y^+ : 0 < z < \delta\}, \\ V_\delta^- &= \{(x, y, z) \in Y^- : -\delta < z < 0; \delta > 0\}. \end{aligned}$$

Siguiendo la notación y técnicas de [5], consideramos el espacio topológico (Y, τ_Y) , donde $Y = Y^+ \cup Y^-$ y τ_Y es la topología inducida por la topología de Alexandrov de L^3 . Sean $p, q \in L^3$, y, de manera clásica, notamos $G_{pq} = I^+(p) \cap I^-(q)$ un subconjunto abierto de L^3 provisto con la topología de Alexandrov.

Observemos que (Y, τ_Y) es un espacio no compacto y que $B_\varepsilon^+, B_\varepsilon^-, V_\delta^+, V_\delta^-$ son subconjuntos abiertos de Y .

Lema 45 Sea $e : L^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación inclusión de L^3 en \mathbb{R}^3 . Si $p \neq q \in L^3$, entonces existen $B(\varepsilon)$ y $B(\varepsilon')$ dos bolas abiertas en \mathbb{R}^3 tales que $B(\varepsilon) \subseteq e(G_{pq}) \subseteq B(\varepsilon')$, donde $\varepsilon, \varepsilon'$ son dos números reales positivos. Recíprocamente, $\forall \varepsilon > 0$, existen puntos $p, q, p', q' \in L^3$ tales que $e(G_{pq}) \subseteq B(\varepsilon) \subseteq e(G_{p'q'})$.

En lo que sigue, notaremos el punto $(0,0,0)$ por o . Sea q un punto en $L^3 \setminus (Y \cup \{o\})$; definimos el espacio

$$Y^* = Y \cup \{q\} \cup \{o\}.$$

La topología τ^* está definida por los abiertos de Y^* como abiertos de Y junto con los conjuntos de la forma $G \cup \{o, q\}$, donde $G = A \cup B_\varepsilon^+ \cup B_\varepsilon^- \cup V_\delta^+ \cup V_\delta^-$ y A es un subconjunto abierto de Y . Consideramos el espacio (Y^*, τ^*) .

Teorema 46 (Y^*, τ^*) es un espacio topológico compacto.

Considerando el espacio cociente Y^*/\sim , donde \sim es una relación de equivalencia sobre Y^* definida por la aplicación antipodal sobre $Y^+ \cup Y^-$, y $q \sim o$, tenemos:

Definición 47 Llamamos cono proyectivo lorentziano a $\Lambda_L^2 = Y^*/\sim \cup S^1/\sim$.

Teorema 48 El cono proyectivo lorentziano es un espacio topológico.

2.3.3. Propiedades topológicas

Hemos obtenido por diferentes métodos la compactificación del cono doble euclideo y del cono de luz lorentziano, X^* e Y^* , respectivamente.

Observamos que esos espacios tienen diferentes propiedades topológicas.

Teorema 49 (X^*, τ^*) es un espacio Hausdorff pero (Y^*, τ^*) no lo es.

A pesar de este resultado, obtenemos que el cono proyectivo lorentziano es un espacio Hausdorff. Esta y otras propiedades se muestran en el siguiente

Teorema 50 Tanto el cono proyectivo euclideo como el lorentziano, satisfacen la propiedad de ser:

- i) espacio compacto;
- ii) espacio Hausdorff;
- iii) espacio normal.

2.4. Algunas aplicaciones proyección

En la Geometría Euclideana, muchas de las proyecciones pueden ser, al menos, parcialmente visualizadas ya sea sobre el cilindro, el cono o el plano.

Estudiaremos cuatro aplicaciones proyección definidas sobre S_1^2 a superficies en el espacio tridimensional de Lorentz, L^3 , con curvatura cero. Esas superficies son los cilindros $\mathbb{R} \times S_1^1$, $S^1 \times L$ y $\mathbb{R} \times H_0^1$, y el plano lorentziano, L^2 . En consecuencia, estudiaremos las aplicaciones:

- $\mathbb{R} \times S_1^1$ -proyección cilíndrica de S_1^2 sobre $\mathbb{R} \times S_1^1$,
- $S^1 \times L$ -proyección cilíndrica de S_1^2 sobre $S^1 \times L^1$,
- $\mathbb{R} \times H_0^1$ -proyección cilíndrica de S_1^2 sobre $\mathbb{R} \times H_0^1$,
- las proyecciones ortográficas y estereográficas sobre L^2 .

Encontramos que $\mathbb{R} \times S_1^1$ -proyección cilíndrica y $\mathbb{R} \times H_0^1$ -proyección cilíndrica sobre $S_1^2 - \{x \in S_1^2; |x_1| = 1\}$ son difeomorfismos. También definimos la extensión de $\mathbb{R} \times S_1^1$ -proyección cilíndrica y $\mathbb{R} \times H_0^1$ -proyección cilíndrica sobre S_1^2 , las cuales son *1a1* y sobre-yectivas.

La proyección de la esfera euclideana sobre cilindros rectos es una aplicación geodésica, [49]. La $S^1 \times L$ -proyección cilíndrica preserva las geodésicas no nulas y la causalidad de las curvas geodésicas no nulas.

Análogo al caso euclideano, la proyección ortográfica de S_1^2 sobre L^2 no es una aplicación *1a1*.

La proyección estereográfica de $S_1^2 - \{x \in S_1^2; x_1 = 1\}$ sobre $L^2 - H_0^1$ es un difeomorfismo. Definimos la proyección estereográfica extendida de S_1^2 sobre $L^2 - \{(0, 0, -1)\}$ la cual es *1a1* y sobre-yectiva. Así encontramos que, en el espacio tridimensional de Lorentz, es necesario agregar dos puntos a la pseudoesfera para compactificarla. Además, el plano de Lorentz es simplemente conexo pero la pseudoesfera no lo es; para preservar esta propiedad es necesario remover un punto del plano.

2.4.1. La proyección cilíndrica

Clásicamente, una C -proyección cilíndrica de puntos sobre una pseudoesfera unitaria S_1^2 centrada en O , consiste en extender la recta OP para cada punto $P \in S_1^2$ hasta su intersección con un cilindro C tangente a S_1^2 .

En lo que sigue, notaremos el producto torcido (*warped*) por \times , la recta lorentziana por L , y

$$\begin{aligned} S_1^1 &= \{x \in L^2 : \langle x, x \rangle = 1\}, \\ H_0^1 &= \{x \in L^2 : \langle x, x \rangle = -1\}, \\ S^1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Recordemos que $\mathbb{R} \times S_1^1$, $S^1 \times L$ y $\mathbb{R} \times H_0^1$ son los cilindros en L^3 , y también son superficies no nulas con curvatura cero ([12]).

Distinguimos tres casos:

a) $C = \mathbb{R} \times S_1^1$

Tomemos el cilindro en L^3 definido por:

$$\mathbb{R} \times S_1^1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in L^3 : x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$

Las dos hojas de $\mathbb{R} \times S_1^1$ están caracterizadas por $x_2 > 0$ y $x_2 < 0$. Sigue que $\mathbb{R} \times S_1^1$ admite dos parametrizaciones

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \pm \cosh \omega \\ x_3 = \sinh \omega \end{cases}, \text{ donde } \omega, t \in \mathbb{R}.$$

Observemos que el cilindro $\mathbb{R} \times S_1^1$ es tangente a S_1^2 en los puntos $(0, \pm \cosh \omega, \sinh \omega)$.

El proceso geométrico antes mencionado no puede aplicarse sobre rectas nulas determinadas por la intersección de S_1^2 con los planos $x_1 = -1$ y $x_1 = 1$, esto es, sobre las curvas $(-1, \pm u, u)$ y $(1, \pm u, u)$, respectivamente, con $u \in \mathbb{R}$.

Definición 51 Llamamos $\Lambda_1 = \{x \in S_1^2; |x_1| = 1\}$ y $\Lambda_2 = \{x \in \mathbb{R} \times S_1^1; |x_1| = 1\}$. La $\mathbb{R} \times S_1^1$ -proyección cilíndrica es definida por

$$\pi_1 : S_1^2 - \Lambda_1 \rightarrow \mathbb{R} \times S_1^1 - \Lambda_2$$

tal que

$$\pi_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x_2^2 - x_3^2}}(x_1, x_2, x_3) & \text{si } |x_2| > |x_3|, \\ \frac{1}{\sqrt{x_3^2 - x_2^2}}(x_1, x_3, x_2) & \text{si } |x_2| < |x_3|, \end{cases}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in S_1^2 - \Lambda_1$.

Proposición 52 La aplicación π_1 es un difeomorfismo.

Definición 53 Una $\mathbb{R} \times S_1^1$ -proyección cilíndrica extendida se define por

$$\bar{\pi}_1 : S_1^2 \rightarrow \mathbb{R} \times S_1^1 - \{(1, -1, 0), (-1, -1, 0)\}$$

tal que

$$\bar{\pi}_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x_2^2 - x_3^2}}(x_1, x_2, x_3) & \text{si } |x_1| \neq 1 \text{ y } |x_2| > |x_3|, \\ \frac{1}{\sqrt{x_3^2 - x_2^2}}(x_1, x_3, x_2) & \text{si } |x_1| \neq 1 \text{ y } |x_2| < |x_3|, \\ (x_1, \sqrt{1 + x_3^2}, x_3) & \text{si } |x_1| = 1 \text{ y } x_2 = x_3, \\ (x_1, -\sqrt{1 + x_3^2}, x_3) & \text{si } |x_1| = 1 \text{ y } x_2 = -x_3 \neq 0, \end{cases}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in S_1^2$.

Proposición 54 *La aplicación $\bar{\pi}_1$ es 1a1 y sobreyectiva. La aplicación inversa está dada por*

$$\bar{\pi}_1^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x_1^2+1}}(x_1, x_2, x_3) & \text{si } |x_1| \neq 1 \text{ y } |x_2| > |x_3|, \\ \frac{1}{\sqrt{x_1^2-1}}(x_1, x_3, x_2) & \text{si } |x_1| \neq 1 \text{ y } |x_2| < |x_3|, \\ (x_1, x_3, x_3) & \text{si } |x_1| = 1 \text{ y } x_2 = \sqrt{1+x_3^2}, \\ (x_1, -x_3, x_3) & \text{si } |x_1| = 1 \text{ y } x_2 = -\sqrt{1+x_3^2}, \end{cases}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times S_1^1 - \{(1, -1, 0), (-1, -1, 0)\}$.

Observación 55 *La proyección cilíndrica en el espacio euclideo está dada por*

$$\sigma_1 : S^2 - \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R},$$

removiendo dos puntos de S^2 , y la $\mathbb{R} \times S_1^1$ -proyección cilíndrica extendida en el espacio de Lorentz está dada por

$$\bar{\pi}_1 : S_1^2 \rightarrow \mathbb{R} \times S_1^1 - \{(1, -1, 0), (-1, -1, 0)\},$$

removiendo dos puntos del cilindro.

b) $C = S^1 \times L$

En el espacio tridimensional de Lorentz, existe una única posición relativa para el cilindro recto en la aplicación proyección tocando la pseudoesfera a lo largo de la curva $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ y paralela al eje x_3 .

Recordemos que el cilindro $S^1 \times L$ en L^3 está definido por

$$S^1 \times L = \{(x_1, x_2, x_3) \in L^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

y dado por

$$\begin{cases} x_1 = \cos \theta \\ x_2 = \sin \theta \\ x_3 = t \end{cases}, \text{ donde } t \in \mathbb{R} \text{ y } 0 < \theta < 2\pi.$$

Sea $\Sigma = \{x \in S^1 \times L; -1 < x_3 < 1\}$.

Según el proceso geométrico antes mencionado, definimos $S^1 \times L$ -proyección cilíndrica.

Definición 56 *La $S^1 \times L$ -proyección cilíndrica*

$$\pi_2 : S_1^2 \rightarrow \Sigma$$

está definida por

$$\pi_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{1+x_3^2}}(x_1, x_2, x_3)$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in S_1^2$.

La $S^1 \times L$ -proyección cilíndrica puede ser visualizada geoméricamente como teniendo una pseudoesfera S_1^2 torcida alrededor de Σ .

Proposición 57 *La $S^1 \times L$ -proyección cilíndrica es un difeomorfismo con aplicación inversa*

$$\pi_2^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{1-x_3^2}}(x_1, x_2, x_3).$$

Notemos que π_2 aplica geodésicas temporales de S_1^2 en rectas verticales en $S^1 \times L$ (es decir, geodésicas temporales de cilindro), y las geodésicas espaciales de S_1^2 en círculos euclidianos en $S^1 \times L$ (es decir, geodésicas espaciales de cilindro).

Así, decimos que la $S^1 \times L$ -proyección cilíndrica preserva geodésicas no nulas y preserva la causalidad de las curvas geodésicas no nulas.

c) $C = \mathbb{R} \times H_0^1$

Este cilindro está definido por

$$\mathbb{R} \times H_0^1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in L^3 : x_2^2 - x_3^2 = -1\}.$$

Las dos hojas de $\mathbb{R} \times H_0^1$ están caracterizadas por $x_3 > 0$ y $x_3 < 0$. Sigue que $\mathbb{R} \times H_0^1$ admite las parametrizaciones

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \sinh \omega \\ x_3 = \pm \cosh \omega \end{cases}, \text{ donde } \omega, t \in \mathbb{R}.$$

No podemos extender la recta OP si P yace en la recta de luz determinada por la intersección de S_1^2 con los planos $x_1 = -1$ y $x_1 = 1$.

Definición 58 *Consideremos $\Lambda_1 = \{x \in S_1^2; |x_1| = 1\}$ y $\Lambda_3 = \{x \in \mathbb{R} \times H_0^1; |x_1| = 1\}$. La $\mathbb{R} \times H_0^1$ -proyección cilíndrica*

$$\pi_3 : S_1^2 - \Lambda_1 \rightarrow \mathbb{R} \times H_0^1 - \Lambda_3$$

está definida por

$$\pi_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x_3^2 - x_2^2}}(x_1, x_2, x_3) & \text{si } |x_2| < |x_3|, \\ \frac{1}{\sqrt{x_2^2 - x_3^2}}(x_1, x_3, x_2) & \text{si } |x_2| > |x_3|, \end{cases}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in S_1^2 - \Lambda_1$.

Proposición 59 *La aplicación π_3 es un difeomorfismo.*

Definición 60 Una $\mathbb{R} \times H_0^1$ -proyección cilíndrica extendida

$$\bar{\pi}_3 : S_1^2 \rightarrow \mathbb{R} \times H_0^1 - \{(1, 0, -1), (-1, 0, -1)\}$$

está definida por

$$\bar{\pi}_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x_3^2 - x_2^2}}(x_1, x_2, x_3) & \text{si } |x_1| \neq 1 \text{ y } |x_2| < |x_3|, \\ \frac{1}{\sqrt{x_2^2 - x_3^2}}(x_1, x_3, x_2) & \text{si } |x_1| \neq 1 \text{ y } |x_2| > |x_3|, \\ \begin{pmatrix} x_1, x_2, \sqrt{1+x_2^2} \end{pmatrix} & \text{si } |x_1| = 1 \text{ y } x_2 = x_3, \\ \begin{pmatrix} x_1, x_2, -\sqrt{1+x_2^2} \end{pmatrix} & \text{si } |x_1| = 1 \text{ y } x_2 = -x_3 \neq 0, \end{cases}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in S_1^2$.

Proposición 61 La aplicación $\bar{\pi}_3$ es 1a1 y sobreyectiva. Su aplicación inversa está dada por

$$\bar{\pi}_3^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}}(x_1, x_2, x_3) & \text{si } |x_1| \neq 1 \text{ y } |x_2| < |x_3|, \\ \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}}(x_1, x_3, x_2) & \text{si } |x_1| \neq 1 \text{ y } |x_2| > |x_3|, \\ \begin{pmatrix} x_1, x_2, x_2 \end{pmatrix} & \text{si } |x_1| = 1 \text{ y } x_3 = \sqrt{1+x_2^2}, \\ \begin{pmatrix} x_1, x_2, -x_2 \end{pmatrix} & \text{si } |x_1| = 1 \text{ y } x_3 = -\sqrt{1+x_2^2}, \end{cases}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times H_0^1 - \{(1, 0, -1), (-1, 0, -1)\}$.

Observación 62 Análogamente a la $\mathbb{R} \times S_1^1$ -proyección cilíndrica extendida, en la $\mathbb{R} \times H_0^1$ -proyección cilíndrica extendida removemos dos puntos del cilindro.

2.4.2. Proyección ortográfica

En la geometría de Lorentz, la proyección ortográfica es una proyección paralela respecto de la cual las rectas proyectadas son ortogonales al plano proyectado.

Con respecto a la signatura $(+, +, -)$, los planos $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ son congruentes al plano L^2 . Además, notemos que estos planos difieren en un movimiento rígido euclidiano. Sin pérdida de generalidad, elegimos el plano $x_1 = 0$ para desarrollar nuestro estudio.

Definición 63 Sea Π el plano $x_1 = 0$. Entonces la proyección ortográfica es la aplicación

$$\pi_O : S_1^2 \rightarrow \Pi,$$

tal que $\pi_O(x_1, x_2, x_3) = (0, x_2, x_3)$ para todo $(x_1, x_2, x_3) \in S_1^2$.

Notemos que $\pi_O(x_1, x_2, x_3) = \pi_O(-x_1, x_2, x_3)$, esto es, π_O no es 1a1.

Además, las rectas de luz determinadas por la intersección de S_1^2 con planos $x_1 = -1$ y $x_1 = 1$ son enviadas a rectas de luz en Π . En particular, $\pi_O(1, 0, 0) = \pi_O(-1, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

La proyección ortográfica no preserva geodésicas. Así, π_O aplica geodésicas espaciales de S_1^2 en segmentos de rectas horizontales (es decir, parte de geodésicas espaciales de Π) pero π_O aplica la mayoría de las geodésicas temporales de S_1^2 en ramas de un círculo lorentziano en Π , las cuales no son geodésicas temporales del plano lorentziano.

2.4.3. Proyección estereográfica

En lugar de considerar rectas proyectivas paralelas, la proyección estereográfica es proyectada desde un punto fijo de S_1^2 en el plano proyectivo. Esos puntos fijos son llamados polos de proyección.

En lo que sigue consideraremos al punto $N = (1, 0, 0)$ como un polo.

Diferentes fórmulas de transformación son posibles dependiendo de las posiciones relativas del plano proyectivo y el eje x_3 . Sin pérdida de generalidad, elegimos el plano $\Pi : x_1 = 0$ como plano proyectivo.

Sea $P = (x_1, x_2, x_3) \in S_1^2$. Extendemos la recta \overleftrightarrow{NP} hasta intersectar el plano Π si $x_1 \neq 1$.

Definición 64 Sea $\Lambda_4 = \{x \in S_1^2; x_1 = 1\}$. Definimos proyección estereográfica π_N por:

$$\pi_N : S_1^2 - \Lambda_4 \rightarrow \Pi - H_0^1$$

tal que

$$\pi_N(x_1, x_2, x_3) = \left(0, \frac{x_2}{1-x_1}, \frac{x_3}{1-x_1}\right)$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in S_1^2 - \Lambda_4$.

Sea $\Pi_a : x_1 = a$ un plano en L^3 . Estos planos son congruentes a L^2 para todo $a \in \mathbb{R}$.

Observamos que si $-1 < a < 1$ y $P \in S_1^2 \cap \Pi_a$, entonces $\pi_N(P)$ es espacial en Π .

Si $a < -1$ y $P \in S_1^2 \cap \Pi_a$, entonces $\pi_N(P)$ es temporal en Π y su signo se preserva.

Si $a > 1$ y $P \in S_1^2 \cap \Pi_a$, entonces $\pi_N(P)$ es temporal en Π y su signo es preservado.

Si $a = -1$ y $P = (-1, x_2, \pm x_2)$, entonces $\pi_N(P)$ son nulos en Π .

Proposición 65 La aplicación π_N es un difeomorfismo.

Definición 66 Una proyección estereográfica extendida $\bar{\pi}_N$ está definida por:

$$\bar{\pi}_N : S_1^2 \rightarrow \Pi - \{(0, 0, -1)\}$$

tal que

$$\bar{\pi}_N(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \left(0, \frac{x_2}{1-x_1}, \frac{x_3}{1-x_1}\right) & \text{si } x_1 \neq 1 \text{ y } |x_2| \neq |x_3|, \\ \left(0, x_2, \sqrt{1+x_2^2}\right) & \text{si } x_1 = 1 \text{ y } x_2 = x_3, \\ \left(0, x_2, -\sqrt{1+x_2^2}\right) & \text{si } x_1 = 1 \text{ y } x_2 = -x_3 \neq 0, \end{cases}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in S_1^2$.

Proposición 67 La aplicación $\bar{\pi}_N$ es 1a1 y sobreyectiva. Su inversa está dada por

$$\bar{\pi}_N^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x_2^2 - x_3^2 + 1}(x_2^2 - x_3^2 - 1), 2x_2, 2x_3\right) & \text{si } |x_2| \neq |x_3|, \\ (1, x_2, x_2) & \text{si } x_3 = \sqrt{1+x_2^2}, \\ (1, x_2, -x_2) & \text{si } x_3 = -\sqrt{1+x_2^2}, \end{cases}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \Pi - \{(0, 0, -1)\}$.

Observación 68 *La clásica proyección estereográfica en el espacio euclideo está dada por*

$$\sigma_N : S^2 - \{(1, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

removiendo un punto de S^2 , y la proyección estereográfica extendida en el espacio de Lorentz está dada por

$$\bar{\pi}_N : S_1^2 \rightarrow L^2 - \{(0, 0, -1)\}$$

removiendo un punto del plano. Entonces, es necesario agregar dos puntos a la pseudoesfera para compactificarla.

Capítulo 3

Espacio lorentziano n -dimensional

3.1. El espacio L^n

Sean x e y dos vectores en el espacio vectorial n -dimensional \mathbb{R}^n . Es bien sabido que el producto interno lorentziano de x e y está definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n.$$

El elemento longitud de arco, ds , está dado por

$$ds^2 = g = \sum_{i=1}^{n-1} dx_i^2 - dx_n^2.$$

El espacio \mathbb{R}^n junto con esta métrica es llamado espacio lorentziano n -dimensional o n -espacio de Lorentz. Escribimos L^n o \mathbb{R}_1^n , en lugar de (\mathbb{R}^n, ds) .

Los espacios lorentzianos de dimensión 2 y 3 fueron desarrollados con más detalle en los Capítulos 1 y 2 de este trabajo, respectivamente.

Decimos que un vector x en L^n es temporal si $\langle x, x \rangle < 0$, espacial si $\langle x, x \rangle > 0$, y nulo si $\langle x, x \rangle = 0$. Los vectores nulos son también llamados vectores de luz.

Decimos que x es ortogonal a y si $\langle x, y \rangle = 0$ y ambos no nulos.

Dado x en L^n , es usual llamar norma lorentziana de x a $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$. Decimos que un vector x es unitario si $\|x\| = 1$, o sea, si $\langle x, x \rangle = 1$ o $\langle x, x \rangle = -1$.

La base canónica de L^n está formada por un vector temporal y $n - 1$ vectores espaciales, a saber: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

En L^n se tiene definida una orientación temporal: un vector temporal $x \in L^n$ se dice temporal hacia futuro si $\langle x, e_1 \rangle < 0$, y temporal hacia pasado si $\langle x, e_1 \rangle > 0$.

Como en [5], decimos que M es una superficie no nula si en cada punto $p \in M$ su plano tangente $T_p M$ está munido con una métrica lorentziana o definida positiva.

Una curva parametrizada es llamada temporal, espacial o nula si en cada punto, su vector tangente es temporal, espacial o nulo, respectivamente.

3.2. Curvas nulas

Sea (L^n, g) un espacio lorentziano n -dimensional de curvatura cero donde la signatura de g es $(+, -, \dots, -)$ y ∇ es su conexión de Levi-Civita. Indicaremos con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el correspondiente producto interno.

Para facilitar la lectura, en esta sección se denotarán con letras mayúsculas los vectores tangentes y los puntos en L^n .

3.2.1. Curvas y marcos de referencia de Frénet nulos

En lo que sigue trataremos con curvas cuyo vector tangente en cada punto es nulo y, en general, parametrizadas por el parámetro tiempo propio, análogo al parámetro longitud de arco.

Definición 69 Una curva $\sigma : (a, b) \rightarrow L^n$ se dice nula si su vector tangente $T = \sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)$ es nulo en cada punto de $\sigma(s)$, es decir, si $\langle T, T \rangle = 0$.

En [8] probamos el siguiente resultado.

Teorema 70 Las curvas nulas en S_1^2 son rectas nulas y no existe esfera osculatriz de una curva esférica nula en L^3 .

Siguiendo la idea de Muñoz Masqué y Rodríguez Sánchez, extendemos la caracterización de curvas de Frénet.

Definición 71 Una curva $\sigma : (a, b) \rightarrow L^n$ se dice curva nula de Frénet en el punto $t_0 \in (a, b)$ si, siendo T_{t_0} el vector tangente a $\sigma(t)$ en t_0 , $T_{t_0}, (\nabla_T T)_{t_0}, \dots, (\nabla_T^{n-1} T)_{t_0}$ son linealmente independientes y $g(T, T) = 0$.

Definición 72 Sea σ una curva nula en L^n y P un punto de la curva σ . Un marco nulo en P consiste de un conjunto de vectores $\{X_1, \dots, X_n\}$ los cuales satisfacen las siguientes condiciones:

- $X_1 = k_0 T = k_0 \sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)$, con $k_0 > 0$,
- $\langle X_1, X_1 \rangle = 0, \langle X_2, X_2 \rangle = 0, \langle X_1, X_2 \rangle = -1$,
- X_i son vectores espaciales,
- $\langle X_1, X_i \rangle = \langle X_2, X_i \rangle = 0, \quad i = 3, \dots, n$,
- $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 3, \dots, n$.

Definición 73 Si σ es una curva nula de Frénet en L^n en el punto correspondiente a $t \in (a, b)$, podemos definir un marco nulo de Frénet de σ imponiendo las siguientes dos condiciones:

1. $\{T_t, (\nabla_T T)_t, \dots, (\nabla_T^{n-1} T)_t\}$ y $\{X_1, \dots, X_n\}$ generan el mismo subespacio;

$$2. \det_{\{X_1, \dots, X_n\}}(T_t, (\nabla_T T)_t, \dots, (\nabla_T^{n-1} T)_t) > 0.$$

Como $\{X_1, \dots, X_n\}$ genera el espacio tangente en P tenemos

$$T = k_o X_1 \quad X'_i = \sum_j w_{ij} X_j, \quad (3.1)$$

donde w_{ij} son funciones continuamente diferenciables de t .

Pedimos que estas condiciones se preserven a lo largo de la curva, entonces $\frac{d}{dt} \langle X_i, X_j \rangle = 0$ y aplicando esto a la Definición 73, obtenemos

$$\begin{cases} w_{12} = w_{21} = 0, \\ w_{i1} = w_{2i}, \quad i = 3, \dots, n, \\ w_{i2} = w_{1i}, \quad i = 3, \dots, n, \\ w_{ij} = -w_{ji}, \quad i, j = 3, \dots, n. \end{cases} \quad (3.2)$$

De [15] introducimos una versión generalizada del concepto de rotación nula.

Definición 74 Una rotación nula es una transformación de Lorentz que preserva orientación y marcos nulos.

Teorema 75 Sean $\sigma(s)$ una curva nula en L^n , $n \geq 4$, y $\{X_1, \dots, X_n\}$ un marco nulo en cada punto de $\sigma(s)$. Entonces $\sigma(s)$ tiene $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$ curvaturas linealmente independientes.

En particular, para $n = 4$ tenemos

$$\begin{aligned} X'_1 &= w_{13} X_3, \\ X'_2 &= w_{23} X_3 + w_{24} X_4, \\ X'_3 &= w_{23} X_1 + w_{13} X_2 + w_{34} X_4, \\ X'_4 &= w_{24} X_1 - w_{34} X_3. \end{aligned}$$

Corolario 76 Notando $k_i(L^j)$ la k_i curvatura en L^j tenemos que para $i: 1, \dots, \frac{1}{2}\{(j^2 - 3j + 4)\}$ se verifica $k_i(L^j) = k_i(L^{j+1})$.

Observación 77 X'_1 y X'_2 son, siempre, vectores espaciales.

3.2.2. Curvas nulas congruentes en L^n

Según [37] y [33] podemos caracterizar dos curvas congruentes en una variedad riemanniana simplemente conexa, completa de curvatura constante. Como L^n es una variedad semi-riemanniana simplemente conexa, completa de curvatura constante y, por [41], la conexión de ∇ preserva todas sus características en una variedad semi-riemanniana, podemos enunciar:

Definición 78 Dos curvas nulas σ_1 y σ_2 en L^n se dicen congruentes si existe una inmersión abierta, isométrica Φ tal que $\sigma_2 = \Phi(\sigma_1)$.

Para caracterizar curvas nulas congruentes en L^n en términos de sus curvaturas usando marcos nulos de Frénet, tenemos

Teorema 79 Sean σ_1 y $\sigma_2 : (a, b) \rightarrow L^n$ dos curvas nulas de Frénet, T_1 y T_2 sus respectivos vectores tangentes, y $k_i^1(t)$ y $k_i^2(t)$ las curvaturas correspondientes para cada $t \in (a, b)$. Entonces

i) σ_1 y σ_2 son curvas congruentes en un entorno de t_o si y solo si

$$k_i^1(t) = k_i^2(t)$$

para $i = 0, 1, \dots, n$ y para $|t - t_o|$ suficientemente pequeño.

ii) σ_1 y σ_2 son curvas congruentes en un entorno de $t_o \in (a, b)$ si y solo si

$$g((\nabla_{T_1}^i T_1)_{t_o}, (\nabla_{T_1}^j T_1)_{t_o}) = g((\nabla_{T_2}^i T_2)_{t_o}, (\nabla_{T_2}^j T_2)_{t_o}),$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

Corolario 80 Sean σ_1 una curva nula en L^q y σ_2 una curva nula en L^p , $q < p$. Ellas son congruentes en un entorno de t_o si y solo si $k_i^1(t) = k_i^2(t)$ para $i = 1, \dots, \frac{1}{2}\{q^2 - 3q + 6\}$ y $|t - t_o|$ suficientemente pequeño.

Capítulo 4

Variedades semi-riemannianas

En este capítulo y en los que le siguen, se denotará indistintamente los puntos con letras mayúsculas y minúsculas.

4.1. Variedades semi-riemannianas

Ciertas nociones básicas, elementales en la geometría diferencial, se supondrán conocidas.

A continuación se muestran resultados sobre variedades semi-riemannianas que, en el caso particular de los espacios de Lorentz, son de gran utilidad en el análisis posterior en este trabajo.

Definición 81 Sea M una variedad diferencial. Un tensor métrico \mathbf{g} en M es un campo tensorial $(0,2)$ no degenerado, simétrico y de índice constante.

Es decir, \mathbf{g} asigna a cada $p \in M$ un producto escalar \mathbf{g}_p sobre el espacio tangente $T_p(M)$, y el índice de \mathbf{g}_p es igual para todo p .

No degenerado significa que para cada vector $v \neq 0$ y $v \in T_p(M)$, existe $w \in T_p(M)$ tal que $\mathbf{g}_p(v, w) \neq 0$.

Definición 82 Una variedad semi-riemanniana es un par (M, \mathbf{g}) , donde M es una variedad diferencial y \mathbf{g} un tensor métrico.

En adelante, salvo en los casos en que se pueda generar confusión, nos referiremos a la variedad semi-riemanniana (M, \mathbf{g}) y a M indistintamente.

Definición 83 Sean M una variedad semi-riemanniana y $p \in M$. El índice ν de \mathbf{g}_p es llamado el índice de M : $0 \leq \nu \leq n = \dim M$.

En otras palabras, una métrica semi-riemanniana en una variedad diferencial M es un campo tensorial simétrico del tipo $(0, 2)$ sobre M que asigna a cada punto $p \in M$ un producto interno no degenerado \mathbf{g}_p de $T_p(M) \times T_p(M)$ en \mathbb{R} de signatura $(\underbrace{-, \dots, -}_\nu, \underbrace{+, \dots, +}_{n-\nu})$.

Observación 84 En particular, si $v = 0$, M es una variedad riemanniana; si $v = 1$ y $n \geq 2$, M es una variedad de Lorentz.

En una terminología más clásica, algunos autores llaman variedades pseudo-riemannianas a las variedades semi-riemannianas definidas anteriormente.

En adelante, se usarán indistintamente $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como notación alternativa de \mathbf{g}_p , escribiendo $\mathbf{g}_p(v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ para vectores tangentes. Cuando V y W son campos vectoriales, $\mathbf{g}_p(V, W)$ es una función que pertenece a $\mathcal{F}(M)$, donde $\mathcal{F}(M)$ es el conjunto de funciones diferenciables de M en \mathbb{R} ; en este caso escribimos $\mathbf{g}_p(V, W) = \langle V, W \rangle \in \mathcal{F}(M)$.

En lo que sigue, cada vez que se haga referencia al entorno \mathcal{U} se lo considerará, salvo mención específica, munido del sistema de coordenadas x_1, \dots, x_n .

Si x_1, \dots, x_n es un sistema de coordenadas de $\mathcal{U} \subset M$, las componentes del tensor métrico \mathbf{g} en \mathcal{U} respecto de dichas coordenadas son

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \quad (1 \leq i, j \leq n), \quad (4.1)$$

donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Para vectores tangentes $v = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i$ y $w = \sum_{j=1}^n w_j \partial_j$,

$$\mathbf{g}_p(v, w) = \langle v, w \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v_i w_j. \quad (4.2)$$

Análogamente, para campos vectoriales $V = \sum_{i=1}^n V_i \partial_i$ y $W = \sum_{j=1}^n W_j \partial_j$,

$$\mathbf{g}_p(V, W) = \langle V, W \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} V_i W_j. \quad (4.3)$$

Como \mathbf{g} es no degenerado, para todo $p \in \mathcal{U}$, la matriz $(g_{ij}(p))$ es inversible y su matriz inversa se nota $(g^{ij}(p))$.

Como \mathbf{g} es simétrico, para todo $1 \leq i, j \leq n$ vale que $g_{ij} = g_{ji}$ y que $g^{ij} = g^{ji}$.

El tensor métrico \mathbf{g} se puede escribir sobre \mathcal{U} de la siguiente manera:

$$\mathbf{g} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

Ejemplo 85 Recordar que para cada $p \in \mathbb{R}^n$ existe un isomorfismo lineal canónico de \mathbb{R}^n en $T_p(\mathbb{R}^n)$ que, en términos de las coordenadas naturales de \mathbb{R}^n , queda definido por $v \mapsto v_p = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i$ y que a partir del producto \cdot en \mathbb{R}^n se obtiene un producto interno sobre \mathbb{R}^n definido por

$$\langle v_p, w_p \rangle = v \cdot w = \sum_{i=1}^n v_i w_i. \quad (4.4)$$

Observación 86 La variedad riemanniana (\mathbb{R}^n, \cdot) es el espacio euclideo n -dimensional, también llamado n -espacio euclideo.

Sea ν un número entero tal que $0 \leq \nu \leq n$. Si en la expresión (4.4) se cambian los primeros ν signos $+$ por signos $-$, se obtiene un producto interno de índice ν definido por

$$\langle v_p, w_p \rangle = - \sum_{i=1}^{\nu} v_i w_i + \sum_{i=\nu+1}^n v_i w_i. \quad (4.5)$$

El espacio resultante es el espacio semi-euclideo \mathbb{R}_ν^n .

Si $\nu = 0$, \mathbb{R}_0^n es igual al n -espacio euclideo \mathbb{R}^n ; si $n \geq 2$, \mathbb{R}_1^n es también llamado n -espacio de Lorentz–Minkowski y L^n es una notación alternativa de este espacio.

En adelante, salvo explícita mención en contrario, notaremos:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq i \leq \nu, \\ +1 & \text{si } \nu + 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

y u_1, \dots, u_n al sistema de coordenadas naturales de \mathbb{R}_ν^n ; es decir, si $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_\nu^n$, entonces $u_i(p) = p_i$ para todo $i : 1, \dots, n$.

Considerando dicha notación y un sistema de coordenadas u_1, \dots, u_n , se puede escribir al tensor métrico de \mathbb{R}_ν^n como

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i du_i \otimes du_i. \quad (4.6)$$

En el sentido de la Definición 82, $(\mathbb{R}_\nu^n, \mathbf{g})$ es una variedad semi-riemanniana.

La siguiente tricotomía, conocida como causalidad, permite conocer la interpretación geométrica del índice de una variedad semi-riemanniana M .

Definición 87 *Un vector v tangente a M es*

$$\begin{array}{ll} \text{espacial} & \text{si } \langle v, v \rangle > 0 \quad \text{o} \quad v = 0, \\ \text{nulo} & \text{si } \langle v, v \rangle = 0 \quad \text{y} \quad v \neq 0, \\ \text{temporal} & \text{si } \langle v, v \rangle < 0. \end{array} \quad (4.7)$$

Observación 88 *Se llama cono nulo o de luz en $p \in M$ al conjunto de vectores nulos en $T_p(M)$.*

Si M es una variedad semi-riemanniana y $p \in M$, el producto interno \mathbf{g}_p tiene asociada una forma cuadrática bilineal y simétrica \mathbf{q} , definida por $\mathbf{q}(v) = \mathbf{g}_p(v, v)$, para todo $v \in T_p(M)$. En términos de un sistema de coordenadas x_1, \dots, x_n ,

$$\mathbf{q}(v) = \mathbf{g}_p(v, v) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v_i v_j. \quad (4.8)$$

Dos vectores $v, w \in T_p(M)$ se dicen ortogonales si $\mathbf{g}_p(v, w) = 0$ y ambos no nulos; v se dice unitario si $\mathbf{q}(v)$ es igual a 1 o a -1 . Así, dada una base ortonormal de $T_p(M)$, el determinante de la matriz $(g_{ij}(p))$ es igual a 1 o a -1 .

4.1.1. Subvariedades semi-riemannianas

Si tuviéramos que describir rápidamente una subvariedad diferencial P de una variedad diferencial M , diríamos que P es un subconjunto de M que “hereda” de éste una estructura de variedad diferenciable.

En [41], página 16, se encuentra la siguiente definición de subvariedad.

Definición 89 *Una variedad diferencial P es una subvariedad diferencial de una variedad diferencial M si: P es un subespacio topológico de M , la inclusión $j : P \rightarrow M$ es diferenciable y en cada punto $p \in P$ el diferencial dj es uno a uno.*

Cabe remarcar que si P es una subvariedad de M y $\phi : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable, la restricción ϕ/P , que es igual a $\phi \circ j$, también lo es. En particular, si $f \in \mathcal{F}(M)$, entonces $f/P \in \mathcal{F}(P)$.

Sean P una subvariedad de una variedad riemanniana M y $p \in P$; ya que cada espacio tangente $T_p(P)$ es un subespacio $T_p(M)$, se obtiene el tensor métrico riemanniano de P , al que notaremos \mathbf{g}^P , simplemente aplicando el tensor métrico \mathbf{g} de M a cada par de vectores tangentes a P . Formalmente, \mathbf{g}^P es el llamado *pullback* $j^*(\mathbf{g})$, donde $j : P \rightarrow M$ es la aplicación inclusión. Es decir, en cada $p \in P$, $j^*(\mathbf{g})$ es una función \mathbb{R} -multilineal de $T_p(P) \times T_p(P)$ en \mathbb{R} .

Recordemos que dadas M y N variedades diferenciales, $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y \mathbf{h} un campo tensorial $(0, s)$ sobre N , con $s \geq 1$, entonces $\phi^*(\mathbf{h})$ queda definido por

$$\phi^*(\mathbf{h})(v_1, \dots, v_s) = \mathbf{h}(d\phi_p v_1, \dots, d\phi_p v_s)$$

para todo $v_i \in T_p(M)$, $p \in M$. $\phi^*(\mathbf{h})$ es llamado *pullback* de \mathbf{h} por ϕ .

Definición 90 *Sea P una subvariedad diferencial de una variedad semi-riemanniana (M, \mathbf{g}) . Si el pullback $j^*(\mathbf{g})$ es un tensor métrico en P , se dice entonces que P es una subvariedad semi-riemanniana de M .*

4.1.2. Producto de variedades semi-riemannianas

Lema 91 *Sean (M, \mathbf{g}^M) y (N, \mathbf{g}^N) dos variedades semi-riemannianas. Si π y σ son las proyecciones de $M \times N$ en M y N respectivamente, entonces*

$$\mathbf{g} = \pi^*(\mathbf{g}^M) + \sigma^*(\mathbf{g}^N) \quad (4.9)$$

es un tensor métrico en $M \times N$ y $(M \times N, \mathbf{g})$ es una variedad semi-riemanniana conocida como variedad semi-riemanniana producto.

De la notación del *pullback* se tiene que si $(p, q) \in M \times N$ y $v, w \in T_{(p,q)}(M \times N)$, entonces

$$\mathbf{g}(v, w) = \mathbf{g}^M(d\pi(v), d\pi(w)) + \mathbf{g}^N(d\sigma(v), d\sigma(w)). \quad (4.10)$$

Así, \mathbf{g} es simétrico.

Veamos que \mathbf{g} es no degenerado: supongamos que $\forall w \in T_{(p,q)}(M \times N)$, $\mathbf{g}(v, w) = 0$; así, para todo $w \in T_{(p,q)}(M)$ se tiene que $\mathbf{g}^M(d\pi(v), d\pi(w)) = 0$ pues $d\sigma(w) = 0$. Ya que

$d\pi(T_{(p,q)}(M)) \supseteq T_p M$, entonces $d\pi(v)$ debe ser igual a cero. Con un razonamiento análogo se obtiene que $d\sigma(v) = 0$. Por lo tanto, $v = 0$.

Considerando la unión ordenada de las bases ortonormales de $T_p(M)$ y $T_q(N)$ se obtiene una base ortonormal de $T_{(p,q)}(M \times N)$. El índice de \mathbf{g} es un valor constante igual a la suma $\text{ind}M + \text{ind}N$.

Este resultado se extiende al producto finito de variedades semi-riemannianas.

Observación 92 *Uno de los ejemplos de mayor interés para el posterior desarrollo de este trabajo, consiste en expresar al espacio semi-euclideo \mathbb{R}_1^n como producto de variedades:*

$$\mathbb{R}_1^n = \mathbb{R}_1^1 \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-1 \text{ veces}} = \mathbb{R}_1^1 \times \mathbb{R}^{n-1}, \quad (4.11)$$

donde por definición \mathbb{R}_1^1 es la recta real con tensor métrico igual a menos el producto usual de \mathbb{R}^1 .

4.1.3. Isometrías

Una isometría es un tipo especial de aplicación que vincula los tensores métricos de variedades semi-riemannianas.

Definición 93 *Sean (M, \mathbf{g}^M) y (N, \mathbf{g}^N) dos variedades semi-riemannianas en el sentido de la Definición 82. Una isometría de M en N es un difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ que preserva los tensores métricos en el siguiente sentido: $\phi^*(\mathbf{g}^N) = \mathbf{g}^M$.*

Explícitamente, para todos $v, w \in T_p(M)$ y $p \in M$

$$\begin{aligned} \phi^*(\mathbf{g}^N)(v, w) &= \mathbf{g}^N(d\phi(v), d\phi(w)) = \langle d\phi_p(v), d\phi_p(w) \rangle_{\phi(p)} = \langle v, w \rangle_p \\ &= \mathbf{g}^M(v, w) \end{aligned}$$

Dado que ϕ es un difeomorfismo, cada diferencial $d\phi_p$ es un isomorfismo lineal de $T_p(M)$ en $T_{\phi(p)}(N)$.

Si existe una isometría entre M y N , estas variedades se dicen isométricas.

Un espacio producto escalar \mathbb{V} , es decir, un espacio vectorial real munido de un producto escalar, es una variedad diferencial y el producto escalar define un tensor métrico en \mathbb{V} , por lo que \mathbb{V} es una variedad semi-riemanniana.

Lema 94 *Si $\psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una isometría lineal entre los espacios producto escalar \mathbb{V} y \mathbb{W} , entonces, considerando a \mathbb{V} y \mathbb{W} variedades semi-riemannianas como en el párrafo anterior, ψ es una isometría.*

Este lema y su correspondiente demostración se encuentran en [41], página 59.

Es importante remarcar que si \mathbb{V} es un espacio producto escalar tal que su dimensión es n y su índice es ν , entonces \mathbb{V} es isométrico a \mathbb{R}_ν^n como variedad semi-riemanniana. Además, si M es cualquier variedad semi-riemanniana, su tensor métrico convierte a cada espacio tangente en un espacio semi-euclideo de la misma dimensión y del mismo índice que M .

4.1.4. La conexión de Levi-Civita

Definición 95 Sea u_1, \dots, u_n el sistema de coordenadas naturales en \mathbb{R}_V^n . Si V y W son dos campos vectoriales sobre \mathbb{R}_V^n tales que $W = \sum_{i=1}^n W_i \partial_i$, con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$, entonces el campo vectorial

$$D_V W = \sum_{i=1}^n V(W_i) \partial_i \quad (4.12)$$

es la llamada derivada covariante natural de W con respecto a V .

Cabe remarcar que en esta definición se utilizan coordenadas naturales de \mathbb{R}_V^n . Una generalización de la Definición 95 a variedades semi-riemannianas se logra definiendo axiomáticamente la derivada covariante.

En adelante, notaremos $\Xi(M)$ al conjunto de campos vectoriales diferenciables en M .

Definición 96 Una conexión ∇ sobre una variedad diferenciable M es una aplicación $\nabla : \Xi(M) \times \Xi(M) \rightarrow \Xi(M)$ tal que para todo par $V, W \in \Xi(M)$ vale que

$$1) \nabla_V W \text{ es } \mathcal{F}(M)\text{-lineal en } W, \quad (4.13)$$

$$2) \nabla_V W \text{ es } \mathbb{R}\text{-lineal en } W, \quad (4.14)$$

y para toda $f \in \mathcal{F}(M)$,

$$3) \nabla_V (fW) = (Vf)W + f \nabla_V W. \quad (4.15)$$

$\nabla_V W$ es llamada la derivada covariante de W con respecto a V para la conexión ∇ y generaliza la Definición 95 de la derivada covariante dada respecto de la conexión canónica.

Proposición 97 Sea M una variedad semi-riemanniana. Si $V \in \Xi(M)$, sea V^* la 1-forma sobre M tal que $V^*(X) = \langle V, X \rangle$ para todo $X \in \Xi(M)$. Entonces la función $V \rightarrow V^*$ es un isomorfismo de $\Xi(M)$ en $\Xi^*(M)$.

Esta proposición y su correspondiente demostración se encuentran en [41], página 60.

Definición 98 Sean M una variedad semi-riemanniana y $V, W, X \in \Xi(M)$. El corchete de V y W , notado $[V, W]$, es un campo vectorial que asigna a cada $p \in M$ un vector tangente $[V, W]_p$ tal que, para toda $f \in \mathcal{F}(M)$,

$$[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf).$$

El siguiente resultado fue llamado por O'Neill un milagro de la geometría semi-riemanniana: la validez en los espacios semi-riemannianos del Teorema de Levi-Civita. Se encuentra enunciado y demostrado en [41], página 61.

Teorema 99 Sobre una variedad semi-riemanniana M existe una única conexión ∇ tal que

$$4) [V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V; \quad (4.16)$$

$$5) X \langle V, W \rangle = \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle; \quad (4.17)$$

para todos $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$. ∇ es llamada la conexión de Levi-Civita de M y es caracterizada por la fórmula de Koszul:

$$2 \langle \nabla_V W, X \rangle = V \langle W, X \rangle + W \langle X, V \rangle - X \langle V, W \rangle \\ - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle.$$

Una conexión se dice simétrica si satisface (4.16) y se dice compatible con la métrica si satisface (4.17).

Definición 100 Sea x_1, \dots, x_n un sistema de coordenadas en un entorno \mathcal{U} en una variedad semi-riemanniana M . Los símbolos de Christoffel de M respecto de este sistema de coordenadas son las funciones a valores reales Γ_{ij}^k definidas en \mathcal{U} tal que

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad (4.18)$$

donde $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Dado que $[\partial_i, \partial_j] = 0$, se sigue de (4.16) que $\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \nabla_{\partial_j}(\partial_i)$ y por lo tanto, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \forall k$.

Proposición 101 Sea x_1, \dots, x_n un sistema de coordenadas en \mathcal{U} . Para todo campo vectorial $W = \sum_{i=1}^n W_i \partial_i$,

$$\nabla_{\partial_i} \left(\sum_{j=1}^n W_j \partial_j \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial W_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k W_j \right\} \partial_k \quad (4.19)$$

donde los símbolos de Christoffel están dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right\}, \quad (4.20)$$

siguiendo la notación de (4.18).

Esta proposición y su correspondiente demostración se encuentran en [41], página 62.

Lema 102 La conexión D de la Definición 95 es la conexión de Levi-Civita ∇ del espacio semi-euclideo \mathbb{R}_v^n para todo $v = 0, \dots, n$. Respecto a las coordenadas u_1, \dots, u_n de \mathbb{R}_v^n , para todo $1 \leq i, j, k \leq n$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_j \quad (4.21)$$

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad (4.22)$$

donde $\varepsilon_j = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq j \leq v, \\ +1 & \text{si } v+1 \leq j \leq n. \end{cases}$

Este lema y su correspondiente demostración se encuentran en [41], páginas 62 y 63.

4.1.5. Curvaturas

Lema 103 Sea M una variedad semi-riemanniana con conexión de Levi-Civita ∇ . La función $R : \Xi(M)^3 \rightarrow \Xi(M)$ dada por

$$\begin{aligned} R_{VW}X &= \nabla_{[V,W]}X - [\nabla_V, \nabla_W]X \\ &= \nabla_VW X - \nabla_WV X + \nabla_W \nabla_V X - \nabla_V \nabla_W X, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde $V, W, X \in \Xi(M)$, es un campo tensorial en M del tipo $(1,3)$. Este campo tensorial es llamado tensor curvatura riemanniana de M .

La demostración de este lema se encuentra en [41], página 74.

El tensor R puede ser considerado como una función \mathbb{R} -multilineal definida sobre vectores tangentes. Así, si $v, w \in T_p(M)$, el operador lineal $R_{vw} : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$, que a cada $x \in T_p(M)$ le hace corresponder $R_{vw}x \in T_p(M)$, es llamado operador curvatura.

Lema 104 Sobre el entorno \mathcal{U} , con el sistema de coordenadas x_1, \dots, x_n ,

$$\begin{aligned} R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) &= \sum_{i=1}^n R_{jkl}^i \partial_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \partial_l(\Gamma_{kj}^i) - \partial_k(\Gamma_{lj}^i) + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m) \right\} \partial_i \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Demostración.

Dado que \mathcal{U} es un entorno de coordenadas, $[\partial_l, \partial_k] = 0$ para todo $1 \leq l, k \leq n$. El tensor curvatura sobre campos vectoriales coordenados queda

$$R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \nabla_{\partial_l}(\nabla_{\partial_k} \partial_j) - \nabla_{\partial_k}(\nabla_{\partial_l} \partial_j).$$

Por (4.20),

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_l}(\nabla_{\partial_k} \partial_j) &= \sum_{i=1}^n \nabla_{\partial_l}(\Gamma_{kj}^i \partial_i) = \sum_{i=1}^n \left\{ \partial_l(\Gamma_{kj}^i) \partial_i + \sum_{m=1}^n \Gamma_{kj}^i \Gamma_{li}^m \partial_m \right\}, \\ \nabla_{\partial_k}(\nabla_{\partial_l} \partial_j) &= \sum_{i=1}^n \nabla_{\partial_k}(\Gamma_{lj}^i \partial_i) = \sum_{i=1}^n \left\{ \partial_k(\Gamma_{lj}^i) \partial_i + \sum_{m=1}^n \Gamma_{lj}^i \Gamma_{ki}^m \partial_m \right\}. \end{aligned}$$

Reordenando los índices, se obtiene el resultado buscado. ■

Un subespacio 2-dimensional Π de $T_p(M)$ se dice que es un plano tangente a M en p . Para cada par de vectores tangentes v, w definimos

$$Q(v, w) = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2.$$

Recordemos que un plano tangente Π es no degenerado si, y solo si, para alguna base v, w de Π se tiene $Q(v, w) \neq 0$.

Lema 105 *Sea M una variedad semi-riemanniana con tensor curvatura R y sea Π un plano tangente no degenerado de M en p , $p \in M$. El número*

$$K(v, w) = \frac{\langle R_{vw}v, w \rangle}{Q(v, w)} \quad (4.25)$$

es independiente de la elección de la base v, w de Π , y es llamado la curvatura seccional $K(\Pi)$ de Π .

La demostración de este importante lema se puede encontrar en [41], página 78.

La curvatura seccional K de M es una función a valores reales definida sobre el conjunto de planos tangentes no degenerados de M .

Se dice que una variedad semi-riemanniana M tiene curvatura constante cuando la función curvatura seccional es constante.

4.1.6. Productos deformados

Como ya quedó expresado en el Lema 91, el tensor métrico de una variedad producto $B \times F$ es igual a $\pi^*(\mathbf{g}^B) + \sigma^*(\mathbf{g}^F)$, donde π y σ son las proyecciones de $B \times F$ en B y F respectivamente. A continuación se muestra la generalización de variedad producto, llamada producto deformado o “warped product”.

Definición 106 *Sean (F, \mathbf{g}^F) y (B, \mathbf{g}^B) dos variedades semi-riemannianas. Sea $f > 0$ una aplicación diferenciable en B . El producto deformado $M = B \times_f F$ es la variedad producto $(B \times F, \mathbf{g})$, con $\mathbf{g} = \pi^*(\mathbf{g}^B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(\mathbf{g}^F)$.*

Explícitamente, si v es tangente a $B \times F$ en (p, q) , entonces

$$\mathbf{g}(v, v) = \mathbf{g}^B(d\pi(v), d\pi(v)) + f^2(p) \mathbf{g}^F(d\sigma(v), d\sigma(v)).$$

Observación 107 *Si f es la aplicación identidad, entonces $B \times_f F$ es una variedad producto en el sentido del Lema 91.*

Las variedades B y F son llamadas, respectivamente, base y fibra de $B \times_f F$. A la aplicación f se la llama función deformante o “warping function”.

La métrica deformada queda caracterizada por:

- 1) Para cada $q \in F$, la aplicación $\pi/(B \times q)$ es una isometría en B .
- 2) Para cada $p \in B$, la aplicación $\sigma/(p \times F)$ es una homotecia positiva en F con factor de escala $\frac{1}{f(p)}$.
- 3) Para cada $(p, q) \in B \times F$, el levantado $\sigma^{-1}(q) = B \times q$ y la fibra $\pi^{-1}(p) = p \times F$ son ortogonales en (p, q) .

Los vectores que son tangentes a los levantados son llamados horizontales y los vectores que son tangentes a las fibras son llamados verticales.

4.2. Subvariedades en espacios lorentzianos

Seguimos los lineamientos de O'Neill, más específicamente, seguimos los contenidos del capítulo 4 de [41]. Como se indica en cada caso, las siguientes definiciones y resultados se extienden a subvariedades semi-riemannianas.

4.2.1. Tangentes y normales

Definición 108 Sean M y \bar{M} variedades semi-riemannianas y sea M una subvariedad de \bar{M} . Un campo vectorial $X : M \rightarrow T\bar{M}$, es decir, un campo vectorial sobre la aplicación inclusión $j : M \rightarrow \bar{M}$, se dice un \bar{M} campo vectorial de M .

Notaremos $\bar{\Xi}(M)$ al conjunto de tales campos.

Cabe remarcar que estamos considerando tres tipos de campos vectoriales:

$$\Xi(M) = \{X : M \rightarrow TM; X(p) \in T_p(M)\}, \quad (4.26)$$

$$\bar{\Xi}(M) = \{X : M \rightarrow T\bar{M}; X(p) \in T_p(\bar{M})\}, \quad (4.27)$$

$$\Xi(\bar{M}) = \{X : \bar{M} \rightarrow T\bar{M}; X(p) \in T_p(\bar{M})\}. \quad (4.28)$$

En adelante, al decir "subvariedades lorentzianas" nos referiremos a subvariedades cuyo tensor métrico es inducido por el de una variedad lorentziana.

Si M^n es una subvariedad lorentziana (o semi-riemanniana) de \bar{M}^m , cada espacio tangente $T_p(M)$ es un subespacio producto escalar no degenerado de $T_p(\bar{M})$. Entonces este último espacio tangente se descompone en la suma directa

$$T_p(\bar{M}) = T_p(M) + T_p(M)^\perp \quad (4.29)$$

donde $T_p(M)^\perp$ es no degenerado y su dimensión es la codimensión de M en \bar{M} , es decir, $k = m - n$.

El índice de $T_p(M)^\perp$ es llamado el co-índice de M en \bar{M} y vale que

$$\text{ind } \bar{M} = \text{ind } M + \text{coind } M. \quad (4.30)$$

Mientras que los vectores en $T_p(M)$ son tangentes a M , los vectores en $T_p(M)^\perp$ son normales a M . Por (4.29), todo vector $x \in T_p(\bar{M})$, con $p \in M$, se descompone unívocamente en

$$x = \tan x + \text{nor } x \quad (4.31)$$

donde $\tan x \in T_p(M)$ y $\text{nor } x \in T_p(M)^\perp$.

Las proyecciones ortogonales

$$\tan : T_p(\bar{M}) \rightarrow T_p(M) \quad \text{y} \quad \text{nor} : T_p(\bar{M}) \rightarrow T_p(M)^\perp \quad (4.32)$$

son \mathbb{R} -lineales.

Definición 109 Un campo vectorial $Z \in \bar{\Xi}(M)$ es normal a M si para cada $p \in M$, el vector $Z(p) = Z_p$ es un vector normal a M .

Notaremos $\Xi(M)^\perp$ al conjunto de tales campos vectoriales.

En forma análoga a (4.31), un campo vectorial $X \in \overline{\Xi}(M)$ se descompone en

$$X = \tan X + \text{nor} X \quad (4.33)$$

donde $\tan X \in \Xi(M)$ y $\text{nor} X \in \Xi(M)^\perp$. Las proyecciones ortogonales

$$\tan : \overline{\Xi}(M) \rightarrow \Xi(M) \quad \text{y} \quad \text{nor} : \overline{\Xi}(M) \rightarrow \Xi(M)^\perp \quad (4.34)$$

son $\mathcal{F}(M)$ -lineales.

De las identidades anteriores se concluye que

$$\overline{\Xi}(M) = \Xi(M) + \Xi(M)^\perp. \quad (4.35)$$

4.2.2. La conexión inducida

Si M es una subvariedad lorentziana (semi-riemanniana) de \overline{M} , la conexión de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de \overline{M} induce de manera natural una función de $\Xi(M) \times \overline{\Xi}(M)$ en $\overline{\Xi}(M)$, llamada conexión inducida de $M \subset \overline{M}$.

La conexión inducida nos va a permitir expresar el campo vectorial $\overline{\nabla}_V X$ cuando $V \in \Xi(M)$ y $X \in \overline{\Xi}(M)$, que en principio no estaría definido pues $V \notin \Xi(\overline{M})$ y $X \notin \Xi(\overline{M})$.

En adelante, salvo explícita mención en contrario, V y W representarán campos vectoriales pertenecientes a $\Xi(M)$, X e Y campos vectoriales en $\overline{\Xi}(M)$ y Z campo vectorial en $\Xi(M)^\perp$.

Definición 110 Para cada par de campos vectoriales V y X , y para cada $p \in M$, sean \overline{V} y \overline{X} las extensiones locales diferenciales de V y X en un entorno coordenado \mathcal{U} de p en \overline{M} . La conexión inducida de $M \subset \overline{M}$ es una aplicación $\overline{\nabla} : \Xi(M) \times \overline{\Xi}(M) \rightarrow \overline{\Xi}(M)$ tal que $\overline{\nabla}_V X$ es igual a $\overline{\nabla}_{\overline{V}} \overline{X}$ restringido a $\mathcal{U} \cap M$.

Dado que la conexión inducida $\overline{\nabla}$ es cerrada respecto a la conexión de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de \overline{M} , usamos la misma notación para ambas.

Lema 111 $\overline{\nabla}_V X$ está bien definido.

Este lema y su correspondiente demostración se encuentran en [41], página 99.

En particular, la conexión inducida tiene las mismas propiedades de la conexión de Levi-Civita.

Corolario 112 Sea $\overline{\nabla}$ la conexión inducida de $M \subset \overline{M}$. Entonces para toda $f \in \mathcal{F}(M)$

- (1) $\overline{\nabla}_V X$ es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en V .
- (2) $\overline{\nabla}_V X$ es \mathbb{R} -lineal en X .
- (3) $\overline{\nabla}_V (fX) = V f X + f \overline{\nabla}_V X$.
- (4) $[V, W] = \overline{\nabla}_V W - \overline{\nabla}_W V$.

$$(5) \quad V \langle X, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_V X, Y \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_V Y \rangle.$$

Demostración.

Para cada punto $p \in M$ extendemos todos los campos vectoriales y funciones sobre un entorno de p en \bar{M} . Así,

$$\left(\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{X} \right) / M = \bar{\nabla}_V X, \quad \bar{V}f / M = Vf \quad \text{y} \quad \langle \bar{V}, \bar{W} \rangle / M = \langle V, W \rangle.$$

Las propiedades (1), (2) y (3) se siguen de la Definición 96; y las propiedades (4) y (5), del Teorema 99. ■

En lo que sigue, vamos a considerar en particular el caso $\bar{\nabla}_V W$ cuando $V, W \in \Xi(M)$.

Lema 113 Sean $M \subset \bar{M}$, $V, W \in \Xi(M)$ y ∇ la conexión de Levi-Civita de M . Entonces

$$\nabla_V W = \tan \bar{\nabla}_V W. \quad (4.36)$$

Este lema y su correspondiente demostración se encuentran en [41], página 99.

Definición 114 La aplicación $II : \Xi(M) \times \Xi(M) \rightarrow \Xi(M)^\perp$ definida por

$$II(V, W) = \text{nor } \bar{\nabla}_V W \quad (4.37)$$

es llamado *tensor segunda forma fundamental II*.

Lema 115 La aplicación $II : \Xi(M) \times \Xi(M) \rightarrow \Xi(M)^\perp$ definida anteriormente, es simétrica y $\mathcal{F}(M)$ -bilineal.

Este lema y su correspondiente demostración se encuentran en [41], página 100.

Por (4.36) y (4.37), podemos concluir que

$$\bar{\nabla}_V W = \nabla_V W + II(V, W). \quad (4.38)$$

4.2.3. Hipersuperficies lorentzianas

En adelante, hipersuperficies lorentzianas refiere a hipersuperficies en espacios lorentzianos.

Una hipersuperficie lorentziana (semi-riemanniana) M de \bar{M} es una subvariedad lorentziana (semi-riemanniana) de codimensión 1. El co-índice de M es el índice común de todos los espacios unidimensionales normales a los espacios tangentes $T_p(M)$ y toma valores 0 o 1. Es más eficiente separar estos dos casos por un signo como sigue:

Definición 116 Sea M una de hipersuperficie semi-riemanniana de \bar{M} . El signo ε de M es:

$$\begin{cases} +1, & \text{si } \text{coind}(M) = 0, \text{ i.e., si } \langle z, z \rangle > 0 \text{ para todo vector normal } z \neq 0; \\ -1, & \text{si } \text{coind}(M) = 1, \text{ i.e., si } \langle z, z \rangle < 0 \text{ para todo vector normal } z \neq 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

En el caso de hipersuperficies semi-riemannianas, O'Neill define en [41] un operador, al que llama *shape operator* u operador de forma, vinculado con el tensor segunda forma fundamental.

Definición 117 Sea U el campo vectorial normal unitario de una hipersuperficie lorentziana (semi-riemanniana) M de \bar{M} . El $(1, 1)$ campo tensorial S en M tal que

$$\langle S(V), W \rangle = \langle II(V, W), U \rangle \quad (4.40)$$

es llamado el operador de forma de $M \subset \bar{M}$ respecto de U .

S determina un operador lineal $S : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ para cada $p \in M$.

Lema 118 Si S es el operador de forma de $M \subset \bar{M}$ respecto de U , entonces para todo $v = V(p) \in T_p(M)$, con $V \in \Xi(M)$, vale

$$S(v) = -\bar{\nabla}_v U \quad (4.41)$$

y en cada punto, el operador lineal S en $T_p(M)$ es autoadjunto.

Demostración.

Dado que $\langle U, U \rangle$ es constante, $0 = V \langle U, U \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_v U, U \rangle$, y entonces $\langle \bar{\nabla}_v U, U \rangle = 0$. Por lo tanto, $\bar{\nabla}_v U$ es tangente a M para todo $V \in \Xi(M)$.

Por otro lado, como $\langle U, W \rangle$ es constante para todo $W \in \Xi(M)$,

$$0 = V \langle U, W \rangle = \langle \bar{\nabla}_v U, W \rangle + \langle U, \bar{\nabla}_v W \rangle$$

y por lo tanto,

$$\langle \bar{\nabla}_v U, W \rangle = -\langle \bar{\nabla}_v W, U \rangle.$$

Luego,

$$\langle S(V), W \rangle = \langle II(V, W), U \rangle = \langle \bar{\nabla}_v W, U \rangle = -\langle \bar{\nabla}_v U, W \rangle.$$

Así, vale que

$$S(V) = -\bar{\nabla}_v U \quad (4.42)$$

donde $V \in \Xi(M)$. En particular, $S(v) = -\bar{\nabla}_v U$, donde $v = V(p)$. ■

Definición 119 Sea II el tensor segunda forma fundamental de $M \subset \bar{M}$. Si $V, W, X \in \Xi(M)$, se define la función $\nabla_V II$ de $\Xi(M) \times \Xi(M)$ en $\Xi(M)^\perp$ por

$$(\nabla_V II)(W, X) = \text{nor } \bar{\nabla}_v (II(W, X)) - II(\nabla_v W, X) - II(W, \nabla_v X). \quad (4.43)$$

Así definida, $\nabla_V II$ es simétrica y $\mathcal{F}(M)$ -bilineal.

En [41], página 115, se encuentra el siguiente resultado: sea \bar{M} de curvatura constante y M es una hipersuperficie de \bar{M} con operador de forma S , entonces

$$\langle (\nabla_V S)W, X \rangle = \langle (\nabla_V II)(W, X), U \rangle. \quad (4.44)$$

En los capítulos 1 y 2 de [17], Bang-yen Chen presenta otro enfoque para subvariedades riemannianas.

Sea (M, \mathbf{g}^M) una variedad n -dimensional inmersa en una variedad m -dimensional $(\bar{M}, \mathbf{g}^{\bar{M}})$, $n \leq m$. Sean $(\mathcal{U}; x_1, \dots, x_n)$ y $(\mathcal{V}; y_1, \dots, y_m)$ entornos coordinados en M y \bar{M} respectivamente; entonces M se puede representar localmente por

$$y_j = y_j(x_i).$$

También, se puede expresar a un campo vectorial $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial_i$ en M

$$X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_{ij} X_i \bar{\partial}_j$$

donde $\bar{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial y_j}$ y $B_{ij} = \partial_i(y_j)$.

De ahí que

$$\left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \right) |_{M} = \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y).$$

Para ξ_{n+1}, \dots, ξ_m base ortonormal del espacio normal $T_p^\perp(M)$, con $p \in M$, las matrices $A_{\xi_x} = [A_k]$ indican las matrices

$$[A_k] = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 \langle \bar{\nabla}_{\partial_1} \xi_k, \partial_1 \rangle & -\varepsilon_2 \langle \bar{\nabla}_{\partial_1} \xi_k, \partial_2 \rangle & \dots & -\varepsilon_n \langle \bar{\nabla}_{\partial_1} \xi_k, \partial_n \rangle \\ -\varepsilon_1 \langle \bar{\nabla}_{\partial_2} \xi_k, \partial_1 \rangle & -\varepsilon_2 \langle \bar{\nabla}_{\partial_2} \xi_k, \partial_2 \rangle & \dots & -\varepsilon_n \langle \bar{\nabla}_{\partial_2} \xi_k, \partial_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\varepsilon_1 \langle \bar{\nabla}_{\partial_n} \xi_k, \partial_1 \rangle & -\varepsilon_2 \langle \bar{\nabla}_{\partial_n} \xi_k, \partial_2 \rangle & \dots & -\varepsilon_n \langle \bar{\nabla}_{\partial_n} \xi_k, \partial_n \rangle \end{pmatrix}$$

donde $\varepsilon_i = \langle \partial_i, \partial_i \rangle$.

Observación 120 Si M es una hipersuperficie n -dimensional de \bar{M} , utilizando (4.41) se obtiene

$$[S] = - \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \langle S(\partial_1), \partial_1 \rangle & \dots & \varepsilon_n \langle S(\partial_1), \partial_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1 \langle S(\partial_n), \partial_1 \rangle & \dots & \varepsilon_n \langle S(\partial_n), \partial_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Sea M una subvariedad n -dimensional inmersa en una variedad m -dimensional \bar{M} , con $m = n + k$. Sea E_1, \dots, E_n un sistema de referencia de campos vectoriales tal que en cada $p \in M$, $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ y $\{E_{n+1}(p), \dots, E_m(p)\}$ forman base de $T_p(M)$ y $T_p(M)^\perp$ respectivamente. Entonces $\{E_1(p), \dots, E_m(p)\}$ es una base de $T_p(\bar{M})$. Podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que $\{E_1(p), \dots, E_m(p)\}$ es una base ortonormal.

Definición 121 Para cada $k : n + 1, \dots, m$, A_k representa la componente normal de $\bar{\nabla}_V W$ y queda definida por

$$\langle A_k(V), W \rangle = \langle II(V, W), E_k \rangle. \quad (4.45)$$

Si $m = n + 1$, A_m no es otra cosa que el operador de forma S .

Vale que $\langle A_k(V), W \rangle = \langle II(V, W), E_k \rangle = \langle \bar{\nabla}_V W, E_k \rangle = -\langle \bar{\nabla}_V E_k, W \rangle$. Por lo tanto

$$A_k(V) = -\bar{\nabla}_V E_k. \quad (4.46)$$

Este enfoque nos permitió encontrar una relación entre las coordenadas de $(\bar{\nabla}_{E_i} E_j)_p$ y $(-\bar{\nabla}_{E_i} E_k)_p$, para lo cual tenemos en cuenta que a todo campo $\bar{X} \in \Xi(\bar{M})$ se lo puede expresar

$$\bar{X} = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k \langle \bar{X}, E_k \rangle E_k, \quad (4.47)$$

donde $\varepsilon_k = \langle E_k, E_k \rangle$.

En particular, $II(E_i, E_j) = \sum_{k=1}^m \langle E_k, E_k \rangle \langle II(E_i, E_j), E_k \rangle E_k$. Entonces

$$II(E_i, E_j) = \sum_{k=n+1}^m \varepsilon_k \langle II(E_i, E_j), E_k \rangle E_k. \quad (4.48)$$

Observar que para $i, j : 1, \dots, n$ y $k : n + 1, \dots, m$,

$$\langle II(E_i, E_j), E_k \rangle = \langle A_k(E_i), E_j \rangle = \langle -\bar{\nabla}_{E_i} E_k, E_j \rangle. \quad (4.49)$$

De (4.46)–(4.49) se deduce el siguiente teorema.

Teorema 122 *Bajo las condiciones anteriores, la coordenada k -ésima de $(\bar{\nabla}_{E_i} E_j)_p$ en $T_p(\bar{M})$ es igual a $-(\varepsilon_k \varepsilon_j)$ por la coordenada j -ésima de $(\bar{\nabla}_{E_i} E_k)_p$ en $T_p(\bar{M})$.*

Este resultado se usará en el estudio del laplaciano del campo vectorial curvatura media.

4.2.4. Campo vectorial curvatura media

El campo vectorial curvatura media es expresado de diferente modo por Bang-yen Chen en [17] y por O'Neill en [41]. A continuación se muestra su equivalencia.

En [41], O'Neill define el campo vectorial curvatura media a través del tensor segunda forma fundamental.

Definición 123 *Sea E_1, \dots, E_n un sistema de referencia de campos vectoriales de M en p . El campo vectorial curvatura media H de $M^n \subset \bar{M}^m$ queda determinado por*

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i II(E_i, E_i). \quad (4.50)$$

Observar que en cada $p \in M$ queda explícitamente

$$H_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle E_i(p), E_i(p) \rangle II(E_i(p), E_i(p)). \quad (4.51)$$

Reemplazando en (4.47) a $II(E_i, E_i)$ por la expresión dada en (4.48), nos queda que

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sum_{k=n+1}^m \varepsilon_k \langle II(E_i, E_i), E_k \rangle E_k. \quad (4.52)$$

Ahora, si reemplazamos en (4.52) a $\langle II(E_i, E_i), E_k \rangle$ por $\langle -\bar{\nabla}_{E_i} E_k, E_i \rangle$, obtenemos que

$$H = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^m \varepsilon_k \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle -\bar{\nabla}_{E_i} E_k, E_i \rangle \right) E_k. \quad (4.53)$$

Si para cada $k : n+1, \dots, m$ consideramos los campos vectoriales $-\bar{\nabla}_{E_1} E_k, \dots, -\bar{\nabla}_{E_n} E_k$, podemos escribir matricialmente

$$\begin{pmatrix} \bar{\nabla}_{E_1} E_k \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_k \\ \vdots \\ \bar{\nabla}_{E_n} E_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_k, E_1 \rangle & \varepsilon_2 \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_k, E_2 \rangle & \dots & \varepsilon_n \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_k, E_n \rangle \\ \varepsilon_1 \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_k, E_1 \rangle & \varepsilon_2 \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_k, E_2 \rangle & \dots & \varepsilon_n \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_k, E_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1 \langle \bar{\nabla}_{E_n} E_k, E_1 \rangle & \varepsilon_2 \langle \bar{\nabla}_{E_n} E_k, E_2 \rangle & \dots & \varepsilon_n \langle \bar{\nabla}_{E_n} E_k, E_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}.$$

Explícitamente,

$$[A_k] = - \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_k, E_1 \rangle & \varepsilon_2 \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_k, E_2 \rangle & \dots & \varepsilon_n \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_k, E_n \rangle \\ \varepsilon_1 \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_k, E_1 \rangle & \varepsilon_2 \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_k, E_2 \rangle & \dots & \varepsilon_n \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_k, E_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1 \langle \bar{\nabla}_{E_n} E_k, E_1 \rangle & \varepsilon_2 \langle \bar{\nabla}_{E_n} E_k, E_2 \rangle & \dots & \varepsilon_n \langle \bar{\nabla}_{E_n} E_k, E_n \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Por lo tanto,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^m \varepsilon_k \operatorname{tr}[A_k] E_k. \quad (4.55)$$

Dado que esta última es la expresión del campo vectorial curvatura media dada por Bang-yen Chen en [17], página 43, al mostrar la igualdad entre (4.50) y (4.55), se ha mostrado que en este tema ambas definiciones son equivalentes.

Sea M^n una subvariedad inmersa en \bar{M}^m . Es inmediato que si $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ es una base ortogonal de $T_p(M)$ y $\{E_{n+1}(p), \dots, E_m(p)\}$ es una base ortonormal de $T_p(M)^\perp$,

entonces

$$[A_k] = - \begin{pmatrix} g^{11} \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_k, E_1 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g^{22} \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_k, E_2 \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g^{nn} \langle \bar{\nabla}_{E_n} E_k, E_n \rangle \end{pmatrix}$$

y

$$H = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^m \varepsilon_k \operatorname{tr} [A_k] E_k,$$

donde $g_{ii} = \langle E_i(p), E_i(p) \rangle$ para todo $i : 1, \dots, n$, $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$ y $\varepsilon_k = \langle E_k(p), E_k(p) \rangle$ para todo $k : n+1, \dots, m$.

4.3. Variedades lorentzianas

4.3.1. Espacio-tiempo

Recordemos que una variedad lorentziana es una variedad semi-riemanniana con signatura $(-, +, \dots, +)$.

En [41], O'Neill considera que la existencia de conos temporales lleva a plantear un interrogante fundamental acerca de las variedades lorentzianas: en cada uno de sus espacios tangentes lorentzianos existen dos conos temporales, sin que se pueda distinguir intrínsecamente uno de otro. La elección de uno de ellos dos determina la orientación temporal de cada espacio tangente.

Si M denota una variedad lorentziana y τ_p un cono temporal en $T_p M$, entonces la función $\tau : M \rightarrow \cup_{p \in M} T_p M$ tal que $\tau(p) = \tau_p$ es una función suave si para cada $p \in M$ existe un campo vectorial (suave) V sobre un entorno \mathcal{U} de p tal que $V(q) \in \tau_p$ para todo $q \in \mathcal{U}$. La función τ es llamada una tiempo-orientación u orientación temporal de M .

Si M admite una orientación temporal, se dice que M es tiempo-orientable o temporalmente orientable. Así, elegir una orientación temporal específica de M significa orientar temporalmente a M .

La orientación temporal de M elegida es llamada el futuro, mientras que su opuesta es llamada el pasado.

Definición 124 Una variedad lorentziana M con una orientación temporal se dice un espacio-tiempo.

En particular, los espacios L^n son espacios-tiempo. Toda hipersuperficie en L^n será dada por sus funciones coordenadas x_i con $n-1$ parámetros. Las funciones x_i son funciones reales a variables reales.

Dado un vector temporal $x \in L^n$, el cono temporal de L^n que contiene a x es el conjunto de vectores temporales $y \in L^n$ tales que $\langle x, y \rangle < 0$.

4.3.2. Caminos y curvas

En [41], [5] y [45] se encuentran las siguientes definiciones y resultados.

Definición 125 *Un camino o trayectoria (“path”, en el original) es un mapeo continuo $\alpha : I \rightarrow M$, donde I es un subconjunto conexo de \mathbb{R} que contiene más de un punto y M es un espacio-tiempo con orientación temporal.*

El camino α se dice suave si el mapeo α es suave con derivada distinta de cero.

Definición 126 *Un camino suave es llamado puro temporal, puro espacial o puro nulo si, en todo punto, sus vectores tangentes son temporales, espaciales o nulos, respectivamente; un camino se dice no espacial si todos sus vectores tangentes son no espaciales.*

Definición 127 *Una curva α es una clase de equivalencia del camino α bajo cambio de parámetro (es decir, homeomorfismo o difeomorfismo entre los diferentes dominios del camino).*

Indistintamente, también se utiliza el término curva para indicar la imagen de α .

Definición 128 *Una curva continua y no espacial $\alpha : I \rightarrow M$ se dice dirigida hacia futuro si todo par de vectores tangentes x, y satisface que $\langle x, y \rangle < 0$.*

Notar que, a partir de la definición anterior, es posible asignar una orientación a las curvas nulas.

Definición 129 *Dado un camino α , o su curva asociada, con dominio I , si $a = \inf I$ y $b = \sup I$, donde $a \leq -\infty$ y $b \leq +\infty$, entonces se dice que $x \in M$ es un punto final de α si para toda sucesión $\{t_i\} \subset I$ se satisface que: $t_i \rightarrow a \Rightarrow \alpha(t_i) \rightarrow x$, o $t_i \rightarrow b \Rightarrow \alpha(t_i) \rightarrow x$.*

Si α es temporal y dirigida hacia futuro, entonces, en el primer caso, se dice que x es punto final pasado; en el segundo caso, x es punto final futuro.

Observación 130 *Al igual que Penrose en [45], en este trabajo se requerirá que toda curva contenga sus puntos finales. Así, no se encontrarán curvas con un infinito número de pliegues acumulándose en uno de sus puntos (en el caso de geodésicas temporales hacia futuro a trozos, a este tipo de curvas Penrose las llama “bad trip”).*

En [7], se encuentra el siguiente resultado sobre curvas planas.

Proposición 131 *Una curva cerrada, simple y convexa en L^2 tiene al menos cuatro puntos nulos.*

Esto significa que en toda curva cerrada, simple y convexa del plano de Lorentz, existen al menos cuatro puntos en los cuales la curva tiene rectas tangentes nulas.

4.3.3. Condición cronológica y topología

Dado un espacio-tiempo M , se definen relaciones cronológicas y causales entre los puntos de M .

Definición 132 *Dados dos puntos $p, q \in M$, se dice que q es el futuro cronológico de p (o p es el pasado cronológico de q) si existe una curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ temporal hacia futuro tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$.*

La situación descrita en la definición anterior será notada $p \ll q$.

Definición 133 *Dados dos puntos $p, q \in M$, se dice que q es el futuro causal de p (o p es el pasado causal de q) si existe una curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ temporal o nula tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$.*

Esta situación será notada $p \leq q$.

Con una notación clásica se indican los futuros y los pasados cronológicos y causales de un punto p en M :

$$\begin{aligned} I^+(p) &= \{q \in M : p \ll q\}, \\ I^-(p) &= \{q \in M : q \ll p\}, \\ J^+(p) &= \{q \in M : p \leq q\}, \\ J^-(p) &= \{q \in M : q \leq p\}. \end{aligned}$$

Dado un subconjunto $S \subseteq M$, se tienen los subconjuntos

$$\begin{aligned} I^+(S) &= \{q \in M : s \ll q \text{ para algún } s \in S\}, \\ I^-(S) &= \{q \in M : q \ll s \text{ para algún } s \in S\}, \\ J^+(S) &= \{q \in M : s \leq q \text{ para algún } s \in S\}, \\ J^-(S) &= \{q \in M : q \leq s \text{ para algún } s \in S\}. \end{aligned}$$

Las relaciones \ll y \leq son transitivas.

Lema 134 *Si p es un punto del espacio-tiempo M , entonces los conjuntos $I^+(p)$ e $I^-(p)$ son conjuntos abiertos.*

Demostración.

Si existe una curva temporal dirigida hacia futuro de p a q , entonces existe un entorno \mathcal{U} de q tal que para cada punto q' de \mathcal{U} existe una curva temporal dirigida hacia futuro de p a q' . ■

Definición 135 *Un subconjunto $S \subseteq M$ se dice hacia futuro si $S = I^+(S)$ y se dice hacia pasado si $S = I^-(S)$.*

Es inmediato que todo subconjunto hacia futuro o hacia pasado es abierto.

Definición 136 Un subconjunto abierto $S \subseteq M$ se dice causalmente convexo si no existen curvas no espaciales que intersequen a S en un conjunto no conexo.

Definición 137 Dado $p \in M$, se dice que el espacio-tiempo M es fuertemente causal en p si existen entornos arbitrariamente pequeños y causalmente convexos de p .

El espacio-tiempo M se dice fuertemente causal si lo es en todo $p \in M$.

Los espacio-tiempos fuertemente causales se pueden caracterizar en términos de la llamada topología de Alexandrov.

La topología de Alexandrov en un espacio-tiempo arbitrario M es la topología dada en M que tiene como base todos los conjuntos de la forma $I^+(p) \cap I^-(q)$, para todo $p, q \in M$.

Es conocido (cf. [5]) que la topología dada en un espacio-tiempo fuertemente causal M y la topología de Alexandrov definida en M son equivalentes.

Proposición 138 Sea $e : L^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión natural del espacio lorentziano en el espacio euclideo de la misma dimensión. Para todo $G_{pq} = I^+(p) \cap I^-(q)$ en L^n , existen bolas abiertas $B(\varepsilon)$ y $B(\varepsilon')$, de radios $\varepsilon \leq \varepsilon'$, en \mathbb{R}^n tales que $B(\varepsilon) \subseteq e(G_{pq}) \subseteq B(\varepsilon')$ y para toda bola $B(\varepsilon)$ existen puntos $p, q, p', q' \in L^n$ tales que $e(G_{pq}) \subseteq B(\varepsilon) \subseteq e(G_{p'q'})$.

Demostración.

Dado $G_{pq} = I^+(p) \cap I^-(q)$ en L^n con $p \neq q$, sean $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ tales que $\varepsilon < \left\| \overline{e(p)e(q)} \right\| < \varepsilon'$.

Sea m el punto medio del segmento $\overline{e(p)e(q)}$. La bolas B y B' centradas en m y de radios $\frac{\varepsilon}{4}$ y $2\varepsilon'$, respectivamente, satisfacen la relación $B \subseteq e(G_{pq}) \subseteq B'$.

Recíprocamente, dada una bola centrada en m y de radio $\varepsilon > 0$, se consideran los puntos $p, q, p', q' \in L^n$ tales que $p, p', e^{-1}(m), q', q$ sean colineales y

$$\max \left\{ \left\| \overline{e^{-1}(m)p'} \right\|, \left\| \overline{e^{-1}(m)q'} \right\| \right\} < \varepsilon < \min \left\{ \left\| \overline{e^{-1}(m)p} \right\|, \left\| \overline{e^{-1}(m)q} \right\| \right\}.$$

Así, $e(G_{pq}) \subseteq B(\varepsilon) \subseteq e(G_{p'q'})$. ■

De la Proposición 138 se deriva que, como espacios topológicos, L^n con la topología de Alexandrov y \mathbb{R}^n con la topología usual comparten propiedades; por ejemplo, ambos son espacios Hausdorff.

4.3.4. Espacios hiperbólico y de de Sitter

Definición 139 Sea $r > 0$; los conjuntos de puntos

$$S_1^n(r) = \left\{ x \in L^{n+1} : -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = r^2 \right\}$$

y

$$H_0^n(r) = \left\{ x \in L^{n+1} : -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = -r^2 \right\}$$

son llamados espacio de de Sitter de radio r y espacio hiperbólico de dimensión n y radio r , respectivamente.

En el caso $n = 2$, el espacio de de Sitter es también llamado pseudoesfera en L^3 . Es bien conocido (cf. [41]), que todo espacio de de Sitter $S_1^n(r)$ es:

- (i) un espacio-tiempo;
- (ii) simplemente conexo si $n > 2$;
- (iii) geodésicamente completo.

Las curvas geodésicas de un espacio de de Sitter de radio r quedan determinadas por la intersección de $S_1^n(r)$ con los planos que pasan por el origen de coordenadas de L^{n+1} .

En adelante, S_1^n notará el espacio de de Sitter de radio 1.

El espacio de de Sitter S_1^n puede ser representado por las coordenadas globales $(\omega, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, donde $-\infty < \omega < +\infty$, $0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$, y $0 \leq \theta_i \leq \pi$ para todo $i : 1, \dots, n-2$. Aquí, ω es una coordenada en \mathbb{R} y $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ son las coordenadas de la esfera unitaria euclídea S^{n-1} , [5].

Notar que los espacios de de Sitter tienen curvatura positiva e igual a $\frac{1}{r^2}$ y que la curvatura de H_0^n es el número negativo $-\frac{1}{r^2}$.

En [41] se encuentra el siguiente resultado que fundamenta la importancia de los espacios de de Sitter $S_1^n(r)$ y de los cubrimientos $\tilde{S}_1^n(r)$ y $\tilde{H}_1^n(r)$.

Proposición 140 *Toda variedad lorentziana n -dimensional, completa, simplemente conexa y con curvatura constante C es isométrica a*

$$\begin{aligned} S_1^n(r), & \quad \text{si } C = \frac{1}{r^2} \text{ y } n \geq 3, \\ \tilde{S}_1^n(r), & \quad \text{si } C = \frac{1}{r^2} \text{ y } n = 2, \\ L^n, & \quad \text{si } C = 0, \\ \tilde{H}_1^n(r), & \quad \text{si } C = -\frac{1}{r^2}, \end{aligned}$$

donde $H_1^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_2^{n+1} : -x_1^2 - x_2^2 + \sum_{i=3}^{n+1} x_i^2 = -r^2\}$ denota el espacio pseudohiperbólico de radio $r > 0$ en \mathbb{R}_2^{n+1} , y $\tilde{H}_1^n(r)$ denota su cubrimiento.

4.3.5. Imagen esférica en L^{n+1}

Para extender los conceptos de imagen y polígono esférico y circular de espacios euclídeos a espacios lorentzianos, se debe tener en cuenta la causalidad en estos últimos. Se debe distinguir entre imagen esférica de un vector temporal e imagen esférica de un vector espacial en L^{n+1} .

La siguiente definición forma parte de [20].

Definición 141 Sean $P_i, P_{i+1} \in L^{n+1}$.

- i) Si $P_{i+1} - P_i$ es un vector temporal, entonces su t -imagen esférica está dada por $Q_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{\|P_{i+1} - P_i\|} \in H_0^n$.

ii) Si $P_{i+1} - P_i$ es un vector espacial, entonces su s -imagen esférica está dada por $Q_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{\|P_{i+1} - P_i\|} \in S_1^n$.

En la definición anterior, las letras “t” y “s” que anteceden a la palabra “imagen” hacen referencia a la causalidad de los vectores a los que se aplica, es decir temporal (*timelike*) y espacial (*spacelike*), respectivamente.

Para extender el concepto de polígono esférico de espacios euclidianos a espacios lorentzianos de dimensión $n > 2$ se deben tener en cuenta dos cuestiones fundamentales, que se explican a continuación.

En primer lugar y como ya se ha definido, se tienen dos tipos de imágenes esféricas, la t -imagen y la s -imagen esférica, por cuya aplicación se obtienen puntos en dos espacios distintos: el espacio hiperbólico H_0^n y el espacio de de Sitter de dimensión n , S_1^n .

En segundo lugar, la restricción a polígonos puros espaciales o puros temporales no es suficiente para asegurar la existencia de un polígono esférico vía imágenes s -esféricas o vía imágenes t -esféricas.

Si bien los espacios de de Sitter son geodésicamente completos, existen puntos en estos espacios que no pueden ser unidos por curvas geodésicas. Por ejemplo, si A y B son dos puntos en S_1^n , $n > 2$, tales que existe una curva geodésica temporal que los une, siempre se puede elegir un punto C que esté separado de B por una geodésica espacial y tal que no exista una curva geodésica que una A con C .

Esta particularidad de los espacios de de Sitter contrasta con otros espacios con métrica definida positiva, donde el ser completamente geodésico garantiza que cualquier par de puntos del espacio pueden ser unidos por al menos una curva geodésica.

Capítulo 5

Curvaturas

Mostramos definiciones y resultados obtenidos por L. Santaló en [47], J. W. Milnor en [36], T. F. Banchoff en [3] y A. C. M. van Rooij en [52] sobre curvatura total absoluta y curvatura total central de curvas cerradas en espacios euclidianos.

5.1. Curvas planas

La primera idea que se tiene de curvas planas es de carácter geométrico-intuitivo: una curva es una línea continua en el plano euclideo. En 1887, Jordan define en forma precisa el concepto de curvas continuas en el plano, [48], expresando que “si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un mapeo continuo, entonces $f([0, 1])$ es una curva continua”.

Las llamadas curvas de Jordan son de particular interés en el plano \mathbb{R}^2 . Estas curvas son definidas clásicamente como mapeos continuos $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, tales que $f(I)$ es homeomorfo a la circunferencia euclídea unitaria S^1 ; es decir, si f es una curva de Jordan, $f(I)$ es cerrado (esto significa que $f(a) = f(b)$) y simple (esto significa que $f(t_1) \neq f(t_2) \forall t_1, t_2 \in (a, b)$).

Un teorema clásico de la topología es el llamado Teorema de Jordan: si C es una curva de Jordan en el plano Π , entonces $\Pi - C$ tiene dos componentes, una interior a la curva y otra exterior, ambas conexas; la interior es acotada, la exterior no lo es y la frontera común de ambas es precisamente C .

Cabe aclarar que en [35] se encuentra una definición de curvas de Jordan en el plano complejo. En el citado libro, Markushevich expresa que si un mismo punto z corresponde a distintos valores del parámetro de la curva, entre los cuales al menos uno es distinto de sus valores extremos, entonces z es llamado punto múltiple de la curva. Una curva que carece de puntos múltiples es, para Markushevich, una curva de Jordan.

Las poligonales y los polígonos en \mathbb{R}^2 son curvas planas y C^2 a trozos. Entre otras, se encuentran las definiciones dadas por D. Kay en [31].

Definición 142 *Para cada $n \geq 1$, una poligonal de orden n es el conjunto de segmentos rectilíneos orientados $\overline{P_0P_1} \cup \dots \cup \overline{P_nP_{n+1}}$, donde los puntos $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{R}^2$ se dicen vértices y los segmentos $\overline{P_0P_1}, \dots, \overline{P_nP_{n+1}}$ se dicen lados de la poligonal.*

Dicha poligonal se notará $[P_0, \dots, P_{n+1}]$.

Definición 143 Si una poligonal $[P_0, \dots, P_{n+1}]$ es cerrada, es decir si $P_0 = P_{n+1}$, y si ninguna terna de vértices consecutivos es colineal, entonces la poligonal es llamada polígono y denotada por $\mathbf{P}[P_0, \dots, P_n]$.

Si un polígono tiene a lo sumo dos vértices diferentes, se dice que el polígono es degenerado.

5.1.1. Curvatura total de curvas planas

En la introducción del capítulo 1 de [47], Santaló expresa que “los conjuntos convexos juegan un papel importante en la geometría integral”.

Definición 144 Un conjunto K de puntos en el plano se dice convexo si para cada par de puntos $A, B \in K$ se cumple que $\overline{AB} \subset K$, donde \overline{AB} denota el segmento recto que une A con B .

Las curvas cerradas convexas se obtienen a partir de los conjuntos convexos, como lo muestra la siguiente definición, [47].

Definición 145 Si el conjunto convexo K es acotado y tiene puntos interiores, entonces el borde de K , ∂K , es llamado curva cerrada convexa.

Notar que si todos los puntos de K son puntos de su borde, entonces K es un segmento recto.

5.1.2. Recta soporte de una curva cerrada convexa

Una recta l en el plano queda unívocamente determinada por su distancia ρ al origen y el ángulo ϕ que forma la normal de l con el eje x , $0 \leq \phi < \pi$.

La ecuación de la recta es

$$x \cos \phi + y \sin \phi - \rho = 0.$$

Ejemplo 146 La recta $l : y = \pi - x$ queda unívocamente determinada por el par $(\rho, \phi) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$. En la Figura 1 se muestra el segmento normal a l y el ángulo que éste forma con el eje x ; la recta l está dibujada con trazo medio.

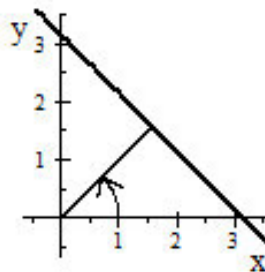


Figura 1.

Observación 147 Si ϕ es una función $\phi = \phi(\rho)$, entonces

$$x \cos \phi(\rho) + y \sin \phi(\rho) - \rho = 0$$

es la ecuación de una familia de rectas. En particular, si $\phi(\rho)$ es constante, se tiene una familia de rectas paralelas.

En la página 6 de [47] se encuentra la siguiente definición:

Definición 148 Una recta l se dice recta soporte de un conjunto convexo K en un punto $P \in \partial K$ si $P \in l$ y K está contenido en la clausura de uno de los dos semiplanos abiertos en que l divide al plano.

Si por $P \in \partial K$ pasa una recta tangente a ∂K , entonces dicha recta es recta soporte a K en P .

Por otro lado, por todo punto de ∂K pasa una recta soporte a K y, puesto que K es un conjunto convexo, existen exactamente dos rectas soportes a K ortogonales a una dirección dada.

Ejemplo 149 En la Figura 2 se muestran, en color gris, dos rectas soporte a $K : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$, las cuales son ortogonales al eje x .

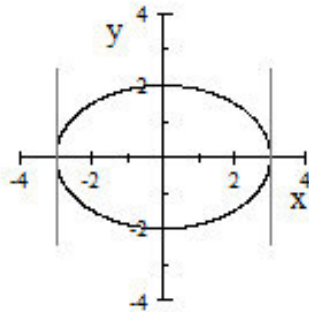


Figura 2.

5.1.3. Curvatura total

En la página 112 de [47], se define la curvatura total de una curva plana, cerrada, orientada y con curvatura κ continua.

Definición 150 Sea C una curva plana, cerrada, orientada y con curvatura κ continua. Si s denota el parámetro longitud de arco de C , entonces la curvatura total de C , $tc_2(C)$, está definida por:

$$tc_2(C) = \int_C \kappa ds.$$

Observación 151 Dado que $\kappa = \frac{d\tau}{ds}$, donde τ denota el ángulo que determinan la tangente a C orientada y el eje x , entonces

$$tc_2(C) = \int_C d\tau.$$

Esto significa que la curvatura total es igual a la variación total de τ cuando la tangente recorre la curva en el sentido dado por la orientación de C .

También en [47], página 112, se define la curvatura total de una curva \mathcal{C}^2 a trozos.

Definición 152 Si C es la unión de un número finito de arcos $C_1 = A_1A_2$, $C_2 = A_2A_3, \dots$, $C_m = A_mA_1$ de clase \mathcal{C}^2 , la curvatura total de C está definida por

$$tc_2(C) = \sum_{i=1}^m \int_{C_i} d\tau + \sum_{i=1}^m \theta(A_i),$$

donde $\theta(A_i)$ denota el ángulo orientado entre la tangente a C_{i-1} y la tangente a C_i en A_i , $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Ejemplo 153 Sea T el triángulo de vértices $A_1 = (0, -1)$, $A_2 = (\frac{1}{2}, 0)$ y $A_3 = (0, 1)$, entonces $tc_2(T) = \sum_{i=1}^3 \theta(A_i) = \frac{7}{8}\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{7}{8}\pi = 2\pi$.

Observación 154 Todo polígono plano y convexo tiene curvatura total igual a 2π .

5.1.4. Curvatura total absoluta

En la página 34 de [47], se define la curvatura total absoluta de una curva plana, cerrada, orientada y de clase \mathcal{C}^2 , de la siguiente forma.

Definición 155 Sea C una curva plana, cerrada, orientada y de clase \mathcal{C}^2 . Si s denota el parámetro longitud de arco de C y $\tau(s)$ denota el ángulo orientado que determinan la recta tangente a C en s con una dirección fija (sin pérdida de generalidad, se considerará el eje x), entonces la curvatura total absoluta de C , $tac_2(C)$, es definida por la siguiente fórmula integral:

$$tac_2(C) = \int_C |\kappa| ds = \int_C |d\tau|,$$

donde $\kappa = \frac{d\tau}{ds}$ es la curvatura de C .

Notar que en esta definición de curvatura total absoluta, la curva C debe ser de clase \mathcal{C}^2 pero no necesariamente convexa.

Observación 156 Si con $v(\tau)$ se denota el número de rectas tangentes a C no orientadas que son paralelas a la dirección τ , entonces

$$tac_2(C) = \int_0^\pi v(\tau) |d\tau|,$$

pues cada dirección τ aparece $v(\tau)$ veces.

Ejemplo 157 En la Figura 3 se muestra que $v(0) = 4$ para la curva C dada.

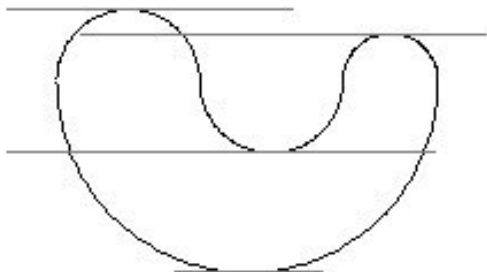


Figura 3.

En [23], Enomoto define la curvatura total absoluta de una curva plana, cerrada, orientada y \mathcal{C}^2 a trozos.

Definición 158 Si C es la unión de un número finito de arcos $C_1 = A_1A_2$, $C_2 = A_2A_3, \dots$, $C_m = A_mA_1$ de clase \mathcal{C}^2 , la curvatura total de C está definida por

$$tac_2(C) = \sum_{i=1}^m \int_{C_i} |d\tau| + \sum_{i=1}^m |\theta(A_i)|$$

donde $|\theta(A_i)|$ denota el ángulo no orientado entre la tangente a C_{i-1} y la tangente a C_i en A_i , $0 \leq \theta \leq \pi$.

Ejemplo 159 Si $\mathbf{P} = \mathbf{P}[(0,0), (4,0), (4,2), (2,2), (2,4), (0,4)]$, entonces $tc_2(\mathbf{P}) = 2\pi$ y $tac_2(\mathbf{P}) = 3\pi$.

En la Figura 4 se encuentra graficado el polígono \mathbf{P} (en trazo medio) y se indican los ángulos exteriores orientados de \mathbf{P} .

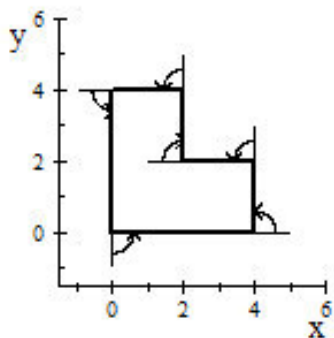


Figura 4.

5.2. Curvatura total según Milnor

Si bien el artículo [36] se titula “On the total curvature of knots”, J. W. Milnor presenta un estudio de lo que L. Santaló definió como curvatura total absoluta.

Otro punto a notar es que, a diferencia de la definición de polígono dada por Kay y de la adoptada en este trabajo, para Milnor un polígono cerrado P en un espacio euclideo \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, es una sucesión finita de puntos $P_1, P_2, \dots, P_{m+1} = P_0$ tal que los segmentos $\overline{P_i P_{i+1}}$ son rectos y $P_i \neq P_{i+1}$, para todo $i = 1, \dots, m$. Esto significa que no requiere que ninguna terna de vértices consecutivos sea colineal, como establece la Definición 20.

Por lo tanto, a continuación se adaptará el artículo de Milnor a las definiciones que dimos anteriormente.

5.2.1. La curvatura total absoluta de polígonos

Definición 160 Dado un polígono $\mathbf{P} = \mathbf{P}[P_1, \dots, P_m]$ en el espacio euclideo \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, la curvatura total absoluta de \mathbf{P} está dada por

$$tac_n(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^m |\theta(P_i)|,$$

donde $|\theta(P_i)|$ denota el ángulo no orientado entre los vectores $P_{i+1} - P_i$ y $P_i - P_{i-1}$, con $0 \leq |\theta(P_i)| \leq \pi$.

Lema 161 La adjunción de un nuevo vértice a un polígono no hace decrecer su curvatura total absoluta.

Demostración.

Sean $\mathbf{P}' = \mathbf{P}'[P_1, \dots, P_{j-1}, P_{j+1}, \dots, P_m]$ un polígono de $m - 1$ lados y P_j un punto en el plano tales que cada terna de puntos (P_{j-2}, P_{j-1}, P_j) , (P_{j-1}, P_j, P_{j+1}) y (P_j, P_{j+1}, P_{j+2}) es no colineal.

Se construye el polígono $\mathbf{P} = \mathbf{P}[P_1, \dots, P_{j-1}, P_j, P_{j+1}, \dots, P_m]$ adjuntando a \mathbf{P}' el punto P_j como vértice.

Denotamos con $|\theta'(P_i)|$ y $|\theta(P_i)|$ los ángulos exteriores no orientados de los polígonos \mathbf{P}' y \mathbf{P} , respectivamente. Sea β^- el ángulo no orientado entre los vectores $P_j - P_{j-1}$ y $P_{j+1} - P_{j-1}$, y sea β^+ el ángulo no orientado entre los vectores $P_{j+1} - P_{j-1}$ y $P_{j+1} - P_j$.

En la Figura 5 se han representado una sección plana del polígono \mathbf{P}' en color negro y con trazo medio; los segmentos $\overline{P_{j-1}P_j}$ y $\overline{P_jP_{j+1}}$, que son lados del polígono \mathbf{P} , se encuentran representados en color gris y trazo medio. Los ángulos $|\theta'(P_i)|$ y $|\theta(P_i)|$ son mostrados por medio de arcos de color negro y gris, respectivamente; con un arco gris claro se marca el ángulo β^- y con un arco gris claro y trazo medio, el ángulo β^+ .

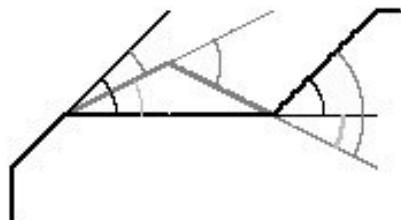


Figura 5.

Por la desigualdad triangular para triángulos esféricos, es conocido que $|\theta(P_{j-1})| + \beta^- \geq |\theta'(P_{j-1})|$ y que $|\theta(P_{j+1})| + \beta^+ \geq |\theta'(P_{j+1})|$, cumpliéndose la igualdad solo si los puntos P_{j-1}, P_j y P_{j+1} son coplanares.

Del triángulo de vértices P_{j-1}, P_j y P_{j+1} , se obtiene que $\beta^- + \beta^+ = |\theta(P_j)|$ (ver Figura 5). Entonces

$$\begin{aligned} \text{tac}_n(\mathbf{P}) - \text{tac}_n(\mathbf{P}') &= (|\theta(P_{j-1})| - |\theta'(P_{j-1})|) + |\theta(P_j)| + (|\theta(P_{j+1})| - |\theta'(P_{j+1})|) \\ &\geq -\beta^- + |\theta(P_j)| - \beta^+ = 0. \end{aligned}$$

Luego, $\text{tac}_n(\mathbf{P}) \geq \text{tac}_n(\mathbf{P}')$ y la igualdad se satisface solo si los puntos $P_{j-2}, P_{j-1}, P_j, P_{j+1}$ y P_{j+2} son coplanares o P_{j-1}, P_j y P_{j+1} son colineales. Dado que esta última terna de puntos consecutivos está formada por vértices del polígono \mathbf{P} , los puntos no pueden ser colineales. Luego, $P_{j-2}, P_{j-1}, P_j, P_{j+1}$ y P_{j+2} deben ser coplanares. ■

Si bien con la adición de un nuevo vértice la curvatura total absoluta de un polígono crece o permanece igual, ciertas sustituciones de vértices del polígono hacen decrecer dicha curvatura.

Corolario 162 Si los vértices P_{j-2}, P_{j-1}, P_j y P_{j+1} de un polígono \mathbf{P} no son coplanares y se reemplaza el vértice P_j por un punto colineal con P_{j-1} y P_{j+1} , entonces la curvatura total absoluta del nuevo polígono es menor que la de \mathbf{P} .

5.2.2. Curvatura total absoluta de una curva

En [36], Milnor define una curva cerrada C en un espacio euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n como una función vectorial continua $f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ de período L , la cual no es constante en ningún t -intervalo.

Notar que, en particular, un polígono puede ser descripto como una curva cerrada, independientemente de sus distintas parametrizaciones.

Una curva cerrada $f(t)$ se dice simple si $f(t_1) = f(t_2)$ solo cuando $\frac{t_1 - t_2}{L}$ es un número entero.

Un polígono $\mathbf{P} = \mathbf{P}[P_1, \dots, P_m]$ se dice inscripto en una curva cerrada $f(t)$ si existe un conjunto de valores paramétricos t_i tales que $t_i < t_{i+1}$, $t_{i+m} = t_i + L$ y $P_i = f(t_i)$ para todo i .

Definición 163 Sea C una curva cerrada en \mathbb{R}^n . Entonces

$$tac_n(C) = \limsup \{tac_n(\mathbf{P})\},$$

donde el límite se toma sobre todos los polígonos \mathbf{P} inscriptos en C .

La equivalencia entre esta definición y la dada anteriormente se muestra a través de los siguientes lema y teorema.

Lema 164 Sea \mathbf{P} un polígono en \mathbb{R}^n . Entonces $tac_n(\mathbf{P}) = \limsup \{tac_n(\mathbf{P}')\}$, donde el límite se toma sobre todos los polígonos \mathbf{P}' inscriptos en \mathbf{P} .

Demostración.

Si \mathbf{P} es un polígono con dos o más vértices coincidentes, se lo puede representar como el límite de una sucesión de polígonos con todos sus vértices distintos; por lo tanto, basta demostrar el lema para polígonos con todos sus vértices distintos.

Sea \mathbf{P}'_0 un polígono con $m - m_0$ vértices tal que \mathbf{P}'_0 está inscripto en $\mathbf{P} = \mathbf{P}[P_1, \dots, P_m]$ y todos los vértices de \mathbf{P}'_0 son vértices de \mathbf{P} . En estas condiciones, se pueden adjuntar, uno por uno, a \mathbf{P}'_0 los m_0 vértices faltantes, obteniéndose una sucesión $\mathbf{P}'_0, \dots, \mathbf{P}'_{m-m_0}$ de polígonos inscriptos en \mathbf{P} . Por Lema 161, $tac_n(\mathbf{P}'_0) \leq tac_n(\mathbf{P}'_1) \leq \dots \leq tac_n(\mathbf{P}'_{m-m_0})$; pero $tac_n(\mathbf{P}'_{m-m_0}) = tac_n(\mathbf{P})$. Entonces $tac_n(\mathbf{P}) = \limsup \{tac_n(\mathbf{P}')\}$. ■

Teorema 165 Si $C = f(s)$ es una curva cerrada de clase \mathcal{C}^2 parametrizada por longitud de arco, entonces

$$tac_n(C) = \int_C \|f''(s)\| ds.$$

Demostración.

Sean \mathbf{P}_m un polígono inscripto en C y $P_1^m = f(s_1^m), \dots, P_m^m = f(s_m^m)$ sus vértices, tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_i \{s_{i+1}^m - s_i^m\} = 0$. Se probará primero que $\lim_{m \rightarrow \infty} tac_n(\mathbf{P}_m) = \int_C \|f''(s)\| ds$.

Se define $\bar{s}_i^m = \frac{1}{2}(s_{i+1}^m + s_i^m)$ para todo i y para todo m , y con θ_i^m se denota el ángulo entre $f'(\bar{s}_{i-1}^m)$ y $f'(\bar{s}_i^m)$.

El vector $f'(s)$ describe una curva l de longitud $\int_C \|f''(s)\| ds$ sobre la esfera unitaria S^{n-1} .

Los puntos finales de los vectores $f'(\bar{s}_i^m)$ son puntos de S^{n-1} ; uniendo esos puntos por arcos sobre grandes círculos S^{n-1} , queda determinada una curva sobre la esfera e inscripta en l llamada polígono esférico, cuya longitud es igual a $\sum_{i=1}^m \theta_i^m$.

Entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \theta_i^m = \int_C \|f''(s)\| ds$.

Dado que $f''(s)$ es uniformemente continua, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f''(u) - f''(v)| < \varepsilon$ si $|u - v| < \delta$.

De la identidad

$$\begin{aligned} f(s_{i+1}^m) - f(s_i^m) &= (s_{i+1}^m - s_i^m) f'(\bar{s}_i^m) \\ &+ \int_{\bar{s}_i^m}^{s_{i+1}^m} \int_{\bar{s}_i^m}^v [f''(u) - f''(\bar{s}_i^m)] dudv \\ &+ \int_{s_i^m}^{\bar{s}_i^m} \int_u^{\bar{s}_i^m} [f''(\bar{s}_i^m) - f''(v)] dudv \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\left| \frac{f(s_{i+1}^m) - f(s_i^m)}{s_{i+1}^m - s_i^m} - f'(\bar{s}_i^m) \right| < (s_{i+1}^m - s_i^m) \frac{\varepsilon}{4}$$

siempre que $\max_i \{s_{i+1}^m - s_i^m\} < \delta$.

Si φ_i^m es el ángulo entre $f(s_{i+1}^m) - f(s_i^m)$ y $f'(\bar{s}_i^m)$, entonces

$$\sin(\varphi_i^m) < (s_{i+1}^m - s_i^m) \frac{\varepsilon}{4}.$$

Para un ε suficientemente pequeño, se tiene que

$$\varphi_i^m < 2 \sin(\varphi_i^m) < (s_{i+1}^m - s_i^m) \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si α_i^m denota el ángulo entre $f(s_{i+1}^m) - f(s_i^m)$ y $f(s_i^m) - f(s_{i-1}^m)$, entonces

$$\alpha_i^m \leq \theta_i^m + \varphi_i^m + \varphi_{i-1}^m \quad \text{y} \quad \theta_i^m \leq \alpha_i^m + \varphi_i^m + \varphi_{i-1}^m$$

por lo que

$$|\alpha_i^m - \theta_i^m| \leq \varphi_i^m + \varphi_{i-1}^m < (s_{i+1}^m - s_{i-1}^m) \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\left| \sum_{i=1}^m \alpha_i^m - \sum_{i=1}^m \theta_i^m \right| < L\varepsilon,$$

donde L es la longitud de C .

Luego,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} tac_n(\mathbf{P}_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \alpha_i^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \theta_i^m = \int_C \|f''(s)\| ds.$$

Para probar que $\int_C \|f''(s)\| ds = \limsup \{tac_n(\mathbf{P})\}$, donde el límite se toma sobre todos los polígonos \mathbf{P} inscriptos en C , bastará con probar que $tac_n(\mathbf{P}) \leq \int_C \|f''(s)\| ds$.

Dado un polígono \mathbf{P}_k inscripto en C , se forma una sucesión de polígonos \mathbf{P}_m , con $m = k, k+1, \dots$, adjuntando vértices a \mathbf{P}_k tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_i \{s_{i+1}^m - s_i^m\} = 0.$$

Por el Lema 161, se tiene que

$$tac_n(\mathbf{P}_k) \leq tac_n(\mathbf{P}_{k+1}) \leq \dots,$$

pero $\limsup_{m \rightarrow \infty} \{tac_n(\mathbf{P}_m)\} = \int_C \|f''(s)\| ds$, entonces

$$tac_n(\mathbf{P}_k) \leq \int_C \|f''(s)\| ds. \blacksquare$$

5.2.3. Imagen esférica

Definición 166 La imagen esférica de un vector $P_{i+1} - P_i \neq 0$ en el espacio vectorial \mathbb{R}^n es el punto $Q_i = \frac{1}{\|P_{i+1} - P_i\|} (P_{i+1} - P_i) \in S^{n-1}$.

En particular, si $n = 2$ diremos que Q_i es la imagen circular del vector $P_{i+1} - P_i$.

A partir de este concepto, se definen la imagen esférica y la imagen circular de un polígono.

Definición 167 Sea $\mathbf{P} = \mathbf{P}[P_1, \dots, P_m]$ un polígono en \mathbb{R}^n y sea \mathbf{Q} el polígono en S^{n-1} que se forma uniendo el punto Q_{i-1} con el punto Q_i por medio de un arco de una curva geodésica de S^{n-1} de longitud $\alpha_i < \infty$. El polígono \mathbf{Q} es llamado la imagen esférica de \mathbf{P} si $n \geq 3$ e imagen circular de \mathbf{P} si $n = 2$.

Observar que \mathbf{Q} es único salvo que $Q_i = -Q_{i-1}$ para algún i .

Ejemplo 168 En la Figura 6a se muestra el triángulo del Ejemplo 153 (se han marcado con distinto color sus aristas $\overline{P_i P_{i+1}}$) y se indican los ángulos exteriores orientados del mismo. En la Figura 6b se muestra, con su correspondiente color, cada uno de los segmentos $\overline{OQ_i}$, donde $O = (0,0)$ y Q_i denota la imagen circular del vector $P_{i+1} - P_i$. Obsérvese que los ángulos determinados por estos segmentos coinciden con las respectivas magnitudes de ángulos exteriores orientados del triángulo.

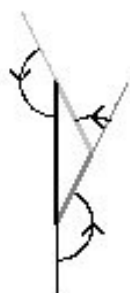


Figura 6a.

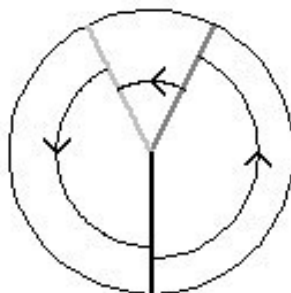


Figura 6b.

Proposición 169 Si \mathbf{P} es un polígono plano en \mathbb{R}^{n+1} , entonces su imagen esférica pertenece a un único círculo máximo de S^n .

Demostración.

Sea $\mathbf{P}[P_1, \dots, P_m] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un polígono plano tal que $\sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j^i = d$, donde $P_i = (x_1^i, \dots, x_{n+1}^i)$, $i: 1, \dots, m$, y d es un número real.

Así, $\sum_{j=1}^{n+1} a_j (x_j^{i+1} - x_j^i) = 0$ y, por lo tanto, el vector $P_{i+1} - P_i$ es ortogonal al vector (a_1, \dots, a_{n+1}) , para todo $i: 1, \dots, m$.

Dado que

$$Q_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{\|P_{i+1} - P_i\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} (x_j^{i+1} - x_j^i)^2}} (x_1^{i+1} - x_1^i, \dots, x_{n+1}^{i+1} - x_{n+1}^i),$$

entonces Q_i es ortogonal al vector (a_1, \dots, a_{n+1}) , para todo $i : 1, \dots, m$. Esto significa que $Q_i \in \pi \cap S^n$, donde π es el plano $a_1x_1 + \dots + a_{n+1}x_{n+1} = 0$. Dado que π pasa por el origen de coordenadas, $\pi \cap S^n$ es un círculo máximo de S^n . ■

A través de la imagen esférica de polígonos, Milnor vincula la curvatura total absoluta con una fórmula integral. Si bien dicho resultado es válido para la curvatura total absoluta de cualquier curva cerrada, a continuación se lo transcribe solo para el caso de polígonos.

Si $\mathbf{P} = P(t)$ es un polígono, para cada $\sigma \in S^{n-1}$ la expresión $K(P^\sigma)$ denotará el número de máximos relativos alcanzados por la función $\langle \sigma, P(t) \rangle$ en un período fundamental. Además, $K(P) = \min_{\sigma \in S^{n-1}} \{K(P^\sigma)\}$.

Teorema 170 Para todo polígono $\mathbf{P} = P(t)$ en \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, la integral de Lebesgue

$$\int_{\sigma \in S^{n-1}} K(P^\sigma) d\mu$$

existe y es igual a $\frac{M_{n-1}K(P)}{2\pi}$, donde $M_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ es la medida de S^{n-1} .

Demostración.

Si $\sigma \in S^{n-1}$, la gran esfera de S^{n-1} con polo en σ es denotada por S_σ^{n-2} ; es decir, $S_\sigma^{n-2} = \{\tau \in S^{n-1} : \langle \tau, \sigma \rangle = 0\}$.

Sean $\mathbf{P} = P(t)$ un polígono en \mathbb{R}^n y \mathbf{Q} su correspondiente polígono esférico (o circular). Un lado $Q_{i-1}Q_i$ de \mathbf{Q} corta a S_σ^{n-2} si y solo si $\langle P_{i+1} - P_i, \sigma \rangle$ y $\langle P_i - P_{i-1}, \sigma \rangle$ tienen signos opuestos, por lo que $\langle P_i, \sigma \rangle$ es máximo o mínimo de $\langle P(t), \sigma \rangle$.

Si S_σ^{n-2} no contiene vértices de \mathbf{Q} , esto significa que ninguna arista de \mathbf{P} sea ortogonal a σ , el número de intersecciones de \mathbf{Q} con S_σ^{n-2} es igual a $2K(P^\sigma)$.

Por otro lado, el conjunto de puntos para los cuales S_σ^{n-2} contiene algún vértice de \mathbf{Q} es $\cup_i S_{Q_i}^{n-2}$; en cada componente del complemento con respecto a S^{n-1} de $\cup_i S_{Q_i}^{n-2}$, la función $2K(P^\sigma)$ es constante.

Por lo tanto, queda definida la integral $\int_{\sigma \in S^{n-1}} 2K(P^\sigma) d\mu$.

El conjunto de puntos σ para los cuales S_σ^{n-2} corta un lado $Q_{i-1}Q_i$ dado con longitud $0 \leq a_i \leq \pi$ es una “doble luna” sobre S^{n-1} cuyo borde está formado por $S_{Q_{i-1}}^{n-2}$ y $S_{Q_i}^{n-2}$. Así, la contribución de un lado $Q_{i-1}Q_i$ al número $2K(P^\sigma)$ es igual a 1 si σ es un punto interior de esta “media luna” y 0 si σ es un punto exterior.

La medida de esa “media luna” es igual a $\frac{a_i}{\pi} M_{n-1}$, donde $M_{n-1} = \int_{\sigma \in S^{n-1}} d\mu$ es la medida de S^{n-1} .

Entonces, $\int_{\sigma \in S^{n-1}} 2K(P^\sigma) d\mu = \frac{M_{n-1}}{\pi} \sum_i a_i = \frac{M_{n-1}K(P)}{\pi}$. ■

5.3. Curvatura total según van Rooij

A continuación se adaptarán la terminología y la notación utilizadas por van Rooij.

En [52], A.C.M. van Rooij le asigna a cada curva continua f , no necesariamente \mathcal{C}^2 , un número $tac_n(f)$, donde $tac_n(f) \leq \infty$, que coincide, salvo por una constante multiplicativa, con la curvatura total absoluta de f dada por J. Milnor, en caso de que ésta exista.

Definición 171 Si V es un espacio cartesiano real de dimensión n y S es la esfera unitaria en V , dada la curva $f : [a, b] \rightarrow V$ se define para cada $\sigma \in S$ la función f^σ de la forma

$$f^\sigma(t) = \langle \sigma, f(t) \rangle$$

para todo $a \leq t \leq b$, y donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en V .

Una curva $f : [a, b] \rightarrow V$ se dice admisible si $f(t)$ es no constante en todo intervalo no trivial de $[a, b]$.

A continuación, con $K(f^\sigma)$ se denotará el número de máximos relativos alcanzados por la función f^σ en (a, b) .

Proposición 172 Si f es una curva admisible y P_1, P_2, \dots es una sucesión de polígonos admisibles que se encuentran inscriptos en f de forma tal que f es el límite (puntual) de la sucesión de polígonos, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K(P_i^\sigma) = K(f^\sigma)$$

para casi todo σ .

También en [52] se aclara que si la sucesión de polígonos admisibles tiene como límite puntual una curva f no admisible, entonces se considerará que $K(f^\sigma) = \infty$ para todo σ .

Definición 173 La curvatura total absoluta de una curva f , $tac_n(f)$, es dada por

$$tac_n(f) = 2 \int_{\sigma \in S} K(f^\sigma) d\mu,$$

donde μ es la medida de Lebesgue normalizada de S .

En [52], van Rooij considera a S con la métrica dada por

$$|\sigma - \tau|_0 = \frac{1}{\pi} \arccos \langle \sigma, \tau \rangle,$$

para todo $\sigma, \tau \in S$.

Así, obtiene el siguiente resultado:

Teorema 174 Para todo polígono P con ángulos interiores (no orientados) β_1, \dots, β_m vale que

$$tac_n(P) = \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{\beta_i}{\pi}\right).$$

Este teorema muestra la anunciada diferencia entre las definiciones de curvatura total absoluta de van Rooij y Milnor.

Observación 175 Si $|\theta_i|$ denota la magnitud del correspondiente ángulo exterior no orientado, se tiene que

$$1 - \frac{\beta_i}{\pi} = \frac{1}{\pi} (\pi - \beta_i) = \frac{1}{\pi} |\theta_i|,$$

y por lo tanto se puede escribir $tac_n(f) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\pi} |\theta_i| = 2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi} |\theta_i|$.

Si f es de clase \mathcal{C}^2 , entonces $K(f)$ coincide con la clásica curvatura total absoluta de f .

Teorema 176 Si una curva $f : [a, b] \rightarrow V$ es de clase \mathcal{C}^2 y está parametrizada por longitud de arco, entonces

$$tac_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \|f''(s)\| ds.$$

Notar que por Proposición 172 y Definición 173, se tiene que $\lim_{i \rightarrow \infty} tac_n(P_i) = tac_n(f)$.

5.4. Curvatura total central según Banchoff

A continuación, se desarrolla el estudio sobre curvatura total central de curvas cerradas en espacios euclidianos realizado por Thomas Banchoff en [3].

5.4.1. Curvatura total central de curvas cerradas en el plano euclideo

Definición 177 Sea $f_1 : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ un mapeo continuo del círculo unitario euclideo S^1 en el plano euclideo \mathbf{R}^2 . Una recta soporte local a f_1 en $x \in S^1$ es una recta que contiene a $f_1(x)$ y es frontera del semiplano cerrado que contiene a la imagen de un entorno de x en S^1 .

Notaremos con $\Upsilon_{\xi_1}(f_1)$ al número de rectas soporte local de f_1 que pasan por el punto $\xi_1 \in L^2$.

Observación 178 En [3], Banchoff presenta una definición local de recta soporte; en cambio Santaló, en [47], da una definición global de recta soporte.

Definición 179 Sea $f_1 : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ un mapeo continuo del círculo unitario euclideo S^1 en el plano euclideo \mathbf{R}^2 . La curvatura total central de f_1 respecto a un círculo euclideo $C = C(O, r)$, $tcc_2(f_1; C)$, es definida por:

$$tcc_2(f_1; C) = \frac{1}{\text{long}(C)} \int_{\xi_1 \in C} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_C,$$

donde ds_C denota el elemento de arco de C tal que $\int_{\xi_1 \in C} ds_C = \text{long}(C) =:$ longitud de C .

La curvatura $tcc_2(f_1; C)$ es un promedio de $\Upsilon_{\xi_1}(f_1)$ en los puntos $\xi_1 \in C$.

Ejemplo 180 Sean $f_1 : S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbf{R}^2$ la función identidad y C un círculo con centro $O = (0, 0)$ y radio r .

- Si $0 < r < 1$, entonces $\Upsilon_{\xi_1}(f_1) \equiv 2$. Por lo tanto, $tcc_2(f_1; C) = 2$.
- Si $r = 1$, entonces $C = S^1$ y por cada punto de S^1 pasa una única tangente a S^1 . De aquí que $\Upsilon_{\xi_1}(f_1) \equiv 1$ y $tcc_2(f_1; C) = 1$.

c) Si $r > 1$, entonces ninguna recta tangente a C pasa por S^1 . De aquí que $\Upsilon_{\xi_1}(f_1) \equiv 0$ y, por lo tanto, $tcc_2(f_1; C) = 0$.

En las siguientes figuras, las circunferencias S^1 y C se han graficado en color gris oscuro y gris claro, respectivamente. En la Figura 7a se representa el caso a) del Ejemplo 180 y se muestra que por cada punto S^1 pasan dos rectas tangentes a C ; en la Figura 7b, se representa el caso b) y se muestra que por cada punto S^1 pasa una única recta tangente; el caso c) está representado en la Figura 7c.

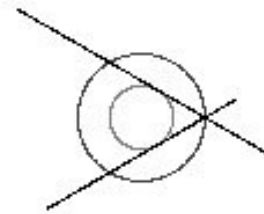


Figura 7a.

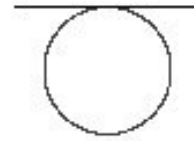


Figura 7b.

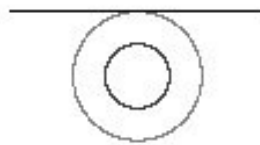


Figura 7c.

Observación 181 Si f_1 es una curva cerrada y convexa, y C es un círculo con centro O y radio r , entonces $tcc_2(f_1; C) \equiv 2$ si $\|\vec{OX}\| < r, \forall X \in f_1(S^1)$.

Teorema 182 Sea C un círculo con centro O y radio r ; si $f_1(S^1) = \mathbf{P}[P_1, \dots, P_m]$ es un polígono tal que $\|\vec{OP_i}\| < r, \forall i$, entonces $tcc_2(f_1; C) = 2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi} |\theta_i|$, donde θ_i denota el ángulo exterior de f_1 en A_i y $f_1(A_i) = P_i$.

Demostración.

En esta demostración se adoptará la siguiente notación:

$$P_{i+1} = P_1 \text{ si } i = m, \quad P_{i-1} = P_m \text{ si } i = 1, \quad \text{y} \quad \overleftarrow{l_i} = \overleftarrow{P_i P_{i+1}}.$$

Sea $\xi_1 \in C$; se define

$$\Upsilon_{\xi_1}(A_i) = \begin{cases} 1 & \text{si la recta } \overleftrightarrow{\xi_1 P_i} \text{ es recta soporte local a } f_1 \text{ en } A_i; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si ξ_1 no es colineal con dos vértices distintos del polígono, entonces

$$\Upsilon_{\xi_1}(f_1) = \sum_{i=1}^m \Upsilon_{\xi_1}(A_i).$$

Dado que existe un número finito de puntos de C que son colineales con dos vértices distintos del polígono, entonces:

$$\begin{aligned} tcc_2(f_1; C) &= \frac{1}{\text{long}(C)} \int_{\xi_1 \in C} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_C \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\xi_1 \in C} \sum_{i=1}^m \Upsilon_{\xi_1}(A_i) ds_C = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi r} \int_{\xi_1 \in C} \Upsilon_{\xi_1}(A_i) ds_C. \end{aligned}$$

Por otro lado, $\overleftrightarrow{\xi_1 P_i}$ es recta soporte local a f_1 en A_i si y solo si el punto ξ_1 pertenece a los arcos de C determinados por la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{l_{i-1}}$ y $\overleftrightarrow{l_i}$ con C .

Sea $\overleftrightarrow{l_i} \cap C = \{D_i, D'_i\}$ tal que $P_{i-1} \in \overline{D'_i P_i}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1 \in C} \Upsilon_{\xi_1}(A_i) ds_C &= \int_{\xi_1 \in D'_i D_{i+1}} ds_C + \int_{\xi_1 \in D_i D_{i+1}} ds_C \\ &= \text{long}(D'_i D_{i+1}) + \text{long}(D_i D_{i+1}) = 2r|\theta_i|, \end{aligned}$$

donde θ_i denota el ángulo exterior de f_1 en A_i , $D'_i D_{i+1}$ y $D_i D_{i+1}$ denotan los arcos de menor longitud sobre C que unen los respectivos puntos.

La última igualdad deriva de la relación entre la magnitud de un ángulo interior a un círculo y su relación con la longitud de los arcos sobre el círculo que determinan sus lados.

Por lo tanto, se obtiene que

$$tcc_2(f_1; C) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi r} 2r|\theta_i| = 2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi} |\theta_i|.$$

Dado que el miembro de la derecha en la igualdad anterior es independiente de la posición (siempre y cuando $\|\overrightarrow{OP_i}\| < r$) y el radio de C , entonces $tcc_2(f_1; C)$ también lo es. ■

Observación 183 Si C es un círculo con centro O y radio r , y si $X \in f_1(S^1)$ es tal que $\|\overrightarrow{OX}\| < r$, entonces $tcc_2(f_1; C) = tac_2(f_1)$.

5.4.2. Curvatura total central de curvas cerradas en espacios euclidianos

Sea $f_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un mapeo continuo y 1a1 del círculo S^1 en el espacio euclidiano tridimensional y sea S la esfera euclídea de centro O y radio r . Para cada $\xi_2 \in S$ se define la proyección central $\pi_{\xi_2} : \mathbb{R}^3 - T_{\xi_2} S \rightarrow \mathbb{R}_{\xi_2}^2$ tal que $\pi_{\xi_2}(x)$ es colineal con ξ_2 y x , donde $\mathbb{R}_{\xi_2}^2$ denota el plano que contiene a O y es paralelo al plano tangente a S en ξ_2 , $T_{\xi_2} S$.

Definición 184 En las condiciones mencionadas anteriormente, la curvatura total central de f_2 es dada por

$$tcc_3(f_2; S) = \frac{1}{\text{área}(S)} \int_{\xi_2 \in S} tac_2(\pi_{\xi_2} \circ f_2) da_S,$$

donde $\text{área}(S) = \int_{\xi_2 \in S} da_S$.

Observación 185 Dado que $tac_2(\pi_{\xi_2} \circ f_2) = tcc_2(\pi_{\xi_2} \circ f_2)$, entonces

$$tcc_3(f_2; S) = \frac{1}{\text{área}(S)} \int_{\xi_2 \in S} tcc_2(\pi_{\xi_2} \circ f_2) da_S.$$

Banchoff define la curvatura total central de un polígono en espacios euclidianos n -dimensionales. Con este fin, se define la proyección central $\pi_{\xi_{n-1}} : \mathbb{R}^n - T_{\xi_{n-1}}S \rightarrow \mathbb{R}_{\xi_{n-1}}^{n-1}$ desde la hipersfera S , tal que $\pi_{\xi_{n-1}}(x)$ es colineal con ξ_{n-1} y x , donde $\mathbb{R}_{\xi_{n-1}}^{n-1}$ denota el hiperplano que contiene al centro de S y es ortogonal a la normal de S en ξ_{n-1} , es decir $\mathbb{R}_{\xi_{n-1}}^{n-1} \parallel T_{\xi_{n-1}}S$.

Definición 186 Sea $f_{n-1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f_{n-1}(S^1)$ es un polígono contenido en la región acotada por alguna hipersfera S . Si $\pi_{\xi_{n-1}}$ es la proyección central, entonces la curvatura total central de f_{n-1} es dada por

$$tcc_n(f_{n-1}; S) = \frac{1}{\text{vol}(S)} \int_{\xi_{n-1} \in S} tac_{n-1}(\pi_{\xi_{n-1}} \circ f_{n-1}) dv_S,$$

donde $\text{vol}(S) = \int_{\xi_{n-1} \in S} dv_S$.

Banchoff calcula la curvatura total central de un polígono en \mathbb{R}^n y obtiene la igualdad $tcc_n(f_{n-1}; S) = 2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi} |\theta_i|$, donde θ_i denota el ángulo exterior de f_{n-1} en $A_i \in S^1$ y $f_{n-1}(A_i)$ un vértice del polígono, por medio de la relación entre un ángulo y el correspondiente ángulo obtenido aplicando la proyección central.

5.5. Curvatura total central en el plano de Lorentz

5.5.1. Curvatura total central de curvas planas cerradas

Las circunferencias en el plano euclideo son curvas cerradas y de longitud finita; en cambio en el plano lorentziano, S^1_1 no tiene longitud finita ni es una curva cerrada. Este es uno de los problemas que surgen al generalizar el concepto de curvatura total central de curvas cerradas en el plano euclideo al plano de Lorentz.

Por esta razón, se definirá primero la curvatura central de una aplicación continua f_1 con respecto a un arco conexo $C_j \subset (S^1_1)_+$ de longitud finita.

En lo que sigue, $f_1 : S^1 \rightarrow L^2$ denotará una aplicación continua de S^1 en el plano lorentziano tal que $f_1(S^1) \cap (S^1_1)_+ = \emptyset$, y $\Upsilon_{\xi_1}(f_1)$ el número de rectas soporte local a f_1 que pasan por el punto ξ_1 .

Definición 187 Sea $C_j \subset (S^1)_+$ un arco conexo tal que $0 < \text{long}(C_j) < \infty$. La curvatura central de f_1 con respecto a C_j es definida por

$$cc_2(f_1; C_j) = \frac{1}{\text{long}(C_j)} \int_{\xi_1 \in C_j} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{C_j},$$

donde $\int_{\xi_1 \in C_j} ds_{C_j} = \text{long}(C_j)$.

Observación 188 La condición $f_1(S^1) \cap (S^1)_+ = \emptyset$ garantiza que $\Upsilon_{\xi_1}(f_1)$ sea finito, pues el único caso en que eso no ocurre es cuando $\xi_1 \in f_1(S^1)$.

Observación 189 $\Upsilon_{\xi_1}(f_1) = 0$ si $f_1(S^1)$ es paralela a $(S^1)_+$; dado que f_1 es una curva cerrada, se concluye que $\Upsilon_{\xi_1}(f_1) \neq 0 \forall \xi_1 \in (S^1)_+$.

La curvatura total central de una curva f_1 se define como el límite de la sucesión de valores promedio de $\Upsilon_{\xi_1}(f_1)$.

Definición 190 Sea $(C_j)_{j \geq 1}$ una sucesión de arcos conexos tales que:

- i) $C_j \subset (S^1)_+, \forall j \geq 1$.
- ii) $C_j \subset C_{j+1}, \forall j \geq 1$.
- iii) $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{long}(C_{j+1})}{\text{long}(C_j)} = 1$ y $\text{long}(C_j) < \infty, \forall j \geq 1$.
- iv) $\lim_{j \rightarrow \infty} C_j = (S^1)_+$.

La curvatura total central de f_1 , $tcc_2(f_1)$, es definida por

$$tcc_2(f_1) = \lim_{j \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{long}(C_j)} \int_{\xi_1 \in C_j} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{C_j},$$

si este límite existe; en otro caso, se dirá que $tcc_2(f_1) = \infty$.

La existencia de una sucesión de arcos $(C_j)_{j \geq 1}$ que satisfaga las condiciones mencionadas en la definición anterior está garantizada por el siguiente teorema.

Teorema 191 En L^2 existe una sucesión de arcos conexos $(C_j)_{j \geq 1}$ tales que:

- i) $C_j \subset (S^1)_+, \forall j \geq 1$.
- ii) $C_j \subset C_{j+1}, \forall j \geq 1$.
- iii) $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{long}(C_{j+1})}{\text{long}(C_j)} = 1$ y $\text{long}(C_j) < \infty, \forall j \geq 1$.
- iv) $\lim_{j \rightarrow \infty} C_j = (S^1)_+$.

Demostración

Sea $\{\omega_j\}_{j \geq 1}$ una sucesión de números reales positivos tales que:

- a) $\omega_1 > 1$.
- b) $\omega_{j+1} = \omega_j + \frac{1}{j}, \forall j \geq 1$.

Sea $I_{AB} = \{I^+(B) \cap I^-(A) : A, B \in L^2\}$, donde $I^+(B)$ y $I^-(A)$ denotan el futuro cronológico de B y el pasado cronológico de A , respectivamente.

Considerando los puntos $A_j = (\sinh \omega_j, \cosh \omega_j)$ y $B_j = (-\sinh \omega_j, \cosh \omega_j)$, se tiene que $A_j, B_j \in (S_1^1)_+$ y que $I_{A_j B_j} \subset I_{A_{j+1} B_{j+1}}, \forall j \geq 1$.

Si se define

$$C_j = I_{A_j B_j} \cap (S_1^1)_+ = \left\{ (x_1^j, x_2^j) \in (S_1^1)_+ : -\sinh \omega_j < x_1^j < \sinh \omega_j \right\}$$

entonces $(C_j)_{j \geq 1}$ es una sucesión de arcos conexos con las propiedades buscadas:

- i) Por definición de C_j .
- ii) Por definición de C_j .
- iii) Por Definición 190, $\text{long}(C_j) = 2\omega_j < \infty, \forall j \geq 1$. Por b), $\frac{\text{long}(C_{j+1})}{\text{long}(C_j)} = 1 + \frac{1}{j\omega_j}$, entonces por a) se tiene que $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{long}(C_{j+1})}{\text{long}(C_j)} = 1$
- iv) Por b) se sabe que $\omega_{j+1} = \omega_j + \frac{1}{j} = \omega_1 + \sum_{i=1}^j \frac{1}{i}$, entonces $\lim_{j \rightarrow \infty} \omega_j = +\infty$ y $\lim_{j \rightarrow \infty} (-\omega_j) = -\infty$. ■

Se necesita el siguiente Lema para demostrar la unicidad de la curvatura total central.

Lema 192 Sea $(C_j)_{j \geq 1}$ una sucesión de arcos conexos con las propiedades i)–iv) del Teorema 191. Si $(C_i)_{i \geq 1}$ es una subsucesión de $(C_j)_{j \geq 1}$ con las propiedades i)–iv) del Teorema 191, entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C_i).$$

Demostración

Puesto que $(C_j)_{j \geq 1}$ y $(C_i)_{i \geq 1}$ satisfacen las propiedades i)–iv) y que $(C_i)_{i \geq 1} \subset (C_j)_{j \geq 1}$, se tiene que

$$\forall i \geq 1, \exists j_1, j_2 \geq 1 \text{ tales que } C_{j_1} \subset C_i \subset C_{j_2} \quad (*)$$

y

$$\forall j \geq 1, \exists i_1, i_2 \geq 1 \text{ tales que } C_{i_1} \subset C_j \subset C_{i_2}. \quad (**)$$

Por (*) y (**),

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C_i). \quad \blacksquare$$

Teorema 193 Sean $(C_j)_{j \geq 1}$ y $(C'_h)_{h \geq 1}$ dos sucesiones de arcos conexos con las propiedades i)–iv) del Teorema 191. Entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C_j) = \lim_{h \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C'_h).$$

Demostración

Por i)–iv), se tiene que $\forall h \geq 1 \exists j_{1h}, j_{2h} \geq 1$ tales que:

- a) $C_{j_{1h}} \subset C'_h \subset C_{j_{2h}}$
- b) $(C_{j_{1h}})_{h \geq 1}, (C_{j_{2h}})_{h \geq 1} \subset (C_j)_{j \geq 1}$ satisfacen las propiedades i)–iv).

Entonces, por a) se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{long}(C_{j_{2h}})} \int_{\xi_1 \in C_{j_{2h}}} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{C_{j_{2h}}} \\ & < \int_{\xi_1 \in (C_{j_{2h}} - C'_h)} \frac{\Upsilon_{\xi_1}(f_1)}{\text{long}(C'_h)} ds_{(C_{j_{2h}} - C'_h)} + \int_{\xi_1 \in C'_h} \frac{\Upsilon_{\xi_1}(f_1)}{\text{long}(C'_h)} ds_{C'_h} \\ & < \int_{\xi_1 \in (C_{j_{2h}} - C'_h)} \frac{\Upsilon_{\xi_1}(f_1)}{\text{long}(C_{j_{1h}})} ds_{(C_{j_{2h}} - C'_h)} + \int_{\xi_1 \in C'_h} \frac{\Upsilon_{\xi_1}(f_1)}{\text{long}(C'_h)} ds_{C'_h} \\ & < \int_{\xi_1 \in (C_{j_{2h}} - C_{j_{1h}})} \frac{\Upsilon_{\xi_1}(f_1)}{\text{long}(C_{j_{1h}})} ds_{(C_{j_{2h}} - C_{j_{1h}})} + \int_{\xi_1 \in C_{j_{1h}}} \frac{\Upsilon_{\xi_1}(f_1)}{\text{long}(C_{j_{1h}})} ds_{C_{j_{1h}}}. \end{aligned}$$

Por b) se tiene

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C_j) \\ & \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{long}(C_{j_{1h}})} \int_{\xi_1 \in (C_{j_{2h}} - C'_h)} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{(C_{j_{2h}} - C'_h)} + \lim_{h \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C'_h) \\ & \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{long}(C_{j_{1h}})} \int_{\xi_1 \in (C_{j_{2h}} - C_{j_{1h}})} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{(C_{j_{2h}} - C_{j_{1h}})} + \lim_{j \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C_j). \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\xi_1 \in (C_{j_{2h}} - C_{j_{1h}})} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{(C_{j_{2h}} - C_{j_{1h}})} = \text{constante}$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{long}(C_{j_{1h}})} \int_{\xi_1 \in (C_{j_{2h}} - C_{j_{1h}})} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{(C_{j_{2h}} - C_{j_{1h}})} = 0.$$

De aquí que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C'_h) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C_j). \quad (\#)$$

Análogamente, $\forall j \geq 1 \exists h_{1j}, h_{2j} \geq 1$ tales que

$$c) C'_{h_1} \subset C_j \subset C'_{h_2}$$

$$d) (C'_{h_1})_{j \geq 1}, (C'_{h_2})_{j \geq 1} \subset (C'_h)_{h \geq 1} \text{ satisfacen las propiedades i)–iv).}$$

Por lo tanto

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C_j) \geq \lim_{h \rightarrow \infty} cc_2(f_1; C'_h). \quad (\#\#)$$

Por (#) y (\#\#), se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_2(f_1, C_j) = \lim_{h \rightarrow \infty} cc_2(f_1, C'_h). \blacksquare$$

5.5.2. Curvatura total central de polígonos puros espaciales

En el plano euclideo, la curvatura total central de un polígono depende de los ángulos exteriores del mismo. En el plano de Lorentz, la curvatura total central de un polígono puro espacial es un número entero positivo y coincide con el número de vértices no medios del polígono.

Teorema 194 Sea $\mathbf{P}[P_1, \dots, P_m] = f_1(S^1)$ un polígono puro espacial en L^2 . Entonces

$$2 \leq tcc_2(f_1) = k \leq m,$$

donde k denota el número de vértices no medios de \mathbf{P} .

Si \mathbf{P} es convexo, $tcc_2(f_1) = 2$.

Demostración

Sea $(C_j)_{j \geq 1}$ una sucesión de arcos conexos con las propiedades i)–iv) del Teorema 191.

Si $\xi_1 \in C_j$, la recta que pasa por ξ_1 y $f_1(x)$ es una recta soporte local de f_2 en x si y solo si existe i tal que $f_1(x) = P_i$ es vértice de \mathbf{P} . Sea $Q_i = (x_1^i, x_2^i)$ la s^+ -imagen circular de $P_{i+1} - P_i$, y sean $Q_{i_0} = A = (a_1, a_2)$ y $Q_{i_1} = B = (b_1, b_2)$ tales que $a_1 = \min_{1 \leq i \leq m} \{x_1^i\}$ y $b_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \{x_1^i\}$.

Por propiedades i)–iv) del Teorema 191, existe $j_0 \geq 1$ tal que el arco AB está contenido en $C_j, \forall j \geq j_0$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{long}(C_j)} \int_{\xi_1 \in C_j} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{C_j} &= \\ &= \frac{1}{\text{long}(C_j)} \left(\int_{\xi_1 \in AB} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{AB} + \int_{\xi_1 \in (C_j - AB)} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{(C_j - AB)} \right). \end{aligned}$$

Por Teorema anterior se tiene que $\Upsilon_{\xi_1}(f_1) = k$; luego

$$\frac{1}{\text{long}(C_j)} \int_{\xi_1 \in AB} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{AB} = k \frac{\text{long}(AB)}{\text{long}(C_j)}$$

y

$$\frac{1}{\text{long}(C_j)} \int_{\xi_1 \in (C_j - AB)} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{(C_j - AB)} = k \frac{\text{long}(C_j - AB)}{\text{long}(C_j)}.$$

Aplicando límite se obtiene:

$$tcc_2(f_1) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{long}(C_j)} \int_{\xi_1 \in C_j} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{C_j} = k.$$

Si \mathbf{P} es un polígono puro espacial y convexo, entonces $k = 2$. ■

Corolario 195 Sean g_1 y f_1 dos polígonos puros espaciales tales que $g_1(S^1) \cap (S^1)_+ = f_1(S^1) \cap (S^1)_+ = \emptyset$. Si g_1 y f_1 difieren de un movimiento rígido, entonces $tcc_2(g_1) = tcc_2(f_1)$.

Demostración

La curvatura total central de un polígono puro espacial depende del número de sus vértices no medios y éste es invariante bajo movimientos rígidos, pues si a un par de vectores de igual orientación espacial se le aplica una rotación o una traslación, se obtendrá un par de vectores con igual orientación espacial. ■

Observación 196 En el plano euclideo, la curvatura total central de un polígono convexo es igual a 2; en el plano de Lorentz, la curvatura total central de un polígono puro espacial y convexo es igual a 2.

5.5.3. Curvatura total central de curvas \mathcal{C}^2

Una curva cerrada \mathcal{C}^2 en el plano de Lorentz no es una curva pura, por lo que no se puede aproximar por una sucesión de polígonos puros.

Teorema 197 Sea f_1 una curva \mathcal{C}^2 , simple y cerrada. Entonces

$$2 \leq tcc_2(f_1) \leq \frac{\eta}{2},$$

donde η denota el número de rectas tangentes a f_1 que pasan por algún punto de S^1_+ .

La igualdad se cumple si $f_1(S^1)$ es convexo.

Demostración

Sea f_1 una curva \mathcal{C}^2 , simple y cerrada. Entonces $\eta \geq 4$ pues f_1 tiene, al menos, cuatro puntos nulos y $\eta < \infty$ pues f_1 es una curva cerrada y, por lo tanto, tiene un número finito de “pliegues”.

Sean $u : x_1 = x_2$ y $v : x_1 = -x_2$ las dos rectas nulas en L^2 que pasan por $(0, 0)$.

Sean u_1, \dots, u_h rectas nulas tales que u_j es una recta soporte local de f_1 paralela a u , y sean v_1, \dots, v_t rectas nulas tales que v_j es una recta soporte local de f_1 paralela a v .

Sean $U_j = v_j \cap u$ y $V_j = u_j \cap v$. En lo que sigue, η_u y η_v denotan el número de puntos U_j y V_j , respectivamente.

Si $U_i = (x_1^i, x_2^i)$ y $V_j = (y_1^j, y_2^j)$, sea $A = (a_1, a_2) \in (S_1^1)_+$ tal que

$$a_1 = \max_{1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq t} \{|x_1^i|, |y_1^j|\}$$

y sea $B = (-a_1, a_2)$. El arco entre A y B se notará AB .

Dado que las rectas u y v son asíntotas de la curva $(S_1^1)_+$ y que u_j y v_j son rectas paralelas a u y v , se tiene que $\Upsilon_{\xi_1}(f_1) \leq h + t, \forall \xi_1 \in (S_1^1)_+ - AB$.

Sea $(C_j)_{j \geq 1}$ una sucesión de arcos conexos con las propiedades i)–iv) del Teorema 191. Sin pérdida de generalidad, se asume que C_j es un arco simétrico $A_j B_j$; esto significa que $C_j = A_j O + O B_j$ y $\text{long}(C_j) = 2 \text{long}(A_j O)$, donde $O = (0, 1)$.

Por propiedades i)–iv), existe j_0 tal que para todo $j \geq j_0$, se tiene $AB \subset C_j$. Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{long}(C_j)} \int_{\xi_1 \in C_j} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{C_j} \\ &= \frac{1}{\text{long}(C_j)} \left(\int_{\xi_1 \in AB} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{C_j} + \int_{\xi_1 \in (C_j - AB)} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{(C_j - AB)} \right). \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{long}(C_j)} \int_{\xi_1 \in (C_j - AB)} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{(C_j - AB)} \\ &= \int_{\xi_1 \in (A_j O - A O)} \frac{\Upsilon_{\xi_1}(f_1)}{2 \text{long}(A_j O)} ds_{(A_j O - A O)} + \int_{\xi_1 \in (O B_j - O B)} \frac{\Upsilon_{\xi_1}(f_1)}{2 \text{long}(A_j O)} ds_{(O B_j - O B)}, \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{long}(C_j)} \int_{\xi_1 \in C_j} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{C_j} \\ &= \frac{1}{\text{long}(C_j)} \int_{\xi_1 \in AB} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{C_j} + (\eta_u + \eta_v) \frac{\text{long}(A_j O - A O)}{2 \text{long}(A_j O)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$2 \leq tcc_2(f_1) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{long}(C_j)} \int_{\xi_1 \in C_j} \Upsilon_{\xi_1}(f_1) ds_{C_j} \leq \frac{\eta_u + \eta_v}{2} = \frac{\eta}{2}.$$

En particular, si $f(S^1)$ es convexo entonces $\eta = 4$. Así, $tcc_2(f) = 2$.

Corolario 198 Sean f_1 y g_1 dos curvas \mathcal{C}^2 , simples y cerradas tales que $f_1(S^1) \cap (S_1^1)_+ = g_1(S^1) \cap (S_1^1)_+ = \emptyset$. Si f_1 y g_1 difieren en una traslación, entonces $tcc_2(f_1) = tcc_2(g_1)$. ■

Demostración

Las rectas tangentes a una curva conservan su causalidad bajo traslaciones. Dada su definición, los números η_u y η_v son invariantes bajo traslaciones. ■

Observación 199 No se puede considerar que las curvas difieran en una rotación pues, al ser curvas cerradas y \mathcal{C}^2 , f_1 y g_1 no son curvas puras.

5.6. Curvatura total central en L^3

La generalización de la definición de curvatura total central de curvas cerradas, dada por Banchoff en el espacio tridimensional euclideo, al espacio tridimensional lorentziano encuentra el siguiente problema: la pseudoesfera S_1^2 no es una superficie compacta ni su área es finita.

Por lo tanto, análogo al caso de curvas en el plano de Lorentz, se definirá primero la curvatura central de una aplicación continua respecto de una región conexa $R_j^2 \subset S_1^2$ de área finita.

Sobre el final de esta Sección se muestra una propiedad de recurrencia de la curvatura total central que permite generalizar en forma natural esta curvatura, vía espacios de de Sitter, a espacios lorentzianos de dimensión finita y curvatura cero.

En lo que sigue, $f_n : S^1 \rightarrow \Sigma^{n+1}$ denotará una aplicación continua y $1a1$ de S^1 en $\Sigma^{n+1} = \{x \in L^{n+1} \text{ tal que } \langle x, x \rangle > 1\}$, y $L_{\xi_n}^n$ el hiperplano paralelo al espacio tangente a S_1^n en ξ_n , $T_{\xi_n}^n(S_1^n)$, que contiene al centro del espacio de de Sitter S_1^n .

Dados el espacio de de Sitter S_1^n y un punto ξ_n en él, la aplicación π_{ξ_n} que asigna a cada punto p de $L^{n+1} - T_{\xi_n}^n(S_1^n)$ un punto $\pi_{\xi_n}(p)$ en $L_{\xi_n}^n$ de forma tal que $\pi_{\xi_n}(p)$ sea colineal con ξ_n y p , se llama proyección central.

Definición 200 Sea $T_{\xi_n}(S_1^n)$ el espacio tangente a S_1^n en ξ_n . La proyección central $\pi_{\xi_n} : L^{n+1} - T_{\xi_n}(S_1^n) \rightarrow L_{\xi_n}^n$ es dada por

$$\pi_{\xi_n}(p) = \frac{1}{1 - \langle \xi_n, p \rangle} (p - \langle \xi_n, p \rangle \xi_n)$$

para todo $p \in L^{n+1} - T_{\xi_n}(S_1^n)$.

Notar que $L_{\xi_n}^n$ es congruente a L^n .

En el espacio L^3 , la restricción de π_{ξ_2} a $S_1^2 - T_{\xi_2}(S_1^2)$ es la proyección estereográfica con polo en el punto ξ_2 . Sus propiedades pueden verse en página 27.

Definición 201 Sea R_j^2 una región conexa de S_1^2 tal que $0 < \text{área}(R_j^2) < \infty$. La curvatura central de f_2 respecto de R_j^2 es definida por

$$cc_3(f_2; R_j^2) = \frac{1}{\text{área}(R_j^2)} \int_{\xi_2 \in R_j^2} cc_2(\pi_{\xi_2} \circ i_{\xi_2} \circ f_2, (R_j^2 \cap L_{\xi_2}^2)_+) ds_{R_j^2},$$

donde $\int_{\xi_2 \in R_j^2} ds_{R_j^2} = \text{área}(R_j^2)$, $i_{\xi_2} : \Sigma^3 \rightarrow L^3 - T_{\xi_2}(S_1^2)$ es la aplicación continua inclusión, y $\pi_{\xi_2} : L^3 - T_{\xi_2}(S_1^2) \rightarrow L_{\xi_2}^2$ es la proyección central.

Observación 202 La definición anterior se puede escribir:

$$\begin{aligned} cc_3(f_2; R_j^2) &= \\ &= \int_{\xi_2 \in R_j^2} \int_{\xi_1 \in (R_j^2 \cap L_{\xi_2}^2)_+} \frac{\Upsilon_{\xi_1}(\pi_{\xi_2} \circ i_{\xi_2} \circ f_2)}{\text{área}(R_j^2) \text{long}(R_j^2 \cap L_{\xi_2}^2)_+} ds_{(R_j^2 \cap L_{\xi_2}^2)_+} ds_{R_j^2}. \end{aligned}$$

A continuación se define la curvatura total central de una curva cerrada en el espacio tridimensional de Lorentz.

Definición 203 Sea $(R_j^2)_{j \geq 1}$ una sucesión de regiones conexas tales que:

- i) $R_j^2 \subset S_1^2, \forall j \geq 1$.
- ii) $R_j^2 \subset R_{j+1}^2, \forall j \geq 1$.
- iii) $\text{área}(R_j^2) < \infty, \forall j \geq 1$, y $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{área}(R_{j+1}^2)}{\text{área}(R_j^2)} = 1$.
- iv) $\forall \xi_2 \in S_1^2, \exists j_{\xi_2} \geq 1$ tal que $(R_j^2 \cap L_{\xi_2}^2)_+ \neq \emptyset, \forall j \geq j_{\xi_2}$.
- v) $\lim_{j \rightarrow \infty} R_j^2 = S_1^2$.

La curvatura total central de f_2 está definida por

$$tcc_3(f_2) = \lim_{j \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_j^2),$$

si este límite existe; en caso contrario se dice que $tcc_3(f_2) = \infty$.

La existencia de una sucesión $(R_j^2)_{j \geq 1}$ que satisfaga las condiciones de la definición anterior está garantizada por el siguiente Teorema.

Teorema 204 En L^3 existe una sucesión $(R_j^2)_{j \geq 1}$ de regiones conexas tales que:

- i) $R_j^2 \subset S_1^2, \forall j \geq 1$.
- ii) $R_j^2 \subset R_{j+1}^2, \forall j \geq 1$.
- iii) $\text{área}(R_j^2) < \infty, \forall j \geq 1$, y $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{área}(R_{j+1}^2)}{\text{área}(R_j^2)} = 1$.
- iv) $\forall \xi_2 \in S_1^2, \exists j_{\xi_2} \geq 1$ tal que $(R_j^2 \cap L_{\xi_2}^2)_+ \neq \emptyset, \forall j \geq j_{\xi_2}$.
- v) $\lim_{j \rightarrow \infty} R_j^2 = S_1^2$.

Demostración

Sea $\{a_j\}_{j \geq 1}$ una sucesión de de números reales positivos tales que:

- a) $a_1 > 1$.
- b) $a_{j+1} = a_j + \frac{1}{j}, \forall j \geq 1$.

Si $R_j^2 = \left\{ (x_1^j, x_2^j, x_3^j) \in S_1^2 : -a_j < x_1^j < a_j \right\}$ entonces $(R_j^2)_{j \geq 1}$ es una sucesión de regiones conexas con las propiedades buscadas:

i) Por definición de R_j^2 .

ii) Por definición de R_j^2 .

iii) $\text{área}(R_j^2) = 4\pi a_j < \infty, \forall j \geq 1$. Por b), $\frac{\text{área}(R_{j+1}^2)}{\text{área}(R_j^2)} = 1 + \frac{1}{j a_j}$, entonces por a) se tiene

que $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{área}(R_{j+1}^2)}{\text{área}(R_j^2)} = 1$.

Para probar la propiedad iv) se necesita la propiedad v).

v) Por b) se sabe que $a_{j+1} = a_j + \frac{1}{j} = a_1 + \sum_{i=1}^j \frac{1}{i}$, entonces $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = +\infty$ y $\lim_{j \rightarrow \infty} (-a_j) = -\infty$.

iv) Dado $\xi_2 \in S_1^2$, por v) $(R_j^2 \cap L_{\xi_2}^2)_+ \neq \emptyset$ a partir de un j suficientemente grande. ■

Lema 205 Sean $(S_j)_{j \geq 1}$ una sucesión de regiones conexas con las propiedades i)–v) del Teorema 204 y $(R_i^2)_{i \geq 1}$ una subsucesión de $(R_j^2)_{j \geq 1}$ que también satisface dichas propiedades. Entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_j^2) = \lim_{i \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_i^2).$$

Demostración

Puesto que $(R_j^2)_{j \geq 1}$ y $(R_i^2)_{i \geq 1}$ satisfacen las propiedades i)–v) y que $(R_i^2)_{i \geq 1} \subset (R_j^2)_{j \geq 1}$, se tiene que

$$\forall i \geq 1 \exists j_{1_i}, j_{2_i} \geq 1 \text{ tales que } R_{j_{1_i}}^2 \subset R_i^2 \subset R_{j_{2_i}}^2 \quad (1)$$

y

$$\forall j \geq 1 \exists i_{1_j}, i_{2_j} \geq 1 \text{ tales que } R_{i_{1_j}}^2 \subset R_j^2 \subset R_{i_{2_j}}^2. \quad (2)$$

Por (1) y (2),

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_j^2) = \lim_{i \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_i^2). \quad \blacksquare$$

Teorema 206 Sean $(R_j^2)_{j \geq 1}$ y $(R_h^2)_{h \geq 1}$ dos sucesiones de regiones conexas con las propiedades i)–v) del Teorema 204. Entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_j^2) = \lim_{h \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_h^2).$$

Demostración

Por i)–v), se tiene que $\forall h \geq 1 \exists j_{1_h}, j_{2_h} \geq 1$ tales que:

a) $R_{j_{1_h}}^2 \subset R_h^2 \subset R_{j_{2_h}}^2,$

b) $(R_{j_{1_h}}^2)_{h \geq 1}, (R_{j_{2_h}}^2)_{h \geq 1} \subset (R_j^2)_{j \geq 1}$ satisfacen las propiedades i)–v).

A continuación, y para simplificar la notación, $cc_2(g; C - C')$ representará la suma de las curvaturas centrales de g con respecto a las componentes conexas de $C - C'$ con longitud no nula.

Por a) se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{área}(R_{j_{2h}}^2)} \int_{\xi_2 \in R_{j_{2h}}^2} cc_2 \left(\pi_{\xi_2} \circ i_{\xi_2} \circ f_2, \left(R_{j_{2h}}^2 \cap L_{\xi_2}^2 \right)_+ \right) \\ & < \int_{\xi_2 \in (R_{j_{2h}}^2 - R_h^2)} \frac{cc_2 \left(\pi_{\xi_2} \circ i_{\xi_2} \circ f_2, \left((R_{j_{2h}}^2 - R_h^2) \cap L_{\xi_2}^2 \right)_+ \right)}{\text{área}(R_{j_{2h}}^2 - R_h^2)} ds_{(R_{j_{2h}}^2 - R_h^2)} \\ & \quad + \int_{\xi_2 \in R_h^2} \frac{cc_2 \left(\pi_{\xi_2} \circ i_{\xi_2} \circ f_2, \left(R_h^2 \cap L_{\xi_2}^2 \right)_+ \right)}{\text{área}(R_h^2)} ds_{R_h^2} \\ & < \int_{\xi_2 \in (R_{j_{2h}}^2 - R_{j_{1h}}^2)} \frac{cc_2 \left(\pi_{\xi_2} \circ i_{\xi_2} \circ f_2, \left((R_{j_{2h}}^2 - R_{j_{1h}}^2) \cap L_{\xi_2}^2 \right)_+ \right)}{\text{área}(R_{j_{1h}}^2)} ds_{(R_{j_{2h}}^2 - R_{j_{1h}}^2)} \\ & \quad + \int_{\xi_2 \in R_h^2} \frac{cc_2 \left(\pi_{\xi_2} \circ i_{\xi_2} \circ f_2, \left(R_h^2 \cap L_{\xi_2}^2 \right)_+ \right)}{\text{área}(R_h^2)} ds_{R_h^2}. \end{aligned}$$

Por b) se tiene

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_j^2) \\ & \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\xi_2 \in (R_{j_{2h}}^2 - R_{j_{1h}}^2)} \frac{cc_2 \left(\pi_{\xi_2} \circ i_{\xi_2} \circ f_2, \left((R_{j_{2h}}^2 - R_{j_{1h}}^2) \cap L_{\xi_2}^2 \right)_+ \right)}{\text{área}(R_{j_{1h}}^2)} ds_{(R_{j_{2h}}^2 - R_{j_{1h}}^2)} \\ & \quad + \lim_{h \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_h^2). \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\xi_2 \in (R_{j_{2h}}^2 - R_{j_{1h}}^2)} cc_2 \left(\pi_{\xi_2} \circ i_{\xi_2} \circ f_2, \left((R_{j_{2h}}^2 - R_{j_{1h}}^2) \cap L_{\xi_2}^2 \right)_+ \right) ds_{(R_{j_{2h}}^2 - R_{j_{1h}}^2)} = \text{constante},$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\xi_2 \in (R_{j_{2h}}^2 - R_{j_{1h}}^2)} \frac{cc_2 \left(\pi_{\xi_2} \circ i_{\xi_2} \circ f_2, \left((R_{j_{2h}}^2 - R_{j_{1h}}^2) \cap L_{\xi_2}^2 \right)_+ \right)}{\text{área}(R_{j_{1h}}^2)} ds_{(R_{j_{2h}}^2 - R_{j_{1h}}^2)} = 0.$$

De aquí que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_j^2) \leq \lim_{h \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_h^2). \quad (\clubsuit)$$

Análogamente, se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_j^2) \geq \lim_{h \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_h^2). \quad (\clubsuit\clubsuit)$$

Por (♣) y (♣♣), se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_j^2) = \lim_{h \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_h^2). \blacksquare$$

Teorema 207 Sean $p \in S_1^2$ y $(R_j^2)_{j \geq 1}$ una sucesión de regiones conexas con las propiedades i)–v) del Teorema 204. Si existen $j_p \geq 1$ y $\left((R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+ \right)_{h_p \geq j_p} \subset \left((R_j^2 \cap L_p^2)_+ \right)_{j \geq j_p}$ tales que $\lim_{h_p \rightarrow \infty} R_{h_p}^2 = S_1^2$ y $\lim_{h_p \rightarrow \infty} \frac{\text{long}(R_{h_p+1}^2 \cap L_p^2)_+}{\text{long}(R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+} = 1$, entonces $\left((R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+ \right)_{h_p \geq j_p}$ es una sucesión de arcos conexas sobre la rama $(S_1^2 \cap L_p^2)_+$ del círculo lorentziano $(S_1^2 \cap L_p^2)$ en L_p^2 , la cual satisface las propiedades i)–iv) del Teorema 191.

Demostración

Sean p un punto fijo de S_1^2 y $(R_j^2)_{j \geq 1}$ una sucesión de regiones conexas con las propiedades i)–iv) del Teorema 204, entonces existe $j_p \geq 1$ tal que $p \in S_j$, $\forall j \geq j_p$. Suponemos que existe $\left((R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+ \right)_{h_p \geq j_p} \subset \left((R_j^2 \cap L_p^2)_+ \right)_{j \geq j_p}$ tal que $\lim_{h_p \rightarrow \infty} R_{h_p}^2 = S_1^2$ y

$$\lim_{h_p \rightarrow \infty} \frac{\text{long}(R_{h_p+1}^2 \cap L_p^2)_+}{\text{long}(R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+} = 1.$$

De ahí que $(R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+$ es un arco conexo, $\forall h_p \geq j_p$. Además:

i) Dado que $R_j^2 \subset S_1^2$, entonces $(R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+ \subset (S_1^2 \cap L_p^2)_+$, $\forall h_p \geq j_p$.

ii) Dado que $R_j^2 \subset R_{j+1}^2$, entonces $(R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+ \subset (R_{h_p+1}^2 \cap L_p^2)_+$, $\forall h_p \geq j_p$.

iii) Dado que $\text{área}(R_j^2) < \infty$, entonces $\text{long}(R_j^2 \cap L_p^2)_+ < \infty$, $\forall j \geq 1$. En particular, $\text{long}(R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+ < \infty$, $\forall h_p \geq j_p$.

Por otro lado, si $R_j^2 = \{(x_1^j, x_2^j, x_3^j) \in S_1^2 : b_1^j < x_1^j < a_1^j\}$, entonces se tiene que $(R_j^2 \cap L_p^2) = \{(x_1^j, x_2^j, x_3^j) \in S_1^2 \cap L_p^2 : b_1^j < x_1^j < a_1^j\}$; además, $(R_j^2 \cap L_p^2)_+$ es una curva temporal pura en L_p^2 .

iv) Dado que $\lim_{h_p \rightarrow \infty} R_{h_p}^2 = S_1^2$ y $\lim_{S_{h_p} \rightarrow S_1^2} (R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+ = (S_1^2 \cap L_p^2)_+$, se tiene que

$$\lim_{h_p \rightarrow \infty} (R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+ = (S_1^2 \cap L_p^2)_+. \blacksquare$$

A continuación se muestra una propiedad de recurrencia de la curvatura total central de curvas cerradas en espacios lorentzianos.

Teorema 208 Sea $(R_j^2)_{j \geq 1}$ una sucesión de regiones conexas con las propiedades del Teorema 204 tal que $\forall p \in S_1^2$ existen $j_p \geq 1$ y $(R_{h_p}^2)_{h_p \geq j_p} \subset (R_j^2)_{j \geq 1}$ que satisfice las condiciones del Teorema 207. Entonces

$$tcc_3(f_2) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{área}(R_j^2)} \int_{p \in R_j^2} tcc_2(\pi_p \circ i_p \circ f_2) ds_{R_j^2}.$$

Demostración

Sean $\gamma_p = \pi_p \circ i_p \circ f_2$ y $tcc_3(f_2) = \lim_{j \rightarrow \infty} cc_3(f_2; R_j^2)$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{área}(R_j^2)} \int_{p \in R_j^2} \left[tcc_2(\gamma_p) - cc_2(\gamma_p, (R_j^2 \cap L_p^2)_+) \right] ds_{R_j^2} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{área}(R_j^2)} \int_{p \in R_j^2} \left[\lim_{t_p \rightarrow \infty} cc_2(\gamma_p, C_{t_p}) - cc_2(\gamma_p, (R_j^2 \cap L_p^2)_+) \right] ds_{R_j^2} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{área}(R_j^2)} \int_{p \in R_j^2} \lim_{t_p \rightarrow \infty} \left[cc_2(\gamma_p, C_{t_p}) - cc_2(\gamma_p, (R_j^2 \cap L_p^2)_+) \right] ds_{R_j^2}. \end{aligned}$$

Por Teorema 207 se puede asumir que $(C_{t_p})_{t_p \geq j_p} = ((R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+)_{h_p \geq j_p}$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{área}(R_j^2)} \int_{p \in R_j^2} \left[tcc_2(\gamma_p) - cc_2(\gamma_p, (R_j^2 \cap L_p^2)_+) \right] ds_{R_j^2} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{área}(R_j^2)} \int_{p \in R_j^2} \lim_{h_p \rightarrow \infty} \left[cc_2(\gamma_p, (R_{h_p}^2 \cap L_p^2)_+) - cc_2(\gamma_p, (R_j^2 \cap L_p^2)_+) \right] ds_{R_j^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{área}(R_j^2)} \int_{p \in R_j^2} \left[tcc_2(\gamma_p) - cc_2(\gamma_p, (R_j^2 \cap L_p^2)_+) \right] ds_{R_j^2} = 0. \blacksquare$$

5.7. Curvatura total central en L^{n+1}

En lo que sigue se usarán indistintamente las expresiones $\text{vol}(R)$ y $\text{área}(R)$ para indicar el área de R cuando R sea una 2-región de S_1^2 .

Definición 209 Sea R_j^n una n -región conexas del espacio de de Sitter S_1^n tal que $0 < \text{vol}(R_j^n) < \infty$ y $n \geq 3$. La curvatura central de f_n respecto de R_j^n es definida por

$$cc_{n+1}(f_n; R_j^n) = \frac{1}{\text{vol}(R_j^n)} \int_{\xi_n \in R_j^n} cc_n(\pi_{\xi_n} \circ i_{\xi_n} \circ f_n, R_j^n \cap L_{\xi_n}^n) ds_{R_j^n},$$

donde $\int_{\xi_n \in R_j^n} ds_{R_j^n} = \text{vol}(R_j^n) =:$ volumen de R_j^n , $i_{\xi_n} : \Sigma^{n+1} \rightarrow L^{n+1} - T_{\xi_n}(S_1^n)$ es la aplicación continua inclusión, y $\pi_{\xi_n} : L^{n+1} - T_{\xi_n}(S_1^n) \rightarrow L_{\xi_n}^n$ es la proyección central.

A continuación se define la curvatura total central de una curva cerrada en el espacio L^{n+1} .

Definición 210 Sean $n \geq 3$ y $(R_j^n)_{j \geq 1}$ una sucesión de n -regiones conexas del espacio de de Sitter S_1^n tales que:

- i) $R_j^n \subset S_1^n, \forall j \geq 1$.
- ii) $R_j^n \subset R_{j+1}^n, \forall j \geq 1$.
- iii) $\text{vol}(R_j^n) < \infty, \forall j \geq 1$, y $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(R_{j+1}^n)}{\text{vol}(R_j^n)} = 1$.
- iv) $\forall \xi_n \in S_1^n, \exists j_{\xi_n} \geq 1$ tal que $R_j^n \cap L_{\xi_n}^n \neq \emptyset, \forall j \geq j_{\xi_n}$.
- v) $\lim_{j \rightarrow \infty} R_j^n = S_1^n$.

La curvatura total central de f_n está definida por

$$tcc_{n+1}(f_n) = \lim_{j \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_j^n),$$

si este límite existe; en caso contrario se dice que $tcc_{n+1}(f_n) = \infty$.

La existencia de una sucesión $(R_j^n)_{j \geq 1}$ que satisfaga las condiciones de la definición anterior está garantizada por el siguiente Teorema.

Teorema 211 En L^{n+1} , $n \geq 3$, existe una sucesión $(R_j^n)_{j \geq 1}$ de n -regiones conexas de S_1^n tales que:

- i) $R_j^n \subset S_1^n, \forall j \geq 1$.
- ii) $R_j^n \subset R_{j+1}^n, \forall j \geq 1$.
- iii) $\text{vol}(R_j^n) < \infty, \forall j \geq 1$, y $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(R_{j+1}^n)}{\text{vol}(R_j^n)} = 1$.
- iv) $\forall \xi_n \in S_1^n, \exists j_{\xi_n} \geq 1$ tal que $R_j^n \cap L_{\xi_n}^n \neq \emptyset, \forall j \geq j_{\xi_n}$.
- v) $\lim_{j \rightarrow \infty} R_j^n = S_1^n$.

Demostración

La demostración de este Teorema es análoga a la demostración del Teorema 204. ■

Lema 212 Sean $(R_j^n)_{j \geq 1}$ una sucesión de n -regiones conexas que satisfacen las propiedades i)–v) del Teorema 211 y $(R_i^n)_{i \geq 1}$ una subsucesión de $(R_j^n)_{j \geq 1}$ que también satisface dichas propiedades. Entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_j^n) = \lim_{i \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_i^n).$$

Demostración

La demostración de este Lema es análoga a la demostración del Lema 205. ■

Teorema 213 Sean $(R_j^n)_{j \geq 1}$ y $(R_h^n)_{h \geq 1}$ dos sucesiones de n -regiones conexas con las propiedades i)–v) del Teorema 211, $n \geq 3$. Entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_j^n) = \lim_{h \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_h^n).$$

Demostración

Por i)–v) del Teorema 211, se tiene que $\forall h \geq 1 \exists j_{1h}, j_{2h} \geq 1$ tales que:

- a) $R_{j_{1h}}^n \subset R_h^n \subset R_{j_{2h}}^n$
- b) $(R_{j_{1h}}^n)_{h \geq 1}, (R_{j_{2h}}^n)_{h \geq 1} \subset (R_j^n)_{j \geq 1}$ satisfacen las propiedades i)–v).

A continuación, y para simplificar la notación, $cc_n(g; R - R')$ representará la suma de las curvaturas centrales de g con respecto a las componentes conexas de $R - R'$ con volumen no nulo.

Por a) se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{vol}(R_{j_{2h}}^n)} \int_{\xi_n \in R_{j_{2h}}^n} cc_n(\pi_{\xi_n} \circ i_{\xi_n} \circ f_n, R_{j_{2h}}^n \cap L_{\xi_n}^n) ds_{R_{j_{2h}}^n} \\ & < \int_{\xi_n \in (R_{j_{2h}}^n - R_h^n)} \frac{cc_n(\pi_{\xi_n} \circ i_{\xi_n} \circ f_n, (R_{j_{2h}}^n - R_h^n) \cap L_{\xi_n}^n)}{\text{vol}(R_{j_{2h}}^n - R_h^n)} ds_{(R_{j_{2h}}^n - R_h^n)} \\ & \quad + \int_{\xi_n \in R_h^n} \frac{cc_n(\pi_{\xi_n} \circ i_{\xi_n} \circ f_n, R_h^n \cap L_{\xi_n}^n)}{\text{vol}(R_h^n)} ds_{R_h^n} \\ & < \int_{\xi_n \in (R_{j_{2h}}^n - R_{j_{1h}}^n)} \frac{cc_n(\pi_{\xi_n} \circ i_{\xi_n} \circ f_n, (R_{j_{2h}}^n - R_{j_{1h}}^n) \cap L_{\xi_n}^n)}{\text{vol}(R_{j_{1h}}^n)} ds_{(R_{j_{2h}}^n - R_{j_{1h}}^n)} \\ & \quad + \int_{\xi_n \in R_h^n} \frac{cc_n(\pi_{\xi_n} \circ i_{\xi_n} \circ f_n, R_h^n \cap L_{\xi_n}^n)}{\text{vol}(R_h^n)} ds_{R_h^n}. \end{aligned}$$

Por b) se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_j^n) &\leq \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\xi_n \in (R_{j_{2h}}^n - R_{j_{1h}}^n)} \frac{cc_n(\pi_{\xi_n} \circ i_{\xi_n} \circ f_n, (R_{j_{2h}}^n - R_{j_{1h}}^n) \cap L_{\xi_n}^n)}{\text{vol}(R_{j_{1h}}^n)} ds_{(R_{j_{2h}}^n - R_{j_{1h}}^n)} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_h^n). \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\xi_n \in (R_{j_{2h}}^n - R_{j_{1h}}^n)} cc_n(\pi_{\xi_n} \circ i_{\xi_n} \circ f_n, (R_{j_{2h}}^n - R_{j_{1h}}^n) \cap L_{\xi_n}^n) ds_{(R_{j_{2h}}^n - R_{j_{1h}}^n)} = \text{constante},$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\xi_n \in (R_{j_{2h}}^n - R_{j_{1h}}^n)} \frac{cc_n(\pi_{\xi_n} \circ i_{\xi_n} \circ f_n, (R_{j_{2h}}^n - R_{j_{1h}}^n) \cap L_{\xi_n}^n)}{\text{vol}(R_{j_{1h}}^n)} ds_{(R_{j_{2h}}^n - R_{j_{1h}}^n)} = 0.$$

De aquí que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_j^n) \leq \lim_{h \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_h^n). \quad (1)$$

Análogamente, se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_j^n) \geq \lim_{h \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_h^n). \quad (2)$$

Por (1) y (2), se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_j^n) = \lim_{h \rightarrow \infty} cc_{n+1}(f_n; R_h^n). \quad \blacksquare$$

Teorema 214 Sean $p \in S_1^n$ y $(R_j^n)_{j \geq 1}$ una sucesión de n -regiones conexas con las propiedades i)-v) del Teorema 211, con $n \geq 3$. Si existen $j_p \geq 1$ y $(R_{h_p}^n \cap L_p^n)_{h_p \geq j_p} \subset (R_j^n \cap L_p^n)_{j \geq j_p}$ tales que $\lim_{h_p \rightarrow \infty} R_{h_p}^n = S_1^n$ y $\lim_{h_p \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(R_{h_p+1}^n \cap L_p^n)}{\text{vol}(R_{h_p}^n \cap L_p^n)} = 1$, entonces $(R_{h_p}^n \cap L_p^n)_{h_p \geq j_p}$ es una sucesión de $(n-1)$ -regiones conexas de $(S_1^n \cap L_p^n)$, la cual satisface las propiedades i)-v) del Teorema 211.

Demostración

Sean p un punto fijo de S_1^n y $(R_j^n)_{j \geq 1}$ una sucesión de n -regiones conexas con las propiedades i)-v) del Teorema 211, entonces existe $j_p \geq 1$ tal que $p \in R_j^n, \forall j \geq j_p$. Suponemos que existe $(R_{h_p}^n \cap L_p^n)_{h_p \geq j_p} \subset (R_j^n \cap L_p^n)_{j \geq j_p}$ tal que $\lim_{h_p \rightarrow \infty} R_{h_p}^n = S_1^n$ y $\lim_{h_p \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(R_{h_p+1}^n \cap L_p^n)}{\text{vol}(R_{h_p}^n \cap L_p^n)} = 1$.

De ahí que $(R_{h_p}^n \cap L_p^n)$ es una n -región conexas, $\forall h_p \geq j_p$. Además:

- i) Dado que $R_j^n \subset S_1^n$, entonces $(R_{h_p}^n \cap L_p^n) \subset (S_1^n \cap L_p^n)$, $\forall h_p \geq j_p$.
- ii) Dado que $R_j^n \subset R_{j+1}^n$, entonces $(R_{h_p}^n \cap L_p^n) \subset (R_{h_p+1}^n \cap L_p^n)$, $\forall h_p \geq j_p$.
- iii) Dado que $\text{vol}(R_j^n) < \infty$, entonces $\text{vol}(R_j^n \cap L_p^n) < \infty$, $\forall j \geq 1$. En particular, $\text{vol}(R_{h_p}^n \cap L_p^n) < \infty$, $\forall h_p \geq j_p$.

Por otro lado, si $R_j^n = \{(x_1^j, \dots, x_{n+1}^j) \in S_1^n : b_1^j < x_1^j < a_1^j\}$ entonces $(R_j^n \cap L_p^n) = \{(x_1^j, \dots, x_{n+1}^j) \in S_1^n \cap L_p^n : b_1^j < x_1^j < a_1^j\}$.

Para demostrar la propiedad iv) se necesita la propiedad v).

- v) Dado que $\lim_{h_p \rightarrow \infty} R_{h_p}^n = S_1^n$ y $\lim_{R_{h_p}^n \rightarrow S_1^n} (R_{h_p}^n \cap L_p^n) = (S_1^n \cap L_p^n)$, se tiene que

$$\lim_{h_p \rightarrow \infty} (R_{h_p}^n \cap L_p^n) = (S_1^n \cap L_p^n).$$

- iv) Dado que para cada $p \in S_1^n$, $\exists j_p$ tal que $R_j^n \cap L_p^n \neq \emptyset \forall j \geq j_p$ y $(R_{h_p}^n \cap L_p^n)_{h_p \geq j_p} \subset (R_j^n \cap L_p^n)_{j \geq j_p}$, entonces $\exists h_p \geq j_p$ tal que $(R_h^n \cap L_p^n) \neq \emptyset \forall h \geq h_p$. Por v) se deriva que para todo $q \in (S_1^n \cap L_p^n)$, $(R_h^n \cap L_p^n \cap L_q^{n-1}) \neq \emptyset$ a partir de un h suficientemente grande. ■

A continuación se presenta una propiedad de recurrencia de la curvatura total central de curvas cerradas en espacios lorentzianos.

Teorema 215 Sea $(R_j^n)_{j \geq 1}$ una sucesión de n -regiones conexas con las propiedades del Teorema 211 tal que $\forall p \in S_1^n$ existen $j_p \geq 1$ y $(R_{h_p}^n)_{h_p \geq j_p} \subset (R_j^n)_{j \geq 1}$ que satisface las condiciones del Teorema 214, con $n \geq 3$. Entonces

$$tcc_{n+1}(f_n) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}(R_j^n)} \int_{p \in R_j^n} tcc_n(\pi_p \circ i_p \circ f_n) ds_{R_j^n}.$$

Demostración

Si $\gamma_p = \pi_p \circ i_p \circ f_n$, por definición de $tcc_{n+1}(f_n)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}(R_j^n)} \int_{p \in R_j^n} [tcc_n(\gamma_p) - cc_n(\gamma_p, R_j^n \cap L_p^n)] ds_{R_j^n} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}(R_j^n)} \int_{p \in R_j^n} \left[\lim_{t_p \rightarrow \infty} cc_2(\gamma_p, C_{t_p}) - cc_2(\gamma_p, R_j^n \cap L_p^n) \right] ds_{R_j^n} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}(R_j^n)} \int_{p \in R_j^n} \lim_{t_p \rightarrow \infty} [cc_n(\gamma_p, C_{t_p}) - cc_n(\gamma_p, R_j^n \cap L_p^n)] ds_{R_j^n}. \end{aligned}$$

Por Teorema 214 se puede asumir que $(C_{t_p})_{t_p \geq j_p} = (R_{h_p}^n \cap L_p^n)_{h_p \geq j_p}$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}(R_j^n)} \int_{p \in R_j^n} [tcc_n(\gamma_p) - cc_n(\gamma_p, R_j^n \cap L_p^n)] ds_{R_j^n} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}(R_j^n)} \int_{p \in R_j^n} \lim_{h_p \rightarrow \infty} [cc_n(\gamma_p, R_{h_p}^n \cap L_p^n) - cc_n(\gamma_p, R_j^n \cap L_p^n)] ds_{R_j^n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}(R_j^n)} \int_{p \in R_j^n} [tcc_n(\gamma_p) - cc_n(\gamma_p, R_j^n \cap L_p^n)] ds_{R_j^n} = 0. \blacksquare$$

Capítulo 6

Operadores

6.1. Operador de Laplace-Beltrami

La expresión del operador de Laplace-Beltrami de funciones es bien conocida y se encuentra en una bibliografía diversa, pero no es este operador el que nos ocupa sino el operador de Laplace-Beltrami de campos vectoriales. En lo que sigue damos a conocer tanto su definición como resultados importantes obtenidos respecto al laplaciano del campo vectorial curvatura media de hipersuperficies lorentzianas.

Los términos “operador de Laplace-Beltrami”, “operador de Laplace” y “laplaciano” serán utilizados indistintamente.

6.1.1. Laplaciano de funciones en variedades semi-riemannianas

Definición 216 Sea \mathbb{R}^n el espacio euclideo n -dimensional. Sean u_1, \dots, u_n las coordenadas naturales de \mathbb{R}^n . El operador diferencial

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (6.1)$$

es llamado el laplaciano de \mathbb{R}^n .

Este operador se aplica a funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, donde $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones C^∞ a valores reales definidas en \mathbb{R}^n .

En [57] se muestra la siguiente propiedad del operador Δ : sea $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo. Para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, se puede definir

$$\Delta^\phi f = (\Delta(f \circ \phi)) \circ \phi^{-1}.$$

Si $\Delta^\phi = \Delta$, para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vale que $\Delta(f \circ \phi) = (\Delta f) \circ \phi$. En particular, si $\phi_i = x_i \circ \phi$, se tiene que

$$\Delta \phi_i = (\Delta x_i) \circ \phi = 0.$$

Considerando que $\Delta((x_i \circ \phi)(x_j \circ \phi)) = (\Delta(x_i x_j)) \circ \phi = 2\delta_{ij}$, entonces

$$\sum_{t=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_t} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_t} = \delta_{ij}. \quad (6.2)$$

Por lo tanto, en cada $p \in \mathbb{R}^n$, la matriz Jacobiana de ϕ es una transformación ortogonal.

Lema 217 Si $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo tal que $\Delta^\phi = \Delta$, entonces ϕ es una isometría.

Así, el laplaciano es un operador diferencial invariante por isometría y permite determinar si un difeomorfismo es una isometría o no.

También en [57], página 4, se prueba la equivalencia de distintas definiciones del operador de Laplace-Beltrami en variedades riemannianas, dos de las cuales se consideran a continuación.

Definición 218 Sean (M, \mathbf{g}) una variedad riemanniana, $\mathcal{U} \subset M$ un abierto y x_1, \dots, x_n un sistema local de coordenadas en \mathcal{U} . Para $p \in \mathcal{U}$, notamos $\mathbf{g}_p = \langle, \rangle$. Sean $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$, $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$ y $g = \det(g_{ij})$. Entonces queda definido, y es independiente de la elección del sistema local de coordenadas, el operador diferencial

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} \sum_{i=1}^n g^{ii} \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \quad (6.3)$$

Este operador se aplica a $f \in \mathcal{F}(M)$, donde $\mathcal{F}(M)$ es el conjunto de funciones diferenciables de M en \mathbb{R} .

Es inmediato notar que si $M = \mathbb{R}^n$, entonces Δ de (6.3) es el laplaciano definido anteriormente en (6.1).

En lo que sigue, se utiliza la misma notación, Δ , para el laplaciano en \mathbb{R}^n como para el laplaciano en cualquier variedad inmersa en \mathbb{R}^n .

Análogamente al caso de espacios euclidianos, para variedades riemannianas vale el siguiente lema.

Lema 219 Si $\phi : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo tal que $\Delta^\phi = \Delta$, entonces ϕ es una isometría.

A continuación mostramos otra definición del operador de Laplace Δ . Esta definición se puede ver en [56], página 220.

Sea M una variedad riemanniana compacta y orientable. Para cada $p \in M$, sean e_1, \dots, e_n un marco de referencias (frame) positivamente orientado y $\omega_1, \dots, \omega_n$ su correspondiente dual (coframe). Sea $\omega_p = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$. Entonces ω define una n -forma en M , la forma volumen de M . Extendiendo la estructura riemanniana de M a $\Lambda^p T_q(M)^*$ de la manera usual, se puede definir la aplicación

$$\Psi : \Lambda^p T_q(M)^* \rightarrow \Lambda^{n-p} T_q(M)^*$$

tal que para todo $\eta \in \Lambda^p T_q(M)^*$, $\alpha \in \Lambda^{n-p} T_q(M)^*$,

$$\langle \Psi \eta, \alpha \rangle \omega = \eta \wedge \alpha.$$

Con el símbolo \wedge se indica el producto de álgebras de Grassmann de formas.

Si $D^p(M)$ es el espacio de las C^∞ - p -formas en M , se define la aplicación

$$\delta : D^p(M) \rightarrow D^{p-1}(M)$$

por

$$\begin{aligned}\delta D^0(M) &= 0, \\ \delta \eta &= (-1)^{np+n+1} \Psi d \Psi \eta\end{aligned}$$

para $\eta \in D^p(M)$, $p \neq 0$.

Sobre las p -formas queda definido el Hodge-Laplaciano $\Delta = -(d\delta + \delta d)$. Para $p = 0$, se tiene que $\Delta f = -\delta df$. Entonces Δ es el operador de Laplace-Beltrami en M .

En [41], páginas 85 a 87, O'Neill define operadores diferenciables, entre ellos el de Laplace-Beltrami, para el caso de variedades semi-riemannianas (M, \mathbf{g}) .

Definición 220 Sea $f \in \mathcal{F}(M)$. El gradiente de la función f , $\text{grad } f$, es el campo vectorial métricamente equivalente al diferencial $df \in \Xi^*(M)$. Por lo tanto, para todo $X \in \Xi(M)$

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = df(X) = Xf. \quad (6.4)$$

Dado el sistema de coordenadas x_1, \dots, x_n , el diferencial df es igual a $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Entonces vale

$$\text{grad } f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_j. \quad (6.5)$$

Definición 221 Sea E_1, \dots, E_n un marco de referencia de campos vectoriales. Si $X \in \Xi(M)$, entonces la divergencia de X , $\text{div } X$, está definida por

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle. \quad (6.6)$$

y $\text{div } X \in \mathcal{F}(M)$

Expresado en términos del sistema de coordenadas x_1, \dots, x_n , queda

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^i X_j \right\}. \quad (6.7)$$

Observación 222 Respecto al sistema de coordenadas u_1, \dots, u_n de \mathbb{R}_v^n , queda: $\text{div } X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial u_i}$. En el caso de \mathbb{R}^3 , ésta es la fórmula bien conocida de la divergencia.

Definición 223 El laplaciano Δf de una función $f \in \mathcal{F}(M)$ es la divergencia de su gradiente: $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) \in \mathcal{F}(M)$.

En términos del sistema de coordenadas x_1, \dots, x_n , la expresión del laplaciano es

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{t=1}^n \Gamma_{ij}^t \frac{\partial f}{\partial x_t} \right\}. \quad (6.8)$$

Notando $|g| = |\det(g_{ij})|$, la expresión anterior es igual a la presentada en [41], página 213,

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|} \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \quad (6.9)$$

la cual generaliza la fórmula (6.3) del laplaciano aplicado a funciones en variedades semi-riemannianas.

Observación 224 Para el sistema de coordenadas u_1, \dots, u_n de \mathbb{R}^n , el laplaciano $\Delta f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}$, donde $\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq i \leq \nu, \\ +1 & \text{si } \nu + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$

Observación 225 La diferencia entre las expresiones (6.3) y (6.9) proviene del hecho de que en el caso de variedades semi-riemannianas g puede tomar valores negativos, por lo que en (6.9) se considera $|g|$ en lugar de g .

6.1.2. Laplaciano del campo vectorial curvatura media de hipersuperficies de L^{n+1}

Consideraremos ahora $\bar{M} = L^{n+1}$ con el sistema de coordenadas u_1, \dots, u_n y $E_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$ con $i = 1, \dots, n$. Sea M una hipersuperficie n -dimensional de L^{n+1} .

Para cada $p \in M$, sean $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ una base ortonormal de $T_p(M)$ y $N(p) = E_{n+1}(p)$ el vector unitario normal a $T_p(M)$. Veremos que con estas condiciones se puede extender la definición del operador laplaciano para aplicarlo a campos vectoriales.

Como antes, se notan $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, y $\bar{\nabla}$ la conexión inducida de $M \subset L^{n+1}$.

Definición 226 Bajo las condiciones anteriores, el operador de Laplace queda definido por

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i}. \quad (6.10)$$

Si para cada $p \in M$, sean $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ una base ortogonal de $T_p(M)$ y $N(p) = E_{n+1}(p)$ el vector unitario normal a $T_p(M)$, entonces

$$\Delta = \sum_{i=1}^n g^{ii} \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i}, \quad (6.11)$$

donde $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ y $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Si además, $\varepsilon = \langle N, N \rangle$ y $S = A_{n+1}$, el campo vectorial curvatura media H de M es

$$H = \varepsilon \frac{\text{tr}[S]}{n} N = \lambda N,$$

con $\lambda \in \mathcal{F}(M)$.

Para $1 \leq i \leq n$, queda:

$$\bar{\nabla}_{E_i} H = \bar{\nabla}_{E_i} (\lambda N) = E_i(\lambda) N + \lambda \bar{\nabla}_{E_i} N.$$

Por Definición 116 y (4.42),

$$\bar{\nabla}_{E_i} H = E_i(\lambda)N - \lambda S(E_i).$$

Entonces

$$\bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} H = \bar{\nabla}_{E_i} (E_i(\lambda)N - \lambda S(E_i)).$$

Por propiedades de $\bar{\nabla}$ y por (4.42), se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_i} (E_i(\lambda)N - \lambda S(E_i)) &= \bar{\nabla}_{E_i} (E_i(\lambda)N) - \bar{\nabla}_{E_i} (\lambda S(E_i)) \\ &= E_i E_i(\lambda)N + E_i(\lambda) \bar{\nabla}_{E_i} N - E_i(\lambda) S(E_i) - \lambda \bar{\nabla}_{E_i} (S(E_i)) \\ &= E_i E_i(\lambda)N - E_i(\lambda) S(E_i) - E_i(\lambda) S(E_i) - \lambda \bar{\nabla}_{E_i} (S(E_i)) \\ &= E_i E_i(\lambda)N - 2E_i(\lambda) S(E_i) - \lambda \bar{\nabla}_{E_i} (S(E_i)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} H = E_i E_i(\lambda)N - 2E_i(\lambda) S(E_i) - \lambda \bar{\nabla}_{E_i} (S(E_i)). \quad (6.12)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_i} (S E_i) &= \tan \bar{\nabla}_{E_i} (S E_i) + \text{nor} \bar{\nabla}_{E_i} (S E_i) \\ &= \nabla_{E_i} (S E_i) + II(S E_i, E_i). \end{aligned}$$

Reemplazando en (6.12)

$$\bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} H = E_i E_i(\lambda)N - 2E_i(\lambda) S E_i - \lambda \nabla_{E_i} (S E_i) - \lambda II(S E_i, E_i) \quad (6.13)$$

Ya que para cualquier $V, W \in \Xi(M)$ vale:

$$\nabla_V (S W) = (\nabla_V S)(W) + S(\nabla_V W),$$

en el caso particular $V = W = E_i$ queda

$$\nabla_{E_i} S E_i = (\nabla_{E_i} S)(E_i) + S(\nabla_{E_i} E_i). \quad (6.14)$$

Reemplazando en (6.13), se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} H &= E_i E_i(\lambda)N - 2E_i(\lambda) S E_i - \lambda (\nabla_{E_i} S) E_i \\ &\quad - \lambda S(\nabla_{E_i} E_i) - \lambda II(S E_i, E_i). \end{aligned}$$

Como ε_i es constante, entonces para todo $i : 1, \dots, n$ vale que

$$0 = E_i \langle E_i, E_i \rangle = 2 \langle E_i, \nabla_{E_i} E_i \rangle.$$

Además, como $S E_i = \sum_{t=1}^n (S E_i)_t E_t \in \Xi(M)$ y S es autoadjunto, queda

$$\begin{aligned} S(\nabla_{E_i} E_i) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle S(\nabla_{E_i} E_i), E_i \rangle E_i \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle S E_i, \nabla_{E_i} E_i \rangle E_i \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sum_{t=1}^n (S E_i)_t \langle E_t, \nabla_{E_i} E_i \rangle E_i = 0. \end{aligned}$$

Luego

$$\bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} H = E_i E_i (\lambda) N - 2E_i (\lambda) S E_i - \lambda (\nabla_{E_i} S) E_i - \lambda II (S E_i, E_i). \quad (6.15)$$

Para encontrar la expresión del laplaciano del campo vectorial curvatura media H , se reemplaza en (6.10) y se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta H &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i E_i E_i (\lambda) N - 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i E_i (\lambda) S E_i \\ &\quad - \lambda \sum_{i=1}^n \varepsilon_i II (S E_i, E_i) - \lambda \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\nabla_{E_i} S) E_i. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Aplicando (6.9) a la función λ , vale que

$$\Delta (\lambda) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i E_i E_i (\lambda). \quad (6.17)$$

Por ser S autoadjunto,

$$\begin{aligned} II (S E_i, E_i) &= \varepsilon \langle II (S E_i, E_i), N \rangle N \\ &= \varepsilon \langle S (S E_i), E_i \rangle N = \varepsilon \langle S E_i, S E_i \rangle N. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i II (S E_i, E_i) = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle S E_i, S E_i \rangle \right) N = \varepsilon \|S\|^2 N. \quad (6.18)$$

Siendo $S = (S E_1, \dots, S E_n)$, definimos

$$\|S\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle E_i, E_i \rangle \langle S E_i, S E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle S E_i, S E_i \rangle.$$

Por otro lado, dado que

$$\text{grad } \lambda = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i E_i (\lambda) E_i$$

entonces

$$S (\text{grad } \lambda) = S \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i E_i (\lambda) E_i \right) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i E_i (\lambda) S E_i. \quad (6.19)$$

Por cálculos precedentes, $\nabla_{E_i} S E_i = (\nabla_{E_i} S) (E_i)$. Reemplazando según (4.42), nos queda

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\nabla_{E_i} S) E_i = \text{tr } \nabla S, \quad (6.20)$$

donde

$$\nabla S = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 (\nabla_{E_1} S) E_1 & \dots & \varepsilon_n (\nabla_{E_2} S) E_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1 (\nabla_{E_1} S) E_n & \dots & \varepsilon_n (\nabla_{E_n} S) E_n \end{pmatrix}.$$

Por (4.43) y (4.44) se tiene

$$\begin{aligned} (\nabla_{E_i} S) E_j &= \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \langle (\nabla_{E_i} S) E_j, E_t \rangle E_t \\ &= \sum_{t=1}^n \left\{ \left\langle \text{nor } \bar{\nabla}_{E_i} (II(E_j, E_t)), N \right\rangle - \langle II(\nabla_{E_i} E_j, E_t), N \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle II(E_j, \nabla_{E_i} E_t), N \rangle \right\} E_t. \end{aligned}$$

Por Definición 100, $\nabla_{E_i} E_i = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ii}^k E_k$. Considerando esta expresión, (4.39) y (4.41) queda:

$$\begin{aligned} \langle II(E_i, \nabla_{E_i} E_t), N \rangle &= \sum_{k=1}^n \Gamma_{ii}^k \langle SE_k, E_i \rangle, \\ \langle II(\nabla_{E_i} E_i, E_t), N \rangle &= \sum_{k=1}^n \Gamma_{ii}^k \langle SE_t, E_k \rangle, \\ \bar{\nabla}_{E_i} (II(E_i, E_t)) &= \bar{\nabla}_{E_i} \{ \varepsilon \langle II(E_i, E_t), N \rangle N \} \\ &= \varepsilon E_i \langle II(E_i, E_t), N \rangle N + \varepsilon \langle II(E_i, E_t), N \rangle SE_i \end{aligned}$$

por lo que

$$\left\langle \text{nor } \bar{\nabla}_{E_i} (II(E_i, E_t)), N \right\rangle = \langle \varepsilon E_i \langle II(E_i, E_t), N \rangle N, N \rangle = E_i \langle II(E_i, E_t), N \rangle.$$

Reemplazando en (6.20), la traza de ∇S queda expresada:

$$\text{tr } \nabla S = \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left\{ E_i \langle SE_i, E_t \rangle - \sum_{k=1}^n \left(\Gamma_{it}^k \langle SE_k, E_i \rangle + \Gamma_{ii}^k \langle SE_t, E_k \rangle \right) \right\} E_t. \quad (6.21)$$

Al reemplazar (6.17), (6.18), (6.19) y (6.20) en (6.16) se obtiene el resultado siguiente, que es una generalización a hipersuperficies de un resultado ya conocido para superficies.

Teorema 227 *Sea M una hipersuperficie n -dimensional de \mathbb{R}_1^{n+1} . Sea u_1, \dots, u_n el sistema de coordenadas de \mathbb{R}_1^{n+1} tal que $E_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$. Para cada $p \in M$, sean $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ base de $T_p(M)$ y $N(p) = E_{n+1}(p)$ el vector unitario normal a $T_p(M)$. Sea H el campo vectorial curvatura media de M . Si $H = \lambda N$, con $\lambda \in \mathcal{F}(M)$, entonces*

$$\Delta H = \Delta(\lambda) N - 2S(\text{grad } \lambda) - \lambda \varepsilon \|S\|^2 N - \lambda \text{tr } \nabla S. \quad (6.22)$$

Corolario 228 *Bajo las condiciones del teorema precedente, si λ es una función constante entonces*

$$\Delta H = -\lambda \left(\varepsilon \|S\|^2 N + \text{tr } \nabla S \right). \quad (6.23)$$

6.2. Casos particulares

Con el propósito de obtener el operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de distintas superficies de L^3 , recordamos brevemente las definiciones básicas necesarias de las superficies que se estudiarán.

6.2.1. Superficies lorentzianas

Una superficie lorentziana M es una variedad lorentziana de dimensión 2. Heredando la notación clásica utilizada para superficies en \mathbb{R}^3 , las componentes g_{ij} del tensor métrico en M respecto del sistema de coordenadas x_1, x_2 son

$$\begin{aligned} E &= g_{11} = \langle \partial_1, \partial_1 \rangle, \\ F &= g_{12} = g_{21} = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle, \\ G &= g_{22} = \langle \partial_2, \partial_2 \rangle, \end{aligned}$$

donde $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ y $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$.

El elemento de arco queda expresado

$$ds^2 = E dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2.$$

A partir de la fórmula general (4.21), es fácil verificar que los símbolos de Christoffel para la superficie M respecto de E, F, G se expresan:

$$\begin{aligned} (EG - F^2) \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} E_1 G - F F_1 + \frac{1}{2} E_2 F, \\ (EG - F^2) \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} E_2 G - \frac{1}{2} G_1 F, \\ (EG - F^2) \Gamma_{22}^1 &= F_2 G - \frac{1}{2} G G_1 - \frac{1}{2} F G_2, \\ (EG - F^2) \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2} E E_2 + E F_1 - \frac{1}{2} E_1 F, \\ (EG - F^2) \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} E G_1 - \frac{1}{2} E_2 F, \\ (EG - F^2) \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} E G_2 - F F_2 + \frac{1}{2} F G_1, \end{aligned}$$

donde $E_i = \frac{\partial E}{\partial x_i}$, $F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ y $G_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}$.

Si $F = 0$, el sistema de coordenadas x_1, x_2 se dice ortogonal. En el caso de un sistema ortogonal, la conexión de Levi-Civita ∇ de M , a partir de (4.19), (4.20) y (4.21), verifica:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_1} \partial_1 &= \frac{E_1}{2E} \partial_1 - \frac{E_2}{2G} \partial_2, \\ \nabla_{\partial_2} \partial_2 &= -\frac{G_1}{2E} \partial_1 + \frac{G_2}{2G} \partial_2, \\ \nabla_{\partial_1} \partial_2 &= \nabla_{\partial_2} \partial_1 = \frac{E_2}{2E} \partial_1 + \frac{G_1}{2G} \partial_2. \end{aligned}$$

Si $p \in M$, entonces $\{\partial_1(p), \partial_2(p)\}$ es una base ortogonal de $T_p(M)$. Los vectores unitarios $N(p)$ normales a $T_p(M)$ quedan determinados por

$$N(p) = \frac{\partial_1(p) \wedge \partial_2(p)}{\|\partial_1(p) \wedge \partial_2(p)\|},$$

donde el símbolo \wedge indica producto vectorial en L^3 ; en [7] se encuentra definido \wedge .

Observación 229 Recordemos que al elegir a N como campo vectorial normal unitario, estamos eligiendo una orientación de la superficie.

Una curva α en L^3 se dice curva nula si todos los vectores tangentes a α son vectores nulos y distintos de cero. Bonnor, en [15], estudia las curvas nulas en L^4 y el desarrollo de tal análisis fue adaptado, posteriormente, por otros autores para examinar curvas nulas en L^n , $n \geq 2$.

Un marco de referencia nulo (null frame) es una terna ordenada de vectores (o, desde otro punto de vista, una matriz) $F = (A, B, C)$, donde A, B son vectores nulos tales que $\langle A, B \rangle = -1$, C es un vector espacial ortogonal al plano de Lorentz generado por A y B , y el determinante de F es igual a ± 1 .

Un marco para una curva nula $\alpha(s)$ es una curva de referencia o “frame curve” $F(s) = (A(s), B(s), C(s))$ tal que $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$ es un múltiplo escalar positivo de $A(s)$; se dice que $\alpha(s)$ está referenciada (framed) por $F(s)$. Los marcos de las curvas nulas no son únicos, por lo que siempre se hace referencia al par (α, F) , es decir, a la curva nula y al marco respectivo.

Una curva de referencia de Cartan es una curva nula referenciada $(\alpha(s), F(s))$ cuyas ecuaciones de Frénet son de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha}{\partial s} &= A(s), \\ \frac{\partial A}{\partial s} &= k_2(s)C(s), \\ \frac{\partial B}{\partial s} &= k_3(s)C(s), \\ \frac{\partial C}{\partial s} &= k_3(s)A(s) + k_2(s)B(s).\end{aligned}$$

En el espacio de Lorentz L^3 con signatura $(-, +, +)$, encontramos las superficies

$$B\text{-scroll}, \quad L \times S^1, \quad H^1 \times R, \quad S_1^1 \times R, H_0^2, \quad S_1^2, \quad L^2,$$

donde L es la recta lorentziana, H_0^2 y S_1^2 son los espacios de curvatura -1 y 1 respectivamente.

En [26], Graves presenta los B -scrolls. Si $(\alpha(s), F(s))$ es una curva de referencia de Cartan en L^3 , el B -scroll de (α, F) es una superficie parametrizada por $f(s, u) = \alpha(s) + uB(s)$. Es inmediato notar que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = B(s) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial s} = A(s) + uk_3(s)C(s).$$

En el caso de los B -scrolls no se tienen bases ortonormales unívocamente determinadas y, en particular, $\frac{\partial f}{\partial u}$ es nulo. Dado que no se conoce una definición de campo vectorial curvatura media que considere bases que no sean ortogonales, esas superficies quedan fuera de nuestro análisis.

En lo que sigue calcularemos el campo vectorial curvatura media H de las restantes superficies mencionadas y posteriormente aplicaremos el operador de Laplace para campos vectoriales, Δ , a cada H obtenido.

A continuación se trabajará con superficies de curvatura constante; es un resultado conocido que toda otra superficie es localmente isométrica a alguna de ellas.

6.2.2. Operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de la superficie S_1^2

Sea x_1, x_2, x_3 un sistema de coordenadas en L^3 tal que $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ forman una base ortonormal de L^3 , con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

La superficie S_1^2 , también llamada pseudo-esfera, en L^3 es tal que

$$S_1^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in L^3 : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Una parametrización de S_1^2 en coordenadas ω, θ es dada por

$$\begin{cases} x_1 = \sinh \omega \\ x_2 = \cos \theta \cosh \omega \\ x_3 = \sin \theta \cosh \omega \end{cases} \quad (6.24)$$

donde $\omega \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

En adelante, notaremos $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_\omega = \frac{\partial}{\partial \omega}$, $\partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}$. Por (6.24) tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_\omega &= \cosh \omega \partial_1 + \sinh \omega \cos \theta \partial_2 + \sinh \omega \sin \theta \partial_3, \\ \partial_\theta &= -\cosh \omega \sin \theta \partial_2 + \cosh \omega \cos \theta \partial_3. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Entonces, como $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ es una base ortonormal de L^3 , quedan

$$\begin{aligned} E &= g_{11} = \langle \partial_\omega, \partial_\omega \rangle = -1, \\ F &= g_{12} = g_{21} = \langle \partial_\omega, \partial_\theta \rangle = 0, \\ G &= g_{22} = \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle = \cosh^2 \omega. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Observación 230 Según (4.8), ∂_ω es temporal y ∂_θ es espacial.

Realizados ya los cálculos en (6.26), podemos expresar la matriz (g_{ij}) y su matriz inversa (g^{ij}) :

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \cosh^2 \omega \end{bmatrix} \quad (g^{ij}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 \omega} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

y por lo tanto el elemento de arco ds^2 queda expresado como

$$ds^2 = -d\omega^2 + \cosh^2 \omega d\theta^2.$$

En los símbolos de Christoffel de S_1^2 respecto del sistema de coordenadas ω, θ , identificamos el índice 1 con ω y el índice 2 con θ . Por (4.21) y (6.27), $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \tanh \omega$, $\Gamma_{22}^2 = \cosh \omega \sinh \omega$, y $\Gamma_{ij}^k = 0$ en los casos restantes.

Por (4.25), (6.27) y (4.26), $\langle R_{\partial_\omega \partial_\theta} \partial_\omega, \partial_\theta \rangle = -\frac{1}{\cosh^2 \omega}$ y $K = 1$.

Si $p \in S_1^2$, entonces $\{\partial_\omega(p), \partial_\theta(p)\}$ es una base ortogonal de $T_p(S_1^2)$. Los vectores unitarios $N(p)$ normales a $T_p(S_1^2)$ quedan determinados por

$$N(p) = \frac{\partial_\omega(p) \wedge \partial_\theta(p)}{\|\partial_\omega(p) \wedge \partial_\theta(p)\|},$$

donde el símbolo \wedge indica producto vectorial en L^3 , donde

$$\partial_\omega \wedge \partial_\theta = (\sinh \omega \cosh \omega, \cosh^2 \omega \cos \theta, \cosh^2 \omega \sin \theta)$$

y

$$\|\partial_\omega(p) \wedge \partial_\theta(p)\| = \sqrt{\cosh^4 \omega - \cosh^2 \omega \sinh^2 \omega} = \cosh \omega.$$

Consideramos el campo vectorial normal unitario $N : S_1^2 \rightarrow L^3$ dado por

$$N = (\sinh \omega, \cosh \omega \cos \theta, \cosh \omega \sin \theta). \quad (6.28)$$

Así definido, N satisface

$$\begin{aligned} \langle N, \partial_\omega \rangle &= \langle N, \partial_\theta \rangle = 0, \\ \langle N, N \rangle &= 1, \end{aligned} \quad (6.29)$$

y es una aplicación diferenciable.

Las propiedades explicitadas en el párrafo anterior valen igualmente para $-N$.

Observación 231 Tanto N como $-N$ son espaciales según (4.8). En particular, N es igual al vector posición de S_1^2 .

Antes de calcular el campo vectorial curvatura media de S_1^2 , es conveniente remarcar que $\partial_\omega, \partial_\theta \in \Xi(S_1^2)$ y $N \in \bar{\Xi}(S_1^2)$.

Sea $\bar{\nabla}$ la conexión inducida de S_1^2 y sea II la segunda forma fundamental definida según (4.37). Sea S el operador de forma de S_1^2 respecto de N .

Dado que N es el vector posición, $\bar{\nabla}_V N = V$ para todo campo vectorial $V \in \Xi(S_1^2)$. De (4.41) se sigue que

$$\begin{aligned} S(\partial_\omega) &= -\partial_\omega, \\ S(\partial_\theta) &= -\partial_\theta. \end{aligned}$$

Por (4.40), (6.27) y (6.29)

$$\begin{aligned} II(\partial_\omega, \partial_\omega) &= \langle N, N \rangle \langle S(\partial_\omega), \partial_\omega \rangle N = N, \\ II(\partial_\theta, \partial_\theta) &= \langle N, N \rangle \langle S(\partial_\theta), \partial_\theta \rangle N = -\cosh^2 \omega N. \end{aligned}$$

Expresado matricialmente,

$$-\begin{pmatrix} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} N \\ \bar{\nabla}_{\partial_\theta} N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\omega \\ \partial_\theta \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, el campo vectorial curvatura media H está definido

$$H = \frac{1}{2}(-2)N = -N. \quad (6.30)$$

El operador de Laplace para campos vectoriales, Δ , en S_1^2 está definido por

$$\Delta = -\bar{\nabla}_{\partial_\omega} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} + \frac{1}{\cosh^2 \omega} \bar{\nabla}_{\partial_\theta} \bar{\nabla}_{\partial_\theta}$$

y por lo tanto,

$$\Delta H = -\bar{\nabla}_{\partial_\omega} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} H + \frac{1}{\cosh^2 \omega} \bar{\nabla}_{\partial_\theta} \bar{\nabla}_{\partial_\theta} H.$$

Dado que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} H &= \bar{\nabla}_{\partial_\omega} (-N) = -\bar{\nabla}_{\partial_\omega} N = -\partial_\omega, \\ \bar{\nabla}_{\partial_\theta} H &= \bar{\nabla}_{\partial_\theta} (-N) = -\bar{\nabla}_{\partial_\theta} N = -\partial_\theta, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} H &= -\bar{\nabla}_{\partial_\omega} \partial_\omega = -\nabla_{\partial_\omega} \partial_\omega - II(\partial_\omega, \partial_\omega) = -\Gamma_{11}^1 \partial_\omega - \Gamma_{11}^2 \partial_\theta - N = -N, \\ \bar{\nabla}_{\partial_\theta} \bar{\nabla}_{\partial_\theta} H &= -\bar{\nabla}_{\partial_\theta} \partial_\theta = -\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta - II(\partial_\theta, \partial_\theta) = -\Gamma_{22}^1 \partial_\omega - \Gamma_{22}^2 \partial_\theta + \cosh^2 \omega N \\ &= -\cosh \omega \sinh \omega \partial_\omega + \cosh^2 \omega N. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Delta H = 2N - \tanh \omega \partial_\omega. \quad (6.31)$$

6.2.3. Operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de la superficie H_0^2

Sea x_1, x_2, x_3 un sistema de coordenadas en L^3 tal que $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ forman una base ortonormal de L^3 , con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

La superficie H_0^2 en L^3 es tal que

$$H_0^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in L^3 : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1\}.$$

Para parametrizar H_0^2 en coordenadas ω, θ necesitamos de dos parametrizaciones: cada una de ellas corresponde a cada una de las hojas de H_0^2 .

Dichas parametrizaciones se obtienen considerando el signo (+), si $x_1 > 0$, o el signo (-), si $x_1 < 0$, en

$$\begin{cases} x_1 = \pm \cosh \omega \\ x_2 = \cos \theta \sinh \omega \\ x_3 = \sin \theta \sinh \omega \end{cases} \quad (6.32)$$

donde $\omega \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

En adelante, notaremos $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_\omega = \frac{\partial}{\partial \omega}$, $\partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Para H_0^2 , $x_1 > 0$, por (6.32) tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_\omega &= \sinh \omega \partial_1 + \cosh \omega \cos \theta \partial_2 + \cosh \omega \sin \theta \partial_3, \\ \partial_\theta &= -\sinh \omega \sin \theta \partial_2 + \sinh \omega \cos \theta \partial_3. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Dado que $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ es una base ortonormal de L^3 , queda

$$\begin{aligned} E &= g_{11} = \langle \partial_\omega, \partial_\omega \rangle = 1, \\ F &= g_{12} = g_{21} = \langle \partial_\omega, \partial_\theta \rangle = 0, \\ G &= g_{22} = \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle = \sinh^2 \omega. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Observación 232 Según (4.8), ∂_ω y ∂_θ son espaciales.

Podemos expresar la matriz (g_{ij}) y su matriz inversa (g^{ij}) :

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh^2 \omega \end{bmatrix} \quad (g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sinh^2 \omega} \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

y por lo tanto el elemento de arco ds^2 queda expresado como

$$ds^2 = d\omega^2 + \sinh^2 \omega d\theta^2.$$

En los símbolos de Christoffel de H_0^2 respecto del sistema de coordenadas ω, θ , identificamos el índice 1 con ω y el índice 2 con θ . Por (4.46) y (6.35), $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \coth \omega$, $\Gamma_{22}^1 = -\cosh \omega \sinh \omega$ y $\Gamma_{ij}^k = 0$ en los casos restantes.

Por (4.25), (6.35) y (4.26), $\langle R_{\partial_\omega \partial_\theta} \partial_\omega, \partial_\theta \rangle = -\frac{1}{\sinh^2 \omega}$ y $K = -1$.

Consideramos el campo vectorial normal unitario N de H_0^2 , $x_1 > 0$, dado por

$$N = \frac{\partial_\omega \wedge \partial_\theta}{\|\partial_\omega \wedge \partial_\theta\|} = (\cosh \omega, \sinh \omega \cos \theta, \sinh \omega \sin \theta).$$

Así definido, N satisface

$$\begin{aligned} \langle N, \partial_\omega \rangle &= \langle N, \partial_\theta \rangle = 0, \\ \langle N, N \rangle &= -1, \end{aligned} \quad (6.36)$$

y N es una aplicación diferenciable. Estas propiedades también las satisface $-N$.

Observación 233 Según (4.8), N y $-N$ son temporales. En particular, N es igual al vector posición de H_0^2 .

Sea $\bar{\nabla}$ la conexión inducida de H_0^2 y sea II la segunda forma fundamental definida según (4.37). Sea S el operador de forma de H_0^2 respecto de N .

Dado que N es el vector posición, $\bar{\nabla}_V N = V$ para todo campo vectorial $V \in \Xi(H_0^2)$. Por (4.41),

$$\begin{aligned} S(\partial_\omega) &= -\partial_\omega, \\ S(\partial_\theta) &= -\partial_\theta. \end{aligned}$$

Por (4.40), (6.34) y (6.36),

$$\begin{aligned} II(\partial_\omega, \partial_\omega) &= \langle N, N \rangle \langle S(\partial_\omega), \partial_\omega \rangle N = N, \\ II(\partial_\theta, \partial_\theta) &= \langle N, N \rangle \langle S(\partial_\theta), \partial_\theta \rangle N = \sinh^2 \omega N. \end{aligned}$$

Expresado matricialmente, queda

$$-\begin{pmatrix} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} N \\ \bar{\nabla}_{\partial_\theta} N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\omega \\ \partial_\theta \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, el campo vectorial curvatura media H está definido

$$H = \frac{1}{2} (-2) N = -N. \quad (6.37)$$

El operador de Laplace Δ para campos vectoriales en H_0^2 está definido por

$$\Delta = \bar{\nabla}_{\partial_\omega} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} + \frac{1}{\sinh^2 \omega} \bar{\nabla}_{\partial_\theta} \bar{\nabla}_{\partial_\theta}$$

y por lo tanto,

$$\Delta H = \bar{\nabla}_{\partial_\omega} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} H + \frac{1}{\sinh^2 \omega} \bar{\nabla}_{\partial_\theta} \bar{\nabla}_{\partial_\theta} H.$$

Dado que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} H &= -\bar{\nabla}_{\partial_\omega} (N) = -\partial_\omega, \\ \bar{\nabla}_{\partial_\theta} H &= -\bar{\nabla}_{\partial_\theta} (N) = -\partial_\theta, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} H &= -\bar{\nabla}_{\partial_\omega} \partial_\omega = -\nabla_{\partial_\omega} \partial_\omega - II(\partial_\omega, \partial_\omega) = -\Gamma_{11}^1 \partial_\omega - \Gamma_{11}^2 \partial_\theta - N = -N, \\ \bar{\nabla}_{\partial_\theta} \bar{\nabla}_{\partial_\theta} H &= -\bar{\nabla}_{\partial_\theta} \partial_\theta = -\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta - II(\partial_\theta, \partial_\theta) = -\Gamma_{22}^1 \partial_\omega - \Gamma_{22}^2 \partial_\theta - \sinh^2 \omega N \\ &= \cosh \omega \sinh \omega \partial_\omega - \sinh^2 \omega N. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Delta H = \coth \omega \partial_\theta - 2N. \quad (6.38)$$

Análogamente para H_0^2 , $x_1 < 0$, el campo vectorial normal unitario N está dado por

$$N = (-\cosh \omega, \sinh \omega \cos \theta, \sinh \omega \sin \theta).$$

El campo vectorial curvatura media H es

$$H = -N \quad (6.39)$$

y el laplaciano Δ aplicado a H

$$\Delta H = \coth \omega \partial_\theta - 2N. \quad (6.40)$$

6.2.4. Operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de la superficie $S_1^1 \times \mathbb{R}$

Sea x_1, x_2, x_3 un sistema de coordenadas en L^3 tal que $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ forman una base ortonormal de L^3 , con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

La superficie producto $S_1^1 \times \mathbb{R}$ en L^3 es tal que

$$S_1^1 \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3) \in L^3 : -x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Una parametrización de esta superficie es dada por

$$\begin{cases} x_1 = \sinh \omega \\ x_2 = \cosh \omega \\ x_3 = t \end{cases} \quad (6.41)$$

donde $\omega, t \in \mathbb{R}$.

Observación 234 *Los vectores horizontales son aquellos tangentes a $S_1^1 \times t_0$, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$; los verticales son los vectores tangentes $(\sinh \omega_0, \cosh \omega_0) \times \mathbb{R}$, con $\omega_0 \in \mathbb{R}$.*

En adelante, notaremos $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_\omega = \frac{\partial}{\partial \omega}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Por (6.41) tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_\omega &= \cosh \omega \partial_1 + \sinh \omega \partial_2, \\ \partial_t &= \partial_3. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Al ser $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ base ortonormal de L^3 , quedan

$$\begin{aligned} E &= g_{11} = \langle \partial_\omega, \partial_\omega \rangle = -1, \\ F &= g_{12} = g_{21} = \langle \partial_\omega, \partial_t \rangle = 0, \\ G &= g_{22} = \langle \partial_t, \partial_t \rangle = 1. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Observación 235 *Según (4.8), ∂_ω es temporal y ∂_t es espacial.*

La matriz (g_{ij}) y su matriz inversa (g^{ij}) quedan expresadas:

$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

Por lo tanto, el elemento de arco ds^2 queda expresado como

$$ds^2 = -d\omega^2 + dt^2.$$

En los símbolos de Christoffel de $S_1^1 \times \mathbb{R}$ respecto del sistema de coordenadas ω, t , identificamos el índice 1 con ω y el índice 2 con t . Por (4.21) y (6.44), $\Gamma_{ij}^k = 0$, para todo i, j, k . Por (4.25) y (4.26), $K = 0$.

Si $p \in S_1^1 \times \mathbb{R}$, entonces $\{\partial_\omega(p), \partial_t(p)\}$ es una base ortogonal de $T_p(S_1^1 \times \mathbb{R})$. Los vectores unitarios $N(p)$ normales a $T_p(S_1^1 \times \mathbb{R})$ quedan determinados por

$$N(p) = \frac{\partial_\omega(p) \wedge \partial_t(p)}{\|\partial_\omega(p) \wedge \partial_t(p)\|},$$

donde el símbolo \wedge indica producto vectorial en L^3 .

Dado que

$$\partial_\omega \wedge \partial_t = (\sinh \omega, \cosh \omega, 0)$$

y

$$\|\partial_\omega(p) \wedge \partial_t(p)\| = 1,$$

el campo vectorial normal unitario $N : S_1^1 \times \mathbb{R} \rightarrow L^3$ está dado por

$$N = \frac{\partial_\omega \wedge \partial_t}{\|\partial_\omega \wedge \partial_t\|} = (\sinh \omega, \cosh \omega, 0). \quad (6.45)$$

Así definido, N es una aplicación diferenciable y satisface

$$\begin{aligned} \langle N, \partial_\omega \rangle &= \langle N, \partial_t \rangle = 0, \\ \langle N, N \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Las igualdades obtenidas en (6.46) son también válidas para $-N$.

Observación 236 Según (4.8), tanto N como $-N$ son espaciales.

Sea $\bar{\nabla}$ la conexión inducida de $S_1^1 \times \mathbb{R}$ y sea II la segunda forma fundamental definida según (4.37). Sea S el operador de forma de $S_1^1 \times \mathbb{R}$ respecto de N .

Para ω, t, r sistema de coordenadas de L^3 ,

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_\omega &= (r \cosh \omega, r \sinh \omega, 0), \\ \bar{\partial}_t &= (0, 0, 1), \\ \bar{\partial}_r &= (\sinh \omega, \cosh \omega, 0). \end{aligned}$$

De acuerdo a la Definición 110, $\bar{\partial}_\omega$, $\bar{\partial}_t$ y $\bar{\partial}_r$ son las extensiones a L^3 de los campos vectoriales ∂_ω , ∂_t y N , respectivamente.

En los símbolos de Christoffel identificamos el índice 1 con ω , 2 con t y 3 con r . Por (4.21), $\bar{\Gamma}_{13}^1 = \frac{1}{r}$ y $\bar{\Gamma}_{13}^2 = \bar{\Gamma}_{13}^3 = 0$ y $\bar{\Gamma}_{23}^k = 0$ para $k = 1, 2, 3$. Por (4.19),

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\omega} \bar{\partial}_r &= \frac{1}{r} \bar{\partial}_\omega, \\ \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\partial}_r &= 0. \end{aligned}$$

Por (4.41) y Definición 110

$$\begin{aligned} S(\partial_\omega) &= -\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\omega} \bar{\partial}_r /_{S_1^1 \times \mathbb{R}} = -\partial_\omega, \\ S(\partial_t) &= -\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\partial}_r /_{S_1^1 \times \mathbb{R}} = 0. \end{aligned}$$

En particular, por (4.40), (6.41) y (6.46)

$$\begin{aligned} II(\partial_\omega, \partial_\omega) &= N, \\ II(\partial_t, \partial_t) &= 0. \end{aligned}$$

Expresado matricialmente,

$$-\begin{pmatrix} \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\omega} N \\ \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\omega \\ \partial_t \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el campo vectorial curvatura media H está definido

$$H = -\frac{1}{2}N. \quad (6.47)$$

El operador de Laplace Δ para campos vectoriales en $S^1 \times \mathbb{R}$ está definido por

$$\Delta = -\bar{\nabla}_{\partial_\omega} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} + \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_t},$$

y por lo tanto,

$$\Delta H = -\bar{\nabla}_{\partial_\omega} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} H + \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_t} H.$$

Dado que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} H &= -\frac{1}{2} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} N = -\frac{1}{2} \partial_\omega, \\ \bar{\nabla}_{\partial_t} H &= -\frac{1}{2} \bar{\nabla}_{\partial_t} N = 0, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} H &= -\frac{1}{2} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} \partial_\omega = -\frac{1}{2} N \\ \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_t} H &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Delta H = \frac{1}{2} N = -H. \quad (6.48)$$

6.2.5. Operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de la superficie $H_0^1 \times \mathbb{R}$

Sea x_1, x_2, x_3 un sistema de coordenadas en L^3 tal que $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$, con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, forman una base ortonormal de L^3 .

La superficie producto $H_0^1 \times \mathbb{R}$ en L^3 es tal que

$$H_0^1 \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3) \in L^3 : -x_1^2 + x_2^2 = -1\}.$$

Análogamente al caso de H_0^2 , para $H_0^1 \times \mathbb{R}$ son necesarias dos parametrizaciones, considerando el signo (+) si $x_1 > 0$ y el signo (-) si $x_1 < 0$, es decir,

$$\begin{cases} x_1 = \pm \cosh \omega \\ x_2 = \sinh \omega \\ x_3 = t \end{cases} \quad (6.49)$$

donde $\omega, t \in \mathbb{R}$.

Observación 237 *Los vectores horizontales son los tangentes a $H_0^1 \times t_0$, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$; los verticales son los vectores tangentes, según corresponda, a $(\pm \cosh \omega_0, \sinh \omega_0) \times \mathbb{R}$, con $\omega_0 \in \mathbb{R}$.*

En adelante, notaremos $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_\omega = \frac{\partial}{\partial \omega}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.
En el caso de que $x_1 > 0$,

$$\begin{aligned}\partial_\omega &= \sinh \omega \partial_1 + \cosh \omega \partial_2, \\ \partial_t &= \partial_3.\end{aligned}\tag{6.50}$$

Al ser $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ una base ortonormal de L^3 , quedan

$$\begin{aligned}E &= g_{11} = \langle \partial_\omega, \partial_\omega \rangle = 1, \\ F &= g_{12} = g_{21} = \langle \partial_\omega, \partial_t \rangle = 0, \\ G &= g_{22} = \langle \partial_t, \partial_t \rangle = 1.\end{aligned}\tag{6.51}$$

Observación 238 Según (4.8), ∂_ω y ∂_t son espaciales.

La matriz (g_{ij}) y su matriz inversa (g^{ij}) quedan expresadas:

$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{6.52}$$

Por lo tanto, el elemento de arco ds^2 queda expresado como

$$ds^2 = d\omega^2 + dt^2.$$

Por (4.21) y (6.52), $\Gamma_{ij}^k = 0$, para todo i, j, k . Por (4.25) y (4.26), $K = 0$.

Si $p \in H_0^1 \times \mathbb{R}$, entonces $\{\partial_\omega(p), \partial_t(p)\}$ es una base ortogonal de $T_p(H_0^1 \times \mathbb{R})$. Los vectores unitarios $N(p)$ normales a $T_p(H_0^1 \times \mathbb{R})$ quedan determinados por

$$N(p) = \frac{\partial_\omega(p) \wedge \partial_t(p)}{\|\partial_\omega(p) \wedge \partial_t(p)\|},$$

donde el símbolo \wedge indica producto vectorial en L^3 .

Siendo

$$\partial_\omega \wedge \partial_t = (\cosh \omega, \sinh \omega, 0)$$

y

$$\|\partial_\omega(p) \wedge \partial_t(p)\| = 1,$$

el campo vectorial normal unitario $N : H_0^1 \times \mathbb{R} \rightarrow L^3$ es dado por

$$N = \frac{\partial_\omega \wedge \partial_t}{\|\partial_\omega \wedge \partial_t\|} = (\cosh \omega, \sinh \omega, 0).\tag{6.53}$$

Así definido, N satisface

$$\begin{aligned}\langle N, \partial_\omega \rangle &= \langle N, \partial_t \rangle = 0, \\ \langle N, N \rangle &= -1,\end{aligned}\tag{6.54}$$

y N es una aplicación diferenciable. Las mismas propiedades satisface $-N$.

Observación 239 Según (4.8), tanto N como $-N$ son temporales.

Sea $\bar{\nabla}$ la conexión inducida de $H_0^1 \times \mathbb{R}$ y sea II la segunda forma fundamental definida según (4.37). Sea S el operador de forma de $H_0^1 \times \mathbb{R}$ respecto de N .

Para ω, t, r sistema de coordenadas de L^3 ,

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_\omega &= (r \sinh \omega, r \cosh \omega, 0), \\ \bar{\partial}_t &= (0, 0, 1), \\ \bar{\partial}_r &= (\cosh \omega, \sinh \omega, 0).\end{aligned}$$

De acuerdo a la Definición 110, $\bar{\partial}_\omega$, $\bar{\partial}_t$ y $\bar{\partial}_r$ son las extensiones a L^3 de los campos vectoriales ∂_ω , ∂_t y N , respectivamente.

En los símbolos de Christoffel identificamos el índice 1 con ω , 2 con t y 3 con r . Por (4.21): $\bar{\Gamma}_{13}^1 = \frac{1}{r}$, $\bar{\Gamma}_{13}^2 = 0$, y $\bar{\Gamma}_{23}^k = 0$ para $k = 1, 2, 3$. Por (4.19),

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\omega} \bar{\partial}_r &= \frac{1}{r} \bar{\partial}_\omega, \\ \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\partial}_r &= 0.\end{aligned}$$

Por (4.41) y Definición 110,

$$\begin{aligned}S(\partial_\omega) &= -\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\omega} \bar{\partial}_r /_{H_0^1 \times \mathbb{R}} = -\partial_\omega, \\ S(\partial_t) &= -\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\omega} \bar{\partial}_r /_{H_0^1 \times \mathbb{R}} = 0.\end{aligned}$$

En particular, por (4.40), (6.52) y (6.54),

$$\begin{aligned}II(\partial_\omega, \partial_\omega) &= N \\ II(\partial_t, \partial_t) &= 0.\end{aligned}$$

Expresado matricialmente,

$$-\begin{pmatrix} \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\omega} N \\ \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\omega \\ \partial_t \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, el campo vectorial curvatura media H está definido

$$H = -\frac{1}{2}N. \quad (6.55)$$

El operador de Laplace Δ para campos vectoriales en $H_0^1 \times \mathbb{R}$ está definido por

$$\Delta = \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\omega} \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\omega} + \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}$$

y por lo tanto,

$$\Delta H = \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\omega} \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\omega} H + \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} H.$$

Dado que

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\partial_\omega} H &= -\frac{1}{2}\bar{\nabla}_{\partial_\omega} N = -\frac{1}{2}\partial_\omega, \\ \bar{\nabla}_{\partial_t} H &= \frac{1}{2}\bar{\nabla}_{\partial_t} N = 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\partial_\omega}\bar{\nabla}_{\partial_\omega} H &= -\frac{1}{2}\bar{\nabla}_{\partial_\omega}\partial_\omega = -\frac{1}{2}N, \\ \bar{\nabla}_{\partial_t}\bar{\nabla}_{\partial_t} H &= \frac{1}{2}\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Delta H = -\frac{1}{2}N = H. \quad (6.56)$$

Análogamente, si $x_1 < 0$,

$$H = -\frac{1}{2}N \quad (6.57)$$

y

$$\Delta H = -\frac{1}{2}N = H. \quad (6.58)$$

6.2.6. Operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de la superficie $L \times S^1$

Sea x_1, x_2, x_3 un sistema de coordenadas en L^3 tal que $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$, con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, forman una base ortonormal de L^3 .

La superficie producto $L \times S^1$ en L^3 es una superficie producto deformada $L \times_{-i} S^1$, donde i representa la función identidad.

Una parametrización de esta superficie es dada por

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \cos \theta \\ x_3 = \sin \theta \end{cases} \quad (6.59)$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $0 < \theta < 2\pi$.

Observación 240 En este producto, los vectores horizontales son aquellos tangentes a $L \times (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ y los verticales son los vectores tangentes a $t_0 \times S^1$.

En adelante, notaremos $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

De la parametrización escogida, se tiene que

$$\begin{aligned}\partial_t &= \partial_1, \\ \partial_\theta &= -\sin \theta \partial_2 + \cos \theta \partial_3.\end{aligned} \quad (6.60)$$

Al ser $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ una base ortonormal de L^3 , quedan

$$\begin{aligned} E = g_{11} &= \langle \partial_t, \partial_t \rangle = -1, \\ F = g_{12} = g_{21} &= \langle \partial_\theta, \partial_t \rangle = 0, \\ G = g_{22} &= \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle = 1. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Observación 241 ∂_t es temporal y ∂_θ es espacial.

La matriz (g_{ij}) y su matriz inversa (g^{ij}) quedan expresadas:

$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (6.62)$$

por lo tanto, el elemento de arco ds^2 queda expresado como

$$ds^2 = -dt^2 + d\theta^2.$$

Por (4.21) y (6.62), $\Gamma_{ij}^k = 0$, para todo i, j, k . Por (4.25) y (4.26), $K = 0$.

Si $p \in L \times S^1$, entonces $\{\partial_\omega(p), \partial_t(p)\}$ es una base ortogonal de $T_p(L \times S^1)$. Los vectores unitarios $N(p)$ normales a $T_p(L \times S^1)$ quedan determinados por

$$N(p) = \frac{\partial_t(p) \wedge \partial_\theta(p)}{\|\partial_t(p) \wedge \partial_\theta(p)\|},$$

donde el símbolo \wedge indica producto vectorial en L^3 .

El campo vectorial normal unitario $N : L \times S^1 \rightarrow L^3$ está dado por

$$N = \frac{\partial_t \wedge \partial_\theta}{\|\partial_t \wedge \partial_\theta\|} = (0, \cos \theta, \sin \theta). \quad (6.63)$$

Así definido, N es una aplicación diferenciable y satisface

$$\begin{aligned} \langle N, \partial_\theta \rangle &= \langle N, \partial_t \rangle = 0, \\ \langle N, N \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Las mismas propiedades satisface $-N$.

Observación 242 Según (4.8) y (6.64), tanto N como $-N$ son espaciales.

Sea $\bar{\nabla}$ la conexión inducida de $L \times S^1$ y sea II la segunda forma fundamental definida según (4.37). Sea S el operador de forma de $L \times S^1$ respecto de N .

Para t, θ, r sistema de coordenadas de L^3 ,

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_t &= (1, 0, 0), \\ \bar{\partial}_\theta &= (0, -r \sin \theta, r \cos \theta), \\ \bar{\partial}_r &= (0, \cos \theta, \sin \theta). \end{aligned}$$

De acuerdo a la Definición 110, $\bar{\partial}_t$, $\bar{\partial}_\theta$ y $\bar{\partial}_r$ son las extensiones a L^3 de los campos vectoriales ∂_t , ∂_θ y N , respectivamente.

En los símbolos de Christoffel identificamos el índice 1 con t , 2 con θ y 3 con r . Por (4.21), $\bar{\Gamma}_{23}^2 = \frac{1}{r}$ y $\bar{\Gamma}_{23}^1 = 0$ y $\bar{\Gamma}_{13}^k = 0$ para $k = 1, 2, 3$. Por (4.19),

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}\bar{\partial}_r &= 0, \\ \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\theta}\bar{\partial}_r &= \frac{1}{r}\bar{\partial}_\theta.\end{aligned}$$

Por (4.41) y Definición 110,

$$\begin{aligned}S(\partial_\theta) &= -\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\theta}\bar{\partial}_r/L \times S^1 = -\partial_\theta, \\ S(\partial_t) &= -\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}\bar{\partial}_r/L \times S^1 = 0.\end{aligned}$$

En particular, por (4.40), (6.62) y (6.64),

$$\begin{aligned}II(\partial_t, \partial_t) &= 0, \\ II(\partial_\theta, \partial_\theta) &= -N.\end{aligned}$$

Expresado matricialmente,

$$-\begin{pmatrix} \bar{\nabla}_{\partial_t}N \\ \bar{\nabla}_{\partial_\theta}N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_\theta \end{pmatrix},$$

y por lo tanto, el campo vectorial curvatura media H está definido

$$H = -\frac{1}{2}N. \quad (6.65)$$

El operador de Laplace Δ para campos vectoriales en $L \times S^1$ está definido por

$$\Delta = -\bar{\nabla}_{\partial_t}\bar{\nabla}_{\partial_t} + \bar{\nabla}_{\partial_\theta}\bar{\nabla}_{\partial_\theta}$$

y por lo tanto,

$$\Delta H = -\bar{\nabla}_{\partial_t}\bar{\nabla}_{\partial_t}H + \bar{\nabla}_{\partial_\theta}\bar{\nabla}_{\partial_\theta}H.$$

Dado que

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\partial_t}H &= \frac{1}{2}\bar{\nabla}_{\partial_t}N = 0, \\ \bar{\nabla}_{\partial_\theta}H &= \frac{1}{2}\bar{\nabla}_{\partial_\theta}N = -\frac{1}{2}\partial_\theta,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\partial_\theta}\bar{\nabla}_{\partial_\theta}H &= 0, \\ \bar{\nabla}_{\partial_\theta}\bar{\nabla}_{\partial_\theta}H &= -\frac{1}{2}\bar{\nabla}_{\partial_\theta}(\partial_\theta) = \frac{1}{2}N.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Delta H = \frac{1}{2}N = -H. \quad (6.66)$$

6.2.7. Operador laplaciano del campo vectorial curvatura media de la superficie L^2

Sea x_1, x_2, x_3 un sistema de coordenadas en L^3 tal que $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ forman una base ortonormal de L^3 , con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Una parametrización del plano L^2 en coordenadas r, t es dada por:

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (6.67)$$

donde $r, t \in \mathbb{R}$.

En adelante, notaremos $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Por (6.67),

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \partial_r \\ \partial_2 &= \partial_t \end{aligned}$$

Además, al ser $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ una base ortonormal de L^3 , quedan

$$E = -1; \quad F = 0; \quad G = 1. \quad (6.68)$$

Observación 243 Según (6.68) y (4.8), ∂_r es temporal y ∂_t es espacial.

Por los cálculos realizados en (6.68), las matrices (g_{ij}) y (g^{ij}) son:

$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

El elemento de arco ds^2 queda expresado como

$$ds^2 = -dr^2 + dt^2.$$

Por (4.21) y (6.69), $\Gamma_{ij}^k = 0$ para todo i, j, k . Por (4.25) y (4.26), $K = 0$.

Análogamente a las superficies analizadas anteriormente, encontramos el campo vectorial normal unitario N :

$$N = \partial_3. \quad (6.70)$$

Así definido, N es una aplicación diferenciable y satisface:

$$\begin{aligned} \langle N, \partial_r \rangle &= \langle N, \partial_t \rangle = 0, \\ \langle N, N \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Las mismas propiedades satisface $-N$.

Observación 244 Por (6.70) y (4.8), tanto N como $-N$ son espaciales.

Sea $\bar{\nabla}$ la conexión inducida de L^2 y sea H la segunda forma fundamental definida según (4.37). Sea S el operador de forma de L^2 respecto de N . Entonces nos queda que

$$S(\partial_r) = S(\partial_t) = 0.$$

El campo vectorial curvatura media H está dado por

$$H = 0 \tag{6.71}$$

y el laplaciano en L^2 de H es

$$\Delta H = 0. \tag{6.72}$$

6.2.8. Comentarios sobre superficies de L^3 y los resultados del operador Δ aplicado a sus campos vectoriales curvatura media

De acuerdo a la Definición 116, las superficies S_1^2 , $S_1^1 \times \mathbb{R}$, $L \times S^1$ y L^2 tienen signo $\varepsilon = 1$, mientras que las superficies H_0^2 y $H_0^1 \times \mathbb{R}$ tienen signo $\varepsilon = -1$.

En el cilindro $S_1^1 \times \mathbb{R}$, el operador de forma aplicado a los vectores verticales, es decir, tangentes a las fibras $(\sinh \omega, \cosh \omega) \times \mathbb{R}$, es igual a cero. En el cilindro $H_0^1 \times \mathbb{R}$ se obtienen resultados análogos. Pero en el cilindro $L \times S^1$, el operador de forma aplicado a los vectores horizontales, es decir, tangentes a los levantados, es igual a cero.

Otro punto a destacar es que todos los cilindros estudiados tienen campo vectorial curvatura media $H = -\frac{1}{2}N$.

Las superficies S_1^2 y H_0^2 tienen campo vectorial curvatura media $H = -N$, donde N es el respectivo vector posición.

Los cilindros satisfacen la igualdad $\Delta H = -\varepsilon H$, donde ε es el signo de cada superficie, respectivamente. Así, para estas superficies ΔH es un campo vectorial normal.

Es interesante observar que la componente normal en las expresiones de ΔH de las superficies S_1^2 y H_0^2 es igual a $(-2\varepsilon)H$, donde ε es el signo respectivo de las superficies.

A partir del ΔH obtenido en el caso de la superficie S_1^2 , no queda más que remarcar la diferencia, ya conocida, entre un helicoides y una pseudoesfera S_1^2 . Si bien, muchas veces, pensamos y/o graficamos a estas superficies como si fueran iguales, no lo son: el helicoides es una superficie minimal y S_1^2 no lo es.

Con los cálculos precedentes, se verifica que los tres cilindros ya mencionados son superficies minimales.

Como era de esperar, en el caso del plano L^2 , $\Delta H = 0$.

6.3. Operador d'alembertiano

A continuación mostramos algunas relaciones entre el laplaciano y el operador d'alembertiano aplicados a campos vectoriales en espacios \mathbb{R}_V^n .

6.3.1. Operador d'alembertiano de campos vectoriales sobre hipersuperficies de L^{n+1}

Definición 245 Sea \mathbb{R}^n el espacio euclideo. Sean u_1, \dots, u_n las coordenadas naturales de \mathbb{R}^n . El operador diferencial

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} \quad (6.73)$$

es llamado el d'alembertiano de \mathbb{R}^n y se aplica a funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, donde $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones C^∞ a valores reales definidas en \mathbb{R}^n .

El operador d'alembertiano puede aplicarse a funciones definidas sobre una variedad diferenciable.

Definición 246 Sean (M, \mathbf{g}) una variedad riemanniana, $\mathcal{U} \subset M$ un abierto y x_1, \dots, x_n un sistema local ortogonal de coordenadas en \mathcal{U} . Para cada $p \in \mathcal{U}$, $g_{ij}(p) = \mathbf{g}_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ y $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$. Entonces queda definido, y es independiente de la elección del sistema local ortogonal de coordenadas, el operador diferencial, el cual se aplica a funciones $\mathcal{F}(M)$,

$$\square = -g^{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \sum_{i=2}^n g^{ii} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (6.74)$$

Es inmediato notar que si $M = \mathbb{R}^n$, entonces \square de (6.74) es el operador d'alembertiano definido en (6.73).

Observación 247 Para el sistema de coordenadas u_1, \dots, u_n de \mathbb{R}_v^n el D'Alembertiano $\square f$ de una función $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_v^n)$ es

$$\square f = -\varepsilon_1 \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}, \quad (6.75)$$

$$\text{donde } \varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq i \leq v, \\ +1 & \text{si } v+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

En adelante, notaremos a los operadores laplaciano y d'alembertiano en \mathbb{R}_v^n con los símbolos Δ_v^n y \square_v^n , respectivamente.

Proposición 248 Bajo las condiciones de la Observación 247, si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}(\mathbb{R}_1^n)$ entonces $\Delta_1^n f = \square_0^n f$ y $\Delta_0^n f = \square_1^n f$.

Demostración.

Por (6.73), $\square_0^n f = -\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}$, y por Observación 224, $\Delta_1^n f = -\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}$.

Por lo tanto, $\Delta_1^n f = \square_0^n f$ para toda $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}(\mathbb{R}_1^n)$.

Análogamente,

$$\square_1^n f = - \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} \right) + \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} = \Delta_0^n f,$$

para toda $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}(\mathbb{R}_1^n)$. ■

Nos interesa extender, en principio, la definición del operador d'alembertiano de campos vectoriales sobre hipersuperficies lorentzianas de L^{n+1} .

Para eso, consideraremos L^{n+1} con el sistema de coordenadas u_1, \dots, u_n y $E_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$ con $i = 1, \dots, n+1$.

Sean M una hipersuperficie n -dimensional de L^{n+1} y, para cada $p \in M$, sean $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ una base ortonormal de $T_p(M)$ y $N(p) = E_{n+1}(p)$ el vector unitario normal a $T_p(M)$.

Como antes, se notan $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, y $\bar{\nabla}$ a la conexión inducida de $M \subset L^{n+1}$.

Definición 249 *Bajo las condiciones anteriores, el operador d'alembertiano de campos vectoriales queda definido por*

$$\square = -\varepsilon_1 \bar{\nabla}_{E_1} \bar{\nabla}_{E_1} + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i}. \quad (6.76)$$

Sea $X \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$, entonces $\bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} X = \sum_{j=1}^{n+1} X_{ij} E_j$. El laplaciano Δ aplicado a X está definido por

$$\Delta X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sum_{j=1}^{n+1} X_{ij} E_j = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sum_{j=1}^{n+1} \langle \Delta X, E_j \rangle E_j. \quad (6.77)$$

Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle_L = h \langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que

$$h_{ii} = \begin{cases} -\varepsilon_1 & \text{si } i = 1, \\ \varepsilon_i & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (6.78)$$

Entonces,

$$\square X = -\varepsilon_1 \langle \Delta X, E_1 \rangle E_1 + \sum_{j=2}^{n+1} \varepsilon_j \langle \Delta X, E_j \rangle E_j = \sum_{j=1}^{n+1} h_{jj} \langle \Delta X, E_j \rangle E_j. \quad (6.79)$$

Teorema 250 *Dado \mathbb{R}_1^{n+1} con el sistema de coordenadas u_1, \dots, u_n y $E_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$, con $i = 1, \dots, n+1$, sean M una hipersuperficie n -dimensional de \mathbb{R}_1^{n+1} y, para cada $p \in M$, $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ una base ortonormal de $T_p(M)$ y $N(p) = E_{n+1}(p)$ el vector unitario normal a $T_p(M)$. Entonces, los operadores d'alembertiano \square y laplaciano Δ aplicados a campos vectoriales quedan relacionados por*

$$\square = \sum_{j=1}^{n+1} \langle \Delta, E_j \rangle_L E_j \quad (6.80)$$

y

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n+1} \langle \square, E_j \rangle_L E_j, \quad (6.81)$$

donde $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, $\bar{\nabla}$ es la conexión inducida de $M \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ y el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ está caracterizado por (6.78).

Corolario 251 Si $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ es una base ortogonal de $T_p(M)$ y $g_{ii} = \langle E_i, E_i \rangle$, $i = 1, \dots, n+1$, entonces

$$\square = \sum_{j=1}^{n+1} \langle \Delta, E_j \rangle_L E_j \quad (6.82)$$

y

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n+1} \langle \square, E_j \rangle_L E_j, \quad (6.83)$$

donde $(g^{jj}) = (g_{jj})^{-1}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ está caracterizado por

$$h_{jj} = \begin{cases} -g^{11} & \text{si } j = 1, \\ g^{jj} & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (6.84)$$

Demostración.

Se sigue de la igualdad $g^{jj} = \varepsilon_j \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}^2$, donde a_{ij} es la j -ésima coordenada de E_i . ■

Deseamos obtener $\square H$ para las superficies S_1^2 , H_0^2 , $S_1^1 \times R$, $H^1 \times R$, $L \times S^1$ y L^2 . Los campos vectoriales curvatura media H ya son conocidos por (6.30), (6.37), (6.47), (6.55), (6.57), (6.65) y (6.71).

1) Para H aplicado a S_1^2 , por (6.27) y (6.29) se obtiene:

$$h_{jj} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq 2, \\ \frac{1}{\cosh^2 \omega} & \text{si } j = 2. \end{cases} \quad (6.85)$$

Reemplazando (6.31) y (6.85) en (6.82),

$$\square H = \tanh \omega \partial_\omega - 2H. \quad (6.86)$$

2) Para H aplicado a H_0^2 , por (6.35) y (6.36), se obtiene:

$$h_{jj} = \begin{cases} -1 & \text{si } j \neq 2, \\ \frac{1}{\sinh^2 \omega} & \text{si } j = 2. \end{cases} \quad (6.87)$$

Reemplazando (6.40) y (6.87) en (6.82),

$$\square H = -\coth \omega \partial_\omega + 2H. \quad (6.88)$$

3) Para H aplicado a $S_1^1 \times R$, por (6.44) y (6.46), se obtiene:

$$h_{jj} = 1, \text{ para todo } j. \quad (6.89)$$

Reemplazando (6.48) y (6.89) en (6.82),

$$\square H = -H. \quad (6.90)$$

4) Para H aplicado a $H_0^1 \times R$, por (6.52) y (6.54), se obtiene:

$$h_{jj} = \begin{cases} -1 & \text{si } j \neq 2, \\ 1 & \text{si } j = 2. \end{cases} \quad (6.91)$$

Reemplazando (6.56), (6.58) y (6.91) en (6.82),

$$\square H = H. \quad (6.92)$$

5) Para H aplicado a $L \times S^1$, por (6.62) y (6.64), se obtiene:

$$h_{jj} = 1, \text{ para todo } j. \quad (6.93)$$

Reemplazando (6.66) y (6.93) en (6.82),

$$\square H = -H. \quad (6.94)$$

6) Para H aplicado a L^2 , se tiene que

$$h_{jj} = 1, \text{ para todo } j. \quad (6.95)$$

Reemplazando (6.72) en (6.82), se obtiene

$$\square H = 0. \quad (6.96)$$

6.3.2. Cuadro comparativo de los operadores Δ y \square aplicados al campo vectorial curvatura media en superficies de L^3

Superficie	ds^2	$[S]$	H	ΔH	$\square H$
S_1^2	$-dw^2 + \cosh w d\theta^2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$-N$	$-\tanh w \partial_w - 2H$	$\tanh w \partial_w - 2H$
H_0^2	$dw^2 + \sinh w d\theta^2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$-N$	$\coth w \partial_w + 2H$	$-\coth w \partial_w + 2H$
$S_1^1 \times R$	$-dw^2 + dt^2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}N$	$-H$	$-H$
$H_0^1 \times R$	$dw^2 + dt^2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}N$	H	H
$L \times S^1$	$-dt^2 + d\theta^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}N$	$-H$	$-H$
L^2	$-dr^2 + dt^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0	0	0

Bibliografía

- [1] Alexandrov, V., *Flexible polyhedra in Minkowski 3-space*, Manuscripta Math. 111 (2003), 341–356.
- [2] Auslander, L. and Mackenzie, R.E., *Introduction to Differentiable Manifolds*, Dover, New York, 1977. [17](#)
- [3] Banchoff, Thomas F., *Total central curvature of curves*, Duke Math. J. (1969), 281–289. [54](#), [66](#)
- [4] Barreiro Chaves, R. M., Bianconi, R. & Langevin, R., *Formulas of Cauchy and Crofton in Lorentz–Minkowski and de Sitter spaces*, Math. Notae, 41 (2001/02), 99–113. [1](#)
- [5] Been, J.K., Ehrlich, P.E., and Easley, K.L. *Global Lorentzian Geometry*, second edition, Marcel Dekker, New York, 1996. [14](#), [19](#), [28](#), [49](#), [51](#), [52](#)
- [6] Birman, G.S., *Crofton’s and Poincaré’s formulas in the Lorentzian plane*, Geom. Dedicata, 15, no. 4, (1984), 399–411.
- [7] Birman, Graciela S., *On L^2 and L^3* , Elemente der Mathematik, 43 (1988), 46–50. [13](#), [49](#), [93](#)
- [8] Birman, Graciela S., *L^3 : the geometry of pseudoquaternions*, Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, 5, nro. 2, (1998). [13](#), [14](#), [29](#)
- [9] Birman, G., *Total absolute curvature of curves in Lorentz manifolds*, Revista Colombiana de Matemáticas, 27, nros. 1–2 (1993), 9–13.
- [10] Birman, G., *Support function and integral formulas in the Lorentzian plane*, J. Geom., 72 (2001), 11–17.
- [11] Birman, G. and Desideri, G., *Null Frénet’s frames and null Frénet’s curves in Lorentzian spaces of zero curvature*, Far East J. Math. Sci. (FJMS) 3, no. 6 (2001), 1007–1013.
- [12] Birman, G.S. and Desideri, G.M., *Laplacian on mean curvature vector fields for some non-lightlike surfaces in the 3-dimensional Lorentzian space*, Actas del VII Congreso “Dr. Antonio A. R. Monteiro” (2003), 27–33. [21](#)

- [13] Birman, G.S. and Desideri, G.M., *Projections of pseudosphere in the Lorentz 3-space*. Bull. Korean Math. Soc., 44 (2007), 483–492. [18](#)
- [14] Birman, G., Nomizu, K., *Trigonometry in Lorentzian geometry*, Amer. Math. Monthly, 91 (1984), no. 9, 543–549. [2](#), [3](#), [4](#), [5](#), [10](#)
- [15] Bonnor, W., *Null curves in Minkowski space-time*. Tensor (N.S.) 20 (1969), 229–242. [30](#), [94](#)
- [16] Cartan, E., *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*, Paris, 1951, Ch. 3.
- [17] Chen, Bang-yen. *Geometry of submanifolds*, Marcel Dekker, New York, 1973. [45](#), [46](#), [47](#)
- [18] Coxeter, H.S.M., *Introduction to Geometry*, second edition, John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [19] Desideri, G.M., *On polygons in Lorentzian plane*, C. R. Acad. Bulgare Sci., 60 (2007), no. 10, 1039–1046. [4](#), [9](#)
- [20] Desideri, G.M., *Total central curvature of curves in the 3-dimensional Lorentzian space*, Actas del VIII Congreso Monteiro (2005), 39–48. [52](#)
- [21] Desideri, G., *Angles in the Lorentzian circle*, C. R. Acad. Bulgare Sci., 60 (2007), no. 4, 349–356. [4](#)
- [22] Desideri, G.M., *Curvature via the de Sitter's space-time*. Sarajevo J. Math. 7(19) (2011), no. 1, 91–101.
- [23] Enomoto, K., *The total absolute curvature of nonclosed plane curves of fixed length*, Yokohama Math. J., 48 (2000), 83–96. [58](#)
- [24] Fary, I., *Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un nœud*, Bull. Soc. Math. France 77 (1949), 128–138.
- [25] Frauendiener, J., *Conformal infinity*, Living Rev. Relativ., 3 (2000), 2000-4. [Artículo en línea], <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2000-4/>. [17](#)
- [26] Graves, L.K., *Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces*. Trans. Amer. Math. Soc., 252 (1979), 367–392. [94](#)
- [27] Hawking, S.W. and Ellis, G.F.R., *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, London, 1973.
- [28] Helgason, Sigurdur, *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

- [29] Izumiya, Shyuichi and Takiyama, Akihiro, *A time-like surface in Minkowski 3-space which contains pseudocircles*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 40 (1997), no. 1, 127–136. [15](#)
- [30] Izumiya, Shyuichi and Takiyama, Akihiro, *A time-like surface in Minkowski 3-space which contains light-like lines*, J. Geom. 64 (1999), no. 1-2, 95–101. [15](#), [17](#)
- [31] Kay, D.C., *College geometry*. Holt, Rinehart and Winston, 1969. [54](#)
- [32] Kelley, J.L., *Topología general*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1962. [18](#)
- [33] Kobayashi, S. & Nomizu, K., *Foundations of differential geometry*. Vol. I, John Wiley & Sons, New York, 1963. [30](#)
- [34] Kupeli, Demir N., *The method of separation of variables for Laplace-Beltrami equation in semi-Riemannian geometry*. New developments in differential geometry (Debrecen, 1994), 279–290, Math. Appl., 350, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [35] Markushevich, A., *Teoría de las funciones analíticas*, Tomo I. Mir, 1978. [54](#)
- [36] Milnor J. W., *On the total curvature of knots*, Ann. of Math. (2), 52 (1950), 248–257. [54](#), [59](#), [60](#)
- [37] Muñoz Masqué, J. and Rodríguez Sánchez, G., *Frénet theorem for spaces of constant curvature*. Geometry from the Pacific Rim (Singapore, 1994), 253–259, de Gruyter, Berlin, 1997. [30](#)
- [38] Nešović, E., Petrović-Torgašev, M., Verstraelen, L., *Curves in Lorentzian spaces*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8), 8 (2005), no. 3, 685–696.
- [39] Nölker, Stefan, *Isometric immersions of warped products*, Differential Geom. Appl., 6 (1996), no. 1, 1–30.
- [40] Ogiue, Koichi and Takagi, Ryoichi, *A submanifold which contains many extrinsic circles*, Tsukuba J. Math., 8 (1984), 171–182. [15](#)
- [41] O'Neill, Barrett, *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, New York, 1983. [2](#), [3](#), [4](#), [11](#), [15](#), [16](#), [19](#), [30](#), [35](#), [36](#), [37](#), [38](#), [39](#), [40](#), [41](#), [42](#), [43](#), [44](#), [46](#), [48](#), [49](#), [52](#), [88](#), [89](#)
- [42] Palomo, F.J. & Romero, A., *Certain actual topics on modern Lorentzian geometry*. Handbook of differential geometry. Vol. 2, 513–546, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006.
- [43] Penrose, R., *Structure of space-time*, Battelle Rencontres, 1967 Lectures in Mathematics and Physics. Edited by Cecile M. DeWitt and John A. Wheeler. W.A. Benjamin, New York, 1968. [17](#)

- [44] Penrose, R. and Rindler, W., *Spinors and space-time*. Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. [17](#)
- [45] Penrose, R., *Techniques of differential topology in relativity*, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 7. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1972. [49](#)
- [46] Ramanathan, Jayakumar, *Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter space*, Indiana Univ. Math. J., 36 (1987), no. 2, 349–359.
- [47] Santaló, L.A., *Integral geometry and geometric probability*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 1. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1976. [54](#), [55](#), [56](#), [57](#), [66](#)
- [48] Simmons, G.F., *Introduction to topology and modern analysis*. McGraw-Hill, New York, 1963. [54](#)
- [49] Struik, Dirk J. *Lectures on classical differential geometry*, second edition, Dover, New York, 1961. [16](#), [21](#)
- [50] Takeuchi, Nobuko, *A sphere as a surface which contains many circles*, J. Geom., 24 (1985), 123–130. [15](#)
- [51] Takeuchi, Nobuko, *A sphere as a surface which contains many circles II*, J. Geom., 34 (1989), 195–200. [15](#), [16](#)
- [52] van Rooij, A.C.M., *The total curvature of curves*, Duke Math. J., 32 (1965), 313–324. [54](#), [64](#), [65](#)
- [53] Yaglom, I.M., *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [54] Wallace, A., *Differential topology: first steps*, W. A. Benjamin, New York, 1968. [17](#)
- [55] Wald, R.M., *General relativity*, Chicago University Press, Chicago, 1984.
- [56] Warner, F., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Scott, Foresman and Co., Illinois, 1971. [87](#)
- [57] Wallach, Nolan R., *Minimal immersions of symmetric spaces into spheres*, Symmetric Spaces, Short courses at Washington University, Dekker, N.Y. 1972, 1–40. [86](#), [87](#)
- [58] Weinstein, Tilla, *An introduction to Lorentz surfaces*, de Gruyter, Berlin, 1996.