NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

15

ANTONIO MONTEIRO

Construction des Algèbres de Nelson finies

1964
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

Nº 15

CONSTRUCTION DES ALGEBRES DE NELSON FINIES

par

Antonio Monteiro

1964
Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca

El trabajo que se reproduce en este número ha sido publicado en Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, 11(1963), pp. 359-362.

Le travail reproduit dans ce numéro a été publié dans le Bulletin de l'Académie Polonaise des Scien[illegible] 1[illegible](1963), pp. 359-362.

CONSTRUCTION DES ALGEBRES DE NELSON FINIES

par

ANTONIO MONTEIRO

1 - INTRODUCTION. Soit $\mathfrak{A}=(A, 1, \wedge, \vee, -, \rightarrow, \neg)$ une algèbre de Nelson, c'est-à-dire un N-Lattice au sens de Helena Rasiowa (1958). Nous nous proposons d'indiquer une méthode de construction des algèbres de Nelson finies. Nous dirons que dans un réticulé il existe l'implication intuitioniste des éléments a et b, s'il existe un élément $c = a \Rightarrow b$ ayant les propriétés suivantes:

1) $a \wedge c \leq b$, 2) Si x est tel que $a \wedge x \leq b$ alors $x \leq c$.

On voit de suite que si l'élément $a \Rightarrow b$ existe il est univoquement determiné.

THEOREME 1. <u>Dans une algèbre de Nelson il existe toujours l'élément $a \Rightarrow (-a \vee b)$ et en outre $a \rightarrow b = a \Rightarrow (-a \vee b)$</u>.

De ce théorème il résulte que dans une algèbre de Nelson finie il suffit de connaître la table de la négation forte (-) pour construire la table de l'opération $\rightarrow$, car un réticulé distributif fini étant une algèbre de

Heyting l'élément $a \Rightarrow b$ existe pour tout couple a,b. Nous sommes donc conduits a fixer notre atention sur les propriétés de la négation forte dans les algèbres de Nelson finies. Un des axiomes des algèbres de Nelson, d'après la définition de Rasiowa, est le suivant:

A est une algèbre de Morgan, c'est-à- dire $(A, 1, \wedge, \vee, -)$ est un réticulé distributif ayant 1 pour dernier élément et l'opération $-$ verifie les axiomes suivants:

N1) $--a = a$; N2) $-(a \wedge b) = -a \vee -b$.

Rasiowa (1958) a demontré que dans une algèbre de Nelson on a toujours:

N3) $a \wedge -a \leq b \vee -b$.

Si une algèbre de Morgan vérifie la condition N3) nous dirons qu'elle est <u>linéaire</u> ou <u>normale</u> (Kalman (J.A.), 1958).

THEOREME 2. <u>Si $(A, 1, \wedge, \vee, -)$ est une algèbre de Morgan linéaire dans laquelle pour chaque couple ordonné (a,b) il existe l'implication intuitioniste $a \Rightarrow (-a \vee b)$ et si nous posons par définition:</u>

$$a \to b = a \Rightarrow (-a \vee b) \quad ; \quad \neg a = a \to o = a \Rightarrow -a$$

<u>alors les axiomes (1) - (9) et l'axiome (11), de la définition de Rasiowa (1958) pour les algèbres de Nelson, sont vérifiés,</u>

Pour que $\mathcal{A}$ soit une algèbre de Nelson par rapport aux opérations $\to$ et $\neg$, que nous venons de définir, il faut et il suffit que l'axiome suivant soit vérifie:

<u>Axiome (10)</u> <u>La condition $(a \wedge b) \to c = 1$ est équivalent à $a \to (b \to c) = 1$</u> (Rasiowa-1958).

On peut démontrer que dans le cas actuel la seconde condition entraîne toujours la première, et nous sommes ainsi conduits à étudier les algèbres de Morgan linéaires indiquées dans le théorème 2 que vérifient la propriété

N4) Si $(a \wedge b) \to c = 1$ alors $a \to (b \to c) = 1$
où $x \to y = x \Rightarrow (-x \vee y)$.

2. CONSTRUCTION DES ALGEBRES DE NELSON FINIES. Un élément p d'un réticulé distributif A sera dit premier (ou irreductible) si:

P1) $p \neq o$; P2) Si $p = a \vee b$ alors ou $p = a$ ou $p = b$.

Soit A un réticulé distributif fini et Π la famille de tous ses éléments premiers. Si nous ordonnons Π par l'ordre naturel de A, alors il bien connu que l'ensemble <u>ordonné</u> Π détermine A à moins d'un isomorfisme (Garret-Birkhoff-1937).

Si A est une algèbre de Morgan finie il ne suffit pas de connaître Π pour déterminer A, car sur un même réticulé distributif fini il peuvent exister deux opérations distinctes — qui vérifient les conditions N1) et N2).

Pour completer l'information sur Π considérons la construction suivante introduite par Bialynicki-Birula et Rasiowa (1957). Si P est un filtre premier d'une algèbre de Morgan alors $I(P) = \complement \sim P$ est aussi un filtre premier. Si A est finie nous pouvons identifier les filtres premiers avec les éléments irreductibles de A et alors I est une transformation de Π sur Π ayant les propriétés suivantes:

I1) I est un anti-isomorphisme de Π sur Π.

I2) $I(I(p)) = p$ pour tout $p \in \Pi$.

Réciproquement on peut démontrer (A.Monteiro-1960) qu'une algèbre de Morgan finie A est déterminée, à moins d'un isomorphisme, par le couple (Π, I) formé par l'ensemble ordonné Π de tous les éléments premiers de A et par la transformation I définie sur Π ayant les propriétes I1) et I2). Nous dirons que (Π, I) est le <u>système determinant</u> de l'algèbre A. Étant donné (Π, I) on peut reconstruire le réticulé distributif A à partir de Π (voir Birkhoff-1937). L'élément -x peut être défini comme le borne supérieure de tous les éléments $p \in \Pi$ tels que $I(p) \not\leq x$.

De ces résultats on déduit que les seuls réticulés distributifs finis A sur lesquels on peut définir une négation -- ayant les propriétés N1) et N2) sont ceux dans lesquels l'ensemble ordonné Π de tous les éléments premiers de A admet une transformation I ayant les propriétés I1) et I2).

Pour que A en outre soit linéaire il faut (Bialynicki-Birula et Rasiowa-1958) et il suffit que I vérifie la condition suivante:

I3) <u>Pour chaque $p \in \Pi$ on a: soit $p \leq I(p)$ soit $I(p) \leq p$</u>.

Il nous reste donc à étudier la propriété N4) que n'est pas toujours vérifiée dans une algèbre de Morgan linéaire.

THEOREME 3. Soit $(A, 1, \wedge, \vee, -)$ une algèbre de Morgan linéaire dans laquelle pour chaque couple ordonné (a, b) il existe l'implication intuitioniste $a \Rightarrow (-a \vee b)$, alors, en posant $a \rightarrow b = a \Rightarrow (-a \vee b)$, les conditions suivantes sont équivalentes:

N4) Si $(a \wedge b) \rightarrow c = 1$ alors $a \rightarrow (b \rightarrow c) = 1$

N4') Si $(a \wedge b) \rightarrow o = 1$ alors $a \rightarrow (b \rightarrow o) = 1$

I4) L'involution I a la propriété interpolatoire, c'est-à-dire: si P' et P'' sont deux filtres premiers tels que: 1) $P' \subseteq I(P')$; 2) $P' \subseteq I(P'')$; 3) $P'' \subseteq I(P')$; 4) $P'' \subseteq I(P'')$ alors il existe un filtre premier Q tel que: $P' \subseteq Q$; $P'' \subseteq Q$; $Q \subseteq I(P')$; $Q \subseteq I(P'')$.

N4'') $(a \wedge b) \rightarrow c \leq a \rightarrow (b \rightarrow c)$

N4''') $(a \wedge b) \rightarrow c = a \rightarrow (b \rightarrow c)$

Dans ces conditions nous pouvons afirmer que

THEOREME 4. Pour qu'un réticulé distributif fini A puisse être muni d'une structure d'algèbre de Nelson il faut et il suffit que sur l'ensemble ordonné $(\Pi, \leq)$ des éléments irreductibles de A, on puisse définir une transformation I ayant les propriétés suivantes:

I1) I est un anti-isomorphisme de Π sur Π.

I2) $I(I(p)) = p$ pour tout $p \in \Pi$.

I3) Pour chaque p ; $I(p)$ est comparable avec p.

I4) Si p' et p'' sont deux éléments de Π tels que : $I(p') \leq p'$; $I(p') \leq p''$; $I(p'') \leq p'$; $I(p'') \leq p''$ alors il existe un élément $q \in \Pi$ tel que $q \leq p'$; $q \leq p''$; $I(p') \leq q$; $I(p'') \leq q$.

S'il en ainsi l'algèbre de Nelson A est determinée, à moins d'un isomorphisme par le couple (Π , I).

3. EXEMPLES. Considérons le réticulé distributif A dont le diagramme est indiqué dans la figure 1. La famille des éléments premiers de A a le diagramme indiqué dans la figure 2.

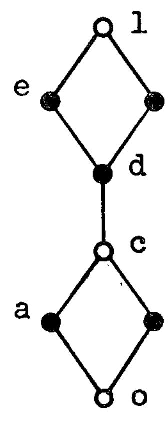

Fig. 1

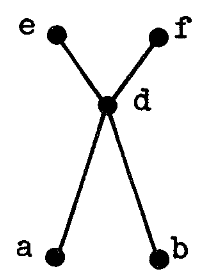

Fig. 2

Il existent deux transformations I de Π sur Π ayant les propriétés I1) - I4). Soit $I(a)= e$, $I(a)= a$ $I(b)= f$, $I(f)= b$, $I(d) = d$. À partir de cette transformation I on obtient les tables des opérations $\sim$ et $\rightarrow$ indiquées ci joint qui définissent sur A une structure d'algèbre de Nelson. L'autre structure possible s'obtient à partir de la transformation $I(e) = b$, $I(b) = e$, $I(f) = a$, $I(a)= f$, $I(d)= d$, qui a aussi les propriétés I1) -I4).

x	$\sim$x
o	1
a	f
b	e
c	d
d	c
e	b
f	a
1	o

x $\rightarrow$ y	o	a	b	c	d	e	f	1
o	1	1	1	1	1	1	1	1
a	1	1	1	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1	1	1	1
d	c	c	c	c	1	1	1	1
e	b	c	b	c	f	1	f	1
f	a	a	c	c	e	e	1	1
1	o	a	b	c	d	e	f	1

Considérons le réticulé distributif A dont le diagramme est indiqué dans la figure 3. La famille Π des éléments premiers de A a le diagramme indiqué dans la figure 4.

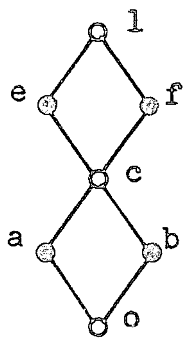

Fig. 3

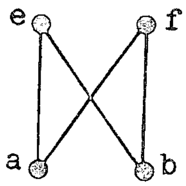

Fig. 4

Dans ce cas il existent deux transformations de Π sur Π ayant les propriétés I1) - I3), mais ces deux transformations n'ayant pas la propriété interpolatoire, il n'est pas possible de définir sur A une structure d'algèbre de Nelson.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca

B I B L I O G R A P H I E

BIALYNICKI-BIRULA (A.) and RASIOWA (H.)

1957 - On the representation of quasi-boolean algebras. <u>Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe</u> III, 5(1957), 259-261.

1958 - On constructive falsity in the constructive logic with strong negation. <u>Colloquium Mathematicum</u>, 6(1959), 287-291.

BIRKHOFF (Garret)

1937 - Rings of set. <u>Duke Mathematical Journal</u>, 3(1937), 443-454.

KALMAN (J.A.)

1958 - Lattices with involutions. <u>Transactions of American Mathematical Society</u>, 87(1958), 485-491.

MONTEIRO (Antonio)

1960 - Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositionnel classique. <u>Anais da Academia Brasileira de Ciências</u>, 52(1960), 1-7.

RASIOWA (H.)

1958 - N-Lattices and constructive logic with strong negation. Fundamenta Mathematicae, 46(1958), 61-80.