

LUIZ MONTEIRO

Sur les Algèbres de Heyting trivalentes

1964

INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

Nº19

SUR LES ALGEBRES DE HEYTING TRIVALENTES

par

Luiz F. T. Monteiro

1964

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca

Este fascículo contiene el Preprint de un trabajo en curso de publicación en Fundamenta Mathematicae.

Ce fascicule contient le Preprint d'un travail à être publié dans Fundamenta Mathematicae.

SUR LES ALGÈBRES DE HEYTING TRIVALENTES

par

Luiz F.T. Monteiro

1. INTRODUCTION

Nous nous proposons dans cette note de déterminer le nombre d'éléments de l'algèbre de Heyting trivalente avec un nombre fini de générateurs libres. Pour cela nous avons besoin de rappeler un certain nombre de définitions et d'indiquer les principaux théorèmes qui interviennent dans la résolution du problème indiqué.

1.1. DEFINITION: Un système $\mathcal{U} = (A, 0, \wedge, \vee, \rightarrow)$ formé par: 1^o) un ensemble, non vide, A ; 2^o) un élément $0 \in A$; 3^o) trois opérations binaires, $\wedge, \vee, \rightarrow$, définies sur A ; sera dit une algèbre de Heyting si les axiomes suivants sont vérifiés (pour tout a, b, c de A) :

$$\underline{A0) \quad 0 \wedge a = 0}$$

$$\underline{A1) \quad a \rightarrow a = b \rightarrow b}$$

$$\underline{A2) \quad (a \rightarrow b) \wedge b = b}$$

$$\underline{A3) \quad a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b}$$

$$\underline{A4) \quad a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow c) \wedge (a \rightarrow b)}$$

$$\underline{A5) \quad (a \vee b) \rightarrow c = (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)}$$

Nous dirons aussi pour abrégé que A est une algèbre de Heyting.

A propos de cette notion voir: T. Skolem (1919) ⁽¹⁾, G. Birkhoff (1933) p.459; (1940) p.128; (1948) p.147, M. Ward(1938); et pour la définition 1.1: A.Monteiro (1955).

Nous avons adopté la terminologie de H. Rasiowa et R. Sikorski (1953). Les axiomes de la définition 1.1 sont indépendants (A. Monteiro (1955)).

Il est bien connu qu'une algèbre de Heyting est un réticulé distributif ayant par dernier élément $1 = x \rightarrow x$. L'opération de négation \neg se définit au moyen de la formule $\neg x = x \rightarrow 0$.

Tout réticulé distributif fini A est une algèbre de Heyting si l'on définit $a \rightarrow b$ comme le plus grand élément x qui vérifie la condition $a \wedge x \leq b$.

La notion d'algèbre de Heyting joue dans le calcul propositionnel intuitioniste (A. Heyting, 1930); V. Gli-

(1) Voir la liste bibliographique à la fin de cette note.

venko (1929, 1929 a) un rôle analogue à celui des algèbres de Boole dans le calcul propositionnel classique.

Nous allons nous occuper de la classe particulière d'algèbres de Heyting, indiquée dans la définition suivante:

1.2. DEFINITION: Une algèbre de Heyting A sera dite trivalente si l'égalité suivante est vérifiée:
(T) $((a \rightarrow c) \rightarrow b) \rightarrow (((b \rightarrow a) \rightarrow b) \rightarrow b) = 1$ quels que soient les éléments a, b et c de A .

Indiquons l'exemple le plus simple d'une algèbre de Heyting trivalente T , qui n'est pas une algèbre de Boole: T est l'ensemble formé par trois éléments distincts $T = \{0, a, 1\}$ sur lequel on définit les opérations \wedge, \vee , et \rightarrow au moyen des tables suivantes (auxquelles nous ajoutons la table de l'opération \neg):

\wedge	0	a	1
0	0	0	0
a	0	a	a
1	0	a	1

\vee	0	a	1
0	0	a	1
a	a	a	1
1	1	1	1

\rightarrow	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	1
1	0	a	1

x	$\neg x$
0	1
a	0
1	0

Cette matrice a été considérée pour la première fois par A. Heyting (1930).

L'algèbre de Boole $B = \{0, 1\}$ est une sous-algèbre de T que nous aurons à utiliser par la suite.

Le produit cartésien d'algèbres de Heyting trivalentes et les sous-algèbres d'un tel produit sont des algèbres de la même nature. Nous montrerons plus loin que toute algèbre de Heyting trivalente peut être obtenue comme une sous-algèbre d'un produit cartésien d'un certain nombre d'algèbres T .

Nous avons à utiliser le résultat suivant qui est facile à démontrer:

1.3. THEOREME: Dans une algèbre de Heyting A l'axiome T est équivalent à chacun des axiomes suivants :

Axiome T' : $(\neg a \rightarrow b) \rightarrow (((b \rightarrow a) \rightarrow b) \rightarrow b) = 1$, quels que soient les éléments a et b de A .

Axiome T'' : $b = (\neg a \rightarrow b) \wedge ((b \rightarrow a) \rightarrow b)$, quels que soient les éléments a et b de A .

2. HOMOMORPHISMES ET THEOREME DE REPRESENTATION

Une application h d'une algèbre de Heyting A sur une algèbre A' de la même nature est un homomorphisme

si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$H1) \quad h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$

$$H2) \quad h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$$

$$H3) \quad h(a \rightarrow b) = h(a) \rightarrow h(b)$$

$$H4) \quad h(o) = o$$

La théorie des homomorphismes pour les algèbres de Heyting a été étudiée par L. Rieger (1949) et aussi par A. Monteiro (1954). Le noyau de l'homomorphisme h est l'ensemble D de tous les éléments x de A tels que $h(x) = 1 \in A'$.

Il est facile de voir que D est un filtre de A .

2.1. DEFINITION: Une partie D d'une algèbre de Heyting est un système déductif si: 1°) $1 \in D$, 2°) si $a \in D$ et $a \rightarrow b \in D$ alors $b \in D$ (modus ponens). Nous dirons que D est propre si $D \neq A$.

Dans une algèbre de Heyting la notion de système déductif est équivalente à celle de filtre (A. Monteiro, 1954, p.154)

Nous supposons connu le résultat suivant:

Etant donné un filtre D de A posons $a \sim b$ (mod. D) si $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \in D$. La relation ainsi définie est une relation d'équivalence compatible avec les opérations $\wedge, \vee, \rightarrow$. L'algèbre quotient correspondante sera

représentée par la notation $A' = A/D$. Si $h(a)$ est la classe d'équivalence (mod. D) qui contient l'élément $a \in A$ alors h est un homomorphisme de A sur A' ayant pour noyau D . Toutes les images homomorphes de A peuvent être obtenues de cette manière. Tous ces résultats sont encore valables, si nous nous bornons à considérer des algèbres de Heyting trivalentes. Rappelons que:

2.2. DEFINITION: Un filtre P de A est premier si P est un filtre propre et si la condition $a \vee b \in P$ entraîne $a \in P$ ou $b \in P$.

2.3. DEFINITION: Un filtre premier M de A sera dit un filtre premier minimal si la condition suivante est vérifiée: si P est un filtre premier tel que $P \subseteq M$ alors $P = M$.

Les filtres premiers minimaux de A sont les complémentaires des idéaux maximaux de A .

2.4. DEFINITION: Un filtre premier U sera dit un ultrafiltre si: 1^o) U est un filtre propre; 2^o) si un filtre propre F est tel que $U \subseteq F$ alors $F = U$.

Nous allons maintenant caractériser les algèbres de

Heyting trivalentes au moyen de propriétés de la famille des filtres premiers.

2.5. THEOREME: Pour qu'une algèbre de Heyting A soit trivalente il faut et il suffit que tout filtre premier de A soit ou bien un filtre premier minimal ou bien un ultrafiltre et que chaque filtre premier soit contenu dans un seul ultrafiltre.

Ce résultat est équivalent au suivant:

2.6. THEOREME: Pour qu'une algèbre de Heyting A soit trivalente il faut et il suffit que pour chaque filtre premier P qui n'est pas un ultrafiltre, il existe un et un seul filtre propre U contenant P comme partie propre.

2.7. THEOREME: Si P est un filtre premier d'une algèbre de Heyting trivalente A alors le quotient A/P est isomorphe soit à l'algèbre T soit à B .

Comme dans toute algèbre de Heyting A l'ensemble $\{1\}$ est l'intersection de tous les filtres premiers minimaux de A , on montre facilement, en tenant compte de 2.7, que:

2.8. THEOREME: Toute algèbre de Heyting trivalente A est isomorphe à une sous-algèbre d'un produit cartésien d'algèbres T.

Indiquons la démonstration dans ses lignes générales. Soit E la famille de tous les filtres premiers minimaux de A et considérons la famille $\mathcal{F} = \mathbb{T}^E$ de toutes les fonctions définies sur E et prenant leurs valeurs dans T, algébrisées point par point. Il est clair que \mathcal{F} est une algèbre de Heyting trivalente, car si nous posons $T_i = T$ pour tout $i \in E$ alors:

$$\mathcal{F} = \prod_{i \in E} T_i$$

Etant donné un filtre premier minimal $M \in E$ soit m l'homomorphisme naturel de A sur A/M . Dans ces conditions à chaque élément $f \in A$ faisons correspondre la fonction F définie par l'égalité

$$F(M) = m(f)$$

Comme $m(f) \in T$ alors $F \in \mathcal{F}$. On démontre facilement que la transformation $\psi(f) = F$ est un isomorphisme de A sur une sous-algèbre de \mathcal{F} et le théorème est démontré.

La notion d'algèbre de Boole est évidemment un cas particulier de celle d'algèbre de Heyting trivalente.

Dans ce cas particulier la démonstration que nous venons d'indiquer coïncide avec la démonstration du théorème de représentation de M. Stone (1936) pour les algèbres de Boole.

3. LE RADICAL TRIVALENT D'UNE ALGÈBRE DE HEYTING

Nous allons indiquer une construction qui permet d'obtenir une algèbre de Heyting trivalente à partir d'une algèbre de Heyting donnée.

3.1. DEFINITION: Un filtre F d'une algèbre de Heyting A sera dit: 1^o) bivalent si A/F est isomorphe à B ; 2^o) trivalent si A/F est isomorphe à T .

Il est évident que la notion de filtre bivalent coïncide avec celle d'ultrafiltre.

3.2. DEFINITION: Le radical trivalent d'une algèbre de Heyting A est l'intersection $R^3(A)$ de tous les filtres bivalents et trivalents de A .

Cette notion est à rapprocher de celle de radical de A , qui est, d'après A. Monteiro (1954, p.157),

l'intersection $R^2(A)$ de tous les ultrafiltres de A .

3.3. THEOREME: $R^3(A)$ est le système déductif, c'est-à-dire le filtre, engendré par les éléments de la forme:

$$\underline{((a \rightarrow c) \rightarrow b) \rightarrow (((b \rightarrow a) \rightarrow b) \rightarrow b)}$$

3.4. THEOREME: Si A est une algèbre de Heyting alors $t(A) = A/R^3(A)$ est une algèbre de Heyting trivalente.

3.5. THEOREME: Pour qu'une algèbre de Heyting A soit trivalente il faut et il suffit que $R^3(A) = \{1\}$.

3.6. THEOREME: Si h est un homomorphisme d'une algèbre de Heyting A sur une algèbre de Heyting trivalente A' et si D est le noyau de cet homomorphisme alors $R^3(A) \subseteq D$.

3.7. THEOREME: Si l'algèbre de Heyting trivalente A' est une image homomorphe de l'algèbre de Heyting A alors A' est une image homomorphe de $t(A) = A/R^3(A)$.

4. ALGÈBRES TRIVALENTES LIBRES

La notion d'algèbre de Heyting libre se définit de la manière habituelle.

4.1. DEFINITION: Si c est un nombre cardinal ($c > 0$) nous dirons que l'algèbre de Heyting L est une algèbre libre avec c générateurs libres si les conditions suivantes sont vérifiées:

L') L contient un ensemble G de puissance c , telle que L soit la sous-algèbre de L engendrée par G .

L'') Si f est une application de G dans une algèbre de Heyting A alors il existe un homomorphisme \bar{f} de L dans A que prolonge f , c'est-à-dire tel que $\bar{f}(g) = f(g)$ pour tout $g \in G$.

Lorsque nous voudrons mettre en évidence le nombre cardinal c nous écrirons $L = L_c$. Si n est un nombre entier ($n > 0$) nous écrirons L_n pour indiquer l'algèbre de Heyting libre avec n générateurs libres.

Rappelons la construction de L , qui est bien connue. Soit \mathcal{A} l'ensemble formé par les symboles suivants: 1^o) une constante f ; 2^o) une famille $G = \{g_i\}$ $i \in I$ de symboles qu'on appelle les variables propositionnelles;

3^o) les connectifs $\wedge, \vee, \rightarrow$; 4^o) les parenthèses (,) .

L'ensemble \mathcal{F} des formules (bien formées) est le plus petit ensemble tel que:

- F0) $f \in \mathcal{F}$; F1) $g_i \in \mathcal{F}$, pour tout $i \in I$
 F2) Si $X \in \mathcal{F}$ et $Y \in \mathcal{F}$ alors $(X \wedge Y) \in \mathcal{F}$,
 $(X \vee Y) \in \mathcal{F}$ et $(X \rightarrow Y) \in \mathcal{F}$.

L'ensemble \mathcal{C} des thèses est la plus petite partie de \mathcal{F} que vérifie les conditions suivantes (où X, Y et Z représentent des formules quelconques):

- A1) $(X \rightarrow (Y \rightarrow X)) \in \mathcal{C}$
 A2) $((X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z))) \in \mathcal{C}$
 A3) $(X \rightarrow (X \vee Y)) \in \mathcal{C}$
 A4) $(Y \rightarrow (X \vee Y)) \in \mathcal{C}$
 A5) $((X \rightarrow Z) \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \rightarrow ((X \vee Y) \rightarrow Z))) \in \mathcal{C}$
 A6) $((X \wedge Y) \rightarrow X) \in \mathcal{C}$
 A7) $((X \wedge Y) \rightarrow Y) \in \mathcal{C}$
 A8) $((X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow (Y \wedge Z)))) \in \mathcal{C}$
 A9) $(f \rightarrow X) \in \mathcal{C}$

M.P.) Si $X \in \mathcal{C}$ et $(X \rightarrow Y) \in \mathcal{C}$ alors $Y \in \mathcal{C}$.

Pour chaque couple ordonné (X, Y) d'éléments de \mathcal{F} posons $X \equiv Y \pmod{\mathcal{C}}$ si: $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) \in \mathcal{C}$. Cette relation \equiv est une relation d'équivalence définie sur \mathcal{F} , compatible avec les opérations binaires $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Si $X \in \mathcal{F}$ soit $|X|$ la classe d'équivalence relative

à \equiv qui contient X et représentons par $L = \mathfrak{f} / \equiv$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence.

Si nous posons

$$o = |f|$$

$$|X| \wedge |Y| = |X \wedge Y|$$

$$|X| \vee |Y| = |X \vee Y|$$

$$|X| \rightarrow |Y| = |X \rightarrow Y|$$

alors il est bien connu, que le système $(L, o, \wedge, \vee, \rightarrow)$ est l'algèbre de Heyting libre ayant les c générateurs libres $|g_i|$ (T. Ogasawara (1939) et L. Rieger (1949)).

La définition des algèbres de Heyting trivalentes libres est analogue à celle indiquée dans 4.1; il suffit de remplacer l'expression "algèbre de Heyting" par "algèbre de Heyting trivalente". Pour représenter une telle algèbre nous utiliserons la notation L^3 ou L^3_c . Pour obtenir une construction de L^3 nous prenons le même alphabet et le même ensemble \mathfrak{f} de formules, et nous définissons l'ensemble des "thèses trivalentes" comme la plus petite partie \mathcal{C}^3 de \mathfrak{f} telle que

$$A1') \quad (X \rightarrow (Y \rightarrow X)) \in \mathcal{C}^3$$

$$A2') \quad ((X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z))) \in \mathcal{C}^3$$

$$A3') \quad (X \rightarrow (X \vee Y)) \in \mathcal{C}^3$$

$$A4') \quad (Y \rightarrow (X \vee Y)) \in \mathcal{C}^3$$

$$A5') ((X \rightarrow Z) \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \rightarrow ((X \vee Y) \rightarrow Z))) \in \mathcal{C}^3$$

$$A6') ((X \wedge Y) \rightarrow X) \in \mathcal{C}^3$$

$$A7') ((X \wedge Y) \rightarrow Y) \in \mathcal{C}^3$$

$$A8') ((X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow (Y \wedge Z)))) \in \mathcal{C}^3$$

$$A9') (f \rightarrow X) \in \mathcal{C}^3$$

$$A10') (((X \rightarrow Z) \rightarrow Y) \rightarrow (((Y \rightarrow X) \rightarrow Y) \rightarrow Y)) \in \mathcal{C}^3$$

$$M.P.) \text{ Si } X \in \mathcal{C}^3 \text{ et } (X \rightarrow Y) \in \mathcal{C}^3 \text{ alors } Y \in \mathcal{C}^3$$

Pour chaque couple ordonné (X, Y) d'éléments de \mathcal{F} posons $X \approx Y \pmod{\mathcal{C}^3}$ si: $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) \in \mathcal{C}^3$. Cette relation \approx est une relation d'équivalence définie sur \mathcal{F} , compatible avec les opérations binaires $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Si $X \in \mathcal{F}$ soit $\|X\|$ la classe d'équivalence relative à \approx qui contient X et représentons par $L^3 = \mathcal{F} / \approx$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence.

Si nous posons

$$o = \|f\|$$

$$\|X\| \wedge \|Y\| = \|X \wedge Y\|$$

$$\|X\| \vee \|Y\| = \|X \vee Y\|$$

$$\|X\| \rightarrow \|Y\| = \|X \rightarrow Y\|$$

alors le système $(L^3, o, \wedge, \vee, \rightarrow)$ est l'algèbre de Heyting trivalente libre ayant les c générateurs libres $\|g_i\|$.

L'algèbre libre L^3 peut être définie très simplement à partir de L .

4.2. THEOREME: $L^3 = L/R^3(L)$

Considérons avec J. Lukasiewicz (1938) le calcul propositionnel ayant pour matrice caractéristique l'algèbre de Heyting trivalente T . Pour cela soit \mathcal{F} l'ensemble (des formules) défini précédemment. Etant donnée une formule $X \in \mathcal{F}$ supposons que les variables propositionnelles qui figurent dans X désignent des variables sur T et que f désigne l'élément $0 \in T$. Nous obtenons ainsi une fonction définie sur l'ensemble T^I et prenant ses valeurs dans T que nous représenterons par la notation X_T .

Si X_T est la fonction identiquement égale à 1 nous dirons que la formule X est valable dans T ou que X est une tautologie dans T . Soit \mathcal{V} l'ensemble des formules valables dans T . Lukasiewicz (1938) a montré que le calcul propositionnel intuitioniste trivalent ainsi obtenu est axiomatisable et que $\mathcal{V} = \mathcal{Z}^3$.

Remarquons que les axiomes schémas considérés par Lukasiewicz sont distincts mais équivalents à ceux que nous indiquons dans cette note.

En particulier nous avons remplacé l'axiome schéma de Lukasiewicz: $((\neg X \rightarrow Y) \rightarrow (((Y \rightarrow X) \rightarrow Y) \rightarrow Y)) \in \mathcal{Z}^3$ par l'axiome A10') où ne figure que le connectif d'implication. Nous avons adopté ces changements parce que la

plupart des résultats que nous indiquons sont encore valables dans le segment du calcul propositionnel intuitioniste trivalent où ne figure que le connectif d'implication et un tel calcul peut être caractérisé par les axiomes schémas A1'), A2'), A9') et la règle M.P.). Dans une autre note nous préciserons les résultats que nous avons obtenu dans cette direction.

Remarquons encore que si l'on supprime: 1^o) le connectif \vee de l'alphabet \mathcal{A} 2^o) les axiomes schémas A3'), A4'), et A5') dans la définition de \mathcal{Z}^3 ; nous obtenons un calcul propositionnel équivalent à condition d'adopter la définition:

$$X \vee Y = ((X \rightarrow Y) \rightarrow Y) \wedge ((Y \rightarrow X) \rightarrow X) ;$$

voir à ce propos J. Lukasiewicz ((1938), p. 96).

Remarquons finalement que pour obtenir L^3 on peut procéder de la manière suivante: étant donné le couple (X,Y) de formules de \mathcal{L} posons $X \approx Y$ pour indiquer que les fonctions X_T et Y_T sont identiques sur T^I ; alors on peut montrer que cette relation coïncide avec la relation $\approx (\text{mod. } \mathcal{Z}^3)$ et dans ces conditions l'algèbre quotient \mathcal{L}/\approx est identique à L^3 . Nous avons ainsi deux méthodes distinctes (qu'on appelle souvent la méthode syntactique et la méthode sémantique) pour obtenir L^3 .

5. LES ALGÈBRES DE HEYTING TRIVALENTES LIBRES AVEC UN NOMBRE FINI DE GÉNÉRATEURS.

Nous nous proposons maintenant de déterminer l'algèbre de Heyting trivalente libre L_n^3 avec un nombre fini $n > 0$ de générateurs. Nous savons que L_n^3 est un réticulé distributif fini, donc tous les filtres F de L_n^3 sont des filtres principaux c'est-à-dire pour chaque filtre F il existe un élément $f \in L_n^3$ tel que F est la famille de tous les $x \in L_n^3$ tels que $f \leq x$; dans ces conditions nous dirons que f est le générateur du filtre F , ou que F est le filtre engendré par l'élément f et nous écrirons $F = F(f)$.

Pour que P soit un filtre premier il faut et il suffit que le générateur p de P soit un élément premier, c'est-à-dire que: 1^o) $p \neq 0$, 2^o) si $p = a \vee b$ alors ou $p = a$ ou $p = b$.

D'après un résultat de G. Birkhoff (1937) un réticulé distributif fini est déterminé à moins d'un isomorphisme par l'ensemble ordonné de ses éléments premiers. Dans ces conditions pour déterminer L_n^3 il nous suffit de connaître l'ensemble ordonné Π_n^3 des éléments premiers de L_n^3 .

Soit $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ l'ensemble des générateurs libres de L_n^3 . D'après la définition de L_n^3 toute applica-

tion f de G dans T peut être prolongée à un homomorphisme \bar{f} de L_n^3 dans T . Soit P_f le noyau de \bar{f} c'est-à-dire l'ensemble des $x \in L_n^3$ tels que $\bar{f}(x) = 1$. On voit tout de suite que P_f est un filtre premier de L_n^3 . Soit $p_f \in \Pi_n^3$ le générateur du filtre premier P_f , alors on peut montrer que:

5.1. THEOREME: La transformation $\varphi(f) = p_f$ qu'à chaque application f de T^G fait correspondre l'élément p_f , est une transformation biunivoque de T^G sur Π_n^3 .

Comme T^G a 3^n éléments alors l'ensemble ordonné Π_n^3 a 3^n éléments. Il ne nous reste qu'indiquer la relation d'ordre entre les éléments de Π_n^3 .

Pour connaître $f \in T^G$ il suffit de connaître les valeurs $f(g_1) = f_1$, $f(g_2) = f_2, \dots, f(g_n) = f_n$ (où $f_i \in T$ pour $i = 1, 2, \dots, n$). Nous pouvons donc représenter f par la suite $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et d'après 5.1 nous pouvons utiliser aussi cette suite pour représenter l'élément p_f .

Remarquons que si P est un ultrafiltre de L_n^3 alors p_f est un élément minimal de Π_n^3 et que si P est un filtre premier minimal de L_n^3 alors p_f est un élément maximal de Π_n^3 . D'après le théorème 2.5 tout élément

de Π_n^3 est minimal ou maximal.

Caractérisons maintenant les suites qui représentent les éléments minimaux de Π_n^3 .

5.2. THEOREME: Pour que p_f soit un élément minimal de Π_n^3 il faut et il suffit que f_1 soit égal à 0 ou 1.

D'après 5.2 si p_f n'est pas un élément minimal de Π_n^3 alors il existe un indice $i = 1, 2, \dots, n$, tel que $f_i = a$.

5.3. THEOREME: Pour que $p_f < p_h$ il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:

1°) $f_1 = 0$ ou $f_1 = 1$

2°) Il existe au moins un indice i tel que $f_i \neq h_i$

3°) $h_i = 0$ si et seulement si $f_i = 0$

4°) Si $f_i = 1$ alors $h_i = a$ ou $h_i = 1$

L'ensemble ordonné (Π_n^3, \leq) étant maintenant connu, L_n^3 est déterminé à moins d'un isomorphisme. A partir de 5.2 et 5.3 nous avons démontré que:

5.4. THEOREME: Le nombre $N(L_n^3)$ d'éléments de L_n^3 est donné par la formule:

$$N(L_n^3) = \prod_{k=0}^n (2^{2^k} - 1 + 1)^{\binom{n}{k}}$$

En particulier $N(L_1^3) = 6$; $N(L_2^3) = 162$; $N(L_3^3) = 5.078.214$; $N(L_4^3) = 781.253.724.434.352.747.138$.

Les démonstrations de ces résultats seront indiquées dans un autre travail.

BIBLIOGRAPHIE

BIRKHOFF (Garrett)

- (1933) On the combination of subalgebras. Proc.Camb. Phil. Society. 29 (1933), pp. 441-464.
- (1937) On rings of sets. Duke Mathematical Journal. 3 (1937), pp. 443-454.
- (1940) Lattice theory. American Mathematical Society Colloquium Publications. Vol. 25. Amer. Math. Soc. New York, 1940.
- (1948) Lattice theory. Revised edition. American Mathematical Society Colloquium Publications. Vol. 25. Amer. Math. Soc. New York, 1948.

GLIVENKO (Valère)

- (1929) Sur quelques points de la logique de Brouwer. Acad. Royale de Belgique. Bulletin des Sciences. (5), 15 (1929), pp. 183-188.
- (1929 a) Sur la logique de M. Brouwer. Acad. Royale de Belgique. Bulletin des Sciences. (5), 15 (1929), pp. 225-228.

HEYTING(Arend)

- (1930) Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. Sitzungsberichte der Preussischen

Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, (1930), pp. 42-56.

LUKASIEWICZ (Jan)

- (1938) Die Logik und das Grundlagenproblem. Les entretiens de Zürich (1938) pp. 82-100. Discussion pp. 100-108.

MONTEIRO (Antonio)

- (1954) L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques. Segundo Symposium Latino Americano de Matemática. Centro de Cooperación Científica de la Unesco para América Latina. Montevideo, (1954), pp.129-162.
- (1955) Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer. Revista de la Unión Matemática Argentina. 17 (1955), pp. 149-160.

OGASAWARA (Tôzирô)

- (1939) Relation between Intuitionistic Logic and Lattice. Journal of Science of the Hiroshima University Series A. 9 (1939), pp. 157-164.

RASIOWA (Helena) and SIKORSKI (Roman)

- (1953) Algebraic Treatment of the notion of satisfiability. Fundamenta Mathematica, 40 (1953), pp. 62-95

RIEGER (Ladislav)

- (1949) On the lattice theory of Brouwerian proposi-

ional logic. Acta Facultatis Rerum Naturalium
Universitatis Carolinae. (1949), Císlo 189,
pp. 3-40.

SKOLEM (T.)

(1919) Untersuchungen über die Axiome des Klassen-
kalküls und über Produktations -und Summations-
probleme, welche gewisse Klassen von Aussagen
betreffen. Videnskapsselskapets Skrifter,
I. Math.- Nat.Klasse (1919), n^o3, 37 pp.

STONE (Marshall H.)

(1936) The theory of representation of Boolean al-
gebras. Transactions of the American Mathem-
atical Society. 40 (1936), pp. 37-111.

WARD (Morgan)

(1938) Structure Residuation. Annals of Mathematics,
33 (1938), pp. 558-568.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca - Argentina