NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

26

OSVALDO CHATEAUBRIAND et ANTONIO MONTEIRO

LES ALGEBRES DE MORGAN LIBRES

1969
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

LES ALGEBRES DE MORGAN LIBRES

par

ISSN 0076-[illegible]

Osvaldo Chateaubriand et António Monteiro

1. INTRODUCTION

Rappelons tout d'abord les notions et les résultats que nous avons à utiliser par la suite.

<u>1.1. DEFINITION: Une algèbre de Morgan est un système $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, -, 1)$ formé par un ensemble non vide A, un élément $1 \in A$, deux opérations binaires $\vee$, $\wedge$, et une opération unaire $-$ définies sur A, qui vérifient les conditions suivantes:</u>

M1) <u>A est un reticulé distributif par rapport a $\vee$ et $\wedge$.</u>

M2) $\underline{1 \vee x = 1}$ <u>pour tout</u> $\underline{x \in A}$.

M3) $\underline{- - x = x \; ; \; -(x \vee y) = -x \wedge -y}$.

<u>Pour abréger, nous dirons aussi que A est un algèbre de Morgan.</u>

Cette notion a été etudiée par A. Bialynicki-Birula et H. Rasiowa (1957) sous le nom d'algèbre quasi-booléenne.

On démontre de suite que : $-1 = o$ est le premier élément de A et que: $-(x \wedge y) = -x \vee -y$.

<u>1.2. DEFINITION: Une partie A' de A est une sous-algèbre</u>

de A si les conditions suivantes sont vérifieés:
1°) $1 \in A'$, 2°) Si $a, b \in A'$, alors $a \wedge b \in A'$, $-a \in A'$.

De ces conditions on déduit: 1°) $o \in A'$; 2°) Si $a, b \in A'$, alors $a \vee b \in A'$.

Pour indiquer un exemple d'une algèbre de Morgan, considérons la construction suivante de A. Bialynicki-Birula et H. Rasiowa (1957):

Soit E un ensemble non vide et φ une involution de E sur E, c'est-à-dire une transformation φ de E dans E telle que $\varphi\varphi(x) = x$.

Soit $A = 2^E$ la famille de toutes las parties de E. Pour chaque $X \in A$, posons(1)

$$-X = \complement\, \varphi(X)$$

alors le système $\mathcal{A} = (A = 2^E, \cup, \cap, -, E)$, où $\cap$ et $\cup$ représentent les opérations d'intersection et d'union d'ensembles, est une algèbre de Morgan. Tout sous-algèbre de sera appellée une algèbre de Morgan d'ensembles. C'est l'exemple le plus générale qu'on puisse considérer car A. Bialynicki-Birula et H. Rasiowa (1957) ont demontré l'important théorème suivant:

1.3 THEOREME: Toute algèbre de Morgan est isomorphe à une algèbre de Morgan d'ensembles.

---

(1) Le symbole $\complement$ désigne l'opération de complémentation d'ensembles.

1.4 DEFINITION: Etant donneé une partie $G = \{g_i\}_{i \in I}$ d'une algèbre de Morgan A, on appelle algèbre de Morgan engendrée par G, à l'intersection A(G) de toutes les sous-algèbres de A que continent G. Si A(G) = A nous dirons que les g_i sont des générateurs de A, ou que G engendre A.

1.5 DEFINITION: Soient A et A' des algèbres de Morgan. Une transformation h de A dans A' est un homomorphisme si les conditions suivantes sont verifiées:

$$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$$
$$h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$$
$$h(-x) = -h(x)$$
$$h(1) = 1$$

La notion d'algèbre de Morgan libre se définit de la façon habituelle.

1.6. DEFINITION: Soit $\mathcal{C} \neq 0$ un nombre cardinal donné. Nous dirons que l'algebre de Morgan $\mathcal{L}$ est une algèbre avec C générateurs libres, si les conditions suivantes sont verifiées:

L1) $\mathcal{L}$ contient une partie G de puissance $\mathcal{C}$ qui engendre $\mathcal{L}$.

L2) Etant donnée une algèbre de Morgan A et une application f de G dans A, alors il existe un homomorphisme h de $\mathcal{L}$ dans A que prolonge f, c'est-à-dire tel que: $h(x) = f(x)$ pour tout $x \in G$. Une

<u>algèbre de Morgan sera dite libre si elle contient un ensemble de générateurs libres.</u>

L'existence et unicité de l'algèbre Libre $\mathcal{L}$ est un théorème d'algèbre générale (voir G. Birkhoff (1948)p.viii).

2. CONSTRUCTION DE L'ALGEBRE LIBRE $\mathcal{L}$.

Nous nous proposons d'indiquer une construction de l'algèbre de Morgan libre $\mathcal{L}$.

Considérons l'ensemble $D = \{0,1\}$ et soit $B = D \times D$, c'est-à-dire, l'ensemble des couples $b = \langle x,y \rangle$ où $x,y \in D$.

Soit φ la transformation définie sur B par la formule

$\varphi(b) = \varphi(\langle x,y \rangle) = \langle 1-y,\ 1-x \rangle$, pour chaque $b \in B$.

Alors

$$\varphi\varphi(b) = \varphi(\langle 1-y,\ 1-x \rangle) = \langle x,y \rangle = b.$$

Si nous posons pour chaque $X \subseteq B$

$$-X = \complement\, \varphi(X),$$

alors $(2^B, \cap, \cup, -, B)$ est une algèbre de Morgan.

Soit I un ensemble de puissance $\mathfrak{c}$. Pour chaque $i \in I$ posons $B_i = B$, et considérons l'ensemble

$$E = \prod_{i \in I} B_i$$

Un point $p \in E$ serà designée par $p = [p_i]$, où $p_i \in B$.

Posons

$$\varphi(p) = [\varphi(p_i)]$$

alors φ est une involution de E sur E qui permet d'introduire sur le reticulé distributif 2^E de toutes les parties de E une structure d'algèbre de Morgan, en prenant pour chaque $X \subseteq E$, $-X = \complement\, \varphi(X)$.

Soit G_i l'ensemble de tous les points $p \in E$ dont la coordonnée d'indice i: p_i est égale soit à $\langle 1,0 \rangle$ soit à $\langle 1,1 \rangle$ et $G = \{G_i\}_{i \in I}$. Il est clair que si $i' \neq i''$ alors $G_{i'} \neq G_{i''}$, et par conséquent G a la puissance $\mathfrak{C}$. Soit $\mathcal{L}$ l'algèbre de Morgan engendrée dans l'algèbre de Morgan 2^E par l'ensemble G. Nous allons montrer que:

<u>**THEOREME:** $\mathcal{L}$ **est l'algèbre de Morgan libre avec les les générateurs libres** $\{G_i\}$</u> $_{i \in I}$.

Soit A une algèbre de Morgan. Nous pouvons supposer d'après un théorème de Bialynicki-Birula et Rasiowa (1957) que A est une algèbre de Morgan de sous-ensembles d'un ensemble T et que ϕ, $T \in A$. Soit ψ l'involution de T sur T, telle que $-X = \complement\, \psi(X)$ pour chaque $X \subseteq T$. Soit f une transformation univoque de G dans A. Posons pour chaque $i \in I$, $f(G_i) = H_i$. Nous avons a demontrer qu'il existe un homomorphisme h de $\mathcal{L}$ dans A qui est une extension de f.

Etant donnée une partie X de T, nous représenterons par $K_X(t)$ la fonction caractéristique de X. Rappelons que $K_{\complement X}(t) = 1 - K_X(t)$.

Considerons l'application K_i de T dans B_i définie par l'egalitée:

$$(K_i) \qquad K_i(t) = \langle K_{H_i}(t), K_{-H_i}(t)\rangle = \langle K_{H_i}(t), K_{\complement \psi H_i}(t)\rangle$$

$$= \langle K_{H_i}(t), 1 - K_{H_i}(t)\rangle$$

et soit K l'application de T dans E définie par:

$$K(t) = [K_i(t)]$$

Remarquons que

(R) <u>La condition $K(t) \in G_i$ est équivalente à $K_{H_i}(t) = 1$.</u>

Soit h la transformation de 2^E dans 2^T définie par la formule (où $X \subseteq E$)

$$h(X) = K^{-1}(X) .$$

Il est clair que

$$h(X \cap Y) = h(X) \cap h(Y)$$
$$h(X \cup Y) = h(X) \cup h(Y)$$
$$h(E) = T$$

Pour que h soit un homomorphisme, de l'algèbre de Morgan 2^E dans l'algèbre de Morgan 2^T, il faut et il suffit que

$$h(-X) = -h(X)$$

c'est-à-dire, il faut demontrer que

$$K^{-1} \complement \varphi(X) = \complement \varphi K^{-1}(X)$$

pour chaque $X \subseteq E$, ce qui est equivalent à démontrer que

$$\complement K^{-1} \varphi(X) = \complement \varphi K^{-1}(X), \text{ soit a:}$$

(1) $\quad K^{-1} \varphi(X) = \varphi K^{-1}(X).$

Demonstrons d'abord que

(2) $\quad K_{H_i}(\varphi(t)) = K_{\varphi H_i}(t) \quad ; \quad$ (2') $\quad K_{H_i}(t) = K_{\varphi H_i}(\varphi(t))$

Pour démontrer (2) remarquons que la condition

$$\text{(a)} \quad K_{H_i}(\varphi(t)) = 1$$

est équivalente à chacune des conditions suivantes:

(a') $\quad \varphi(t) \in H_i \quad ; \quad$ (a'') $\quad \varphi(\varphi(t)) = t \in \varphi H_i \quad ;$

(a''') $K_{\psi H_i}(t) = 1$

et (2) est démontrée. Pour obtenir (2') il suffit de remplacer t par $\psi(t)$ dans (2).

Considérons maintenant la condition

$$(3) \quad t \in K^{-1}\varphi(X)$$

qui est équivalente à chacune des conditions suivantes:

(4) $K(t) \in \varphi(X)$,

(5) $\varphi(K(t)) \in X$,

mais $\varphi(K(t)) = \varphi([K_i(t)]) = [\varphi(K_i(t))]$, donc

(6) $[\varphi(K_i(t))] \in X$

Comme

$$K_i(t) = \langle K_{H_i}(t),\ 1 - K_{\psi H_i}(t)\rangle$$

nous aurons

$$\varphi(K_i(t)) = \langle K_{\psi H_i}(t),\ 1 - K_{H_i}(t)\rangle$$

~~c'est-à-dire~~, d'après (2), (2') et (K_i):

$$\varphi(K_i(t)) = \langle K_{H_i}(\psi(t)),\ 1 - K_{\psi H_i}(\psi(t))\rangle$$
$$= K_i(\psi(t))$$

La condition (6) est donc équivalente à:

(7) $[K_i(\psi(t))] = K(\psi(t)) \in X$

(8) $\psi(t) \neq K^{-1}(X)$

(9) $t \in \psi K^{-1}(X)$

L'equivalence de (3) et (9) montre que (1) est valable et par conséquant $h(-X) = -h(X)$.

Nous venons ainsi de montrer que

I) <u>h es un homomorphisme de 2^E dans 2^T</u>

Montrons maintenant que

II) <u>h es un prolongement de f,</u> c'est-à-dire

$$h(G_i) = f(G_i) = H_i$$

Pour cela il suffit de remarquer, en tenant compte de (R), que: les conditions suivantes sont equivalentes deux à deux

(10) $t \in H_i$; (11) $K_{H_i}(t) = 1$; (12) $K(t) \in G_i$;

(13) $t \in K^{-1}(G_i) = h(G_i)$.

Il reste a démontrer que

III) <u>h es un homomorphisme de $\mathcal{L}$ dans A, c'est-à-dire: $h(\mathcal{L}) \subseteq A$</u>

De (I) il résulte que $h(\mathcal{L})$ est une sous-algèbre de 2^T. Mais G étant un ensemble de générateurs de $\mathcal{L}$ $h(G)$ est un ensemble de générateurs de $h(\mathcal{L})$ et comme $h(G_i) = f(G_i) = H_i \in A$ (pour tout $i \in I$) nous aurons $h(G) \subseteq A$, d'où il résulte $h(\mathcal{L}) \subseteq A$ et la démonstration est terminée.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca

BIBLIOGRAPHIE

1 BIALYNICKI-BIRULA (A.) and RASIOWA (H.). On the representation of quasi-Boolean algebras. Bull. Acad. Polonaise des Sciences. classe III, 5(1957), 259-261.

2 BIALYNICKI-BIRULA (A.). Remarks on quasi-boolean algebras. Bull. Acad. Polonaise des Sciences. classe III, 5(1957), 615-619.

3 BIRKHOFF (G.). Lattice theory. American Society Colloquium Publications. Vol. 25. New York (1948).

4 MONTEIRO (A.). Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositionnel clasique. Anais da Academia Brasileira de Ciencias. (1960), 1-7.