NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

29 - 30

ANTONIO MONTEIRO

L'ARITHMETIQUE DES FILTRES ET LES ESPACES TOPOLOGIQUES I-II

1974
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA (*)

N° 29 - 30

L'ARITHMETIQUE DES FILTRES ET LES ESPACES TOPOLOGIQUES I-II

par

Antonio Monteiro

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada en parte por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

N° 29

L'ARITHMETIQUE DES FILTRES ET LES ESPACES TOPOLOGIQUES I

par

Antonio Monteiro

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

Este número contiene la reproducción de una memoria inédita, redactada durante los meses de Enero y Febrero de 1950 y presentada a la Societé Mathématique de France, en ocasión de la Jubilación de mi maestro Maurice Frechét(*) Las investigaciones correspondientes fueron realizadas en la "Facultad de Filosofía" y en el "Centro Brasileiro de Pesquizas Físicas" de Río de Janeiro y terminadas en el mes de Diciembre de 1949 en la Facultad de Ingeniería de San Juan (Argentina).

Ce numero contient la reproduction d'un mémoire inédit, rédigé pendant les mois de Janvier et Fébrier 1950, présenté à la Societé Mathématique de France, à l'ocasion du Jubilé de mon maître Maurice Fréchet(*). Les recherches correspondantes on été réalizés à la "Faculdade de Filosofia" et au "Centro Brasileiro de Pesquizas Físicas" de Río de Janeiro et terminés au mois de Décembre de 1949 à la "Facultad de Ingeniería de San Juan (Argentina)".

(*) Voir Bulletin de la Societé Mathématique de France, 1951, pag. XXXIX - XL.

INDICE

L'ARITHMÉTIQUE DES ESPACES TOPOLOGIQUES

par

ANTONIO MONTEIRO

INTRODUCTION.

La notion d'espace topologique peut être considerée, comme une généralisation de la notion de nombre réel. Cette idée se trouve clairement formulée par Pontryagin (*)(pag. 26) qui s'exprime de la manière suivante: "*Just as the theory of group studies the algebraic operation of multiplication in its purest aspect, so abstract topology sets as its goal the investigation of the operation of passing to the limit, disregarding all other properties of the elements under consideration. If a group can be regard as a generalisation of the concept of real number, then a topological space should also be treated as a generalisation of the same real numbers. Only in the first case the operation of multiplication is generalized, while in the second it is the limiting operation, or, what is the same, the concept of limit point which is generalized*".

Comme la notion de nombre réel est aussi une généralisation de celle de nombre entier, nous pouvons considérer la notion d'espace topologique comme une généralisation de la

---

(*) Voir la liste bibliographique a la fin de ce travail.

notion de nombre entier et l'on se trouve placé devant le problème de *déterminer les propriétés arithmétiques des entiers qui subsistent dans les espaces topologiques.*

L'ensemble de tous les nombres réels considéré comme un espace topologique jouit en réalité de propriétés arithmétiques intéressantes comme nous le verrons par la suite. Cela montrerait une fois de plus, que la structure topologique de la droite euclidienne est toujours une source de problèmes et nous placerait devant des propriétés arithmétiques communes au "continu" et au "discontinu".

Tout d'abord il faut savoir quelle est la notion qui dans un espace topologique doit remplacer celle de nombre entier. Un espace T1 est complètement déterminé lorsqu'on donne la famille R de tous les ensembles fermés et tous les problèmes importants sur l'espace considéré peuvent être résolus en raisonnant sur R. Cela nous conduit à envisager chaque ensemble fermé comme une généralisation de la notion de nombre entier; mais l'expérience montre que cette idée est insuffisante. On est alors amené à penser dans les familles d'ensembles fermés, parmi lesquelles if faut distinguer les *filtres* de R comme des familles particulièrement simples.

P. Samuel (pag. 111) a mis en évidence, d'une manière très claire, la signification de la notion de filtre en topologie: "*Topology deals essentially with infinite sets, while it is much easier to operate with finite sets. It is therefore necessary to have a tool permiting the passage from de finite to the infinite (or conversal by using dual methods). The necessary tool has to have finite features in its definition, but to be infinite in its essence; and the filters fulfill both requirements*".

Il est donc raisonnable de penser que cet instrument permettant le passage du fini à l'infini est particulièrement adapté à jouer le rôle des entiers.

Comme remarque encore P. Samuel, pour qu'ils soient utiles les filtres doivent avoir des rélations avec la structure de l'espace topologique sur lequel ils sont définis. Pour se placer dans ces conditions il suffit de considérer, avec H. Wallman, des filtres d'ensembles fermés c.a.d. des filtres de R.

Nous allons donc considérer les filtres de R *comme une extension de la notion de nombre entier*, et chercher des propriétés arithmétiques des "entiers" d'un espace topologique. Cette tâche serait inabordable si le développement récent des mathématiques n'avait pas déterminé presque complètement le chemin à suivre. Nous pensons surtout, en ce moment, à la théorie des réticulés (lattices) distributifs et en particulier des algèbres de Boole, telle qu'elle peut se trouver dans les travaux de M. Stone où cet auteur a établi, pour la première fois, des relations entre la théorie des réticulés distributifs et celle des espaces topologiques en ouvrant ainsi le chemin pour toutes les recherches ultérieures.

Au point de vue de l'arithmétique nous devons surtout signaler les théorèmes de représentation de G. Birkhoff et M. Stone: "*Tout filtre d'un réticulé distributif est le m.m.c. de filtres premiers*", que peut être considéré comme le premier résultat sur l'extension des propriétés arithmétiques des entiers à la théorie des espaces topologiques.

Cette notion de filtre premier a un rôle très important a jouer dans ce travail. La notion d'ultrafiltre est un cas particulier de celle de filtre premier. Au point de vue de l'arithmétique nous nous sommes laissés guider par l'idée que *les ultrafiltres doivent jouer le rôle des nombres pre* *miers tandis que les filtres premiers joueraient le rôle des puissances des nombres premiers.*

Il est un peu surprenant de voir apparaître constamment les ultrafiltres dans la théorie des espaces topologiques, tandis que la notion de filtre premier, qui est en général distincte de celle d'ultrafiltre, ne semble pas avoir été utilisée que par Kaplansky dans l'étude du réticulé des fonctions numériques continues définies sur un espace d'Hausdorff compact.

C'est après les travaux de H. Cartan, développés par N. Bourbaki et ses collaborateurs, que les notions de filtre et d'ultrafiltre ont étés considérées comme une généralisation de la notion de suite et de la méthode diagonale de Cantor. Dans le traité de N. Bourbaki la technique des filtres est utilisée presque partout; mais comme ces auteurs considèrent les filtres de toutes les parties d'un espace topologique, il n'y a pas lieu de distinguer entre un filtre premier et un ultrafiltre.

Nous voyons donc que dans les travaux des auteurs que nous venons d'indiquer se trouvent déjà developées les techniques nécessaires pour notre objectif et formulées des idées qui nous ont guidé dans ce travail.

Beaucoup de résultats que nous avons obtenus sont valables dans les réticulés distributifs, mais si l'on veut se maintenir aussi près que possible de la notion d'espace topologique, il y a lieu de se demander quels sont les réticulés distributifs où l'on peut développer un calcul symbolique analogue au calcul topologique. D'après Janiszewski (pag. 82) "*Un des avantages de l'introduction du calcul symbolique est qu'il met bien en évidence les hypothéses nécessaires à la validité des raisonnements*'. En ce qui concerne le calcul topologique il peut se développer d'une façon satisfaisante dans les réticulés distributifs, où chaque élément a un sup-complément. Ces réticulés, considérés pour la prémière fois par G. Birkhoff, seront appelés *réticulés topologiques*.

Dans le Chapitre I nous étudions les réticulés topologiques en insistant sur la notion de voisinage d'un élément et sur les axiomes de séparation. Il paraît que la notion de voisinage n'a pas été formulée auparavant dans les réticulés topologiques, où pourtant elle peut s'exprimer très simplement. Cette notion, dont l'importance a été mise en évidence par Fréchet, prend alors un caractère algébrique. L'axiome de la complète normalité aparaît ici libéré de la considération des parties de l'espace qui ne sont pas fermés.

Dans le Chapitre II nous étudions, en développant une idée d'Alexandroff, la notion de voisinage au sens absolu. Il ne s'agit plus du filtre des voisinages fermés d'un point ou plus généralement d'un ensemble fermé, mais surtout de savoir quel sont les filtres qui doivent être considérés comme des voisinages. Alors on peut parler du réticulé des voisinages et chaque voisinage est divisible par un ultravoisinage.

La théorie des voisinages prend une forme très simple dans le cas des réticulés topologiques normaux.

Le Chapitre III est consacré à l'étude de la notion de filtre premier. Nous montrans d'abord que les seuls réticulés où chaque filtre est le m.m.c. de filtres premiers sonts les réticulés distributifs. La considération des représentations minimales nous a amené à étudier les arithmétiques finies, en indiquant une caractérisation intrinsèque des réticulés correspondants.

Dans le Chapitre IV nous étudions la notion d'ultrafiltre et l'arithmétique correspondante. Après avoir indiqué une caractérisation des ultrafiltres dans les réticulés distributifs nous déterminons les réticulés distributifs où tous les filtres premiers sont des ultrafiltres en généralisant légèrement l'important théorème de Stone-Nachbin: "Pour que dans un réticulé distributif R contenant un premier et un dernier élément, tout filtre premier soit un ultrafiltre il faut et il suffit que R soit une algèbre de Boole". Nous analysons aussi la notion de filtre premier maximal, qui sera utilisée plus tard.

Dans le Chapitre V nous étudions la notion de puissance première, qui nous permettra de caractériser l'arithmétique des espaces topologiques normaux et complètement normaux, des semi-arithmétiques de M. Ward et des espaces topologiques extrêmement disconexes. On arrive alors à avoir une idée assez claire de la distribuition des filtres premiers dans ces divers réticulés.

Les propiétés arithmétiques étudiées sont les suivantes:

1) Chaque filtre premier est divisible par un seul ultrafiltre;
2) Tout filtre qui divise un filtre premier est un filtre premier;
3) Deux filtres premiers incomparables sont relativement premiers;
4) Chaque ultafiltre divise un seul filtre premier maximal.

Ces propriétés caractérisent respectivement les espaces qui vérifient l'axiome de la normalité, celui de la normalité complète, les semi-arithmétiques de M. Ward et les espaces topologiques extrêmement disconnexes.

Dans le Chapitre VI, nous développons l'étude de l'arithmétique des espaces topologiques normaux. Pour cela nous introduisons la notion de facteur primaire et plus généralement celle de multiple primaire. Un filtre F' est un multiple primaire du filtre F si F divise F' et si tout ultrafiltre que divise F' divise aussi F. On démontre alors que le voisinage V(F) du filtre F est un multiple primaire maximal de F, c.a.d. tout multiple primaire de F est un diviseur de V(F). Nous étudions aussi la famille de tous les diviseurs primaires d'un voisinage V, dans laquelle il existe un diviseur minimal F(V)(dans le cas des espaces compacts F(V) est un filtre principal). La théorie des ultra facteurs primaires correspond au cas particulier où V est un ultravoisinage et F(V) un ultrafiltre.

Nous démontrons en passant que chaque voisinage est le m.m.c. d'ultravoisinages. Nous croyons avoir ainsi mis en évidence le caractère essentiellement arithmétique de la notion de voisinage. Pour obtenir un ultravoisinage nous n'avons qu'à prendre un ultrafiltre U, déterminer toutes les puissances maximales de U, et calculer son m.m.c. Tout ultravoisinage peut être obtenu de cette manière. Un ultravoisinage n'est pas un filtre premier mais c'est le multiple primaire maximal d'un ultrafiltre.

En définissant le *radical* d'un filtre F (en notation Rad F) comme le m.m.c. des ultrafiltres qui divisent F nous démontrons les formules suivantes: Rad F = Rad V(F); V(F) = = V(Rad F). Cela peut nous conduire à penser que la notation de voisinage est analogue à celle de variété algébrique.

Finalement nous remarquons que la représentation normale d'un filtre comme le m.m.c. de facteurs primaires univoquement détérminés permet l'extension immédiate des régles élémentaires de calcul du m.m.c. et p.g.c.d. de deux entiers.

Dans le Chapitre VII nous montrons que plusieurs problèmes de représentation des réticulés distributifs peuvent être considérés comme des constructions pour plonger un réticulé distributif dans un autre qui a une arithmétique normale. C'est ce qu'on fait par exemple dans la compactification de Cech-Stone d'un espace complètement régulier. Il faut cependant distinguer deux types de représentations isomorphes: les sup-représentations et les inf-représentations. Nous indiquons, en passant, une technique pour obtenir des sup-représentations d'un réticulé distributif à partir des filtres de R.

En résumé nous avons pour but principal, dans ce travail, d'étudier l'arithmétique des filtres premiers des espaces topologiques normaux; mais comme nous pensons qu'il n'est pas nuisible de se débarrasser des hypothèses inutiles, nous avons été conduits à travailler dans les réticulés topologiques. Un lecteur intéressé par la logique peut envisager un réticulé topologique R comme une logique spéciale plus générale que celle de Brouwer et interpréter les filtres de R comme des systèmes deductifs (Tarski); il trouvera alors des résultats assez précis sur l'arithmétique des systèmes déductifs, parmi lesquels il est convenable de distinguer les voisinages V comme des systèmes déductifs où la méthode de réduction à l'absurde est applicable dans une certaine mesure.

Une conclusion que résulte de ce travail c'est que la notion de voisinage est assez subtile - au point de vue de l'aritmétique - car les ultrafiltres sont, en général, insuffisants pour décrire un voisinage. Cependant cette notion a été introduite (sous une forme plus restrictive) par M. Fréchet dès les débuts de la topologie générale et il est un peu surprenant de voir qu'elle a un rapport direct avec l'arithmétique (tout au moins dans le cas des espaces topologiques normaux).

CHAPITRE I

LES RÉTICULÉS TOPOLOGIQUES

1. RÉTICULÉS.

Nous allons indiquer dans ce chapitre les notions de la théorie des réticulés que nous aurons à utiliser par la suite. Nous étudions surtout la notion de réticulé topologique introduite par Garrett Birkhoff en montrant qu'un certain nombre de théorèmes de la topologie générale sont valables dans ces réticulés.

Un *ensemble ordonné* est un ensemble, non vide, R sur lequel est définie une relation binaire $x \subseteq y$ telle que:

O1) $x \subseteq x$

O2) Si $x \subseteq y$ et $y \subseteq x$ alors $x = y$

O3) Si $x \subseteq y$ et $y \subseteq z$ alors $x \subseteq z$

Si la *rélation d'ordre* $\subseteq$ vérifie encore la condition:

O4) Quel que soit le couple x, y de R on a: soit $x \subseteq y$ soit $y \subseteq x$.

nous dirons que R est une *chaîne*, un *ensemble totalement ordonné* ou un *ensemble linéairement ordonné*.

Un ensemble ordonné R sera dit un *réticulé* (lattice) si tout couple $x,y \in R$ a une borne supérieure $x \cup y$ (supremun de x et y) et une borne inférieure $x \cap y$ (infimum de x et y).

Nous répresenterons par R_o un réticulé qui contient un premier élément 0, par R_1 un réticulé qui contient un dernier élément 1 et par $R_{o,1}$ un réticulé qui contient 0 et 1.

Nous aurons surtout à nous occuper des réticulés distributifs, c.a.d. tels que:

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

Indiquons quelques exemples de réticulés distributifs que nous aurons à rappeler para la suite:

EXEMPLE 1. L'ensemble $R=N_1$ des entiers positifs: 1,2,... ordonné par la relation "a *divise* b" est un réticulé distributifs où 1 est le premier élément.

EXEMPLE 2. L'ensemble $R=N^o$ des entiers: 0,1,2,... ordonné par la relation "a *divise* b". L'entier 0 est le dernier élément de N^o.

EXEMPLE 3. La famille R de tous les ensembles fermés d'un espace topologique ordonné par la rélation d'inclusion $\leqslant$. L'ensemble vide $\emptyset$ est le premier élément de R et l'ensemble 1 de tous les points de l'espace est le dernier élément de R.

EXEMPLE 4. La famille R de tous les ensembles ouverts d'un espace topologique.

EXEMPLE 5. L'ensemble R de tous les nombres réels, ordonné par la relation $a \leqslant b$ (a plus petit ou égale à b).

EXEMPLE 6. L'espace euclidien à n dimensions R^n, où les points $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$, ... sont ordonnés par la relation $x \subseteq y$ si et seulement si $x_i \leqslant y_i$, pour $i = 1,2,\ldots,n$.

Une chaîne est un réticulé distributif. Par cette raison nous donnerons parfois aux chaînes le nom de réticulés linéaires.

2. COMPLÉMENTS.

Les réticulés distributifs les plus intéressants sont ceux dans lesquels il existe une complémentation.

Nous dirons, avec Garrett Birkhoff, que x^o est le sup-complément de x si:

1) $x \cup x^o = 1$
2) $x \cup y = 1$ entraîne $x^o \subseteq y$.

Si x^o existe est univoquement determiné.

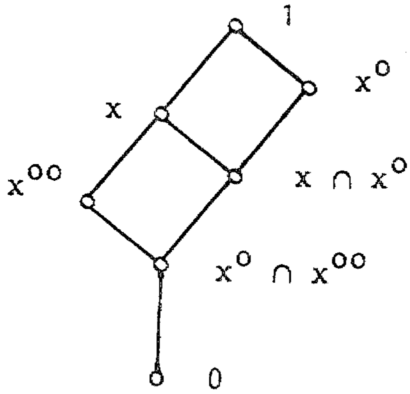
DÉFINITION 2.1. *Un réticulé distributif* $R_{o,1}$ *sera dit un réticulé topologique si chaque élément de* $R_{o,1}$ *a un sup-complément.*

On démontre facilement que:

3) $1^o = 0 \;;\; 0^o = 1$
4) $x^{oo} \subset x$
5) Si $x \subseteq y$ alors $y^o \supseteq x^o$
6) $x^{ooo} = x^o$
7) $(x \cap y)^o = x^o \cup y^o$
8) $(x \cup y)^o \subseteq x^o \cap y^o$
9) $(x \cup y)^{oo} = x^{oo} \cup y^{oo}$
10) $(x \cap y)^{oo} = (x^{oo} \cap y^{oo})^{oo}$
11) $(x \cap x^o)^{oo} = 0$

$$12)\ (x \cup y)^{o} = (x^{o} \cap y^{o})^{oo}.$$

A partir de chaque élément x on peut obtenir (par l'intermédiaire des opérations ^{o}, $\cup$, $\cap$) au plus sept éléments, à savoir 0, $x^{o} \cap x^{oo}$, x^{oo}, $x \cap x^{o}$, x, x^{o} et 1. Le diagrame de Hasse de ces éléments est indiqué dans la figure ci-jointe.



On définit d'une façon duale la notion d'inf-complément x_{o} de x et les formules duales des formules 3-12 sont encore valables.
Le réticulé de l'exemple 3 est un réticulé topologique.

Nous dirons que x' est un complément de $x \cap x' = 0$, $x \cup x' = 1$. Un réticulé distributif où chaque élément a un complément est ce qu'on appelle une *algèbre de Boole.*

DÉFINITION 2.2. *Un élément* x *d'un réticulé topologique est régulier si* $x^{oo} = x$.

Il est connu que la famille A de tous les éléments réguliers d'un réticulé topologique, ordonnée par la relation $\subseteq$ est une algèbre de Boole (Glivenko, Stone [1], pag. 66). Si x et y sont réguliers la borne supérieure de x et y dans A est $x \cup y$ et la borne inférieure est $(x \cap y)^{oo}$.

Une algèbre de Boole peut être définie comme un réticulé topologique où tous les éléments sont réguliers.

Les réticulés des exemples 2 et 3 sont des réticulés topologiques.

Un *élément* tel que $x^o = 1$ sera dit rare (Bourbaki [3]). Un *réticulé topologique est rare si tous les éléments* $x \neq 1$ *sont rares*. Le réticulé de l'exemple 2 est rare.

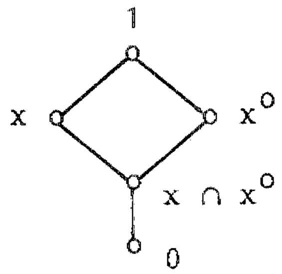
Il est facile de voir qu'un réticulé topologique est rare si et seulement si les seuls éléments réguliers sont 0 et 1.

Dans le réticulé de l'exemple 3 les *éléments réguliers sont les domaines fermés c.a.d. les fermetures des ensembles ouverts*. Comme exemple d'un espace T1 compact qui est rare nous pouvons indiquer un ensemble infini I où la famille des ensembles fermés est constituée par les parties finies de I, I et $\emptyset$.

D'après les formules 3), 6) et 11) les éléments de la forme $x \cap x^o$ son rares. Réciproquement si x est rare ($x^o=1$) alors $x = x \cap 1 = x \cap x^o$. L'élément 0 est rare. *Si* 0 *est le seul élément rare de* R, alors $x \cap x^o = 0$ quel que soit x, c.a.d. x^o est le complément de x, donc R *est une algèbre de Boole*. Réciproquement si R est une algèbre de Boole, 0 est le seul élement rare de R. *Nous pouvons donc définir les algèbres de Boole comme les réticulés topologiques ayant un seul élément rare; c'est l'extrême opposé des réticules rares.*

Le seul élement régulier qui est rare c'est l'élément 0, car si $x = x^{oo}$ et $x^o = 1$ alors $x = 0$. Cela peut nous conduire à penser que les réticulés topologiques les plus simples sont ceux où il existe des éléments réguliers en quantité suffisante pour déterminer les autres éléments de R (cela peut se faire de plusieurs manières que nous ne précisons pas, pour le moment). Si x et y sont réguliers, alors $x \cup y$, x^o et y^o sont aussi réguliers, donc *le sous-réticulé* B *engendré dans* R *par l'ensemble* A *des éléments réguliers s'obtient en formant les bornes inférieures d'un nombre fini d'éléments réguliers.* L'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire a ce propos c'est d'admettre que B = R. Nous indiquons ci-joint le diagramme de Hasse d'un réticulé topologique pour lequel $B \neq R$.

Un réticulé tel que R = B sera dit *extrêmement régulier.*



Le réticulé de la Fig.1 n'est pas extrêmement régulier, mais il est clair que toutes les algèbres de Boole sont extrêmement régulières. De l'identité évidente $x = x^{oo} \cup (x \cap x^o)$ on déduit que chaque élément de R est la borne supérieure d'un élément rare et d'un élément régulier. Donc pour qu'un réticulé topologique soit extrêmement régulier il faut et il suffit que chaque élément rare soit l'intersection d'un nombre fini d'éléments réguliers.

Il serait intéressant de déterminer les réticulés topologiques extrêmement réguliers.

Une hypothèse moins restrictive que celle de l'extrême régularité est celle introduite par Stone [2] et qui consiste à admettre que:

Chaque élément de R *est la borne inférieure d'élément réguliers* (en nombre fini ou non).

Nous dirons alors que R est *semi-régulier*. On peut même dire que certains axiomes de séparation introduits en topologie on pour but de déterminer les éléments rares à partir des éléments reguliers.

Il est convenable de remarquer que si un élément x est la borne supérieure d'élément reguliers (en nombre quelconque) alors x est regulier, donc pour obtenir de nouveaux élément à partie de A il faut faire intervenir l'opération borne inférieure.

Il existe una relation importante entre un réticulé topologique R et l'algèbre de Boole A des éléments reguliers de R, signalée pour la première fois par Glivenko, à savoir:

L'opération $f(x) = x^{oo}$ *est un homomorphisme de* R *sur* A.

Pour la démonstration de ce résultat et d'autres détails, voir G. Birkhoff ([1], pag. 147-149).

A propos de la couverture d'un élément x par des éléments reguliers il convient de signaler le résultat suivant:

S'il existe une famille d'éléments réguliers r_i *ayant une borne supérieure* $b = \cup r_i$ *telle que*: 1) $x \subseteq b$; 2) $x \cap r_i$ *est rare quel que soit* i; *alors* x *est rare.*

En effect: comme $x \cap r_i$ est rare nous aurons:

$I = (x \cap r_i)^o = x^o \cup r_i^o$, quel que soit i, donc $x^o \supseteq r_i^{oo} = r_i$ et par conséquent $x^o \supseteq b = \cup r_i \supseteq x$ d'où $x^o = x \cup x^o = I$ et x est rare.

3. VOISINAGES.

Dans un réticulé topologique on peut introduire d'une façon très naturelle la notion de voisinage de la manière suivante:

DÉFINITION 3.1. *Si* R *est un réticulé topologique nous dirons que* v *est un voisinage de* x *si* $x \cap v^o = 0$.

De $v \cup v^o = I$ on déduit $x = x \cap I = x \cap (v \cup v^o) = (x \cap v) \cup (x \cap v^o) = x \cap v$ donc $x \subseteq v$, c'est-à-dire tout élément est contenu dans chacun de ses voisinages.

De $v^o = (v^{oo})^o$ on deduit que v^{oo} est aussi un voisinage de x, donc chaque voisinage de x contient un voisinage de x qui est régulier et nous aurons en géneral.

$$x \subseteq v^{oo} \subseteq v \ , \text{ avec } x \cap v^o = 0$$

Les voisinages de x ont les propriétés suivantes:

V1) *Si* v *est un voisinage de* x *alors* $x \subseteq v$.

V2) *Si* v *est un voisinage de* x *il en est de même pour* v^{oo}.

V3) *Si* v' *et* v'' *sont des voisinages de* x *alors* $v' \cap v''$ *est un voisinage de* x.

V4) *Si* v *est un voisinage de* x *et* $v \subseteq w$ *alors* w *est un voisinage de* x.

ce qu'on établit sans aucune espèce de difficulté.

Il est maintenant naturel d'introduire la définition suivante:

DÉFINITION 3.2. *Un réticulé topologique* R *sera dit régulier si tout élément de* R *est la borne inférieure de ses voisinages.*

En tenant compte de la propriété V2), on voit qu'un réticulé topologique régulier est semi-régulier (au sens de Stone).

Si R est le réticulé des ensembles fermés d'un espace T1 on voit facilement qu'on peut définir les espaces topologiques réguliers de la manière que nous venons d'indiquer.

REMARQUE. Il est facile de déterminer tous les voisinages réguliers d'un élément x. Pour que v soit un voisinage régulier de x il faut et il suffit que v soit le sup-complément d'un élément y incompatible avec x (c.a.d.: 1) $v = y^o$ 2) $x \cap y = 0$.

En effet si v est un voisinage régulier de x nous aurons, par définition de voisinage: $x \subseteq v^{oo} = v$, donc les conditions 1) et 2) sont vérifiées en posant $y = v^o$.

Supposons maintenant que v vérifie les conditions 1) et 2); de la condition $y^{oo} \subseteq y$ et de 2) on déduit que $x \cap y^{oo} = 0$ et cela veut dire que $y^o = v$ est un voisinage régulier de x.

4. NORMALITÉ.

L'axiome de la normalité de Uryshon peut être formulé dans un réticulé arbitraire de la manière suivante:

DÉFINITION 4.1. *Si* $R = R_{o,1}$ *est un réticulé, nous dirons que l'axiome de la normalité est vérifié si: pour chaque couple d'éléments incompatibles* x_1, x_2 *il existe des éléments* v_1 *et* v_2 *tels que:*

1) $x_1 \subseteq v_1$, $x_2 \subseteq v_2$; 2) $x_1 \cap v_2 = x_2 \cap v_1 = 0$;

3) $v_1 \cup v_2 = 1$. (H. Wallman)

Si R est distributif alors la condition 1) est une conséquence de 2) et 3), car $x_1 = x_1 \cap I = x_1 \cap (v_1 \cap v_2) =$

$= (x_1 \cap v_1) \cup (x_1 \cap v_2) = x_1 \cap v_1$, donc $x_1 \subseteq v_1$. De même on démontre que $x_2 \subseteq v_2$.

LEMME 4.1. *Dans un réticulé topologique, l'axiome de la normalité* N1 (déf.4.1) *est équivalent à chacun des deux axiomes suivants:*

N2) *Chaque couple d'éléments incompatibles ont des voisinages réguliers disjoints.*

N3) *Chaque couple d'éléments incompatibles ont des voisinages disjoints.*

Dém. N1) entraîne N2). Soient x_1 et x_2 des éléments incompatibles, v_1 et v_2 des éléments qui vérifient les conditions 2) et 3) indiquées dans la définition 4.1). De 2) on déduit que $r_1 = v_2^o$ *est un voisinage régulier de* x_1. De la condition 3) on déduit que $r_1 = v_2^o \subseteq v_1$.

v_1 étant incompatible avec x_2 (d'après 2) il existe un couple w_1, w_2 tel que 2') $v_1 \cap w_2 = x_2 \cap w_1 = 0$; 3') $w_1 \cup w_2 = I$. De 2') on déduit que $r_2 = w_1^o$ *est un voisinage régulier de* x_2 et 3') on déduit que $r_2 \subseteq w_2$.

Alors $r_1 \cap r_2 \subseteq v_1 \cap w_2 = 0$, donc $r_1 \cap r_2 = 0$ et N2) est démontré.

Il est évident que N3) est une conséquence de N2). Démontrons finalement que N1) est un conséquence de N3). Soient donc v_1, v_2 deux voisinages, respectivement de x_1, x_2, qui soient disjoints; c'est-à-dire: a) $x_1 \cap x_2 = 0$; b) $v_1 \cap v_2 = 0$; c) $x_1 \cap v_1^o = x_2 \cap v_2^o = 0$. Posons $w_1 = v_2^o$, $w_2 = v_1^o$; alors de b) on déduit $w_1 \cup w_2 = I$ et c) exprime que $x_1 \cap w_2 = x_2 \cap w_1 = 0$ donc l'axiome N1) est vérifié.

Il y une classe très importante de réticulé topologique réguliers qui sont nécessairement normaux.

DÉFINITION 4.2. *Une partie* C, *non vide, d'un réticulé* R_o *est dite compatible si chaque partie finie de* C *a une borne inférieure différente de* 0. *Nous dirons que* R_o *est compact si pour chaque partie* $C = \{x_i\}$ *compatible de* R_o *il existe un élément* $z \neq 0$ *tel que* $z \subseteq x$, *pour tous les* i.

DÉFINITION 4.3. *Un élément* x *d'un réticulé* R_o *est dit compact, si la famille des éléments* z *tels que* $z \subseteq x$ *est un réticulé compact.*

Nous pouvons maintenant démontrer que:

THÉORÈME 4.1. *Si deux élément incompatibles* x *et* y *d'un réticulé topologique* R *sont tels que:*
1) x *est la borne inférieure de ses voisinages.*
2) y *est compact; alors* x *a un voisinage disjoint de* y (Uryshon).

Dém. Soit alors $x = \cap v_i$ où $x \cap v_i^o = 0$ et y compact.

Il suffit de montrer qu'il existe un i tel que $v_i \cap y = 0$, et alors v_i^o est un voisinage de y disjoint de x.

Supposons que $c_i = v_i \cap y \neq 0$, quel que soit i. Comme la borne inférieure d'un nombre fini de voisinages de x est un voisinage de x les c_i forment un ensemble compatible d'éléments tels que $c_i \subseteq y$. Mais y étant compact il existe un z $z \neq 0$ tel que $z \subseteq c_i \subseteq v_i$, quel que soit i donc $z \subseteq x = \cap v_i$ et alors $z \subseteq x \cap y = 0$, c.a.d. $x = 0$ et cette contradiction démontre le théorème.

COROLLAIRE 4. *Un réticulé topologique régulier et compact vérifie l'axiome de la normalité,* Il y a encore une forme de l'axiome de la normalité qu'il est convenable de signalar:

N4) *Si* x *et* y *sont incompatibles il y un voisinage* v *de* x *incompatible avec* y.

Cet axiome est apparemment plus faible que N3), mais en réalité il entraîne N1). En effet par hypothèse $x \cap v^o = 0$ et $v \cap y = 0$. Alors $x' = v$ et $y' = v^o$ vérifient les conditions 2) $x \cap y' = x' \cap y = 0$; 3) $x' \cup y' = I$, c.a.d. l'axiome N1) est vérifiés.

5. NORMALITÉ COMPLÈTE.

L'axiome de la complète normalité, qu'on introduit habituellement dans la théorie des espaces topologiques, est plus subtile que les axiomes de la semi-régularité, de la régularité et de la normalité.

On dit qu'un espace topologique I vérifie l'axiome de la normalité complète si:

1) *Toute partie* x *de* I *est un sous-espace qui vérifie l'axiome de la normalité.*

ou ce qui est équivalent:

2) *Deux parties séparée* x *et* y (c.a.d. telles que $\overline{x} \cap y = x \cap \overline{y} = 0$) *ont des voisinages disjoints.*

Les propriétés 1) et 2) font intervenir explicitement les parties x et y de l'espace *qui ne sont pas nécessairement fermés*. Donc pour pouvoir formuler cet axiome dans la théorie des réticulés topologiques il faut qu'il existe une forme équivalente de cet axiome ne faisant intervenir que les parties fermées de l'espace. C'est ce qui a effectivement lieu comme le montre le théorème suivante:

THÉORÈME 5.1. *Pour qu'un espace topologique* I *vérifie l'axiome de la normalité complète il faut et il suffit que la famille* R *des parties fermées de* I *jouisse de la propriété suivante:*

C) *Si* x, y *et* z *sont des parties fermées telles que* $x \cup y \subseteq z$ *il existe deux parties fermées,* x' *et* y' *telles que*: 1) $x \cap y' = x' \cap y = x \cap y$
2) $x' \cup y' = z$.

Dém. La condition est nécessaire. Soient x, y et z des parties fermées telles que $x \cup y \subseteq z$. Posons (1) $c = z-(x \cap y)$ c.a.d. c est la partie formée des points de z qui n'appartiennent pas à $(x \cap y)$.

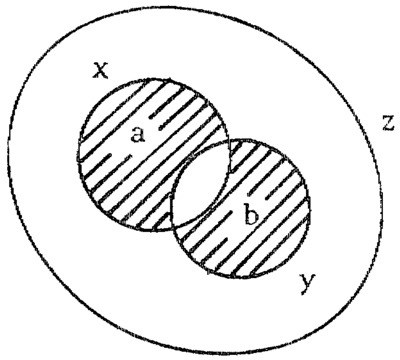


Fig. 3

Alors: $c = z \cap (I - (x \cap y))$, $z = c \cup (x \cap y)$..Possons:

$$(2)\ a = x - (x \cap y) \qquad (3)\ b = y - (x \cap y)$$

Alors: (4) $a = x \cap c$

x étant fermée dans I, a est une partie fermée dans c: en outre: (5) $x = a \cup (x \cap y)$.

De même on voit que b est fermée dans c et que

$$(6)\ b = y \cap c \qquad (7)\ y = b \cup (x \cap y)$$

Alors: (8) $a \cap b = x \cap y \cap c = 0$

Le sous-espace c étant normal, a et b deux parties disjointes, fermées dans c; il existe deux parties de c, fermées dans c, a' et b' telles que:

$$(9)\ a \cap b' = a' \cap b = 0; \qquad (10)\ a' \cup b' = c$$

D'où

$$(11)\ a \subseteq a' \quad , \quad b \subseteq b'$$

Mais a' et b' étant fermées dans c, il existe des parties fermées de I, x' et y' telles que

$$(12)\ a' = c \cap x' \quad , \quad b' = c \cap y'$$

Monstrons que nous pouvons choisir les parties fermées de I, x' et y', de telle manière que:

$$(13)\ x \cap y \subseteq x' \subseteq z$$

$$(14)\ x \cap y \subseteq y' \subseteq z$$

Pour cela il suffit de poser:

$$x^* = (x \cap y) \cup (z \cap x')$$

$$y^* = (x \cap y) \cup (z \cap y')$$

qui sont des parties fermés de I, vérifiant les conditions:

$$(x \cap y) \subseteq x^* \subseteq z \quad ; \quad (x \cap y) \subseteq y^* \subseteq z$$

En outre:

$$c \cap x^* = c \cap ((x \cap y) \cup (z \cap x') = (c \cap x \cap y) \cup$$

$$\cup (c \cap z \cap x') = 0 \cup (c \cap x') = a'$$

de même on voit que $c \cap y^* = b'$

Supposons donc que x' et y' vérifient les conditions (13) et (14). De (11), (12), (13), et (14) on déduit:

$$(15) \quad a' \subseteq x' \subseteq z \ ; \quad b' \subseteq y' \subseteq z$$

Donc en tenant compte de (15), (13) et (14)

$$a' \cup (x \cap y) \subseteq x' \cup (x \cap y) = x' \subseteq z$$

$$b' \cup (x \cap y) \subseteq y' \cup (x \cap y) = y' \subseteq z$$

et alors, en utilisant (10) et (1)

$$a' \cup b' \cup (x \cap y) = c \cup (x \cap y) = z \subseteq x' \cup y' \subseteq z$$

c'est-à-dire

$$(16) \quad x' \cup y' = z$$

Montrons finalement que

$$(17) \quad x \cap y' = x' \cap y = x \cap y$$

En utilisant successivement les formules (5), (14), (4) (12) et (9) on voit que

$$\begin{aligned} x \cap y' &= (a \cup (x \cap y)) \cap y' = (a \cap y') \cup (x \cap y \cap y') = \\ &= (a \cap y') \cup (x \cap y) = \\ &= ((x \cap c) \cap y') \cup (x \cap y) = \\ &= (x \cap b') \cup (x \cap y) = \\ &= (((a \cup (x \cap y)) \cap b') \cup (x \cap y) = \\ &= (a \cap b') \cup (x \cap y \cap b') \cup (x \cap y) = \\ &= (x \cap y \cap b') \cup (x \cap y) = x \cap y \end{aligned}$$

De même on voit que $x' \cap y = x \cap y$. Les formules (16) et (17) montrent que la condition C) est nécessaire.

La condition est suffisante. Supposons que la famille R des ensembles fermés d'un espace topologique I vérifie la condition C). Montrons que toute partie a de I est un sous-espace normal. Soient $u = a \cap x$, $v = a \cap y$, où $x,y \in R$ sont deux parties fermées dans a telles que $u \cap v = 0$. Soit

$z = I$; x', y' les éléments de R qui vérifient les conditions 1), 2) indiquées dans l'énoncé du théorème et posons

$$(18) \quad u' = a \cap x' \ , \quad v' = a \cap y'$$

Alors:

$$(19) \quad u' \cup v' = a \cap (x' \cup y') = a \cap I = a$$

$$(20) \quad u \cap v' = (a \cap x) \cap (a \cap y') = a \cap (x \cap y') =$$
$$= a \cap x \cap y = u \cap v = 0$$

De même

$$(21) \quad u' \cap v = 0$$

Les formules (18) montrent que u', v' sont des parties de a, fermées dans a; (19), (20) et (21) montrent que le sous-espace a est normal et la démonstration est terminée.

Nous sommes ainsi conduits à introduire la définition suivante:

DÉFINITION 5.1. *Nous dirons qu'un réticulé* R *vérifie l'axiome de la normalité relative si:*
NR) *étant donnés* $x,y,z \in R$ *tels que* $x \cup y \subseteq z$ *il existe deux éléments* x', $y' \in R$ *tels que:*

1) $x \cap y' = x' \cap y = x \cap y$

2) $x' \cup y' = z$

3) $x \subseteq x'$; $y \subseteq y'$.

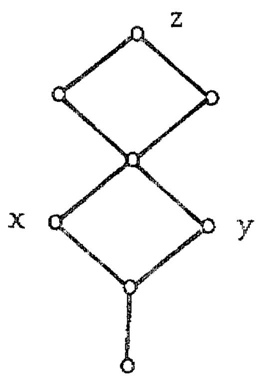
Cette définition a un sens, même si R n'est pas distributif et ne possède ni un premier élément ni un dernier élément; elle a donc une portée plus générale que la définition de normalité, tout en étant une notion plus restrictive.

REMARQUE: Si R est un réticulé distributif des conditions 1) et 2) on déduit la condition 3). En effet $x=x \cap z=$

$= x \cap (x' \cup y') = (x \cap x') \cup (x \cap y') = (x \cap x') \cup (x \cap y)$. De 1) on déduit que $x \cap y \subseteq x'$ donc $x \cap y \subseteq x \cap x'$ et alors l'égalité précédente prend la forme $x = x \cap x'$, c.a.d. $x \subseteq x'$. De même on voit que $y \subseteq y'$.

Nous pourrions aussi dire qu'un réticulé R vérifie l'axiome de la *normalité relative*, si tout segment de R (c.a.d. l'ensenble de tous les x tels que $a \subseteq x \subseteq b$, vérifie l'axiome de la normalité et cette remarque justifie la terminologie que nous avons introduite.

Il est bien clair qu'un réticulé $R_{o,1}$ vérifiant l'axiome de la normalité relative vérifie aussi l'axiome de la normalité. Dans la figure ci-jointe est indiqué le diagrame de Hasse d'un réticulé distributif fini, qui vérifie l'axiome de normalité sans vérifier l'axiome de la normalité relative; car pour les éléments x, y, z, indiqués sur la figure les éléments x', y' de l'axiome NR) n'existent pas.



O. Ore [26] a considéré un axiome plus restrictif que NR) à savoir:

AXIOME DE ORE. *Si* $x \cup y \subseteq z$ *il existe des éléments* x', $y' \in R$ *tels que:* 1') $x' \cap y' = x \cap y$, 2) $x' \cup y' = z$ 3) $x \subseteq x'$, $y \subseteq y'$.

Il est bien clair que l'axiome de Ore entraîne l'axiome de la normalité relative, mais la réciproque n'est pas exacte. Pour le voir il suffit de considérér, dans un réticulé distributif $R_{o,1}$, un couple x, y $(x,y \neq 0)$ tel que $x \cap y = 0$ et prendre $z = 1$, alors les éléments x', y' de l'axiome de Ore vérifient les conditions $x' \cap y' = 0$, $x' \cup y' = I$, donc y' est le complément Booléen de x'. Alors le réticulé de tous les ensembles fermés d'un espace topologique complètement normal et connexe (la droite par exemple) ne vérifie pas l'axiome de Ore.

REMARQUE. L'axiome de la normalité complète peut être enoncé sous une forme plus simples, dans le cas d'un réticulé distributif ayant un dernier élément:

Pour chaque couple $x,y \in R$ *il existe un couple* x', y' *tel que* $x \cap y' = x' \cap y = x \cap y$; $x' \cup y' = I$.

Alors si z est tel que $x \cup y \subseteq z$, posons $x'' = z \cap x'$, $y'' = z \cap y'$. Nous aurons:

$$x'' \cup y'' = z \cap (x' \cup y') = z$$

$$x \cap y'' = x \cap (z \cap y') = x \cap y' = x \cap y$$

et de même $x'' \cap y = x \cap y$.

6. DISJONCTION.

Nous n'avons pas parlé, jusqu'ici, de l'axiome de Fréchet "*les points sont des ensembles fermés*" ou ce qui revient au même "*toute partie de l'espace est la réunion d'ensembles fermés*".

H. Walmann [1] a introduit la définition suivante:

DÉFINITION 6.1. *Un réticulé* R_o *est disjonctif si pour chaque couple d'éléments* $x,y \in R_o$ *qui ne vérifie pas la relation* $y \subseteq x$ *il existe un élément* w *tel que*

$x \cap w = 0$, $y \cap w \neq 0$.

On peut, si l'on veut, supposer dans la définition précédente que $w \subseteq y$, car $w' = w \cap y$ jouit de cette propriété.

Si un espace topologique jouit de la propriété suivante: "*tout ensenble ouvert est la réunion d'ensembles fermés*", plus faible que l'axiome de Fréchet, alors la famille des ensembles fermés de l'espace considéré jouit de la propriété de disjonction de Wallman. Mais malgré cela la propriété de disjonction de Wallman se prête à remplacer l'axiome de Fréchet.

DÉFINITION 6.2. *Un réticulé distributif disjonctif qui vérifie l'axiome de la normalité sera dit un réticulé normal, si l'axiome de la normalité complète est encore vérifié, nous dirons que le réticulé est complètement normal.*

Alors

THÉORÈME 6.1. *Un réticulé topologique normal est régulier.*

Dém. Soit R un réticulé topologique normal et supposons que x n'est pas la borne inférieure de ses voisinages v_i. Il existe alors un élément z tel que: 1) $z \subseteq v_i$ quel que soit i; 2) la relation $z \subseteq x$ n'est pas vérifiée. Dans ces conditions il existe un élément $w \neq 0$ tel que 3) $w \subseteq z$; 4) $w \cap x = 0$. De 4) on deduit qu'il existe un voisinage v_i de x incompatible avec w, mais $w \subseteq v_i$ donc $w = 0$ et la démonstration est términée.

Il paraît plus difficile de trouver un remplaçant, dans les réticulés topologiques, pour l'axiome de Hausdorff. Cela peut se faire dans une algèbre de Boole topologique, dont la définition sera indiquée plus loin, mais l'enoncé correspondant a une forme très compliquée.

7. RÉTICULÉS ET LOGIQUES DE BROUWER.

Lorsqu'on cherche les propriétés arithmétiques communes à la théorie des entiers et à celle des espaces topologiques on est frappé par les complications qui s'introduisent si le nombre zéro est consideréré comme un entier. Il faut penser aux réticulé R qui n'ont pas nécessairement un dernier élément. La notion de réticulé de Brouwer, introduite par G. Birkhoff, semble adaptée à des applications multiples. M. Ward [38] a d'ailleurs développé une étude sur l'arithmétique d'une classe spéciale de réticulés de Brouwer dont nous parlerons plus loin mais les restrictions qu'il impose nous écartent des espaces topologiques les plus courants.

> DÉFINITION 7.1. *Un réticulé* R_o *sera dit un réticulé de Brouwer, si por chaque* $x, y \in R_o$ *il existe un élément* z *tel que:* 1) $x \subseteq y \cup z$; 2) *Si* $x \subseteq y \cup w$ *alors* $z \subseteq w$ *(nous dirons que* z *est la "différence"* $z = x \dot{-} y$) *Une Logique de Brouwer est un réticulé de Brouwer ayant un dernier élément.*

Un réticulé de Brouwer est nécessairement distributif (G. Birkhoff [1], pag. 148, M. Ward). Toute Logique de Brouwer est un réticulé topologique car $x^o = 1 \dot{-} x$; mais la réciproque n'est pas exacte. Nous renvoyons aux travaux de Birkhoff, M. Ward, Tarski et Mac Kinsey pour l'étude des propriétés de l'opération de "différence". Signallons seulement la formule suivante, que nous aurons à utiliser plus tard:

$$x^{oo} \dot{-} x^o = x^{oo} \text{ , d'où } x^o \dot{-} x^{oo} = x^o .$$

Pour la démontrer remarquons que $x^{oo} \subseteq x^o \cup x^{oo}$. D'autre part si $x^{oo} \subseteq x^o \cup w$ alors $1 = x^o \cup x^{oo} \subseteq x^o \cup w$, d'où

$x^o \cup w = 1$, donc $x^{oo} \subseteq w$ et cela suffit pour démontrer que $x^{oo} \dot{-} x^o = x^{oo}$.

La famille des ensembles fermés d'un espace topologique est une Logique de Brouwer et cette notion semble bien adaptée au développement d'un calcul topologique (voir à ce propos les travaux de Tarski et Mc Kinsey [22]).

Rappelons maintenant la définition suivante:

DÉFINITION 7.2. (Terasaka). *Une algèbre de Boole A sera dite une algèbre de Boole topologique si l'on se donne une opération qui à chaque élément* $x \in A$ *fait correspondre un élément* $\overline{x} \in A$ *de telle manière que les axiomes suivants soient vérifiés:*

$\overline{0} = 0$, $\overline{x \cup y} = \overline{x} \cup \overline{y}$; $x \subseteq \overline{x}$; $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$.

On montre facilement que les éléments fermés $x = \overline{x}$ de A forment une Logique de Brouwer et toute logique de Brouwer peut être obtenue de cette manière (Tarski et Mac Kinsey). La différence $x \dot{-} y$ doit être définie comme l'élément $\overline{x \cap y'}$ (où x et y sont fermés et y' est le complément de Boole de y).

Un exemple très important d'algèbre de Boole topologique complète est, d'après L. Nachbin, l'algèbre quotient A de toutes les parties de la droite par l'ideál des ensembles de mesure nulle. A vérifie l'axiome de Frechét "*tout* $x \in A$ *est la borne supérieure d'éléments fermés*" auquel on peut donner, avec L. Nachbin, une forme plus faible "*pour chaque* $x \neq 0$, $x \in A$, *il existe un élément fermé* f, *tel que* $0 \subset f \subseteq \subseteq x$".

L. Nachbin a trouvé aussi une manière de formuler l'axiome To dans une algèbre de Boole topologique. Il serait intéressant de formuler l'axiome To dans une logique de Brouwer et même dans un réticulé topologique.

Nous ne voyons pas clairement quel rôle pourrait jouer l'operation de différence, dans le développement de la topologie. Indiquons en tout cas un exemple, où il est commode, tout au moins, de s'en servir.

Il est bien connu que dans un réticulé distributif complet l'existence de la différence $x \dot{-} y$, pour tous les couples x,y, est équivalente à la loi distributive:

$$x \cup (\cap y_i) = \cap (x \cup y_i)$$

Alors, si dans une Logique de Brouwer complète les éléments rares sont réguliers on peut démontrer fácilement que tous les éléments sont réguliers. En effet pour chaque x posons: $x = x^{oo} \cup (x \cap x^o)$. Comme $n = x \cap x^o$ est rare nous aurons $n = \cap v_i$, avec $n \cap v_i^o = 0$, donc:

$$x \cap (x^{oo} \cup v_i)^o \subseteq x \cap (x^o \cap v_i^o) = n \cap v_i^o = 0$$

Cela montre que les $w \;= x^{oo} \cup v_i$ sont des voisinages de x.

En outre

$$x = x^{oo} \cup n = x^{oo} \cup (\cap v_i) = \cap (x^{oo} \cup v_i) = \cap w_i.$$

et tous les éléments sont réguliers.

Les notions de réticulé distributif, disjonctif, normal, complètement normal, montrent que l'existence d'un sup-complèment n'est pas absolument indespensable pour étudier un certain nombre de notions. Tout ce qu'on peut dire c'est que dans les réticulés topologiques certaines notions se présentent sous une forme plus simple (la notion de voisinage, par exemple).

8. CONNEXION.

Dans un réticulé topologique on peut introduire la notion de frontière, DÉFINITION 8.1. *La frontière de* $x \in R$ *est, par définition, l'élément* $Fr(x) = x \cap x^o$.

La frontière de chaque élément est par conséquent un élément rare et réciproquement chaque élément rare est la frontière d'un élément de R. On démontre sans difficulté les formules de calcul:

1) $x = x^{oo} \cup Fr(x)$, donc $Fr(x) \subseteq x$
2) $Fr(x^o) = Fr(x^{oo})$
3) $Fr(Fr(x)) = Fr(x)$
4) $Fr(x \cap y) = (Fr(x) \cap y) \cup (Fr(y) \cap x) \subseteq Fr(x) \cup Fr(y)$
5) $Fr(x \cup y) \subseteq (Fr(x) \cap y) \cup (Fr(y) \cap x) \subseteq Fr(x) \cup Fr(y)$

Les éléments qui sont identiques à leur frontière sont les éléments rares, à chacun desquels on peut donc donner le nom *d'éléments frontières*. Toutes les complications qu'on peut trouver dans un réticulé topologique ont pour origine les éléments frontières. Si 0 est le seul élément frontière alors

$$x \cap x^o = 0, \text{ quel que soit } x$$

c.a.d. R est une algèbre de Boole.

Les éléments x ayant une frontiere vide sont les éléments de R qui ont un complément de Boole, dans R; nous dirons alors que x est ouvert. Il en est ainsi pour 0 et 1. S'il n'y a pas d'autres éléments ouverts, on dit que R *est connexe*. Soit G la famille de tous les éléments ouverts. Il est évident que tous les éléments de G sont réguliers et que G est une algèbre de Boole et un sous-réticulé de R.

Nous avons donc en général $G \leqslant A$, A étant la famille des éléments réguliers de R.

Le cas extrême, opposé à la connexion, est celui où tous les éléments réguliers sont ouverts c.a.d. $G = A$. Cette condition peut s'exprimer en écrivant, plus simplement;

$$x^{o} \cap x^{oo} = 0 \text{ , quel que soit } x.$$

Nous dirons alors que R est *extrêmement disconnexe*; mais il faut employer ce langage avec précaution, car un réticulé rare serait simultanément connexe et extrêmement disconnexe.

Il faut donc exiger que R contienne des éléments réguliers distincts de 0 et 1. En réalité les cas les plus intéressants sont ceux où l'on exige, par exemple, que R soit un réticulé topologique régulier ou normal.

CHAPITRE II

FILTRES ET VOISINAGES

1. LES FILTRES.

Dans l'étude de la topologie on ne peut pas se borner à la consideration d'un ensemble fermé; on est, très souvent conduit à considérer des familles d'ensembles fermés. C'est ce qui arrive lorsqu'on formule, par exemple, les notions de compacité et de voisinage fermé. La famille V(p) de tous les voisinages (fermés) d'un point fixe p, joue un très grand rôle dans la topologie. Dans le cas des espaces réguliers la connaissance de V(p) détermine univoquement la topologie de l'espace considéré. La famille V(p) est un exemple particulier d'un *filtre*.

DÉFINITION 1.1. *Une famille* F *d'élément d'un réticulé* R *sera dite un filtre si*: 1) $x \in F$ *et* $x \subseteq y$ *entraînent* $y \in F$; 2) $x, y \in F$ *entraîne* $x \cap y \in F$; 3) $F \neq R$.

Si R contient un premier élément nous pouvons remplacer la condition 3) par 3') $0 \notin F$.

La famille de tous les éléments z tels que $x \subseteq z$, où $x \neq 0$, est un filtre qui sera representé par F(x) et appelé *filtre principal*.

Ce n'est qu'à une époque récente que la théorie des filtres a été développée d'une façon convenable, après les travaux de Tarski, Stone et Birkhoff. Ces auteurs s'occupent surtout de la notion d'idéal qui est duale de celle de filtre. Stone a donné aux filtres le nom de α-idéaux et pour Tarski qui était surtout interessé par des applications à la logique un idéal était un système déductif. Ces auteurs étaient principalement intéressés par la théorie de la représentation des algèbres de Boole et des réticulés distributifs.

En ce qui concerne ses applications à la topologie c'est avec H. Cartan, en 1937, que cette notion apparaît, pour la première fois, comme une généralisation de la notion de succession. N. Bourbaki et ses collaborateurs ont fait un usage systématique des filtres et des ultrafiltres dans l'étude des espaces topologiques, mais ils utilisent surtout les filtres de l'algèbre de Boole de toutes les parties d'un ensembles fixe.

Nous allons nous intéresser exclusivement par les filtres du réticulé R des ensembles fermés d'un espace topologique, auxquels on pourrait donner le nom, avec P. Samuel, de *filtres fermés*. La notion de système de générateurs d'un filtre fermé a été utilisée de bonne heure par Alexandroff et Uryshon, à propos de la notion d'espace compact (bicompact dans la terminologie de ces auteurs). H. Wallman a utilisé les filtres fermés pour compactifier les espaces T1, en montrant, par cela même, que les filtres fermés sont suffisants pour résoudre le problème en question.

Un espace topologique T1 étant déterminé univoquement par le réticulé R de ses ensembles fermés il est naturel de prévoir que, en général, toutes les questions importantes sur les espaces T1 puissent être résolues en travaillant sur R.

Dans la suite de ce travail nous verrons que les filtres fermés jouissent, dans certains espaces topologiques, de propriétés arithmétiques analogues à celles des nombres entiers.

Nous supposerons connues les propriétés les plus importantes des filtres d'un réticulé distributif; qui se trouvent exposés, par exemple, dans un travail de Stone [3]. Voir aussi G. Birkhoff [1].

Les notions de base de filtre, système de générateurs d'un filtre, etc. seront supposées connues. Voir à ce sujet: P. Samuel, A. Monteiro [1].

Rappelons seulement qui si l'on considère R comme un filtre (imprope) alors la famille $\Phi(R)$ de tous les filtres de R est une Logique de Brouwer complète et compacte, si l'on ordonne $\Phi(R)$ de la manière indiquée dans la définition suivante:

> DÉFINITION 1.2. *Nous dirons que le filtre* F *est un diviseur du filtre* F' *si l'ensemble* F *contient* F' *et nous écrirons* $F \subseteq F'$.

Un ultrafiltre est alors un élément minimal dans la famille des filtres propes et l'ordre que nous avons introduit se trouve en quelque sorte renversé par rapport au langage habituel. De même la borne supérieure des deux filtres F,F' est le filtre $F \cup F'$ (au sens du calcul des complexes) et la borne inférieure des mêmes filtres est le filtre $F \cap F'$ (au sens du calcul des complexes). Cela veut dire que $F \cap F'$, par exemple, est la famille de tous les éléments de la forme $f \cap f'$, où $f \in F$ et $f' \in F'$. R étant le plus petit élément de $\Phi(R)$; deux filtres sont incompatiples si $F \cap F' = R$, c.a.d. s'il exite $f \in F$, $f' \in F'$ tels que $f \cap f' = 0$.

La connaissance de la structure d'un réticulé distributif dépend essentiellement de la connaissance de $\Phi(R)$. Ce problème a été étudié d'une façon approfondie, dans le cas des algèbres de Boole, par H. Stone [4] qu'a a écrit à ce propôs "*we have introduced and discussed a certain classification of the ideals in a Boolean ring (or generalised Boolean algebra). Here we propose to carry out a detailed study of that classification, with the particular purpose of discovering what types of Boolean ring can be caracterised by properties of the ideal-structure*".

Dans ce travail nous reprenons la même idée, pour les réticulés distributifs, en cherchant les réticulés distributifs les plus généraux pour lesquels les filtres premiers jouissent des propriétés fixées d'avance.

Dans ce chapitre nous allons nous occuper de la notion de *voisinage* dans le réticulés topologiques. Dans la topologie on parle de voisinage d'un point. Mais en 1939, Alex Alexandroff a considéré pour la première fois, semble-t-il, la notion de voisinage au sens absolu. Nous allons voir ce que devient cette notion dans la théorie des réticulés topologiques.

2. LES FILTRES. RÉGULIERS.

Si l'on s'intéresse par des applications à la logique on peut interpréter un réticulé topologique R comme un ensemble de propositions; $x \cap y$, $x \cup y$, x^o comme les propositions: "x et y", "x ou y" et "non x". Alors nous aurons toujours $x \cup x^o = 1$, et il peut arriver que $x \cap x^o \neq 0$ (ce tte interprétation est donc duale de celle de Brouwer). On peut aussi interpréter, avec Tarski, un filtre comme un système déductif. Il y a donc lieu de chercher les filtres qui ne peuvent pas contenir simultanément les propositions x et x^o, quel que soit x, à chacun desquels nous donnerons le nom de *filtre semi-régulier*. Mais si l'on veut se maintenir aussi près que possible de la logique classique, il y a lieu d'introduire la définition suivante:

DÉFINITION 2.1. *Un filtre* F *sera dit régulier si* $x \in F$ *entraine* $x^{oo} \in F$.

Il est clair qu'un filtre régulier propre est semi-régulier mais la réciproque n'est pas exacte, comme le montre le filtre principal F(x) de la Fig. 1 du Chapitre 1.

Nous allons maintenant indiquer les relations qui existent entre les filtres réguliers de R et les filtres de l'algèbre de Boole A des éléments réguliers de R.

Soit H la famille de tous les éléments réguliers d'un filtre régulier F. Si p, $q \in H$, alors $p \cap q \in F$, donc $(p \cap q)^{oo} \in H$. Or $(p \cap q)^{oo}$ est la borne inférieure, de p et q, dans A. Cela montre que H est un filtre de A. En outre H est une base de F, car tout élément $x \in F$ suit un élément régulier de H à savoir x^{oo}. Ainsi à chaque filtre régulier de R correspond un filtre de A qui est une base de F (dans R). Réciproquement soit H un filtre de A. L'ensemble H est dans R une base de filtre, car si p, $q \in H$ alors $r=(p \cap q)^{oo}$ est un élément régulier de H tel que $r \subseteq p \cap q$. Soit F le filtre engendré dans R, par H; il est évident que H est la famille des éléments réguliers de F.

Il y a donc une *correspondance biunivoque entre les filtres réguliers de* R *et les filtres de* A.

Voyons maintenant que si F *est un filtre semi-régulier il existe un filtre régulier* K *divisant* F. En effet soit K la famille de tous les éléments de la forme x^{oo}, où $x \in F$, et montrons que K est une base de filtre. Soient x^{oo}, $y^{oo} \in K$ (donc $x,y \in F$), alors $(x \cap y)^{oo} \in K$ et $(x \cap y)^{oo} \subseteq x^{oo} \cap \cap y^{oo}$; il s'agit donc de montrer que $(x \cap y)^{oo} \neq 0$. Or $z = = x \cap y \in F$, donc si $z^{oo} = 0$ on aurait $z^{o} = 1$ et alors z, $z^{o} \in F$ ce qui est impossible, par hypothèse. Il est évident que le filtre F' engendré par K est régulier et divise F. Il est aussi evident que si un filtre régulier divise F il divise F' et nous pouvons parler du *filtre régulier engendré par un filtre semi-régulier.*

Les filtres semi-réguliers F sont ceux qui ne contiennent pas des propositions rares, c.a.d. de la forme $x \cap x^{o}$; et nous venons de voir qu'en ajoutant à F les doubles négations des propositions de F et toutes ses conséquences on obtient un filtre régulier divisant F.

3.- LES FILTRES VOISINAGES.

Le réticulé $\Phi(R)$ des filtres d'un réticulé distributif R étant un réticulé topologique, nous pouvons définir un voisinage d'un filtre F comme tout filtre V tel que $F \cap V^{o} = = R$ et il se pose naturelement le problème de caractériser d'une manière intrinsèque les voisinages qu'on peut obtenir de cette manière. Probablement il faut faire des restrictions convenables sur R, si l'on veut obtenir une théorie satisfaisante. On peut aussi chercher les réticulés R tels que $\Phi(R)$ soit régulier, normal complètement normal etc. Nous n'avons pas réussi à resoudre ces problèmes. Pour les applications que nous allons faire il nous suffit d'établir les résultats que nous allons indiquer par la suite:

DÉFINITION 3.1. *Si un filtre* V *d'un réticulé topologique est tel que chaque élément de* V *est un voisinage d'un élément de* V, *nous dirons que* V *est un filtre voisinage, ou plus simplement que* V *est un voisinage.*

La famille V(x) de tous les voisinages d'un élément x d'un réticulé topologique R est un filtre qui n'est pas nécessairement un filtre voisinage; mais si R vérifie l'axiome de la normalité V(x) est un voisinage au sens de la définition 3.1. Si R est la famille des ensembles fermés d'un espace topologique régulier, la famille de tous les voisinages fermés d'un point est un filtre voisinage de R.

On démontre sans difficulté les propositions suivantes:

1)*Chaque voisinage est un filtre régulier.*

2)*Si* V', V'' *sont des voisinages compatibles alors* $V' \cap V''$ *est un voisinage.*

Dém. Soit $V = V' \cap V''$. Les éléments de V sont de la forme $v = v' \cap v''$, où $v' \in V'$, $v'' \in V''$, v' est un voisinage de $x' \in V'$, et v'' un voisinage de $x'' \in V''$. Il suffit de montrer que v est un voisinage de $x = x' \cap x''$ qui est un élément de V. En effet $x \cap v^o = x \cap (v' \cap v'')^o = x \cap (v'^o \cup v''^o) =$
$= (x \cap v'^o) \cup (x \cap V''^o) = 0$.

3) *Si* V' *et* V'' *sont des voisinages alors* $V' \cup V''$ *est un voisinage.*

Dém. Les éléments de $V = V' \cup V''$ sont de la forme $v =$

$= v' \cup v''$, où $v' \in V'$ est un voisinage de $x' \in V'$ et $v'' \in V''$ est un voisinage de $x'' \in V''$. Posons $x = x' \cup x''$ et montrons que v est un voisinage de $x \in V$. En effet $x \cap v^o = (x' \cup x'') \cap \cap (v' \cup v'')^o \subseteq (x' \cup x'') \cap (v'^o \cap v''^o) = 0$ donc $x \cap v^o = 0$.

REMARQUE. Si l'on ajoute à la famille de tous les voisinages le voisinage impropre R, nous pouvons dire que la famille de tous les voisinages est un réticulé et même un sous-réticulé de $\Phi(R)$.

4) *La famille des filtres voisinages est inductive inférieurement, et alors chaque voisinage est divisible par un voisinage minimal.*

DÉFINITION 3.2. *A chaque voisinage minimal nous donnerons le nom d'ultravoisinage.*

Dans un espace topologique régulier la famille de tous les voisinages fermés d'un point p est un ultravoisinage.

DÉFINITION 3.3. *Si* F *est un filtre nous représenterons par* V(F) *la famille des voisinages des éléments de* F.

On reconnaît immediatement que:

5) V(F) *est un filtre*; $F \subseteq V(F)$

6) *Si* $F' \subseteq F''$ *alors* $V(F'') \subseteq V(F'')$

7) *Pour que* F *soit un voisinage il faut et il suffit que* $F = V(F)$.

THÉORÈME 3.1. *Dans un réticulé topologique, qui vérifie l'axiome de normalité,* V(F) *est un voisinage quel* *que soit le filtre* F.

Dém. Nous savons que V(F) est un filtre. Pour montrer que V(F) est un voisinage soit v un voisinage de $x \in F$. Comme $x \cap v^o = 0$ il existe un voisinage w de x incompatible avec v^o (voir Chapitre I, n°4, remarque finale). Alors $w \cap v^o = 0$ montre que v est un voisinage de $w \in V(F)$, ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE 3.1. $V(V(F)) = V(F)$.

Il est clair qu'un élément rare ne peut pas être le voisinage d'aucun élément $x \neq 0$.

THÉORÈME 3.2. *Dans un réticulé topologique normal tout élément qui n'est pas rare appartient à un voisinage tout au moins.*

Dém. Démontrons d'abord le théorème pour le cas d'un élément régulier qui ne soit pas rare: $r = r^{oo} \neq 0$. Nous ne pouvons pas avoir $r \subseteq r^o$ car autrement $r^o = 1$, $r^{oo} = 0$. Il existe alors un élément $x \in R$, $x \neq 0$, tel que $x \subseteq r$, $x \cap r^o = 0$; cela voulant dire que r est un voisinage de x, r appartient au voisinage $V(F(x))$ déterminé par le filtre principal $F(x)$. Dans le cas où x est un élément quelconque qui n'est pas rare, nous aurons $x^{oo} \neq 0$. Comme il existe un voisinage V contenant x^{oo} alors $x \in V$.

En ce qui concerne les relations entre les ultravoisinages et les ultrafiltres, nous renvoyons le lecteur au chapitre VI.

4. LES FILTRES D'ALEXANDROFF.

Dans un travail très important sur les extensions des espaces topologiques, Alexandroff [1] a consideré une classe de filtres ouverts, que nous allons examiner ici. Alexandroff les appelle filtres réguliers tandis que nous utiliserons cette expression dans un autre sens.

DÉFINITION 1. *Un filtre ouvert* G *(c.a.d. formé d'ensemble ouverts) d'un espace topologique est dit régulier si pour chaque ensemble* $g \in G$ *il existe un ensemble ouvert régulier* $g' \in G$ *tel que* $g' \subseteq g$.

Il s'agit de voir, surtout, quels seront les filtres fermés qui pourront jouer le rôle des filtres ouverts réguliers.

LEMME 1. *Si* $G = (g_i)$ *est un filtre ouvert alors l'ensemble* $B = (\overline{g}_i)$ *est la base d'un filtre fermé régulier.*

Dém. Soient $f' = \overline{g}'$ et $f'' = \overline{g}''$ des éléments de B; alors comme $g = g' \cap g'' \in G$ nous aurons $g \neq 0$ et $f = \overline{g} = \overline{g' \cap g''} \subseteq$ $\subseteq \overline{g}' \cap \overline{g}'' = f' \cap f''$. Cela suffit pour montrer que B est la base d'un filtre fermé F. Les éléments de B étant des domaines fermés (c.a.d. des ensembles fermés réguliers) alors F est un filtre fermé régulier. En outre les ensembles de B forment un filtre dans l'algèbre de Boole A, des ensembles fermés réguliers, car de $f = \overline{g} \subseteq f' \cap f''$ on déduit $f^{oo} =$ $= f \subseteq (f' \cap f'')^{oo} \subseteq f' \cap f''$; il nous reste, donc, à montrer que $(f' \cap f'')^{oo}$ est la fermeture d'un ensemble $h \in G$. Remarquons pour cela que $(f' \cap f'')^{oo} = \overline{i(f' \cap f'')} = \overline{i(f') \cap i(f'')}$. Mais de $g' \subseteq f'$, $g'' \subseteq f''$ on deduit $g' \subseteq i(f')$; $g'' \subseteq i(f'')$, $g \subset i(f') \cap i(f'')$, donc $h = i(f') \cap i(f'') \in C$ et de $(f' \cap f'')^{oo} = \overline{h}$ on déduit que: $(f' \cap f'')^{oo} \in B$.

Si G *est un filtre ouvert représentons par* $\overline{G}$ *le filtre fermé régulier engendré par* $B = (\overline{g_i})$.

LEMME 2. *Si* $F = (f_i)$ *est un filtre fermé régulier alors l'ensemble* $G = (i(f_i)$ *est la base d"un filtre ouvert régulier* ($i(x)$ *représente l'intérieur de l'ensemble* x).

Dém. Soient $g' = i(f')$, $g'' = i(f'')$ des éléments de G, alors comme $f = f' \cap f'' \in F$ nous aurons $i(f) \neq 0$ car: si $i(f) = 0$ alors $f^{oo} = \overline{i(f)} = 0$ et cela est impossible parce que $f^{oo} \in F$. Dans ces conditions $g = g' \cap g'' = i(f') \cap i(f'') =$ $= i(f' \cap f'') = i(f) \neq 0$ et comme $g = i(f) \in C$, G est la base d'un filtre ouvert régulier.

Si F *est un filtre fermé régulier représentons par* $i(F)$ *le filtre engendré par* $C = (i(f_i))$.

Démontrons maintenant le théorème suivante:

THÉORÈME 1. *Si* G *est un filtre ouvert régulier alors* $G = i(\overline{G})$. *Si* F *est un filtre fermé régulier alors* $\overline{i(F)} = F$.

Dém. G étant un filtre ouvert, $F = \overline{G}$ est formé par les ensembles fermés f pour chacun desquels il existe un $g \in G$ tel que $\overline{g} \subseteq f$. De $g \subseteq \overline{g} \subseteq f$ on déduit: $g \subseteq i(\overline{g}) \subseteq i(f)$, donc $i(f) \in G$ c.a.d. $i(\overline{G}) \subseteq G$. Il nous reste à démontrer que pour chaque $g \in G$ il existe un $f \in \overline{G} = F$ tel que $i(f) \subseteq g$. Comme G est régulier pour chaque $g \in G$ il existe un ensemble ouvert régulier $g' = i(f')$, où f' est fermé, tel que $g' \subseteq g$. $g' \in G$. De $g' \subseteq f'$ on déduit $\overline{g}' \subseteq f'$ donc $f' \in F$, $i(f') =$ $= g' \subseteq g$, et la démonstration est terminée, c.a.d. $G = i(\overline{G})$.

Soit maintenant F un filtre fermé régulier. Le filtre $i(F)$ a pour base les ensembles ouverts réguliers $i(f)$. Remarquons que $i(f) = i(f^{oo})$ donc $i(f) \subseteq f^{oo} \subseteq f$. Soit g un ensemble ouvert de $i(F)$, c.a.d. tel que $i(f) \subseteq g$, où $f \in F$, et f' un ensemble fermé de $\overline{i(F)}$, c.a.d. tel que $\overline{g} \subseteq f'$, où $g \in i(F)$, alors $i(f) \subseteq g \subseteq \overline{g} \subseteq f'$, $\overline{i(f)} = f^{oo} \subseteq f'$, et comme $f^{oo} \in F$ alors $f' \in F$. Nous venons de démontrer que $\overline{i(F)} \subseteq F$. Soit maintenant $f \in F$ alors $i(f) \subseteq f^{oo} \subseteq f$ où $i(f) \in i(F)$, donc $\overline{i(f)} = \overline{f^{oo}} \subseteq f$ et comme $\overline{i(f)} \in \overline{i(F)}$ alors $f \in \overline{i(F)}$. Nous venons de démontrer que $F \subseteq \overline{i(F)}$ et alors $F = \overline{i(F)}$.

Les lemmes précédents montrent qu'il existe une correspondance biunivoque entre les filtres fermés réguliers et les filtres ouverts réguliers. Parmi les filtres ouverts réguliers nous devons signaler les filtres d'Alexandroff qui jouent un rôle très important dans la théorie des extensions des espaces topologiques.

DÉFINITION 2. *Un filtre ouvert* G *sera dit un filtre d'Alexandroff si pour chaque* $g \in G$ *il existe un* $g' \in G$ *tel que* $\overline{g'} \subseteq g$.

Il est évident qu'un filtre d'Alexandroff est un filtre ouvert régulier, mais la réciproque n'est pas exacte. Nous allons donc déterminer les filtres fermés réguliers qui peuvent remplacer les filtres d'Alexandroff.

LEMME 3. *Si* G *est un filtre d'Alexandroff alors* $F = \overline{G}$ *est un voisinage. Si* F *est un voisinage alors* $G = i(F)$ *est un filtre d'Alexandroff.*

Dém. Soit G un filtre d'Alexandroff et $f \in F$, alors il existe un $g \in G$ tel que $\overline{g} \subseteq f$. Comme $g \in G$ il existe $g' \in G$ tel que $g' \subseteq \overline{g'} \subseteq g \subseteq \overline{g} \subseteq f$ et alors f est un voisinage fermé de $f' = \overline{g'} \in F$. Donc F est un voisinage.

Soit maintenant F un voisinage et $g \in i(F) = G$. Il exis te alors un $f \in F$ tel que $i(f) \subseteq g$, F étant un voisinage il existe un $f' \in F$ tel que $f' \subseteq i(f) \subseteq g$. Mais $g' = i(f') \in$ $\in G$ donc $\overline{g}' = \overline{i(f')} \subseteq f' \subseteq g$ et G est un filtre d'Alexandroff

Dans ces conditions les voisinages jouent dans le réticulé des ensembles fermés d'un espace topologique le rôle des filtres d'Alexandroff. Dans l'étude des extensions des espaces topologiques réguliers R les ultravoisinages sont les points de l'espace $\alpha(R)$ d'Alexandroff.

Il serait intéressant d'examiner, au point de vue où n nous plaçons ici, les filtres ouverts considérés par Yany Fraenkel, dans son travail sur les critères de compacité des espaces topologiques.

De ce que nous venons de dire dans ce chapitre il résulte qu'il serait nécessaire d'étudier plus en détail le réticulé des voisinages. Dans le chapitre VI nous montrerons que dans le cas des réticulés topologiques normaux, la notion d'ultravoisinage a un caractere essentiellement arithmétique.

CHAPITRE III

ARITHMÉTIQUE DES FILTRES PREMIERS

1. FILTRES PREMIERS.

La notion de filtre premier joue un rôle très important de voir que dans l'étude des espaces topologiques seuls les ultrafiltres aient joué un rôle considerable, à partir, surtout des travaux de H. Cartan, H. Walmman, N. Bourbaki et ses collaborateurs.

Le premier travail où la notion de filtre premier est étudiée d'une façon étendue est (d'après les renseignements que nous possédons) celui de M.H. Stone [3] où l'auteur démontre que chaque filtre d'un réticulé distributif est l'intersection de filtres premiers, en déterminant les caractéristiques topologiques de cette réprésentation et ses relations avec les logiques de Brouwer.

I. Kaplansky, plus récemment, a montré qu'on peut déterminer les points d'un espace de Hausdorff compact I à partir des filtres premiers du réticulé distributif des fonctions numériques continues définies sur I.

On peut espérer qu'une étude plus approfondie des filtres premiers des réticulés distributifs soit susceptible d'aider à comprendre la structure des différents espaces topologiques. Dans ce chapitre nous allons indiquer les propriétés fondamentales des filtres premiers que nous aurons à utiliser par la suite.

DÉFINITION 1.1. *Un filtre* P *est dit premier si* $x \cup y \in P$ *entraîne* $x \in P$ *ou* $y \in P$.

La famille de tous les filtres premiers de R *sera représentée par* $\pi(R)$, *ou plus simplement par* π, *s'il n'y a pas d'ambiguïté.*

Par dualité on définit la notion d'idéal premier. Pour qu'un filtre F soit premier il faut et il suffit que l'ensemble R - F soit un idéal (Birkhoff [1], pag. 141).

Dans un réticulé distributif, pour qu'un filtre P soit premier il faut et il suffit que: $P = F_1 \cup F_2$ entraîne $P = F_1$ ou $P = F_2$ (G. Birkhoff et Frink [1], pag. 308).

Parmi le diviseurs premiers d'un filtre F il est particulièrement important de considérer ceux qui sont indiqués dans la définition suivante:

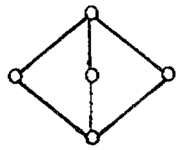
DÉFINITION 1.2. *Nous dirons que le filtre premier* P *est un diviseur premier maximal de* F *si* : 1) P *divise* F; 2) *Si* P' *est un filtre premier tel que* $P \subseteq P' \subseteq F$ *alors* $P = P'$.

Une autre notion importante est celle de filtre premier complètement irreductible, introduite par G. Birkhoff et O. Frink [1], pag. 306).

DÉFINITION 1.3. *Un filtre* F *est completement irréductible si* $F = \bigcup_i F_i$ *entraîne* $F = F_i$ *pour un indice* i.

Il est évident que tout filtre complètement irréductible est un filtre premier, mais la réciproque n'est pas exacte.

Le premier problème qui se pose est celui de savoir si dans un réticulé il existent des filtres premiers. Le réticulé dont le diagramme de Hasse est indiqué ci-joint ne contient aucun filtre premier. Un autre cas extrême est celui où tous les filtres sont premiers. A ce propos il est fácile de voir que:



1.1) *Pour que tous les filtres de* R *soient premiers il faut et il suffit que* R *soit un réticulé linéaire.*

En effect: d'après la définition même de réticulé linéaire il est évident que la condition est suffisante. Supposons que R est un réticulé dont tous les filtres sont premiers. Soient a et b deux éléments distincts de R, alors $a \cup b$ n'est pas le premier élément de R; le filtre principal $F(a \cup b)$ étant premier, un au moins des éléments a et b appartient à $F(a \cup b)$. S'il en est ainsi pour l'élément a nous aurons $a \cup b \subseteq a$ et comme $a \subseteq a \cup b$, alors $a \cup b = a$. Dans l'autre cas nous aurens $a \cup b = b$ et R est linéaire.

De même, on démontre la proposition duale:

1.1') *Pour que tous les idéaux d'un réticulé* R *soient des idéaux premiers il faut et il suffit que* R *soit linéaire.*

Entre les deux cas extrêmes que nous venons de signaler il est particulièrement important d'étudier le cas où il est possible d'obtenir tous les filtres de R à partir de ses filtres premiers. Rappelons que si l'intersection d'une famille dennée de filtres n'est pas l'ensemble vide, cette intersectioneest un filtre. Il est donc naturel d'étudier la proposition suivante:

THÉORÈME DE L'ARITHMÉTIQUE DES FILTRES PREMIERS. *Tout filtre est l'intersection de filtres premiers.*

Nous nous proposons de déterminer tous les réticulés où ce théorème est vérifié.

THÉORÈME 1.1. *Tout réticulé où le théorème de l'arithmétique des filtres premiers est vérifié est un réticulé distributif.*

Dém. La relation $(a \cap c) \cup (b \cap c) \subseteq (a \cup b) \cap c$ est valable dans tout réticulé. Si R n'était pas distributif il existerait trois éléments a,b et c tels que $(a \cap c) \cup (b \cap c) \subset (a \cup b) \cap c$. Le filtre principal $F((a \cup b) \cap c)$ étant l'intersection de filtres premiers il existe un filtre premier P contenant $F((a \cup b) \cap c)$ sans contenir l'élément $(a \cap c) \cup (b \cap c)$. D'autre part $(a \cup b) \cap c \in P$, donc $c \in P$ et $a \cup b \in P$. P étant premier on a soit $a \in P$ soit $b \in P$. Dans le premier cas on a: $a \cap c \in P$, donc $(a \cap c) \cup (b \cap c) \in P$ ce qui est impossible: dans le second cas $b \cap c \in P$ donc $(a \cap c) \cup (b \cap c) \in P$ ce qui est impossible. Donc R est distributif.

En réalité nous venons de démontrer que: si tout filtre principal de R est l'intersection de filtres premiers alors R est distributif (nous devons cette remarque à M. Alvercio Gomes).

Le théorème dual de 1.1 est aussi valable.

M. H. Stone a démontré que le théorème de l'arithmétique des filtres premiers et son dual sont valables ([3], pag. 11, Théor. 9) dans les réticulés distributifs. Sa démonstration s'appuie sur un théorème de Garrett Birkhoff ([2], Théor. 21.1) relatif à l'existence des filtres premiers dans les réticulés distributifs, contenant au moins deux éléments. Nous allons reprendre la démonstration de cé théorème parce qu'il est possible de le préciser un peu plus.

THÉORÈME 1.2. *Si un réticulé distributif contient un filtre* F *et un idéal* I, *disjoints, il existe un filtre premier* P *diviseur maximal de* F (définition 1.2) *et un ideal premier* η *diviseur maximal de* I *tels que* P *et* I *sont disjoints.*

Dém. Soient F et I dans les conditions indiquées dans le théorème. Soit $F = \{F_\alpha\}$ la famille de tous les filtres que contiennent F et sont disjoints de I. Cette famille,non vide, de filtres ordonnée par la relation $\subseteq$ est inductive inférieurement; il existe donc un filtre minimal P de la famille F. Démontrons que P est un filtre premier. Soit Soit $x \cup y \in P$.

Démontrons successivement que:

1°) *Une des deux conditions suivantes est nécessairement vérifiée:*

a) $x \cap p \notin I$ *quel que soit* $p \in P$

b) $y \cap p \notin I$ *quel que soit* $p \in P$.

En effet si a) et b) n'étaient pas vérifiées, il existerait deux éléments $p', p'' \in P$ tels que $x \cap p' = a \in I$, $y \cap p'' = b \in I$. En posant $p = p' \cap p''$ on aurait $x \cap p \subseteq a$, $y \cap p \subseteq b$ et par conséquent: $(x \cup y) \cap p = (x \cap p) \cup (y \cap p) \subseteq a \cup b \in I$. Comme p et $x \cup y$ sont des éléments de P il en est de même pour $(x \cup y) \cap p$ et la relation précédente montre que dans ces conditions on aurait $a \cup b \in P$, ce qui est impossible car P et I sont disjoints.

2°) *Si la condition* a) *est vérifiée alors* $x \notin I$, car autrement on aurait $x \cap p \in I$, où $p \in P$.

3°) *Si la condition* a) *est vérifiée*, soit P' la famille de tous les éléments z pour chacun desquels il existe $p \in P$ tel que $x \cap p \subseteq z$. On vérifie immédiatement que P' est un filtre que contient P et l'élément x et est disjoint de I, c'est-a-dire $P' \in \mathcal{F}$. Comme P est minimal dans $\mathcal{F}$ et $P' \supseteq P$ on a $P' = P$ et alors $x \in P$.

Si a) n'est pas vérifiée, de la definition b) on déduit d'une manière analogue, à celle que nous venons d'indiquer, que $y \in P$. Donc P est bien un filtre premier. Alors l'ensemble $\eta = R - P$ est un idéal premier que contient l'idéal I et est disjoint de F. En outre il est bien évident que η est un idéal premier diviseur maximal de I. En partant du filtre F et l'idéal I on démontre par dualité qu'il existe un filtre premier P diviseur maximal de F et disjoint de I.

THÉORÈME 1.3. *Dans un réticulé distributif* R *tout fil-filtre* F *est l'intersection des diviseurs premiers maximaux de* F.

Dém. Si $x \notin F$ alors l'idéal principal $I(x)$ est disjoint de F et il existe (Théor. 1.2) un filtre premier P diviseur maximal de F disjoint de $I(x)$ donc $x \notin P$ et le théorème est démontré.

Finalement nous pouvons dire que:

THÉORÈME 1.4. *Pour que le théorème de l'Arithmétique des filtres premiers soit vérifié dans un réticulé* R *il faut et suffit que* R *soit distributif.*

Le théoreme dual est aussi valable.

La représentation d'un filtre F comme intersection de ses diviseurs premiers maximaux (Théor. 1.3) a un rôle à jouer par la suite. Il s'agit d'une représentation distinc-te de celles de Stone (où chaque filtre est représenté comme intersection de tous les filtres premiers que le contiennent) et de Birkhoff (où F est représenté comme intersection des filtres premiers complètement irréductibles qui le contiennent).

C'est ce qu'on voit dans le cas d'un réticulé linéaire où chaque filtre étant premier la représentation correspondant au Théor. 1.3 contient un seul filtre premier. Pour cette raison nous dirons que la représentation de F indiquée dans le théorème 1.3 est la représentation minimale de F.

2. LES ARITHMÉTIQUES FINIES.

Nous allons maintenant considérer une classe de réticulés qui est simple au point de vue de l'arithmétique des filtres premiers.

DÉFINITION 2.1. a) *Un filtre d'un réticulé distributif sera dit d'ordre* n, *si sa représentation minimale contient* n *filtres premiers.*
b) *L'arithmétique des filtres d'un réticulé distributif sera dite d'ordre* $\leqslant$ n, *si chaque filtre a un ordre* $\leqslant$ n; *elle sera dit d'ordre* n, *si elle est d'ordre* $\leqslant$ n *et n'est pas d'ordre* $\leqslant$ n-1.

Indiquons quelques exemples simples de réticulés ayant une aritmétique finie: 1) *Les réticulés linéaires*; ce sont d'après le n°1 les seuls réticulés ayant une arithmétique d'ordre 1; 2°) *Les réticulés distributifs finis*, car tous les filtres étant des filtres principaux il ne peut y avoir qu' qu'un nombre fini de filtres premiers; 3°) L'espace euclidien à n-dimensions.

DÉFINITIOX 2.2. *Nous dirons qu'un filtre* F, *d'un ré-*

ticulé distributif, a une représentation finie lorsque: $F = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$, *où* n *est un entier positif et les* P_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *sont des filtres premiers de* R. *Cette représentation sera dite irréductible si chaque* P_i *n'est contenu dans aucun* P_j, *pour* $i \neq j$.

La représentation minimale d'un filtre d'ordre n est évidemment une représentation irréductible. Démontrons la réciproque:

2.1. *Une représentation finie irréductible d'un filtre* F *d'un réticulé distributif, coincide avec sa représentation minimale.*

Dém. Soit $F = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ une représentation irréductible de F. Soit P' un diviseur premier maximal de F, alors $P' \subseteq F$, donc P' doit diviser un des filtres P_i, mais P' étant un diviseur premier maximal de F en doit avoir $P' = P_i$. Cela montre que le nombre des diviseurs premiers maximaux de F est fini; représentons les par $P'_1, \ldots, P'_k$. Alors $F = P'_1 \cup \ldots \cup P'_k$ est une représentation irréductible de F. Il est bien connu que deux représentations irréductibles coincident à l'ordre des facteurs près et le théorème est démontré.

Soit R l'ensemble des entiers positifs ordonnés par la relation "a divise b". Tous les filtres de R sont des filtres principaux et chacun d'eux F(x) a un ordre fini. Cependant l'arithmétique des filtres de R n'est pas finie.

Nous nous proposons, maintenant, d'indiquer une caractérisation intrinsèque des réticulés qui ont une arithmétique d'ordre n. Pour cela nous avons besoin d'introduire les définitions suivantes:

DÉFINITION 2.3. *Nous dirons que:*

a) *les éléments* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *du réticulé* R *sont sup-indépendants si* $x = x_1 \cup \ldots \cup x_n$ *n'est pas égale à la somme de* n-1 *des éléments donnés.*

b) *l'élément* x *de* R *à le dégré de sup-indépendance* n, *si* n *est le nombre maximun d'éléments sup-indépendants dont la somme est* x.

c) *Le degré de sup-indépendance du réticulé* R *est* $\leqslant n$, *si le degré de sup-indépendance de chaque élément de* R *est égale ou plus petit que* n.

d) *Le degré de sup-indépendance de* R *est égale à* n *si sont degré de sup-indépendance est* $\leqslant n$ *et n'est pas* $\leqslant n-1$.

La définition de degré de sup-indépendance que nous venons d'indiquer a un caractère local, mais on démontre sans difficulté que:

2.2. *Pour que le degré de sup-indépendance d'un réticulé* R *soit égale à* n *il faut et il suffit que:*

I) R *contienne* n *éléments sup-indépendants*

II) n+1 *éléments de* R *soient toujours sup-dépendants.*

Dans les définitions précédantes on a fait intervenir seulement l'opération $\cup$. Il existe donc deux degrés d'indépendance: un $d(R,\cup)$ par rapport à $\cup$, l'autre $d(R,\cap)$ par rapport à $\cap$. Dans les réticulés distributifs on a toujours $d(R,\cup) = d(R,\cap)$. Pour voir qu'il en est ainsi il suffit de démontrer le lemme suivant:

2.3. *Si un réticulé distributif* R *contient* n *éléments indépendants par rapport à* $\cup$, R *contient aussi* n *éléments indépendants par rapport à* $\cap$ *et réciproquement.*

Dém. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments de R indépendants par rapport à $\cup$. Posons $y_i = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_{i-1} \cup \cup x_{i+1} \cup \ldots \cup x_n$; $x = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$; $y = y_1 \cap y_2 \cap \ldots \cap y_n$.
Il est évident que $y_i \neq x$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ et $y_i \cup y_j = x$, pour $i \neq j$. Si les y_i étaient dépendants par rapport à $\cap$, il existerait r d'entre eux $(r < n)$, par exemple $y_1, y_2, \ldots y_r$, tels que $y = y_1 \cap y_2 \cap \ldots \cap y_r$. Choisissant un y_j où $j > r$, nous aurons $y_1 \cap \ldots \cap y_r = y \subseteq y_j$ donc

$$y_j = (y_1 \cap \ldots \cap y_r) \cup y_j = (y_1 \cup y_j) \cap \ldots \cap (y_2 \cup y_j) = $$
$$= x \cap x \cap \ldots \cap x = x$$

et cela est impossible car $y \neq x$. La réciproque se démontre d'une façon duale.

On peut démontrer 2.3, même si R n'est pas distributif.

Dans ces conditions nous pouvons parler, sans ambiguité, du degré d'indépendance d(R), supposé fini, d'un réticulé R.

2.4. *Si un réticulé distributif* R *contient un filtre* F *d'ordre* n, *alors* R *contient* n *éléments indépendants.*

Dém. Soit $F = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ la représentation minimale du filtre F. Alors il existe un élément $x_1^{(i)}$ de R tel que $x_1^{(i)} \in P_1$, $x_1^{(i)} \notin P_i$ $(i = 2,3,\ldots,n)$,
En posant $x_1 = x_1^{(2)} \cap x_1^{(3)} \cap \ldots \cap x_1^{(n)}$, nous aurons

$$x_1 \in P_1 \quad \text{et} \quad x_1 \notin P_j \quad \text{pour } j \neq 1$$

En général on peut trouver x_i tel que

$$x_i \in P_i \quad \text{et} \quad x_i \notin P_j \quad \text{pour } j \neq i$$

En particulier $x_i \notin F$ et $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$. D'autre part

$$x = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n \in F.$$

Démontrons que les x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ sont indépendants.

Considérons n-1 de ces éléments, par exemple $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, chacun desquels n'appartient pas à P_n, donc sa somme ne pouvant pas appartenier à P_n ni à F est différente de x et cela suffit pour conclure que les x_i sont indépendants.

2.5. *Si un réticulé distributif* R *contient* n *éléments indépendants alors* R *contient un filtre (principal) d'ordre* $\geqslant$ n.

Dém. Soit $x = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$ où les x_i sont indédants. Considérons la représentation minimale du filtre principal F(x):

$F(x) = \cup P_i$. Dans cette représentation il existe un P_i diviseur premier maximal de F(x) qui ne contient pas $s_i = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_{i-1} \cup x_{i+1} \cup \ldots \cup x_n$. Alors P_i contient x_i et ne contient aucun x_j pour $j \neq i$. Les n filtres premiers P_i diviseurs maximaux de F(x) sont distincts deux à deux, donc l'ordre de F(x) est $\geqslant$ n.

Une conséquence immédiate des Lemmes 2.4 et 2.5 est la suivante:

THÉORÈME 2.1. *Pour que l'arithmétique des filtres premiers d'un réticulé distributif soit d'ordre* n *il faut et il suffit que le degré d'indépendence de* R *soit* n.

Dém. Evidente.

Une autre conséquence importante est la suivante:

THÉORÈME 2.2. *Pour que l'arithmétique des filtres premiers d'un réticulé distributif soit d'ordre* n *il faut et il suffit que l'ordre de chaque filtre principal soit* $\leqslant$ n *et qu'il existe un filtre principal* *d'ordre* n.

Dém. Supposons que R ait une aritmétique d'ordre n. Alors chaque filtre principal a un ordre $\leqslant$ n. Par hypothèse il existe un filtre d'ordre n, denc d'après le lemme 2.4 il existe n éléments sup-indépendants $x_1,\ldots,x_n$. Posons $x = x_1 \cup \ldots \cup x_n$. D'après la démonstration du lemme 2.5 l'ordre du filtre principal F(x) doit être $\geqslant$ n elle est donc égale à n. Cela montre que les conditions indiquées sont nécessaires. Supposons maintenant que ces conditions soient vérifiées. S'il existait un filtre d'ordre n+1 il existerait d'après le lemme 2.4 n+1 éléments indépendants et par conséquent il existerait d'après le lemme 2.5, un filtre principal d'ordre n+1 ce qui est impossible. L'aritmétique des filtres de R est donc d'ordre n.

Ce théorème nous montre qu'on peut remplacer dans les définitions 2.1 les filtres par des filtres principaux.

CHAPITRE IV

ARITHMÉTIQUE DES ULTRAFILTRES

1. CARACTÉRISATION DES ULTRAFILTRES.

Parmi les filtres d'un réticulé R, les ultrafiltres ont un rôle important à jouer dans ce travail. Mais il faut remarquer qu'il y a des réticulés qui ne contiennent pas des ultrafiltres comme c'est le cas des exemples 5 et 6.

Un ultrafiltre est par définition un filtre propre qui est seulement divisible par lui même. C'est donc une *notion analogue à celle de nombre premier* dans la théorie des entiers.

Si R contient un premier élément, un ultrafiltre U peut etre caractérisé comme un filtre que jouit de la propriété suivante:

U - *Si* x *est compatible avec* U *alors* $x \in U$.

Les ultrafiltres pouvant exister dans les réticulés qui n'ont pas un premier élément, il est désirable d'obtenir une caractérisation intrinsèque des ultrafiltres sans parler de premier élément.

THÉORÈME 1.1. *Pour qu'un filtre* U *d'un réticulé distributif soit un ultrafiltre il faut et il suffit qu'étant donnés deux éléments* a *et* x *tels que* $a \subseteq x$ *et* $x \not\in U$, *il existe un élément* $u \in U$ *tel que* $a = x \cap u$.

Dém. La condition est necéssaire. Soit U un ultrafiltre a et x des éléments vérifiant les conditions indíquées dans l'énoncé du théorème.

Si a=x, prenons $y \in U$ et posons $u = a \cup y = x \cup y$. Alors $u \in U$ et $a = x \cap u$. Supposons donc que $a \subset x$.

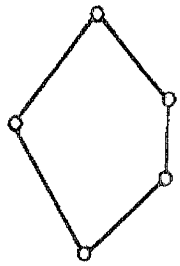
Si $a \neq x \cap u$ quel que soit $u \in U$, soit W la famille de tous les éléments $z \in R$ pour chacun desquels il existe un élément $u \in U$ tel que $x \cap u \subseteq z$.

Montrons que $a \notin W$. En effet s'il existait un $u \in U$ tel que $x \cap u \subseteq a$ alors l'élément $v = a \cup u$ appartient à U et est tel que $x \cap v = x \cap (a \cup u) = (x \cap a) \cup (x \cap u) = a \cup$ $\cup (x \cap u) = a$, ce qui est impossible par hypothèse. Donc W est un ensemble qui ne contient pas a, mais qui contient U et x. On voit immédiatement que W est un filtre divisant U et distinct de U et cette contradiction montre bien que la condition est nécessaire.

La condition est suffisante. Soit U un filtre vérifiant les conditions indiquées dans l'énoncé du théorème. Si U n'est pas un ultrafiltre, soit W un filtre divisant U et $W \neq U$. Soit $x \in W-U$ et $r \notin W$. Alors $a = x \cap r$ ne peut pas appartenir à W, donc $a \subset x$ et il existe par hypothèse un élément $u \in U$ tel que $a = x \cap u$. Mais dans ces conditions $a \notin W$ et $x \cap u \notin W$ et cette contradiction démontre le théorème.

Remarques 1). La prémière partie de la démonstration précédente est valable pour un réticulé modulaire et la seconde est valable pour un réticulé quelconque.

2). Il existe des réticulés non-modulaires contenant des ultrafiltres qui ne vérifient pas les conditions indiquées dans l'énoncé du théorème précédent, comme le montre l'exemple ci-joint.
La nécessité de la condition indiquée est signalée dans



Bourbaki ((2), Exercice 10, pag. 30) dans le cas particulier ou R est la famille de toutes les parties d'un ensemble donné.

3). La condition U a l'avantage de caractériser les ultrafiltres dans tous les réticulés qui possèdent un premier élément.

2. IDENTITÉ ENTRE LES FILTRES PREMIERS ET ULTRAFILTRES DANS LES RÉTICULÉS DISTRIBUTIFS.

Dans un réticulé distributif tout ultrafiltre est un filtre premier. On peut le démontrer directament, mais c'est aussi une conséquence du Théorème de Stone, d'après lequel tout filtre d'un réticulé distributif est l'intersection de filtres premiers. On peut naturellement se proposer de chercher les réticulés distributifs R où tous les filtres premiers sont des ultrafiltres. Si R a un premier et un dernier élément, la réponse a ce probleme est fournie par l'important.

THÉORÈME DE NACHBIN. *Pour que dans un réticulé distributif* R_o,I *tous les filtres premiers soient des ultrafiltres il faut et il suffit que* R_o,I *soit une algèbre de Boole*. (Nachbin).

Le théorème dual de celui-là est aussi valable. Le théorème 1.1 va nous permettre de résoudre le problème dans le général. Pour cela introduisons d'abord la définition suivante:

DÉFINITION 1.1. *Nous dirons qu'un réticulé distributif est relativement complementé, si pour chaque* x *tel que* $a \subseteq x \subseteq b$ *il existe un* x' *tel que* $a = x \cap x'$, $b = x \cup x'$.

Dans les réticulés distributifs les compléments sont univoquement déterminés, chaque fois qu'ils existent. Comme exemple de réticulé distributif qui n'a pas de dernier élément nous pouvons indiquer des anneaux de Boole (au sens de Stone). Comme exemple d'un réticulé distributif relativement complementé qui n'a pas un premier ni un dérnier élément, indiquons la famille R de tous les voisinages d'un point p du plan euclidien dont les complémentaires sont des voisinages d'un point q du même plan tel que $p \neq q$.

THÉORÈME 2.1. *Pour que tous les filtres premiers d'un réticulé distributif* R *soient des ultrafiltres il faut et il suffit que* R *soit relativement complementé.*

Dém. La condition est suffisante. Soit R relativement complementé (la distributivité n'est pas nécessaire, pour démontrer la suffisance). Si un filtre premier P n'est pas un ultrafiltre il existe un filtre $F \neq P$ et divisant P. Il est toujours possible de choisir des éléments a, x et b tels que:

1) $a \in R - F$; $x \in F - P$; $b \in P$

2) $a \subset x \subset b$

Soit x' le complément de x relativement à a et b, c.a.d.

3) $a = x \cap x'$; 4) $b = x \cup x'$

Comme P est premier et ne contient pas x, de 4) on déduit que $x' \in P$ et alors $a = x \cap x' \in F$, ce qui est en contradiction avec 1).

La condition est nécessaire. Supposons que tous les filtres premiers d'un réticulé distributif R sont des ultrafiltres.
Soit $a \subset x \subset b$. Démontrons que x a un complément relativement à a et b. Soit $X = \{x_i\}$ la famille de tous les $x_i \in R$ tels que:

$$1)\ x \cap x_i = a; \qquad 2)\ x_i \subseteq b.$$

Si x n'a pas un complément relativement à a et b alors

$$3)\ x \cup x_i \neq b, \text{ quel que soit } i.$$

Remarquons que X n'est pas un ensemble vide, car $a \in X$.

D'autre part si $x_1, x_2 \in X$ alors $x_1 \cup x_2 \in X$. Considérons l'idéal I engendré par x et X. Il est formé par les éléments y_j pour chacun desquels il existe un élément x_i tel que $y_j \subseteq x \cup x_i$. Il est évident que $b \notin I$. Comme R est distributif il existe un idéal premier $\mathcal{P}$ contenant I sans contenir b. Posons $P = R - \mathcal{P}$, alors P est un filtre premier contenant b sans contenir x. Comme P est un ultrafiltre, $a \subset x$ et $x \notin P$ il existe un élément $p \in P$ tel que $a = x \cap p$. Comme $b \in P$ alors $b \cap p = q$ appartient à P et nous aurons.

$$4)\ x \cap q = x \cap (b \cap p) = x \cap p = a$$

$$5)\ q \subseteq b$$

De 4) et 5) on déduit que $q \in X \leqslant I \leqslant \mathcal{P}$. Mais q ne peut pas appartenir à deux ensembles complémentaires $\mathcal{P}$ et P et alors x a un complément relatif.

Dans le cas où x=a, où x=b l'existence d'un complément relatif est assurée.

Il est clair que le théorème dual du théorème 2.1 est aussi valable; c.a.d. si tous les filtres premiers sont des ultrafiltres alors tous les idéaux premiers sont des ultra-idéaux et réciproquement.

3. ARITHMÉTIQUE DES ULTRAFILTRES.

Dans les réticulés distributifs relativement complementés (auxquels nous pourrions donner le nom de réticulés de Boole) nous pouvons affirmer que:

1) *Théorème de l'arithmétique des ultrafiltres-chaque filtre est l'intersection d'ultrafiltres.*

2) *Théorème de l'arithmétique des ultra-idéaux- Chaque idéal est l'intersection d'ultra-idéaux.*

La propriété 1) peut être vérifiée dans un réticulé distributif R sans que R soit un réticulé de Boole. C'est ce qu'il y a lieu dans l'exemple suivant, signalé à l'auteur par MM. L. Nachbin et J. Dieudonné. R est formé par un ensemble infini I et les parties finies de I. Tous les filtres sont principaux et le seul filtre premier qui n'est un ultrafiltre c'est le filtre principal F(I).

Si les théorèmes 1) et 2) sont vérifiés dans un réticulé distributif R, nous dirons que R a une *arithmétique maximale*. Nous ne connaissons aucun réticulé distributif ayant une arithmétique maximale et que ne soit pas relativement complementé.

Une propriété moins restrictive que 1) est la suivante:

3) *Chaque filtre principal est l'intersection d'ultrafiltres.*

D'après un théorème de H. Walmann, les seul réticulés distributifs contenant un premier élément et ayant la propriété 3) sont les réticulés disjonctifs (dont la définition a été indiquée au chapitre I). Nous voyons ainsi que l'axiome de Fréchet (les points de l'espace sont fermés) a déjà un rapport direct avec l'arithmétique des ultrafiltres.

On peut faire à ce propos une remarque qui n'est peut-être sans intérêt.

Dans les espaces T1 compacts les seuls filtres qui sont l'intersection d'ultrafiltres ce sont les filtres principaux.

En effet supposons que le filtre F soit l'intersection d'ultrafiltres et qu'il ne soit pas un filtre principal. L'intersection des ensembles de F est un ensemble fermé $x \neq 0$ et comme F n'est pas principal $x \notin F$. Il existe donc un ultrafiltre U contenant F sans contenir x. L'intersection des ensembles de U est un point p. Or p n'est pas contenu dans x car autrement $x \in U$. D'autre part tous les ensembles de F doivent contenir p et alors x n'est pas l'intersection des ensembles de F. Cette contradiction termine la démonstration. Il va sans dire que cette démonstration est valables dans tout réticulé complet et compact.

Si l'on s'intéresse surtout par les analogies entre la l'arithmétique des entiers et celle des espaces topologiques nous voyons que dans les espaces T1 compacts les filtres principaux, c.a.d. les ensembles fermés, doivent jouer le rôle des *nombres entiers qui se décomposent dans un produit de facteurs premiers distincts deux à deux.* Cela nous conduit de suite à penser, *qu'il faut considérer la famille de tous les filtres du réticulé des ensembles fermés,* si l'on veut étudier les propriétés arithmétiques d'un espace topo logiques. Cela veut dire que *les filtres fermés doivent jouer le rôle des entiers.*

Nous allons maintenant indiquer quelques résultats sur l'arithmétique des ultrafiltres:

> THÉORÈME 3.1. *Pour que le théorème de l'arithmétique des ultrafiltres soit vérifié dans un réticulé distributif complet* R *il faut que* R *soit une logique de Brouwer.*

Dém. Il nous faut démontrer que la "différence" $b \dot{-} a$ existe quels que soient a et b. Cela est évident si $b \subseteq a$, car alors $b \dot{-} a = 0$. Si la relation $b \subseteq a$ n'a pas lieu, soit F la famille de tous les éléments c_j tels que $b \subseteq a \cup c_j$. F est un filtre, $b \in F$ et $a \notin F$. D'après le Théorème de Wallman, R est un réticulé disjonctif, donc la famille W des z_i tels que

1) $a \cap z_i = 0$; 2) $b \cap z_i \neq 0$; 3) $z_i \subseteq b$

n'est pas vide. Alors nous aurons

$$z_i = z_i \cap b \subseteq z_i \cap (a \cup c_j) = z_i \cap c_j \subseteq c_j$$

quels que soient les indices i et j, donc

$$z_i \subseteq c = \cap c_j$$

Si $b \dot{-} a$ n'existe pas, la famille des c_j n'a pas un premier élément et alors

4) $z_i \subseteq c \subset c_j$; 5) $b \not\subseteq a \cup c$ d'où: 6) $a \cup c \notin F$.

Comme F est l'intersection d'ultrafiltres, il existe un ultrafiltre U contenant F sans contenir $a \cup c$. En particulier $a \notin U$ donc U contiendra un élément m tel que $a \cap m = 0$. Mais $b \in U$ et alors:

$$z_o = b \cap m \in U$$

$$1') \ a \cap z_o = a \cap b \cap m = 0$$

$$2') \ b \cap z_o = b \cap b \cap m \neq 0$$

$$3') \ z_o \subseteq b$$

Donc $z_o \in W$. De 4) on déduit $z_o \subseteq c$ donc $c \in U$, $a \cup c \in U$, ce qui est impossible et la démonstration est terminée.

THÉORÈME 3.2. *Si le théorème de l'arithmétique des ultra-idéaux est vérifié dans un réticulé topologique* R, *alors* R *est une algèbre de Boole.*

Dém. Supposons que $a \in R$, n'a pas de complément et soit I la famille de tous les éléments de R incompatibles avec a.

I est un idéal qui ne contient pas $a \cap a^o$. Il existe al alors un ultra-idéal M contenant I sans contenir $a \cap a^o$, donc a^o, $a \notin M$. Mais si $a \notin M$ il existe un élément $m \in M$ tel que $a \cup m = I$ et alors $a^o \subseteq m$, donc $a^o \in M$. Cette contradition termine la démonstration. (P. Samuel, pag. 108, Monteiro [1], fasc. 2, pag. 125).

Des Théoremes 3.1 et 3.2 on déduit que

THÉORÈME 3.3. *Les algèbres de Boole complètes sont les seuls réticulés distributifs complets qui ont une arithmétique maximale.*

4. LES FILTRES PREMIERS MAXIMAUX.

Dans la classe de filtres premiers il y a lieu de distinguer la classe des ultrafiltres. Une autre classe très importante de filtres premiers est celle des filtres premiers maximaux que nous allons maintenant étudier.

DÉFINITION 4.1. *Un filtre premier* M *sera dit maximal* *si le seul filtre premier divisible par* M *est* M.

Tout réticulé distributif qui contient un dernier élément I, contient aussi des filtres premiers maximaux; ce sont d'après le Chapitre III, les diviseurs premiers maximaux du filtre principal F(I).

Si M est un filtre premier maximal, l'ensemble complémentaire R-M est un ultra-idéal et réciprequement. Nous pouvons donc caractériser les filtres premiers maximaux de la manière suivante:

THÉORÈME 4.1. *Pour que dans un réticulé topologique le filtre premier* M *soit un filtre premier maximal il faut et il suffit que: un et un seul des éléments* x, x^o *appartien à* M.

Dém. La condition est nécessaire. Comme M est un filtre premier un des éléments x, x^o doit appartenir à M car $x \cup x^o = I \in M$. Supposons maintenant que $x, x^o \in M$. Comme M est un filtre premier alors $N = R\text{-}M$ est un idéal. Montrons que $x \cup n \neq I$ quel que soit $n \in N$. En effet s'il existait $n \in N$ tel que $x \cup n = I$, alors $x^o \subseteq n$ et $x^o \in N$ ce qui est impossible.

Alors N et x engendrent un idéal contenu dans un ultra-idéal $\mathcal{U}$, donc $P = R\text{-}\mathcal{U}$ est un filtre premier distinct de M et divisible par M. Cette contradiction montre que la condition est nécessaire.

La condition est suffisante. Soit M un filtre premier qui contient un et seul des éléments x, x^o (quel que soit x). Si M n'etait pas maximal il existerait un filtre premier $P \neq M$ et divisible par M. Soit $x \in M\text{-}P$ alors $x^o \in P$ et $x, x^o \in M$.

Voir a ce propos le théoreme IV de P. Samuel pag. 107) qui se rapporte idéaux du réticulé topologique R: "pour qu'un idéal I de R soit maximal il faut et il suffit qu'un et un seul des éléments x, x^o appartienne à I". En réalité P.Samuel se place dans une situation plus générale, car il étudie des réticulés qui ont un sup-complément, mais qui ne sont pas nécessairement distributifs.

Cherchons maintenant les relations qui existent entre les filtres premiers maximaux et les filtres réguliers de R. Il est évident qu'un filtre premier maximal est régulier, car si $x \in M$, $x^o \notin M$, donc $x^{oo} \in M$.

THÉORÈME 4.2. *Pour qu'un filtre premier soit régulier il faut et il suffit qu'il soit un filtre premier maximal.*

Dém. Il nous reste à démontrer que la condition est nécessaire. Soit M un filtre premier régulier et supposons qu'il divise effectivement un filtre premier P. Soit $x \in M-P$, alors $x^o \in P$ donc $x \cap x^o \in M$, et $(x \cap x^o)^{oo} = 0 \in M$, ce qui est impossible.

THÉORÈME 4.3. *Pour qu'un filtre régulier soit premier il faut et il suffit qu'il soit un filtre premier maximal.*

Dém. Si P est régulier et premier il doit contenir un des éléments x, x^o et ne peut pas contenir x et x^o car $(x \cap x^o)^{oo} = 0$; donc P est un filtre maximal. La suffisance est évidente.

Nous avons établi au chapitre II une correspondance biunivoque entre les filtres réguliers d'un réticulé topologique R et les filtres d'agèbre de Boole A des éléments réguliers de R. On voit bien maintenant que les ultrafiltres de

A correspondent précisément aux filtres premiers maximaux de R. Nous verrons plus loin quel est le rôle de ces filtres dans l'arithmétique des filtres des réticulés topologiques normaux.

CHAPITRE V

LES PUISSANCES PREMIÈRES

1. LA NOTION DE PUISSANCE.

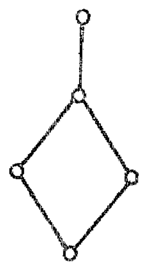
Dans les espaces topologiques le plus courants la notion de filtre premier est distincte de celle d'ultrafiltre et comme nous l'avons déjá signalé seuls ces derniers ont joué un rôle décisif dans la topologie générale. En tout cas le simple fait que la notion de filtre joue un rôle important dans la topologie (comme on s'apperçoit, par exemple, en lisant le traîté de N. Bourbaki) peut être considéré comme une indication pour étudier cette notion d'une façon plus détaillée.

Si l'on cherche à dégager de la théorie des filtres des résultats aussi proches que possibles de l'arithmétique des entiers on est conduit, tout de suite, à penser à la notion de *puissance*, qui n'a pas été utilisée, semble-t'il, dans la topologíe.

La situation n'est pas très comode, car si l'on pense à la notion de puissance on est conduit à se demander ce qu'on doit entendre par l'exposant correspondant. Une théorie satisfaisante de la notion de puissance, sera probablement possible dans les espaces à structure uniforme, car il faut avoir des moyens pour déterminer "la même puissance" de deux filtres distincts. Nous nous bornons à étudier la notion de puissance sans nous préoccuper avec les "exposants" correspondants. Cela nous permetra, quand même, d'établir un certain nombre de distinctions fondamentales.

Dans l'arithmétique des entiers positifs, ordonnés par la rélation "a *divide* b", tous les filtres sont des filtres principaux. Les ultrafiltres sont de la forme F(p) où p est un nombre premier et les filtres premiers sont de la forme $F(p^n)$ où p est premier et n un entier positif. Cela peut nous conduire à penser dans les ultrafiltres comme une extension de la notion de nombre premier et à la notion de filtre premier comme une extension de la notion de puissance d'un nombre premier.

La situation dans les réticulés distributifs n'est pas aussi simple que dans le cas des entiers, car un filtre premier peut être multiple de deux ultrafiltres distincts, comme le montre la figure ci-jointe. On est alors conduit à introduire la définition suivante:



DÉFINITION 1.1. *Un filtre premier* P *sera dit une puissance s'il est divisible par un seul ultrafiltre* U. (*Nous dirons que* P *est une puissance de* U).
Il est évident que les ultrafiltres sont des puissances.

2. LES ARITHMÉTIQUES NORMALES.

Des réticulés particulierement simples au point de vue de l'arithmétique des filtres premiers sont indiqués dans la définition suivante:

DÉFINITION 2.1. *Nous dirons qu'un réticulé distributif a une arithmétique normale si tous les filtres* *premiers sont des puissances.*

Une notion analogue à celle-la a été considérée par F. Klein. Nous regrettons de ne pas connaître ce travail, mais d'après une référence de M. Ward (à la fin du N°9) la définition 2.1 serait identique à celle de F. Klein dans le cas où tous les filtres de R sont principaux. Nous nous proposons maintenant de caractériser intrinsèquement tous les réticulés qui ont une arithmétique normale.

THÉORÈME 2.1. *Pour qu'un réticulé distributif* $R_{o,1}$ *ait une arithmétique normale il faut et il suffit qu'il vérifie l'axiome de la normalité de Uryshon* (*chapitre* I , *Déf.* 4.1).

Dém. La condition est suffisante. Soit $R = R_{o,1}$ un réticulé distributif vérifiant l'axiome de la normalité de Uryshon et P un filtre premier de R. Si P est divisible par deux ultrafiltres distinct U_1 et U_2, il existent $x \in U_1$ et $y \in U_2$ tels que $x \cap y = 0$. Soient x', y' les éléments dont l'existence est postulé dans l'axiome de la normalité. Comme $x' \cup y' = I$, nous aurons par exemple $x' \in P$, car P est premier. Alors $x' \cap y \in U_2$ est cela est impossible car $x' \cap y = 0$.

La condition est nécessaire. Soit R un réticulé distributif ayant une arithmétique normal. Soit $x \cap y = 0$; X la famille de tous les éléments $x' \in R$ tels que:

$$X1) \quad x \subseteq x' \ ; \qquad X2) \quad x' \cap y = 0:$$

et Y la famille de tous les éléments $y' \in R$ tels que:

$$Y1) \quad y \subseteq y' \ ; \qquad Y2) \quad x \cap y' = 0.$$

Il est évident que les classes X et Y sont additives (c.a. d. si x', $x'' \in X$, alors $x' \cup x'' \in X$; de même pour Y).

Si l'axiome de la normalité n'est pas vérifié par le couple x, y, alors $x' \cup y' \neq I$, quels que soient $x' \in X$, $y' \in Y$; et l'ensemble $X \cup Y$ est la base d'un idéal I qui est contenu dans un idéal premier P dont le complémentaire $P=R-P$ est un filtre premier qui ne contient aucun élément de X et Y.

Montrons que x est compatible avec P. Dans le cas contraire il existerait $p \in P$ tel que $x \cap p = 0$. Alors l'élément $q = p \cup y$ appartient à P et vérifie les deux conditions suivantes:

$$Y1)\quad y \subseteq q\ ; \qquad Y2)\quad x \cap q = (x \cap p) \cup (x \cap y) = 0\ ,$$

c.a.d. $q \in Y$, ce qui est impossible. On voit de même que y est compatible avec P. Soit U_1 un ultrafiltre contenant P et x, U_2 un ultrafiltre contenant P et y; alors U_1 et U_2 sont des ultrafiltres distincts divisant P; or cela est impossible donc il existe un couple x', y' tel que $x' \cup y'=I$ et l'axiome de la normalité est vérifié.

DÉFINITION 2.2. *Deux éléments* x *et* y *incompatibles d'un réticulé distributif* R *sont dits séparables si l'axiome de la normalité est vérifié par le couple* x, y. *Ils seront dits inséparables dans le cas contraire.*

Alors nous allons démontrer la proposition suivante:

THÉORÈME 2.2. *Pour que deux ultrafiltres* U', U" *divisent un même filtre premier il faut et il suffit que chaque couple d'éléments incompatibles* $x \in U'$,

$y \in U''$ *soient inséparables.*

Dém. La prémière partie de la démonstration du théorème 2.1, montre que la condition est nécessaire. Il nous reste à montrer que la condition est suffisante. Soient donc U', U'' deux ultrafiltres tels que chaque couple d'éléments incompatibles $x \in U'$, $y \in U''$ soient inséparables. Soit X la famille des éléments de R que n'appartiennent pas à $U' \cup U'' = U' \wedge U''$. Soient a et b des éléments de X et montrons que $a \cup b \neq I$. En effet, si $a \cup b = I$, nous aurons: $a \in U' - U''$ et $b \in U'' - U'$ ou alors $a \in U'' - U'$, $b \in U' - U''$. Examinons le premier cas.

Il existe $a_o \in U''$ tel que $a \cap a_o = 0$ et un $b_o \in U'$ tel que $b_o \cap b = 0$. Posons $a' = a \cap b_o$, $b' = b \cap a_o$. Alors:

1) $a' \cap b' = 0$, $a' \in U'$, $b' \in U''$

2) $a' \cap b = a \cap b' = 0$

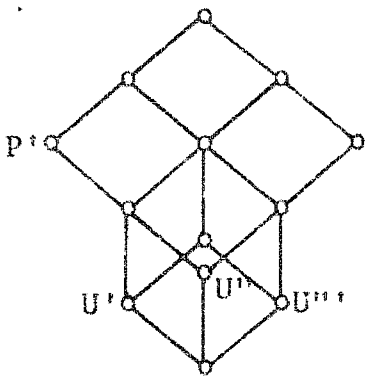
3) $a' \subseteq a$; $b' \subseteq b$

4) $a \cup b = I$.

Alors $a' \in U'$, $b' \in U''$ seraient separables, ce qui est impossible par hypothése. L'ensemble X engendre donc un idéal qui est contenu dans un idéal premier dont le complementaire est un filtre premier divisible par U' et U'' et la démonstration est terminée.

COROLAIRE. *Pour que deux ultrafiltres distincts* U', U'' *ne divisent pas un même filtre premier il faut et il suffit qu'il existent deux éléments séparables* $a \in U'$, $b \in U''$.

Écrivons $U' \sim U''$ pour indiquer que U' et U'' divisent un même filtre premier. Il est important de remarquer que la relation $\sim$ *n'est pas une relation d'équivalence*, car elle n'est pas transitive, comme le montre le réticulé indiqué ci-joint, où il existent trois ultrafiltres U', U", U"' et deux filtres premiers P' P" qui ne sont pas des ultrafiltres. On a: U' $\sim$ U", U" $\sim$ U"', mais la relation U' $\sim$ U"' n'est pas vérifiée.



Toutes les complications qui existent dans les réticulés qui ne vérifient pas l'axiome de la normalité proviennent de l'existence de filtres premiers qui ne sont pas des puissances (déf. 1.1).

Il est évident que les réticulés ayant une arithmétique normale peuvent etre caractérisés par la propriété suivante:

> *Si deux éléments* x, y $\in$ R *sont compatibles avec un filtre premier* P *alors* x $\cap$ y *est compatible avec* P.

Alors le seul ultrafiltre qui divise P est formé par la famille de tous les éléments compatibles avec P.

Une autre proprieté qui n'est pas sans importance est la suivante:

> *Si* U' *et* U" *sont deux ultrafiltres distincts, alors tous les filtres premiers* P' *multiples de* U' *sont incompatibles avec les filtres premiers* P" *multiples*

de U".

Car il s'agit d'une propriété qui caractérise les arithmétiques normales, comme il fácile de reconnaître. On pourrait l'énnoncer.en disant que *deux puissances prémières de deux ultrafiltres distincts sont relativement prémières.*

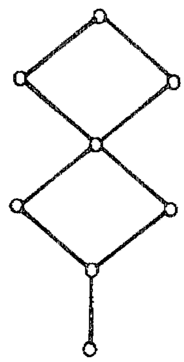
Nous reviendront plus loin sur l'étude des aritmétiques normales.

3. ARITHMÉTIQUES RELATIVEMENT NORMALES.

Dans les réticulés ayant une arithmétique normale, nous pouvons penser a la notion de filtre premier comme une notion analogue à celle de puissance d'un nombre premier, dans la théorie des entiers. Il y a donc lieu d'étudier la propriété suivante:

A. *Tout filtre que divisé un filtre premier est un filtre premier.*

Cette propriété n'est pas nécessairement vérifiée dans les réticulés ayant une arithmétique normale, comme le montre la figure ci-jointe.



Nous pouvons donc introduire la définition suivante:

DÉFINITION 3.1. *Un réticulé distributif a une arithmétique complètement normale* (ou relativement normale) *si tous les filtres qui divisent un filtre premier sont des filtres premiers.*

Avant d'indiquer une caractérisation intrinsèque des arithmétiques complètement normales, démontrons le théorème suivant:

THÉORÈME 3.1. *Pour qu'un réticulé distributif ait une arithmétique complétement normale il faut et il suffit que l'une quelconque des deux conditions suivantes soit vérifiée:*

B) *La famille de tous les filtres qui divisent un filtre premier est un chaîne.*

C) *La famille de tous les filtres premiers qui divisent un filtre premier est une chaîne.*

Dém. 1) B) *est une conséquence de* A). Soit P un filtre premier F' et F" deux filtres divisant P. Si F' et F" etaient incomparables il existeraient des éléments x, y, tels que $x \in F'-F''$, $y \in F''-F'$. Mais alors le filtre $F=F' \cup F''$ divise P, contient l'élément $x \cup y$, sans contenir ni x ni y. Or cela est impossible car F est premier d'après A).

2) C *est une conséquence de* B.

3) A *est une conséquence de* C. Supposons que C) est vérifiée et soit F un diviseur du filtre premier P. Si F n'est pas premier il existent $x, y \in R-F$, tels que $x \cup y \in F$. Mais F étant l'intersection de filtres premiers il existent des filtres premiers P', P" divisant F et tels que $y \notin P'$, $x \notin P''$, et alors P', P" sont deux filtres premiers incomparables divisant un même filtre premier P, ce qui est en con

tradiction avec C).

Il est important de remarquer que dans les énoncés A), B) et C) n'interviennent pas les notions d'ultrafiltre, de premier élément et de dernier élément.

Nous sommes maintenant en mesure d'indiquer une caractérisation intrinsèque des réticulés ayant une arithmétique complétement normales.

THÉORÈME 3.2. *Pour qu'un réticulé distributif* R *ait une arithmétique complétement normale il faut et il suffit que l'axiome de la compléte normalité soit vérifiée.*

Dém. Nous allons démontrer que l'axiome de la compléte normalité (c.a.d. l'axiome de la normalité relative; déf. 5.1, Chap. I, pag. 25) est equivalent a la proprieté C).

Supposons que l'axiome de la normalité relative est vérifié. Si C) n'est pas vérifiée il existent deux filtres premiers incomparables P', P'' divisant un même filtre premier P. Soient $x \in P' - P''$, $y \in P'' - P'$; alors $x \cup y \notin P$, $x \cap y \notin P'$, $x \cap y \notin P''$. Prenons un élément $z \in P$ tel que $x \cup y \subseteq z$, et soient x', y' les éléments dont l'existence est postulé dans l'axiome de la normalité relative, c.a.d. tels que

1) $x \cap y = x' \cap y = x \cap y'$

2) $x' \cup y' = z$.

De 2) on déduit qu'un des éléments x', y' appartient à P. Or cela est impossible car si $x' \in P$, alors de $x' \in P''$ et $y \in P''$ on déduit $x' \cap y = x \cap y \in P''$, ce qui est en contradiction avec $x \cap y \notin P''$.

Nous pouvons donc affirmer que R a une arithmétique complétement normale.

Supposons maintenant que R a une arithmétique complétement normale. Soient x, y, z tels que $x \cup y \subseteq z$.

Soit X la famille de tous les éléments x' tels que

$$1)\quad x \subseteq x' \subseteq z \ ;\qquad 2)\quad x' \cap y = x \cap y$$

et Y la famille de tous les éléments y' tels que:

$$1')\quad y \subseteq y' \subseteq z \ ;\qquad 2')\quad x \cap y' = x \cap y$$

et supposons qu'il n'existe un couple $x' \in X$, $y' \in Y$ tel que

$$3)\quad x' \cup y' = z.$$

Remarquons que X et Y sont des familles additives. Dans ces conditions l'ensemble Z des éléments de la forme $x' \cup y'$ est la base d'un certain idéal I qui ne contient pas z et il existera un idéal premier P contenant I sans contenir z. Alors P=R-P, est un filtre premier qui contient z sans contenir aucun élément de X et de Y.

Montrons maintenant qu'il n'existe aucun élément $p \in P$ tel que $x \cap p \subseteq x \cap y$. Autrement l'élément $q = (p \cup y) \cap z$ vérifierait les conditions suivantes:

$$1')\quad y \subseteq q \subseteq z \ ;\qquad 2')\quad x \cap q = x \cap (p \cup y) \cap z =$$

$$= x \cap (p \cup y) = (x \cap p) \cup (x \cap y) = x \cap y$$

c.a.d. on aurait $q \in I$,or cela est impossible car $q \in P$.

Dans ces conditions P et x engendrent un filtre F' qui ne contient pas y et il existera un filtre premier P' divisant F', sans contenir y. De même on démontre l'existence d'un filtre premier P" divisant P, et contenant y sans contenir x. Alors P' et P" sont deux filtres premiers incomparables qui divisent le filtre premier P. Cette contradiction montre qu'il existe un couple x', y' vérifiant la condition

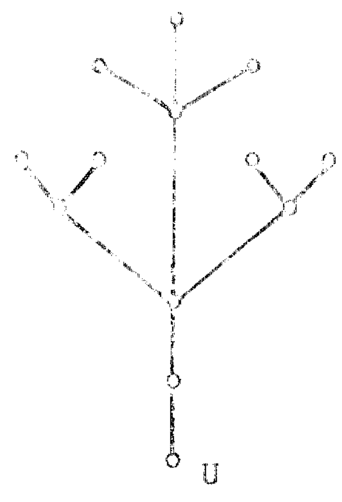
3) et l'axiome da la normalité relative est vérifié.

Si un réticulé distributif a une arithmétique relativement normale il a naturellement une arithmétique normal.

COROLAIRE. *Pour qu'un espace topologique ait une arithmétique complétement normale il faut et il suffit que l'axiome de normalité compléte soit vérifié.*

En particular dans tous les espaces métriques, et en particulier dans la droite, tout filtre fermé qui divise un filtre fermé premier est un filtre premier.

La famille π de tous les filtres premiers d'un réticulé distributif ayant une arithmétique complétement normale a un diagrame de Hasse assez simples, car les éléments de π qui divisent un élément donné de π forment une chaîne. Si nous considérons seulement les filtres premiers qui sont des múltiples d'un ultrafiltre donné U, le diagramme de Hasse correspondant rassemble à un arbre (voir la figure ci-jointe) et π aura l'aspect d'une fôret.



Il est assez curieux de trouver de tels résultats pour les espaces topologiques complétement normaux, car les ensembles lineairement ordonnés sont, avec la topologie des intervals, des espaces complétement normaux.G. Kurepa a étudié d'une façon très approfondie les ensembles ordonnés où les diviseurs de chaque élément forment une chaîne, en cherchant la solution d'un problème célèbre de Souslin sur la droite.

Il serait particulierement important de caractériser les espaces métrisables par des propriétés arithmétiques des filtres premiers. Il est évident que pour les espaces topologiques T1 ayant une base dénombrable le problème est est résoluble par le théorème 3.2. Nous pouvons donc affirmer.

COROLAIRE. *Pour qu'un espace* T1; *ayant une base dénombrable, soit métrisable il faut et il suffit que le réticulé des ensembles fermés ait une arithmétique complétement normale*

Les espaces topologiques normaux ayant une base dénombrable étant complétement normaux nous pouvons remplacer dans l'énoncé précédant l'expression "arithmétique complétement normale" par "*arithmétique normale*".

4. LES SEMI-ARITHMÉTIQUES DE M. WARD.

Dans un travail sur les réticulés de Brouwer, M. Ward a étudié les réticulés indiqués dans la définition suivante, auxquels il a donné le non de semi-arithmétiques.

DÉFINITION 4.1. *Un réticulé de Brouwer* R *est dit une semi-arithmétique si les deux conditions suivantes sont vérifiées:*

1) *La condition de la chaîne descendante est valable dans*
2) $(x \dot{-} y) \cap (y \dot{-} x) = 0$

Nous allons nous intéresser par la condition 2), en cherchant les propriétés des filtres premiers qui la caractérisent.

Commençons par quelques remarques préliminaires. Dans la théorie des entiers, on a la propriété suivante:

C'. *Les filtres premiers multiples d'un filtre premier donné forment une chaîne.*

ou ce qui est équivalent:

C''. *Les idéaux premier qui divisent un idéal premier donné forment une chaîne.*

Cette propriété est équivalente, aux propriétés suivantes:

A''. *Tout idéal qui divise un idéal premier est un idéal premier.*

B''. *Les idéaux qui divisent un idéal premier forment une chaîne.*

On le voit en employant des raisonements duaux de ceux qui on été inqués au n° précédent.

Nous pouvons généraliser la définition de M. Ward, de la maniére suivante, qui sera justifiée par la suite:

DÉFINITION 4.2. *Un réticulé distributif est une semi-arithmétique si la condition C' est vérifiée.*

D'aprés les résultats du n° précédant nous pouvons énoncer le résultat suivant:

THÉORÈME 4.1. *Pour qu'un réticulé distributif soit une semi-arithmétique il faut et il suffit que le dual de l'axiome de normalité relative soit vérifiée.*

Pour avoir une condition sur les filtres premiers plus maniable que C', nous allons démontrer que

THÉORÈME 4.2. *Pour qu'un réticulé distributif soit une semi-arithmétique il faut et il suffit que deux filtres premier incomparables soient relativement premiers.*

Dém. Supposons que C') est vérifiée et soient P', P" deux filtres premiers incomparables. S'ils ne sont pas relativement premiers alors $F = P' \cap P''$ est un filtre qui est contenu dans un filtre premier P; c.a.d. P' et P" sont des multiples incomparables de P, ce qui est impossible, donc P' et P" sont relativement premier. Réciproquement si deux filtres premiers sont toujours relativement premiers alors C') est vérifiée.

L'existence d'un dernier élément ne j'oue aucun rôle dans le théorème suivant:

THÉORÈME 4.3. *Pour qu'un réticulé de Brouwer soit une semi-arithmétique il faut et il suffit que* $(x \dot{-} y) \cap (y \dot{-} x) = 0$.

Dém. Supposons que $(x \dot{-} y) \cap (y \dot{-} x) = 0$, quels que soient x et y. Étant donnés deux éléments arbitraires de R, x et y posons $x' = x \dot{-} y$ et $y' = y \dot{-} x$, alors nous aurons:

1) $x \cup y' = x' \cup y = x \cup y$; 2) $x' \cap y' = 0$

et le dual de l'axiome de la normalité relative est vérifié.

Supposons maintenant que le réticulé de Brouwer R vérifié le dual de l'axiome de la normalité relative. Étant donnés x et y, soient x' et y' des éléments qui vérifient les propriétés 1) et 2). De $x \cup y' = x \cup y$ on déduit que:

3) $y \dot{-} x \subseteq y'$, car $y \dot{-} x$ est le plus petit élément parmi les z qui vérifient la condition $x \cup z = x \cup y$. De même 4) $x \dot{-} y \subseteq x'$. De 2), 3) et 4) on déduit que $(x \dot{-} y) \cap (y \dot{-} x) = 0$.

Cela fustifie la définition suivante:

DÉFINITION 4.2. *Un réticulé de Brouwer sera dit un réticulé de Brouwer-Ward si* $(x \dot{-} y) \cap (y \dot{-} x) = 0$.

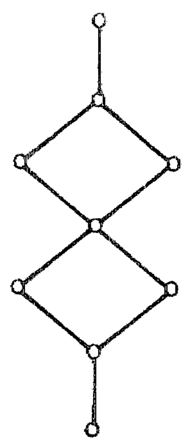
On peut naturellement se demander ce qui devient cette notion, lorsqu'on l'applique au réticulé des ensembles fermés d'un espace topologique. Pour cela démontrons la proposition suivante:

Une logique de Brouwer-Ward est extrêmement disconexe, c.a.d. $x^{o} \cap x^{oo} = 0$.

En effet: $x^{oo} \dot{-} x^{o} = x^{oo}$, $x^{o} \dot{-} x^{oo} = x^{o}$, donc $x^{o} \cap x^{oo} = 0$.

Nous devons donc renoncer à exiger l'axiome de Ward si l'on veut surtout étudier l'arithmétique des filtres des espaces topologiques les plus courrants.

Il est convenable de remarquer qu'il existent des Logiques de Brouwer extrêmement disconnexes qui ne sont pas des Logiques de Brouwer-Ward, comme le montre la fifure ci-jointe.



Cela nos conduit à caractériser l'arithmétique des réticulés topologiques extrêmement disconnexes:

THÉORÈME 4.4. *Pour qu'un réticulé topologique soit extrêmement disconnexe il faut et il suffit que chaque ultrafiltre divise un seul filtre premier maximal.*

Dém. Soit R un réticulé topologique extrêmement disconnexe. Supposons qu'un ultrafiltre U divise deux filtres premiers maximaux P', P" distincts. Soit r un élément régulier de P'-P", alors $r^{o} \in P''$ et comme $r \cap r^{o} = 0$ cela est impossible, donc U divise un seul filtre premier maximal.

Réciproquement supposons que chaque ultrafiltre U d'un réticulé topologique R divise un seul filtre premier maximal et qu'il existe un élément $x \in R$ tel que $x^{o} \cap x^{oo} \neq 0$. Soit U un ultrafiltre contenat $x^{o} \cap x^{oo}$. Posons $Y = R\text{-}U$. Si $y \in Y$ montrons que $y \cup x^{o} \neq I$ en effet si $y \cup x^{o} = I$ alors $x^{oo} \subseteq y$ et comme $x^{oo} \in U$ on aurait $y \in U$ ce qui est impossible. Dans ces conditions Y et x^{o} engendrent un idéal qui est divisible par un idéal minimal *M* dont le complémentaire P' est un filtre premier maximal divisible par U. D'ailleur P' ne contenant pas x^{o}, doit contenir x^{oo}. De même on démontre l'existence d'un filtre premier maximal P" divisible par U, contenant x^{oo} sans contenir x^{o}. P' et P" étant incomparables la démonstration est terminée.

Un réticulé topologique R peut être extrêmement disconnexe et avoir une arithmétique normale, sans avoir une semi-arithmétique, comme le montre l'exemple indiqué dans la figure précédante. Mais il est clair qu'un réticulé topologique extrêmement disconnexe et vérifiant l'axiome de normalité compléte est une semi-arithmétique.

Dans une semi-aritmétique les filtres premiers qui divisent un filtre premier maximal ont un diagrame de Hasse ayant la forme d'une racine. Dans un réticulé topologique extrêmement diaconnexe et ayant une arithmétique complétement normale, les filtres premiers multiples d'un ultrafiltre donné forment une chaîne.

CHAPITRE VI

LES FACTEURS PRIMAIRES

1. NOTION DE FACTEUR PRIMAIRE.

Dans le chapitre précédant nous avons étudié surtout des relations entre les filtres premiers et les ultrafiltres. Il y donc lieu d'étudier aussi les relations du même type entre les filtres et les ultrafiltres. Une des propriétés les plus importantes de l'arithmétique des entiers est la suivante: si un entier n est divisible par un seul nombre premier, alors n est une puissance d'un nombre premier. La propriété analogue dans la théorie des filtres serait la suivante:

Si un filtre F *est divisible par un seul ultrafiltre alors* F *est un filtre premier.*

Dans la théorie des espaces topologiques cette propriété ne peut avoir lieu, comme nous le verrons par la suite, que dans le cas des espaces complétement normaux extrêmement disconnexes. Il y donc lieu d'introduire la définition suivante:

DÉFINITION 1.1. *Un filtre sera dit un facteur primaire s'il est divisible par un seul ultrafiltre.*

La théorie des facteurs primaires aura pour but d'avoir une idée aussi claire que possible de la distribution des facteurs primaires lorsqu'on fait des hypothèses sur le réticulé R.

Comme chaque filtre est l'intersection de filtres premiers un facteur primaire F peut donc être répresenté comme le m.m.c. de filtres premiers qui sont des multiples de l' l'ultrafiltre U que divise F.

Cela nous conduit a introduire la définition suivante qui est moins restrictive.

DÉFINITION 1.2. *Tout filtre qui peut être répresenté comme le m.m.c. d'une famille de filtres premiers multiples d'une même ultrafiltre* U, *sera dit un facteur primaire faible.*

Un facteur primaire est nécessairement un facteur primaire faible mais la réciproque n'est pas vraie. Dans un réticulé topologique qui ne vérifie pas l'axiome de la normalité il existe tout au moins un filtre premier P qui est divisible par deux ultrafiltres distincts. Alors P est un facteur primaire faible qui n'est pas un facteur primaire. On comprend ainsi l'intérêt du théorème suivante:

THÉORÈME 1.1. *Pour que dans un réticulé distributif* $R_{o,1}$ *tout facteur primaire faible soit un facteur primaire il faut et il suffit que l'axiome de la normalité soit vérifié.*

Dém. Nous venons de voir que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons donc que R vérifie l'axiome de la normalité. Soit U un ultrafiltre et F un filtre de la forme $F = \cup P_i$ où les P_i sont des puissances de U, c.a.d. des filtres premiers divisibles par U. Nous venons donc d'admettre que F est un filtre primaire faible contenu dans l'ultrafiltre U'.Si F n'etait pas un filtre primaire il existerait un ultrafiltre U' disctinct de U et divisant F. Choisissons $x \in U$, $y \in U'$ tels que $x \cap y = 0$ et soient x', y' des éléments tels que 1) $x \cap y' = x' \cap y = 0$; 2) $x' \cup y' = I$. Alors $x' \in U-U'$, $y \in U'-U$. Comme $x' \notin F$ et F est l'intersection des P_i il existe un indice $i=j$ tel que $x' \in P_j$, mais alors on doit avoir $y' \in P_j$ ce qui est impossible car $x \cap y' = 0$. Donc F est un facteur primaire.

Appelons *puissance maximale d'un ultrafiltre* U à chaque filtre premier maximal P divisible par U.

DÉFINITION 1.3. *Si* U *est un ultrafiltre d'un réticulé distributif qui vérifie l'axiome de la normalité, nous donnerons le nom d'ultrafacteur primaire de* U *au m.m.c.* F(U) *de toutes les puissance maximales de* U.

Il est clair d'après le théorème 1.1 que F(U) est un facteur primaire.

THÉORÈME 1.2. *Dans un réticulé distributif qui vérifie l'axiome de la normalité chaque ultrafacteur primaire est un facteur primaire maximal.*

Dém. S'il existait un facteur primaire F multiple propre de F(U), F ne serait pas l'intersection de filtres premiers.

Dans ces conditions nous pouvons affirmer, en tenant compte des résultats obtenus dans le chapitre précèdant, que

COROLAIRE. *Pour que tous les facteurs primaires d'un réticulé topologique normal* R *soient des filtres premiers il faut et il suffit que* R *soit extrêmement disconnexe et vérifie l'axiome de normalité complète.*

R doit être extrêmement disconnexe pour que chaque ultrafacteur primaire F(U) soit un filtre premier et doit vérifier l'axiome de normalité complète pour que chaque diviseur de F(U) soit un filtre premier. (Il est évident que tous des diviseurs de F(U) sont des facteurs primaires divisibles par U).

Nous savons donc que dans les espaces topologiques les plus courrants, il existent des filtres primaires qui ne sont pas premiers; mais comme ils sont toujours le m.m.c. de puissances prémières d'un même ultrafiltre, on peut se demander quel rôle ont-ils a jouer dans la topologie.

2. RAPPORT ENTRE LES FACTEURS PRIMAIRES ET LES VOISINAGES.

Nous allons nous ocouper exclusivement dans ce chapitre des réticulés qui vérifient l'axiome de la normalité et nous éviterons donc, de le répéter à chaque instant.

Voyons maintenant qu'il existe un rapport intime entre les ultrafacteurs primaires et les voisinages.

THÉORÈME 2.1. *Dans tout réticulé topologique qui vérifie l'axiome de la normalité tout ultrafacteur primaire est un ultravoisinage et réciproquement.*

Dém. Soit F(U) l'ultrafacteurs primaire de U et considérons le voisinage V(U). Si $v \in V(U)$ il existe un $x \in U$ tel que $x \cap v^o = 0$ donc $v^o \notin U$ et par conséquent v doit appartenir a toutes les puissances premières de U, c.a.d. V(U) est divisibles par F(U). Si V(U) ne coincidait pas avec F(U) il existerait $z \in F(U) - V(U)$. Comme V(U) est l'intersection de filtres premiers il existe un filtre premier P divisant V(U) tel que $z \notin P$ et alors P ne peut pas être un multiple de U. Soit U' un ultrafiltre divisant P.

Alors $V(U)$ serait divisible par deux ultrafiltres distincts U et U'. Soient $x \in U-U'$, $y \in U'-U$, x',y' tels que $x \cap y' = x' \cap y = 0$, $x' \cup y' = I$. De la on déduit que $x' \notin V(U)$ et que $y'^{o} \subseteq x'$.

Comme y'^{o} est un voisinage de $x \in U$, alors $y'^{o} \in V(U)$ et $x' \in V(U)$. Cette contradiction démontre que $V(U) = F(U)$.

Démontrons maintenant que $V(U)$ est un ultravoisinage. Si $V(U)$ n'était pas un ultravoisinage il existerait un voisinage W divisant effectivement $V(U)$. W ne peut être divisible par U, car s'il en était ainsi on aurait $W \subset V(U)$. Il existe donc un élément $y \in W-U$, incompatible avec $x \in U$. Utilisant le raisonnement qui nous avons indiqué précèdemment on termine la démonstration. Nous venons donc de démontrer que chaque ultrafacteur est un ultravoisinage.

Réciproquement soit V un ultravoisinage et U un ultrafiltre divisant V. Le raisonnement du début montre que V est divisible par $F(U)$. Comme $F(U)$ est un voisinage et V un ultravoisinage alors $V = F(U)$.

D'après le théorème que nous venons de démontrer, dans les réticulés topologiques normaux les notions d'ultravoisinage et d'ultrafacteur primaire sont identiques.

COROLAIRE. *Dans un réticulé topologique vérifiant l'axiome de la normalité* $U-F(U)$ *est formé par l'ensemble de tous les éléments* x *dont les frontières appartiennent a* U *(on ce qui revient au même dont les frontières sont compatibles avec* $F(U)$*).*

Dém. La frontière d'un élément de $F(U)$ est incompatible avec $F(U)$, donc avec U. Au contraire les éléments de $U-F(U)$ ont des frontières compatibles avec $F(U)$, donc compatibles avec U.

On voit bien, maintenant que l'existence des filtres premiers P multiples d'un ultrafiltre U et distincts de U, est due a ce que U contient des éléments rares. Toutes les complications proviennent des éléments qui ont une frontière appartenant a U.

L'étude de l'arithmétique des filtres premiers aparaît ainsi comme un moyen pour étudier les éléments rares, qui sont la source de toutes les complications qu'on puisse trouver.

En utilisant seulement la notion d'ultrafiltre on ne pourra pas faire un certain nombre de distinctions importantes.

Une autre conséquence immediate des résultats précédants est la suivante:

> *Les ultravoisinages sont de la forme* V(U) *ou* U *est un ultrafiltre.*

Voyons maintenant les rapports qui existent entre les voisinages et les ultravoisinages:

> THÉORÈME 2.2. *Tout voisinage est l'intersection d'ultravoisinages.*

Dém. Soit V un voisinage et $x \notin V$. Il existe un filtre premier P divisant V sans contenir x. Alors P divise un ultravoisinage W qui divise nécessairement V et la démonstration est terminée.

Les voisinages sont donc des filtres qui peuvent se répresenter comme le m.m.c. d'ultrafacteurs primaires: ils ont ainsi caractère de simplicité au point de vue arithmétique, tout en étant une notion plus complexe que celle de filtre principal (c.a.d., d'ensemble fermé). Nous savons que dans un espace T1 compact les seuls filtres qui sont le m.m.c. d'ultrafiltres sont les filtres principaux. Il serait intéressant de décidir si dans un réticulé topologique normal compact les filtres qui sont le m.m.c. d'ultrafacteurs primaires sont nécessairement des voisinages. Quoi qu'il en soit les résultats précédants nous montrent que la notion de voisinage, telle que nous l'avons formulé en suivant Alexandroff, se présente dans les espaces topologiques normaux comme une notion étroitement liée a la notion de filtre premier et a celle d'ultrafiltre.

Même dans le cas géneral d'un réticulé topologique quelconque nous pouvons affirmer que:

> *Si* V *est un voisinage, tout filtre premier* P *qui ne divise par* V *est incompatible avec* V *(c.a.d. relativement premier avec* V*).*

En effet si P premier ne divise par V il existe $v \in V$ tel que $v \notin P$. Mais v est un voisinage d'un élément $x \in V$, c.a.d. $v^{o} \cap x = 0$ et comme $v^{o} \in P$ alors P et V sont incompatibles.

3. LES MULTIPLES PRIMAIRES.

La notion de facteurs primaire peut etre généralisée de la manière suivante:

> DÉFINITION 3.1. *Nous dirons que le filtre* F' *est un multiple primaire de filtre* F *si* 1) F *divise* F'; 2) *tout ultrafiltre qui divise* F' *divise* F.

Alors on voit bien qu'un facteur primaire est un multiple primaire d'un ultrafiltre et réciproquement un multiple primaire d'un ultrafiltre est un facteur primaire.

Si l'on applique cette définition au cas des entiers positifs on reconnait que l'entier y est un multiple primaire d'un entier x, si dans les décompositions de x et y en facteurs premiers figurent les mêmes nombres premiers.

Étudions maintenant les rapports qui existent entre la notion de multiple primaire et celle de voisinage.

THÉORÈME 3.1. *Dans un réticulé topologique qui vérifie l'axiome de la normalité le voisinage* V(F) *d'un filtre* F *est un multiple primaire de* F.

Dém. Soit F un filtre et U un ultrafiltre divisant le voisinage V(F). Si U ne divise pas F il existent deux éléments incompatibles $u \in U$ et $f \in F$. Soient u', f' tels que $u \cap f' = u' \cap f = 0$, $u' \cup f' = I$. De $u' \cap f = 0$ on déduit que u'^{o} est un voisinage de f, donc $u'^{o} \in V(F)$. De $u' \cup f' = I$ on déduit que $u'^{o} \subseteq f'$ et alors $f' \in V(F)$, donc $f' \in U$. Comme $u \in U$ et $u \cap f' = 0$, nous arrivons à une contradiction, ce qui termine la démonstration.

Il s'aggit maintenant de s'avoir qu'elles relations existent entre les divers multiples primaires d'un filtre F.

THÉORÈME 3.2. *Dans un réticulé topologique qui vérifie l'axiome de la normalité, tout multiple primaire d'un filtre* F *est un diviseur du voisinage* V(F).

Dém. S'il existait un multiple primaire F' de F ne divisant pas V(F), il existerait un $v \in V(F) - F'$, voisinage d'un élément $x \in V(F)$, c.a.d. tel que $x \cap v^{o} = 0$ et ceci entraîne $x \subseteq v$. Si v^{o} etait incompatible avec F' il existerait un $y \in F'$ tel que $y \cap v^{o} = 0$. Mais alors v serait un voisinage de $x \cup y \in F'$, car $(x \cup y) \cap v^{o} = 0$ et alors de $x \cup y \subseteq v$ on déduit que $v \in F'$ ce qui est imposible, par hypothèse.

En realité nous venons de demontrer un résultat un peu plus général, a savoir: si un voisinage V d'un réticulé to tologique est un multiple d'un filtre F alors tout multiple primaire de F est un diviseur de V. L'axiome de la normalité figure dans l'énonce du Théor. 3.2, pour assurer que V(F) est un voisinage.

COROLAIRE. *Dans un réticulé topologique qui vérifie l'axiome de la normalité, la famille de tous les multiples primaires d'un filtre* F *a un dernier élément qui est le voisinage* V(F).

Nous allons voir que tous les multiples primaires de F ont pour voisinage le filtre V(F). Pour obtenir tous les filtres qui ont pour voisinage un voisinage donné V il suffit de considérer la famille de tous les ultrafiltres qui divisent V calculer le m.m.c. F(V) de ces ultrafiltres. Alors les filtres qui ont V pour voisinage sont des multiples de F(V) qui divisent V.

Ce résultat nous montre qui les ultrafiltres sont impuissants pour distinguer entre un filtre et son voisinage.

Mais nous n'avons pas démontré que F(V) a pour voisinage V. Pour cela supposons qu'il existe un voisinage w de $x \in F(V)$ tel que $w \notin V$; alors w est compatible avec V (car autrement w serait un voisinage d'un élément v de V et alors $w \in V$). Soit U un ultrafiltre divisant le filtre engendré par V et w^o. Comme $x \cap w^o = 0$, $x \notin U$ et cela est imposible car $x \in F(V)$.

Ces considérations nous ammènent à introduire la definition suivante:

DÉFINITION 3.2. *Si* F *est un filtre, nous donnerons le* *nome de radical de* F (en notation Rad F) *au m.m.c. de tous les ultrafiltres qui divisent* F.

Il est clair que Rad F $\subseteq$ F, Rad Rad F = Rad F.

THÉORÈME 3.3. Rad F = Rad V(F).

Dém. D'après le théorème 3.1, le voisinage V(F) est un multiple primaire de F, donc Rad V(F) $\subseteq$ Rad F; d'autre part de F $\subseteq$ V(F) on déduit Rad F $\subseteq$ Rad V(F) et alors Rad F = = Rad V(F).

Nous pouvons aussi affirmer que

THÉORÈME 3.4. V(F) = V(Rad F).

Dém. Le raisonement indiqué à la fin de la page précédante montre que le radical d'un voisinage V a pour voisinage V, c.a.d. V(Rad V) = V. En remplaçant V par V(F) dans cette formule nous aurons V(F) = V(Rad V(F)) = V(Rad F).

Si F est un facteur primaire son radical est un ultrafiltre et son voisinage est un ultravoisinage.

Dans un espace d'Hausdorff compact le radical d'un filtre est un filtre principal (Chap.IV, pag.65). Soit V un voisinage d'un tel espace, alors d'après le Théor.3.3, V = V(V) = V(Rad V). Comme Rad V est un filtre principal F(x) nous aurons V = V(F(x)) = V(x), c.a.d. V est la famille V(x) de tous les voisinages (fermés) d'un ensemble fermé x.

Si un espace topologique normal n'est pas compact chaque voisinage est le voisinage d'un radical.

4. REPRÉSENTATION NORMALE D'UN FILTRE.

Tout filtre d'un réticulé distributif peut etre repré senté comme le m.m.c. de filtres premiers et parmi ces représentations nous avons distingué la représentation minimale de F (Chap.III à la fin du n°1) $F = \cup P_i$. Cette représentation a l'inconvénient suivant: les filtres P_i ne sont pas relativement premiers à moins que R vérifie des conditions très spéciales qui ne se trouvent pas réalisées dans le cas des espaces topologiques les plus courants. La théorie des facteurs primaires a précisément pour but de remedier cette situation de la manière suivante:

Parmi les filtres premiers qui divisent F considérons ceux qui sont multiples d'un même ultrafiltre U et calculons son m.m.c. F_u. Convenons d'écrire $F_u = R$ si l'ultrafiltre U est incompatible avec F. Dans le cas général nous dirons que F_u est la composante primaire de F relativement à l'ultratrafiltre U. Si R est un réticulé vérifiant l'axiome de la normalité chaque $F_u \neq R$ est un facteurs primaire et nous pouvons écrire

$$F = \cup F_u$$

les F_u étant relativement premiers deux à deux. Cette représentation de F sera dite *normale*. Si l'on se donne un ultrafiltre U la composante F_u se trouve univoquement determinée. C'est donc avec les facteurs primaires que nous pouvons rétablir une situation analogue à celle que l'on trouve dans la théorie des entiers.

Considérons les représentations normales des filtres F', F''

$$F' = \cup F'_u \quad ; \quad F'' = \cup F''_u$$

Posons $S = F' \cup F''$, $T = F' \cap F''$ et soient

$$S = \cup S_u \quad ; \quad T = \cup T_u$$

les représentations normales de S et T. On voit sans difi-culté que

$$S_u = F'_u \cup F''_u$$

$$T_u = F'_u \cap F''_u$$

qui sont précisément les règles pour calculer le m.m.c. et p.g.c.d. de deux nombres entiers à partir des décompositions en facteurs premiers.

CHAPITRE VII

NORMALISATION

1. REPRÉSENTATION.

La théorie de la représentation des réticulés distributifs est intimement liée a beacoup de problèmes d'algèbre et de topologie. Considerons pour le moment les représentations par des familles d'ensembles. On se donne un réticulé R et un ensemble E. Réprésentons par les signes $\vee$ et $\wedge$ la réunion et l'intersection des parties de E. Supposons qu'à chaque élément $x \in R$ on fait correspondre une partie $f(x)$ de E. Considérons les propriétés suivantes de la transformation f:

(1) $f(x \cap y) = f(x) \wedge f(y)$; (2) $f(x \cup y) = f(x) \vee f(y)$

Si (1) est vérifiée nous dirons que f est un *inf-homomorphisme,*

Si (2) est vérifiée nous dirons que f est un *sup-homomorphisme,*

Si (1) et (2) sont vérifiée nous dirons que f est un *homomorphisme* et que la famille d'ensembles $f(x)$ est, respectivement, une *sup-représentation, inf-représentation, représentation de* R. Chacune des conditions (1) et (2) implique la condition:

(3') Si $x \subseteq y$ alors $f(x) \leqslant f(y)$,

ou $\leqslant$ est la relation d'inclusion entre les parties de E. Si f est une transformation biunivoque qui vérifie la condition (3') et

(3") Si $f(x) \leqslant f(y)$ alors $x \subseteq y$

nous dirons que f est un *isomorfisme*.

Nous allons faire quelques remarques sur les représentations d'un réticulé distributif par de familles d'ensembles. Nous conseillons, à ce propos, la lecture d'un article de Garrett Birkhoff et Orrin Frink; où les idées se trouvent très clairement exprimées.

Si l'on veut determiner les inf-représentation isomorphes d'un réticulé R, on ne diminue pas la généralité (loc. cit.) en supposant que les points de l'ensemble E sont des filtres de R et l'on peut proceder de la manière suivante:

> TECHNIQUE A. *On se donne une famille, non vide,* E *de filtres de* R, *à chacun desquels nous donnerons le nom de point. A chaque élément* x *de* R *on fait correspondre la famille* f(x) *de tous les filtres de la collection* E *qui contiennent l'élément* x.

Alors on démontre fácilement que f est une inf-représentation. Pour que f, ainsi définie, soit une représentation, c.a.d. pour la condition (2) soit aussi vérifiée, il faut et il suffit que tous les filtres de E soient des filtres premiers. Dans ce cas R est représenté par un anneau d'ensembles.

Pour que l'inf-représentation f soit un isomorphisme il faut et il suffit que pour chaque couple x, y d'éléments de R il existe un filtre de E contenant un des éléments x, y sans contenir l'autre, ou ce que revient au même que chaque filtre principal soit l'intersection de filtres de E.

Dans ces conditions pour obtenir une représentation isomorphe de R il suffit de prendre une famille de filtres premiers de R satisfaisant aux conditions que nous venons d'in diquer. Dans ce cas le réticulé R doit être necéssairement distributif. Nous avons ainsi une méthode générale pour obtenir *toutes* les *représentations* isomorphes d'un réticulé distributif R. On obtient la représentation de Stone [3] si E est la famille de tous les filtres premiers de R. Si E est la famille de tous les filtres complétement irreductibles on arrive a la représentation de G. Birkhoff. On obtiendrait au autre type de représentation en prenant pour E la famille de tous les filtres premiers qui interviennent dans la représentation minimale des divers éléments de R.

Cette technique de représentation n'est pas satisfaisante, car elle contient en soi certaines limitations, surtout si l'on cherche à l'appliquer à la théorie des espaces topologiques. Mais cela ne veut pas dire qu'elle ne puisse pas rendre des services et résoudre conplétement des problèmes bien déterminés.

Supposons par exemple que l'on veuille déterminer les représentations compactes d'un réticulé R.

DÉFINITION 1.1. *Une famille d'ensembles F est dite compacte, si la condition suivante est vérifiée : toute partie compatible de F a une intersection non vide.* (Note une partie F' de F est dite compatible si toute famille fini d'ensembles de F' a une intersection non vide).

Alors nous pouvons énoncer le résultat suivante:

LEMME 1.1. *Pour qu'une famille* E *de filtres d'un réticulé distributif* R *fournisse, par l'intermédiarie de la technique* A, *une inf-représentation compacte il faut et il suffit que* 1) *chaque filtre de* R *soit divisible par un filtre de* E.

Dém. Si les $f(x_i)$ forment une famille compatible il en est de même pour les x_i et réciproquement. On ne diminue pas la généralité du raisonement en suposant que les x_i forment un filtre F de R. Alors pour que l'intersection des $f(x_i)$ ne soit pas vide il faut et il suffit qu'il existe un filtre de E divisant F.

Dans le cas ou R a un premier élément ont peut remplacer la condition 1) par la suivante:

1') *Tout ultrafiltre de* R *appartient a* E.

Lorsqu'on pense dans les applications a la théorie des espaces topologiques il faut toujours exiger que les représentations vérifient des axiomes de séparation plus au moins forts. Cherchons les inf-représentation qui vérifient l'axiome de Fréchet:

DÉFINITION 1.2. *Nous dirons qu'une famille* F *de sous-ensembles d'un ensemble* E *vérifie l'axiome* T1, *si étant donnés deux points disctints* p,q ∈ E *il existe un ensemble de* F *contenant* p *sans contenir* q.

Alors on démontre facilement le résultat suivant:

LEMME 1.2. *Pour qu'une famille* E *de filtres d'un réticulé* R *fournissent, par l'intermédiaire de la technique* A, *une inf-représentation qui vérifie l'axiome* T1, *il faut et il suffit que les filtres de* E *soient incomparables deux a deux.*

Nous pouvons allors énnoncer la proposition suivante:

THÉORÈME 1.1. *Pour qu'une famille* E *de filtres d'un réticulé* Ro, *contenant un premier élément, fournisse par l'intermédiaire de la technique* A, *une inf-repré* *sentation* T1 *et compacte il faut et il suffit* E *soit la famille de tous les ultrafiltres de* Ro. *Pour que l'inf-représentation soit isomorphe il faut et il suffit que chaque filtre principal de* Ro *soit l'intersection d'ultrafiltres (c.a.d.* Ro *doit être disjonctif). S'il en est ainsi et si* Ro *est un réticulé distributif alors l'inf-représentation isomorphe considéré est une représentation.*

On voit bien, ainsi, quel est l'origine de la méthode de compactification de Wallman pour les espaces T1. Elle est essentiellement liée a la technique A, largement utilisée par M. Stone dans la théorie des représentations des algèbres de Boole.

Wallman a aussi démontré que la représentation associée a la famille de tous les ultrafiltres d'un réticulé distributif disjonctif $R_{o,1}$ vérifie l'axiome de separation de Hausdorff seulement dans le cas ou $R_{o,1}$ vérifie l'axiome de la normalité. La technique A n'est pas satisfaisante pour obtenir la compactification de Cech-Stone d'un espace complètement régulier; mais Alexandroff [1] a indiquée une méthode pour obtenir la compactification de Cech-Stone a partir de celle de Wallman. Alexandroff lui même a obtenu directement la compactification de Cech-Stone d'un espace complètement régulier en utilisant les filtres qu'il appelle complètement réguliers maximaux.

On peut donc se demander si la compactification de Cech-Stone ne peut pas être considérée comme un cas spécial de la théorie de la représentation. Si l'on insiste a obtenir une inf-représentation isomorphe la réponse est certainement negative comme nous venons de démontrer.

On peut alors chercher a résoudre le problème par une *sup-représentation isomorphe*, construite a partir des filtres de R; mais on ne pourra pas utiliser la technique A. Nous allons donc indiquer une autre méthode pour obtenir des représentations d'un réticulé *distributif*.

TECHNIQUE B. *On se donne une famille, non vide,* E *de filtres d'un réticulé distributif* R, *à chacun desquels nous donnerons le non de point. A chaque élément* $x \in R$ *faisons correspondre la famille* $f(x)$ *de tous les filtres de la collection* E *qui sont compatibles avec* x.

Montrons que $f(x)$ est une sup-représentation de R. En effet soient x, y deux élément de R, $F(x)$ et $F(y)$ les filtres principaux correspondants et F un filtre de E. Dans un réticulé distributif nous avons

$$F(x \cup y) \cap F = (F(x) \cup F(y)) \cap F = (F(x) \cap F) \cup (F(y) \cap F)$$

et cette formule suffit pour montrer que $g(x)$ est une sup-représentation.

Cherchons les conditions pour que $g(x)$ soit aussi une inf-représentation. Il est clair que dans tous les cas nous pouvons affirmer que

$$g(x) \wedge g(y) \supseteq g(x \cap y)$$

Il nous reste donc a exprimer que

$$g(x) \wedge g(y) \subseteq g(x \cap y)$$

Pour cela il faut et il suffit que la famille de filtres E jouisse de la propriété suivante:

Si x *et* y *sont compatibles avec un filtre* F *de* E, *alors* $x \cap y$ *est compatible avec* F.

Cette condition exprime précisément que chaque filtre de E doit être contenu dans un seul ultrafiltre, c.a.d. les filtres de E doivent être des facteurs primaires.

Nous venons de démontrer la propriété suivante:

> LEMME 1.3. *Pour que la sup-représentation* g(x) *d'un réticulé distributif* R, *obtenue par l'intermédiaire de la technique* B, *soit une représentation de* R *il faut et il suffit que les filtres de* E *soient des facteurs primaires.*

Nous voyons ainsi qu'on peut obtenir des représentations d'un réticulé *distributif* en utilisant des filtres qui ne sont pas nécessairement premiers. Pour qu'une représentation de R_o, par la technique B, soit compacte il faut et il suffit que chaque ultrafiltre de R_o divise un filtre de E. Pour que la même représentation vérifie l'axiome T1 il faut et il suffit que les filtres de E soient incompatibles deux a deux.

> LEMME 1.4. *Pour que la sup-représentation* g(x) *d'un réticulé distributif* R_o, *obtenu par l'intermédiaire de la technique* B, *soit une représentation* T1 *et compacte il faut et suffit que chaque ultrafiltre de* R_o *contienne un et seul filtre de* E *et que chaque filtre de* E *soit contenue dans un seul ultrafiltre.*

Dans ces conditions il existe une correspondance biunivoque entre les filtres de E et les ultrafiltres de R_o. La représentation T1 compacte g(x) sera isomorphe seulement si R_o est disjonctif et nous retournons à la compactification de Wallman.

Une technique équivalente a la technique B a été utilisée par Alexandroff pour obtenir la compactification de

Wallman dans le cas des espaces topologiques normaux. Alexandroff prend comme points les ultra-*voisinages* du réticulé des ensembles fermés de l'espace normal donné. Les ultra voisinages vérifient bien les conditions indiquées dans le lemme 1.4.

Ce changement de technique introduit par Alexandroff n'est pas sans importance, car il a pu obtenir la compactification de Cech-Stone d'un espace complètement régulier en utilisant la technique B.

Un voisinage V sera dit complètement régulier si pour chaque élément $v \in V$ il existe un $x \in V$ tel que: 1) $x \cap v^o = 0$; 2) il existe une fonction númerique continue prenant la valeur 0 sur x et la valeur 1 sur v^o. La famille des voisinages complètement réguliers est inductive inférieurement. Les voisinages complètement réguliers minimaux sont les points de l'espace α' d'Alexandroff. Il applique alors la technique B. En prennant la famille g(x) comme une sous-base d'ensembles fermés il obtient la compactification de Cech-Stone des espaces complètement réguliers.

Nous pouvons donc affirmer que la compactification de Cech-Stone est une *sup-représentation isomorphe* d'un espace complètement régulier. L'espace donné est plongé dans un espace de Hausdorff compact (par l'introduction de points idéaux) donc dans un espace normal. On voit bien ainsi que si l'espace donné n'a pas une arithmétique normal sa compactification aura une arithmétique normal.

Nous pouvons donc dire que la compactification de Cech-Stone d'un espace complètement régulier arrive a *restaurer une arithmétique normal la où elle n'existe pas.*

Il serait très important d'obtenier la compactification de Cech-Stone par des méthodes purement arithmétiques, mais pour cela il faudrait auparavant caractériser l'arithmétique des filtres premiers d'un espace complètement régulier, ce que ne semble pas facile. Il serait convenable de voir la signification arithmétique d'un memoire de Lubben, où cet auteur obtient la compactification de Cech-Stone en travaillant sur des bases de filtre.

P. Samuel a obtenu la compactification de Cech-Stone sans utiliser les nombres réels, en travaillant sur une structure uniforme.

Le théorème Garrett-Birkhoff sur la représentation d'un réticulé distributif R par un anneau de sous-ensembles d'un ensemble donné I peut aussi être considéré comme une normalisation de R, car la famille de toutes les parties de I étant une algèbre de Boole a une arithmétique normale.

Nous voyons donc que dans beacoup de problèmes on obtient a partir d'un réticulé donné un autre plus large ayant une arithmétique normal et contenant une partie isomorphe a R. C'est ce qu'on peut appeler la *normalisation* de R. Il nous semble qu'il serait important d'unifier et généraliser les diverses méthodes de normalisation utilisées jusqu'ici.

2. LES ARITHMÉTIQUES FINIES.

Dans le numéro précedent nous somme occupé des représentation d'un réticulé par des familles de sous-ensembles d'un ensemble donné I.

L'ensemble donné I peut être considéré comme un produit d'algèbres de Boole chacune desquelles contient seulement deux éléments; c.a.d. on prend un systhème d'axes chacun desquels contient seulement deux coordonées, on fait le produit cartesien I de ces axes, qui est au fond un système de coordonnés pour décrire les éléments de R. Comme chaque axe a seulement deux coordonnées il faut un grand nombre d'axes pour décrire chaque point de R. Si R est la droite euclidienne (exemple 5), la représentation de Stone, ou bien celle de Birkhoff, décrit chaque point de la droite par une infinité de coordonnées. Il en est de même dans le cas de l'espace euclidien a n dimensions (exemple 6), mais ce n'est pas ainsi dans l'exemple 1, où chaque élément a un nombre fini de coordonnées (nom borné dans son ensemble). C'est cette remarque que nous a conduit a étudier les arithmétique finies (voir Chap. III).

Plus généralement nous pouvons prendre une famille de chaînes L_i considérer le produit cartesien $K = \Pi L_i$ et étudier les *représentations* de R par un sous-réticulé de K. Pour obtenir toutes les représentations de ce type il suffit de déterminer toutes les représentations linéaires de R, c.a.d. toutes les représentations de R sur des chaînes L_i. On reconnait immédiatement que ce problème se reduit a étudier les chaînes de filtres premiers de R, et pour avoir le maximum de coordonnées nous pouvons considérer des chaînes maximales de filtres premiers de R a chacune desquelles nous donnerons le nom *d'axe coordonné maximal* L_i (nous considérons R comme un filtre premier, pour simplifier l'exposition; mais il peut se faire que cette coordonnée devienne inutile).

Pour avoir une représentation de R sur L_i il suffit de faire correspondre a chaque $x \in R$ l'intersection $x(i)$ de tous les filtres de L_i qui contiennent x. Si une famille (L_i) d'axes maximaux de R contient tous les filtres premiers de R, alors la fonction $x(i)$ établi un isomorphisme entre R et un sous réticulé de $K = \Pi L_i$.

Il est surtout intéressant d'étudier le cas où le nombre d'axes est minimum. Dans le cas des arithmétiques d'ordre n on peut épuiser la famille de tous les filtres premiers de R au moyen de n axes coordonnés maximaux.

En effet, on reconnait immédiatement que la famille Π

de tous les filtres premiers d'un réticulé distributif ayant une arithmétique d'ordre n, vérifie les conditions suivantes:

1) Π contient n éléments incomparables deux a deux.
2) Étant donnés n+1 éléments de Π deux d'entre eux sont comparables.

et réciproquement. Si un ensemble ordonné Π vérifie les conditions 1) et 2) nous dirons que Π a le *degré de comparabilité* n. Nous avons demontré, avec beaucoup de dificulté, qu'un ensemble ordonné de degré de comparabilité n peut être épuisé au moyen de n chaînes, mais c'était un résultat annoncé par Dilworth depuis 1944, comme cet auteur nous a fait connaître dans une lettre. La démonstration correspondante a du paraître dans un travail de cet auteur publié dans les Annals of Mathematics de l'été de 1949. Dans le résumé de Dilworth indiquée précedemment cet auteur indiquait aussi une caractérisation intrinsèque des réticulés distributifs finis ayant une arithmétique d'ordre n; mais la forme des énoncés ne se prête pas a une généralisation au cas des réticulés infinis (les propriétés en question ne sont pas valables dans les espaces a n dimensions). Nous pouvons ainsi affirmer que les réticulés ayant une arithmétique d'ordre n peuvent être représentés comme un sous-réticulé d'un produit de n chaînes, et cela est impossible pour un nombre de chaînes plus petit. Nous pouvons donc dire que R a la *dimension cartesienne* n.

Dans ce cas nous sommes arrivés encore a plonger un réticulé qui a une arithmétique complètement normale, car les filtres premiers d'un produit de chaînes (chacune desquelles contient au moins deux éléments) est un ensemble ordonné dont le diagramme de Hasse est formé par n chaînes telles que chaque élément d'une de ces chaîne est incomparable avec tous les éléments de toutes les autres chaînes. Donc l'axiome de la normalité relative et son dual sont verifiés. On a bien une situation très simples au point de vue arithmétique tandis le réticulé initial peut avoir une arithmétique beaucoup plus compliquée.

Nous pouvons donc considérer cette technique de représentation comme une technique qui permet non seulement de normaliser, mais aussi de normaliser complètement R (directement et duallement).

Le résultat que nous venons d'indiquer nous a permis en particulier d'obtenir une caractérisation de l'espace a n dimension comme un réticulé distributif particulier, en généralisant le théorème Cantor sur la caractérisation ordinale de la droite. Nous reviendrons sur ce problème et sur la théorie générale des représentations cartesiennes dans un autre travail.

Dans ce chapitre nous voulons surtout mettre en évidence que dans plusieurs problèmes de représentation on arrive en poursuivant d'autres buts a construir des réticulés distributifs ayant une arithmétique normal. Il paraît donc que l'étude de l'arithmétique des filtres premiers des réticulés distributifs est susceptible d'aider a comprendre des phénomènes de nature variée.

BIBLIOGRAPHIE

ALEXANDROFF (P.S.): *Bikompacte Erweiterungen topologischer Raüme*. Rec. Math. (Mat. Sbornik). N.S. Vol. 5(1939), pag. 403-423.

ALEXANDROFF (P.S.) et URYSHON (P.): *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*. Verhandelungen der K.Akademie van Wetenschapen te Amsterdam, Vol. 14, n°1.

BIRKHOFF (G.) [1]: *Lattice Theory*, 2 nd. Edition. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol.25, New York, 1949.

[2] *On the combination of subalgebras*. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol.29 (1933). pag.491-464.

BIRKHOFF (G.) et FRINK (O.): *Representations of lattices by sets*. Trans. Amer. Math. Soc. Vol.64 (1948) pag.299-315.

BOURBAKI (N.): *Eléments de Mathématiques*.

[1] *Fascicule de résultats*.

[2] *Structures Topologiques*.

[3] *Utilisation des nombres réels en topologie générale*. Actualités Scientifiques. Herman. Paris.

CARTAN (H.) [1]: *Théorie des Filtres*. C.R.Acad. des Sciences. Paris Vol.205 (1937), pag.595-598.

[2] *Filtres et Ultrafiltres*. Idem, pag.777-779.

CECH (E.): *On bicompact spaces*. Ann. of Math. Vol.38 (1937) pag.823-844.

FRAENKEL (Y.): *Criterios de bicompacidad* . Unión Matemática Arg. Memorias y Mon. Serie 2, Vol.2, n°1 (1946).

FRECHET (M.) [1]: *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits*. C.R.Acad. Sc. Tome 165 (1917), pag. 359-360.

[2] *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits*. Bull. Sc. Math. Tome 42 (1918). pag.1-19.

FREUDENTHAL (H.): *Teilweise geordnete Moduln*. Proc. Akad. Wet. Amsterdam, 39 (1936), pag.641-651.

GLIVENKO (V.): *Sur quelques points de la logique de Brouwer*. Acad. Royale de Belgique. Bulletin des Sciences. (5), Vol.15 (1929) pag.183-188.

GOMES (A.P.): *Noção de funcional em espaços sem pontos*. Port. Math. Vol.5 (1946), pag.1-120.

JANISZEWSKI (M.): *Sur les continus irreductibles entre deux points*. Journal de l'Ecole Polytechnique, 2eme série, Cahier 16 (1912) pag.79-170.

KAPLANSKY (I.): *Lattices of continuous functions*. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), pag.617-622.

KLEIN (F.): Math.Annalen. Vol 106 (1932) pag.114-134.(Citation de M.Ward).

KUREPA (G.): *Ensembles ordonnés et ramifiés*. Pub.Math.de l'Univ. Belgrade,4(1935),pag.1-138.

LUBBEN (R.G.): *Concerning the decomposition and amalgamation of points*.Trans.Amer.Math.Soc.,Vol.49(1941),pag.410-466.

McKINSEY (J.C.C.) and TARSKI (A.): *On closed elements in closure algebras*.Annals of.Math.47(1946),pag. 122-162.

MONTEIRO (A.A.):[1] *Filtros e Ideais*. Fasc.1,2."Notas de Matemática".Rio de Janeiro.(1948).

[2] *Sur l'aritmétique des filtres premiers*. C.R.Acad.Sc.

Paris. Tome 225 (1947), pag. 846-848.
[3] *Réticulés distributifs de dimension linéaire n*. C.R.Acad.Sci.Paris. Tome 226 (1948), pag. 1658-1680.

NACHBIN (L.): *Une propriété caractéristique des algèbres Booléiennes*. Port. Math. Vol.6 (1947), pag. 115-118.

ORE (O.): *Mappings of closure relations*. Ann. of Math. Vol.47 (1947), pag. 115-118.

PONTRYAGIN (L.): *Topological Groups*. Princeton. 1939.

SAMUEL (P.): *Ultrafiltres and Compactification of Uniform Spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. Vol.64 (1948), pag. 100-132.

STONE (M.H.): [1] *The theory of representations of Boolean Algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), pag. 37-111.
[2] *Applications of Boolean rings to general topology*. Trans. Amer. Math. Soc. Vol.41 (1937), pag. 375-481.
[3] *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian Logics*. Casopsis pro Pestovani Matematiky a Fysiky. Vol.67 (1937), pag. 1-25.
[4] *Algebraic Characterisations of special Boolean rings*. Fundamenta Math. Tome 29 (1937), pag. 233-303.
[5] *The representation of Boolean Algebras*. Bull. Amer. Math. Soc. Vol.44 (1938), pag. 807-816.

TERASAKA (H.): *Theorie der topologischen verbände*. Proc. Imp. Acad. of Tokyo, Vol.13 (1937), pag. 401-405.

WALLMAN (H.): *Lattices and topological spaces*. Ann. of Math. 39 (1938), pag. 112-126.

WARD (M.): *Structure residuation*. Annals of Math. Vol.39 (1938), pag. 558-568.

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

N° 30

L'ARITHMETIQUE DES FILTRES ET LES ESPACES TOPOLOGIQUES II

par

Antonio Monteiro

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

Este número contiene la reproducción de la comunicación *"Arithmétique des Filtres et les Espaces Topologiques"* presentada al "Coloquio de Villavicencio; 21-25 de Julio 1954", publicado por la Unesco (Montevideo, 1954).
Esta comunicación contiene,además de un resumen de la memoria precedente los nuevos resultados obtenidos por el autor en la Facultad de Ingeniería de San Juan, Argentina, en el período 1950-1953.

Ce numero contient la reproduction d'un tirage-à-part d'un exposé présenté sous le titre *"Arithmétique des Filtres et les Espaces Topologiques"* au "Coloquio de Villavicencio; 21-25 Julio 1954" et publiée par l'Unesco, Montevideo 1954. Cette note contient un résumé du memoire precèdent et en outre les nouveaux résultats obtenues pendant la période 1950-1953 à la "Facultad de Ingeniería de San Juan (Argentina)".

A. A. MONTEIRO

L'ARITHMÉTIQUE DES FILTRES ET LES ESPACES TOPOLOGIQUES

De SEGUNDO SYMPOSIUM DE MATEMATICAS - VILLAVICENCIO, MENDOZA

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »
684, PERU, 684

1954

L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques

POR ANTÓNIO A. MONTEIRO
Facultad de Ingeniería, San Juan, Argentina

1. INTRODUCTION. La notion d'espace topologique peut être considérée comme une généralisation de celle de nombre réel. Cette idée se trouve clairement formulée par L. Pontrjagin [19, p. 26] qui s'exprime de la manière suivante:

> Just as the theory of groups studies the algebraic operation of multiplication on its purest aspect, so abstract topology sets as its goal the investigation of the operation of passing to the limit, disregarding all the other properties of the elements under consideration. If a group can be regarded as a generalisation of the concept of real numbers, then a topological space should also be treated as a generalisation of the same real numbers. Only in the first case the operation of multiplication is generalized, while in the second it is the limiting operation, or, what is the same, the concept of limit point which is generalized.

La notion de nombre réel étant aussi une généralisation de celle de nombre entier, nous pouvons considérer la notion d'espace topologique comme une généralisation de celle de nombre entier et l'on se trouve placé devant le problème de *déterminer les propiétés arithmétiques des entiers qui subsistent dans les espaces topologiques.*

Pour étudier ce problème il faut savoir, tout d'abord, quelle est la notion que dans un espace topologique doit remplacer celle de nombre entier. Si l'on remarque qu'un espace accessible de Fréchet (*c . a . d* un espace T1) est complétement déterminé lorsqu'on se donne la famille R de tous les ensembles fermés de l'espace, il est raisonnable d'étudier tous les problèmes relatifs à l'espace topologique considéré en raisonnant exclusivement sur la famille R, en laissant, donc, de côté toutes les parties de l'espace qui ne sont pas fermées. Cela peut nous conduire à envisager chaque ensemble fermé comme une généralisation de la notion de nombre entier, mais l'expérience montre, de suite, que cette idée est insuffisante et l'on est alors amené à penser dans les familles d'ensembles fermés, parmi lesquelles il faut distinguer les *filtres* et les *idéaux* de R comme des familles particulièrement simples.

Pirre Samuel [20, p. 111] a mis en évidence, d'une manière très claire, la signification de la notion de filtre en topologie :

> Topology deals essentially with infinite sets, while it is much easier to operate with finite sets. It is therefore necessary to have a tool permitting the passage from the finite to the infinite (or conversely by using dual methods). The necessary tool has to have finite features in its definition, but to be infinite in its essence ; and the filters fulfill both requirements.

Il est donc raisonnable de penser que cet instrument permettant le passage du fini à l'infini est particulièrement adapté à jouer le rôle des entiers. Comme le remarque encore le même auteur, pour que les filtres soient utiles ils doivent avoir des relations avec la structure de l'espace topologique sur lequel ils sont définis et pour se placer dans ces conditions il suffit de considérer avec Henri Wallman, les filtres fermés, *c . a . d*, des filtres de R.

Nous allons donc considérer les filtres de R *comme les êtres qui doivent jouer le rôle des entiers dans la théorie des espaces topologiques* et chercher les propriétés arithmétiques des filtres fermés dans les diverses catégories d'espaces topologiques. On pourrait tout aussi bien étudier les *idéaux* de R, mais étant donné le *caractère asymétrique de la notion d'espace topologique* il faut s'attendre à ce que la théorie des filtres de R ne soit pas identique à celle des idéaux. En réalité nous pensons que les idéaux de R sont plus importants dans l'étude de certains problèmes ; cependant comme la connaissance de tous les filtres de R détermine univoquement R il n'y a aucun inconvénient, tout au moins théoriquement, à étudier les filtres de R, d'autant plus que les propriétés arithmétiques des filtres que nous aurons à envisager par la suite, peuvent se traduire facilement dans le langage des idéaux.

La tâche que nous venons d'indiquer serait inabordable si le développement récent des mathématiques n'avait pas déterminé, pour ainsi dire, le chemin à suivre. Nous pensons surtout, en ce moment, à la théorie des réticulés distributifs et en particulier des algèbres de Boole, telle qu'elle se trouve dans les travaux de Marshall Stone, où cet auteur a établi, pour la première fois, des relations entre la théorie des réticulés distributifs et celle des espaces topologiques, en ouvrant ainsi le chemin pour toutes les recherches ultérieures, parmi lesquelles nous devons distinguer celles de Henri Wallman, que nous cherchons à approfondir dans ce travail.

Etant donné *le rôle capital et presque prépondérant qu'on a fait jouer en topologie jusqu'ici aux espaces compacts* (André Weil, [25], p. 38), il est naturel d'avoir pour but principal la caractérisation abstraite de la famille de tous les filtres fermés des espaces compacts. La solution de ce problème (A. Monteiro [17], 3), que nous reproduisons ici, ne doit pas nous empêcher d'étudier des problèmes de nature plus générale, si nous pensons qu'il n'est pas nuisible de se débarasser des hypothèses inutiles à la validité des raisonnements; et c'est ainsi que nous sommes conduits à l'étude arithmétique des réticulés distributifs qui ont un rapport direct avec la théorie des espaces compacts. Nous trouvons alors des renseignements assez précis sur les filtres fermés des espaces normaux qui nous permettent de mettre en lumière les relations de nature arithmétique qui existent entre les méthodes de compactification que Henri Wallman et Paul Alexandroff ont indiqué pour ces espaces.

Les méthodes d'Alexandroff nous ont conduit à introduire dans la théorie des réticulés distributifs la notion de voisinage et celle de variété. Il est alors un peu surprenant de voir que la notion de voisinage — introduite dès les débuts de la topologie générale par Maurice Fréchet — a des rapports assez subtiles avec l'arithmétique des filtres irreductibles, que nous arrivons à mettre en évidence, tout au moins dans le cas des espaces normaux.

Nous indiquons aussi une propriété arithmétique équivalente à l'axiome de la complète normalité et pour de tels espaces l'analogie avec l'arithmétique des entiers devient presque complète si nous faisons des hypothèses arithmétiques équivalentes à l'axiome d'extrême disconnexion de Marshall Stone.

Les recherches indiquées dans cette note n'ont en réalité d'autre but que d'interpréter au point de vue de l'arithmétique les axiomes de séparation que des auteurs bien connus on été amenés à considérer, dès les débuts de la topologie générale, et il va sans dire que beaucoup de problèmes de cette nature attendent encore une solution, parmi lesquels nous voulons signaler le plus important d'entre eux que consiste à caractériser au point de vue arithmétique l'axiome de la complète régularité de Tychonoff. La caractérisation arithmétique de la droite euclidienne, des espaces euclidiens à n dimensions et des espaces métriques aurait aussi un grand intérêt.

Si nous remarquons que la famille de tous les ensembles fermés d'un espace topologique est non seulement un réticulé distributif mais aussi une Algèbre de Brouwer il est naturel d'étudier ces algèbres au point de vue où nous nous plaçons ici. Nous montrons en particulier que les representations homomorphes d'une telle algèbre sont univoquement déterminées (c. a. d. à moins d'un isomorphisme) par les idéaux de l'algèbre donnée, tandis que les filtres ne jouissent pas de la même propriété.

Un lecteur interessé par la logique trouvera dans cette note, moyennant des interprétations convenables, des renseignements assez précis sur l'arithmétique des systèmes déductifs.

Nous profitons de cette ocasion pour faire une mise au point des résultats bien connus sur l'arithmétique des réticulés distributifs qui ont un rapport étroit avec ceux que nous voulons mettre en évidence.

2. LES RÉTICULÉS ET LES FILTRES. — Soit R un ensemble ordonné, c. a. d. un ensemble sur lequel est définie une relation $\leq$ telle que: 01) $a \leq a$; 02) Si $a \leq$ et $b \leq a$ alors $a = b$; 03) Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$. Pour indiquer que R contient deux élements 0 et 1 tels que: $0 \leq x \leq 1$, nous représenterons R par $R_{0,1}$ et nous dirons que 0 est le premier et 1 le dernier élément de R.

Nous dirons que R est un *ensemble dirigé* (P. Samuel) ou *réticulé inférieurement* si chaque couple d'éléments a et b de R a une borne inférieure $a \wedge b$. Si chaque couple d'éléments de R a aussi une borne supérieure $a \vee b$ nous dirons que R est un *réticulé*. Un *réticulé est complet* si chaque famille, non vide, d'éléments de R a une borne supérieure et une borne inférieure.

Dans les applications les symboles $a \leq b$, $a \wedge b$, $a \vee b$, peuvent recevoir des noms variés; ainsi, en arithmétique nous dirons respectivement: « a *divise* b », « le plus grand commun diviseur de a *et* b », « le plus petit commun multiple de a et b ».

Si $a \wedge b = 0$, nous dirons que a et b son *incompatibles* ou *relativement premiers*.

Un élément $a \neq 0$ sera dit: 1°) un *atome* si pour tout x tel que $0 \leq x \leq a$, on a, soit $x = 0$ soit $x = a$; 2°) *irreductible* (inférieurement) si l'égalité $a = x \vee y$ entraine soit $a = x$ soit $a = y$; 3°) *complètement irreductible* si l'égalité $a = \vee x_i$ entraine l'existence d'un indice i tel que $a = x_i$; 4°) *premier* ou *primitif* si la relation $a \leq x \vee y$ entraine soit $a \leq x$ soit $a \leq y$; 5°) *primaire* si a est divisible par un et un seul atome; 6°) une *puissance* si a est primaire et irreductible.

Nous dirons, avec Leopoldo Nachbin, qu'un élément x est *inférieurement compact* ([18], 2, p. 137), dans un réticulé R complet, si étant donnée une famille non vide (x_i) d'éléments de R telle que $\wedge_i x_i \leq x$, il existe une sub-famille finie non vide, x_1 $x_2, \ldots, x_n$ de la famille donnée, telle, que $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq x$. On pourrait aussi introduire des définitions duales de celles que nous venons d'indiquer.

Un *filtre* d'un réticulé R est une famille F d'éléments de R telle que F0) F n'est pas vide; F1) si $a \in F$ et $a \leq b$ alors $b \in F$; F2) si $a, b \in F$ alors $a \wedge b \in F$. On pourrait supprimer l'axiome F0), mais comme, dans cette note, nous aurons surtout à nous occuper des réticulés qui ont un dernier élément nous préférons postuler F0).

La famille $F(a)$ de tous les éléments x de R tels que $a \leq x$ est un filtre qu'on appelle le *filtre principal* engendré par a.

Remarquons que si $a \leq b$ alors $F(b)$ est une partie de $F(a)$. Cela nous conduit à ordonner la famille $\Phi = \Phi(R)$ de tous les filtres de R de la manière suivante: nous dirons que *le filtre* F_1 *divise le filtre* F_2 (et nous écrirons $F_1 \leq F_2$) si F_2 est une partie de F_1. Cela n'est pas d'accord avec les usages les plus courants, mais nous permettra d'écrire: $F(a) \leq F(b)$ lorsque $a \leq b$. Dans ces conditions Φ a pour premier élément le filtre R que nous representerons par la notation O. Dans les cas où R a un premier élément 0 nous aurons $O = F(0) = R$. Si R a un dernier élément 1, Φ aura pour dernier élément le filtre $F(1)$, que nous représenterons aussi par 1.

Un *filtre* sera dit *propre* si $F \neq O$.

La notion d'*idéal* est duale de celle de filtre.

La notion de filtre peut se rattacher à celle de *valuation inférieure.* Pour cela soit V un réticulé contenant seulement deux éléments distincts 0 et 1. Une transformation univoque v définie sur R et prenant ses valeurs dans V sera dite una *valuation inférieure* si: 1°) Il existe un élément x de R tel que $v(x) = 1$; 2°) $v(a \wedge b) = v(a) \wedge v(b)$.

Le *noyau de la valuation inférieure* v est la famille F de tous les éléments x de R tels que $v(x) = 1$; et alors on démontre facilement que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie F de R soit le noyau d'une valuation inférieure de R c'est que F soit un filtre de R. On peut donc remplacer l'étude des valuations inférieures par celle des filtres (G. Birkhoff [3], 1).

D'une façon duale on définit les valuations supérieures. Si v est une valuation supérieure et inférieure nous dirons que v est une *valuation* de R. Pour qu'un filtre F soit le noyau d'une valuation de R il faut et il suffit que F soit un filtre propre tel que si $a \vee b \in F$ alors ou $a \in F$ ou $b \in F$. Si l'on tient compte du fait que Φ est un réticulé on montre facilement que les conditions que nous venons d'indiquer sont équivalents à dire que F est un *filtre premier ou primitif.*

Ces relations entre les filtres et les valuations sont très sugestives dans le calcul des propositions si l'on interprète les symboles $a \leq b$, $a \wedge b$, $a \vee b$ comme des représentations des expressions « b est une conséquence de a », « a et b », « a ou b » et si nous donnons a 0 le nom de « proposition absurde » et à 1 le nom de « proposition universelle ». Alors il est naturel de donner aux filtres le nom de *systè-*

mes deductifs (Tarski) et interpréter la valuation inférieure v correspondante au filtre F de la manière suivante : « si $v(x) = 1$ nous dirons que x est *vraie*, ou bien que x est *démontrable* ».

3. L'arithmétique des réticulés. — Nous allons maintenant rappeler quelques résultats fondamentaux sur la théorie des filtres.

Nous nous proposons tout d'abord d'indiquer une caractérisation abstraite de la famille Φ de tous les filtres d'un réticulé R et pour simplifier l'exposition nous allons supposer que R contient un premier et un dernier éléments. Ce problème a été résolu par Atuo Komatu [14], et a été étudié après par G. Birkhoff et Orrin Frink [4]. Leopoldo Nachbin [18], 2 a perfectionné et complété les résultats indiqués par ces auteurs, et nous suivrons de près son exposé.

If faut tout d'abord savoir comment peut-on retrouver les éléments de R dans le réticulé Φ, ce qui est équivalent a déterminer une propriété caractéristique des filtres principaux F (a). Alors on démontre le résultat suivant: *pour qu'un filtre* F *soit principal il faut et il suffit que* F *soit un élément inférieurement compact du réticulé* Φ.

La réponse au problème indiqué est alors la suivante :

> *Pour qu'un réticulé* Φ *soit isomorphe à la famille de tous les filtres d'un réticulé* R_{01} *il faut et il suffit que* Φ *possède les propriétés suivantes :*
>
> Φ 1) Φ *est un réticulé complet,*
>
> Φ 2) *Tout élément de* Φ *est la borne inférieure d'une famille, non vide, d'éléments inférieurement compacts*
>
> Φ 3) *La borne supérieure de deux éléments inférieurement compacts est un elément inférieurement compact.*
>
> Φ 4) *Le premier élément* O *de* Φ *est inférieurement compact.*

Leopoldo Nachbin a aussi indiqué une caractérisation de la famille de tous les filtres d'un ensemble dirigé (*loc. cit.*). Dans un réticulé les élements les plus importants, au point de vue arithmétique, sont les éléments irreductibles; mais il peut arriver qu'un réticulé ne contienne aucun élément de cette nature. Au contraire dans Φ il existent toujours des éléments complètement irreductibles.

Garrett Birkhoff et Orrin Frink [4], dans un travail sur les représentations des réticulés par des ensembles, où les idées se trouvent très clairement exprimées, ont indiqué des résultats que nous allons maintenant rappeler.

Dans un ensemble ordonné nous dirons qu'un élément m est *minimal* s'il n'existe aucun diviseur de m distinct de m. On peut démontrer que dans un réticulé R, la famille des filtres de R qui ne contiennent pas un certain élément x donné (nous supposons $x \neq 1$) est un ensemble ordonné qui contient des éléments minimaux (qui sont des filtres complètement irreductibles) et que réciproquement si un filtre F est complètement irreductible alors il existe un élément x de R tel que F soit un filtre minimal dans la famille de tous ceux qui ne contiennent pas l'élément x. De ce résultat fondamental on peut déduire le théorème suivant de Garrett Birkhoff et Orrin Frink :

Tout filtre propre d'un réticulé R *est la borne supérieure de filtres complètement irreductibles.*

Ce résultat s'applique comme nous venons de le dire à un réticulé mais il n'y a aucune difficulté à le démontrer pour un ensemble dirigé. On peut donner au théorème que nous venons de rappeler le nom de Théorème Fondamental de l'Arithmétique des réticulés. Nous pouvons aussi dire que tout filtre propre est la borne supérieure des filtres irreductibles.

Nous allons maintenant compléter ces résultats, par l'étude de certains cas particuliers que nous aurons à considérer par la suite.

Si $R_{0,1}$ est un *réticulé complet* alors pour caracteriser Φ nous devons remplacer la condition Φ 3) par la suivante:

Φ 3)'. *La borne supérieure d'une famille, non vide, d'éléments inférieurement compacts est un élément inférieurement compact.*

Parmi les filtres complètement irreductibles nous devons distinguer les *ultrafiltres*, c.a.d. las *atomes* de Φ, qui existent toujours, car nous supposons que $R = R_{0,1}$ a un premier élément. Nous voyons donc que même si R n'a pas d'atomes, il existeront toujours dans Φ.

Un *réticulé* $R_{0,1}$ sera dit *compact* si 0 est inférieurement compact. D' après Φ 4), Φ est toujours compact, même si $R_{0,1}$ ne l'est pas. On démontre facilement le résultat suivant:

Pour que $R_{0,1}$ *soit compact il faut et il suffit que les atomes de* Φ *soient inférieurement compacts,* ou ce qui revient au même que tous les ultrafiltres soient principaux.

Un *élément* x sera dit *atomique*, s'il est la borne supérieure d'une famille, non vide, d'atomes. Dans un réticulé R les éléments $x \neq 0$ ne sont pas en général atomiques, et l'on peut se proposer avec Henri Wallman [23], de déterminer les réticulés R tels que les filtres principaux propres F (x), soient des éléments atomiques de Φ. Pour cela, dous dirons qu'un *réticulé* $R_{0,1}$ est *disjonctif* (H. Wallman [23]) si étant donnés deux éléments a et b tels que $a \neq a \wedge b$ il existe un élément $c \neq 0$, tel que: $c \leq a$ et $c \wedge b = 0$. Alors on démontre le résultat suivant:

Pour que $R_{0,1}$ *soit disjonctif il faut et il suffit que tous les filtres principaux propres soient la borne supérieure d'ultrafiltres.*

Cette propriété peut s'exprimer dans Φ de la manière suivante: « Tous les éléments inférieurement compacts distincts de O son atomiques ». Ce résultat a été démontré par H. Wallman, dans le cas des réticulés distributifs, mais il est encore valable pour un réticulé (G. Birkhoff et O. Frink [**4**]) et même pour un ensemble dirigé (P. Samuel [**20**]).

En général les éléments atomiques de Φ ne sont pas inférieurement compacts, à moins que R vérifie certaines conditions spéciales. A ce propos signalons le résultat suivant:

Si R *est complet et compact tous les éléments atomiques de* Φ *son inférieurement compacts.*

Dans ces conditions si R est disjonctif, complet et compact il y a identité entre les éléments atomiques et les éléments inférieurement compacts de Φ, et réciproquement si cette identité a lieu dans Φ alors R est disjonctif, complet et compact.

Nous aurons par la suite à utiliser le résultat suivant:

Pour qu'un réticulé Φ *soit isomorphe à la famille de tous les filtres d'un réticulé eomplet, disjonctif et compact il faut et il suffit que* Φ *vérifie les conditions suivantes :*

I) Φ *est complet et compact*

II) *Tout élément de* Φ *est la borne inférieure, d'une famille, non vide, d'éléments inférieurement compacts.*

III) *Les éléments inférieurement compacts de* Φ *distincts de* O *coïncident avec les éléments atomiques de* Φ. (A. A. Monteiro [**17**], 3).

Après cette introduction sur la théorie générale des filtres, nous allons étudier au point de vue arithmétique des réticulés de nature plus spéciale, qui ont un rapport plus direct avec la théorie des espaces topologiques.

4. ARITHMÉTIQUE DES FILTRES PRIMITIFS. — Nous avons montré que les valuations d'un réticulé se rattachant directement à l'existence de filtres primitifs ou premiers. Il y a des réticulés qui ne contiennent aucun filtre primitif et il peut arriver que tous les filtres propres soient primitifs. On reconnait facilement que les seuls réticulés où tous les filtres propres sont primitifs sont les réticulés linéaires, c.a.d. ceux dans lesquels pour chaque couple a et b on a: soit $a \leq b$ soit $b \leq a$. Entre ces deux cas extrêmes il y a lieu de considérer les réticulés qui vérifient le

Théorème de l' arithmétique des filtres Primitfs. — Tout filtre propre est la borne supérieure de filtres primitifs.

G. Birkhoff ([3], 1, 2, 3) a demontré que les réticulés distributifs contenant plus d'un élément, ont toujours des filtres primitifs, G. Birkhoff ([3], 3) et M. Stone ([21], 3) ont démontré que le théorème de l'arithmétique des filtres primitifs est vérifié dans les réticulés distributifs. En outre G. Birkhoff et O. Frink ont montré que dans un réticulé distributif tout filtre irreductible est primitif et réciproquement. Il n'y a aucune difficulté à préciser ces résultats. On peut en effet démontrer que :

Pour que le théorème de l'arithmétique des filtres primitifs soit vérifié il faut et il suffit que R *soit distributif.* (A. A. Monteiro ([17] 1 ; 2), pág. 88).

d'où l'on deduit, en tenant compte du théorème sur l'aritmétique des filtres irreductibles que :

Pour qu'un réticulé R *soit distributif il faut et il suffit que tous les filtres irreductibles soient primitifs* (*Iseki* [12]).

On peut remplacer dans cet énoncé le mot « irreductibles » par « complètement irreductibles » (L. Nachbin).

Dans ces conditions dans la théorie des réticulés distributifs il n'y a pas lieu de distinguer entre les filtres irreductibles et primitifs.

5. ARITHMÉTIQUE DES ULTRAFILTRES. — M. Stone ([21], 1) a démontré que dans une algèbre de Boole et même dans une algèbre de Boole généralisée tous les filtres irreductibles sont des ultrafiltres et tous les idéaux irreductibles sont des idéaux maximaux (ultraidéaux). Nachbin ([18],1) a démontré le remarquable résultat suivant :

Si dans un réticulé distributif $R_{0,1}$ *tous les filtres irreductibles sont des ultrafiltres alors* $R_{0,1}$ *est une algèbre de Boole.*

On peut généraliser ces résultats au cas des réticulés qui n'ont pas nécéssairement un premier ni un dernier éléments. Nous dirons que R est un réticulé de Boole: si 1°) R est distributif, 2°) pour chaque x tel que $a \leq x \leq b$ il existe un élément y tel que $a = x \wedge y$, $b = x \vee y$. Alors on peut démontrer que la condition nécésaire et suffisante pour que, dans un réticulé distributif R, tous les filtres irreductibles soient des ultrafiltres c'est que R soit un réticulé de Boole (A. A. Monteiro [17] 1, 2).

Dans les réticulés de Boole sont donc vérifiés les deux théorèmes suivants:

Théorème de l'Arithmétique des Ultrafiltres : Tout filtre propre est la borne supérieure, d'une famille non vide, d'ultrafiltres.

Théorème de l'Arithmétique des Ultra-idéaux : Tout idéal propre est la borne supérieure d'une famille, non vide, d'ultra-idéaux.

Si ces deux théorèmes sont verifiés dans un réticulé distributif nous dirons que R a une *arithmétique maximale.* On peut démontrer le résultat suivant :

Pour qu'un réticulé distributif complet soit une arithmétique maximal il faut et il suffit que R *soit une algèbre de Boole* (A. A. Monteiro, [17] 1,2).

Mais nous ne savons pas s'il existent des réticulés distributifs (non complets) ayant une arithmétique maximale et qui ne soient pas des réticulés de Boole.

Comme la famille R de tous les ensembles fermés d'un espace topologique T1 est un réticulé distributif complet, alors R ne peut avoir une arithmétique maximale à moins qu'il s'agisse de la topologie discrète.

De tous ces résultats il résulte que dans la théorie des filtres fermés des espaces topologiques en géneral les filtres irreductibles ne seront pas des ultrafiltres et dualement les idéaux fermés irreductibles no seront pas des ultra-idéaux.

Une hypothèse plus faible que le théorème de l'arithmétique des ultrafiltres est la suivante :

Tout filtre principal propre est la borne supérieure d'ultrafiltres (H. Wallman).

que nous avons déjà considéré et qui se trouve vérifié dans le réticulé des ensembles fermés d'un espace accessible de Fréchet (espaces T1). Un *réticulé distributif* et *disjonctif sera dit orthogonal.* Si $R_{0,1}$ est orthogonal alors la borne supérieure de tous les ultrafiltres est le filtre principal F (1).

La borne supérieure de tous les ultrafiltres (ultra-idéaux) d'un réticulé $R_{0,1}$ sera dite le *filtre* (idéal) *radical* de $R_{0,1}$.

Un élément r de $R_{0,1}$ sera dit *rare* si : 1°) $r \neq 1$; 2°) si $r \vee w = 1$ alors $w = 1$. On peut démontrer que *dans un réticulé* $R_{0,1}$ (distributif ou non) la *famille des éléments rares est identique à l'idéal radical de* $R_{0,1}$.

L'ensemble complementaire d'un ultra-idéal d'un réticulé distributif est un filtre irreductible qu'on peut appeler un *suprafiltre.*

6. LES ARITHMÉTIQUES NORMALES. — Nous venons de voir que dans les réticulés distributifs qui ne sont pas booléiens il existent

des filtres irreductibles qui ne sont pas des ultrafiltres. Pour assurer l'existence d'ultrafiltres nous allons supposer que R a un premier élément : $R = R_0$. La relation la plus simple qui puisse exister entre les filtres irreductibles et les ultrafiltres est indiquée dans la définition suivante :

Nous dirons qu'un réticulé R_0 *a une arithmétique normale si* R_0 *est distributif et si chaque filtre irreductible est divisible par un et un seul ultrafiltre— c.a.d. si chaque filtre irreductible est une puissance.*

F. Klein [13], dans un travail publié en 1932, avait déjà considéré les réticulés que nous venons de définir, dans le cas très spécial où tous les filtres sont principaux, ou ce qui revient au même dans le cas des réticulés qui vérifient la condition de la chaîne descendante (comme il y a lieu, par exemple, dans le cas de l'ensemble des entiers naturels $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ ordonné par la relation « divise »); mais il n'arrive pas, d'après ce que nous connaissons, à obtenir une caractérisation algébrique de la propriété indiquée. Pour étudier ce problème introduisons la définitiou suivante :

Un réticulé R_0 *sera dit normal s'il est distributif et s'il vérifie l'axiome suivant : étant donnés trois éléments* a, b *et* u *tels que 1°)* $a \wedge b = 0$; *2°)* $a \vee b \leq u$ *il existent des éléments* a_1, b_1 *tels que* $a \wedge b_1 = a_1 \wedge b = 0$; $a_1 \vee b_1 = u$.

Dans le cas où R_0 a un dernier élément 1, l'axiome que nous venons d'indiquer prend une forme plus simple et plus familière dans la théorie des espaces topologiques. Pour cela il est convenable de définir la notion de voisinage dans un réticulé distributif. $R_{0,1}$.

Nous dirons que v est un *voisinage* de a, s'il existe un élément w tel que : 1°) $v \vee w = 1$, 2°) $a \wedge w = 0$.

La famille $V(a)$ de tous les voisinages de a est un filtre qu'on appele le filtre des voisinages de a. Nous dirons que *a est separé de b* s'il existe un voisinage de a incompatible avec b et s'il en est ainsi b est aussi séparé de a.

Alors, on voit de suite que l'axiome que nous venons d'indiquer dans la définition procédente est équivalent dans un réticulé distributif $R_{0,1}$ à :

L'axiome de la normalité : Si a *et* b *sont incompatibles alors* a *est séparé de* b.

Nous dirons que a et b sont *complètement séparés* si ces éléments ont des voisinages incompatibles. L'axiome de la normalité peut être formulé sous la forme suivante: « chaque couple d'éléments incompatibles sont complètement séparés ».

Si l'on postule l'axiome de la normalité, pour le réticulé des ensembles fermés d' un espace topologique, nous obtenons l'axiome de la normalité que Paul Urysohn a considéré dans ses importantes recherches sur le problème de la metrisation. L'axiome de la normalité a été formulé dans un réticulé distributif $R_{0,1}$ par H. Wallman [23].

Il est bien connu que Paul Urysohn a démontré que pour qu'un epace topologique vérifie l'axiome de la normalité il faut et il suffit qu'étant donnés deux ensembles fermés disjoints A et B il existe une fonction numérique f continue dans tout l'espace prenant la valeur 0 sur A et la valeur 1 sur B et telle que $0 \leq f(x) \leq 1$. Il est intéresant de remarquer que ce théorème peut être étendu au cas des réticulés distributifs $R_{0,1}$ qui vérifient l'axiome de la normalité, moyennant une définition convenable de la notion de fonction continue, comme nous l'avons montré dans une conférence, en 1945, à la Faculté de Philosophie de São Paulo.

Nous pouvons maintenant indiquer la solution du problème posé. Pour qu'un réticulé R_0 *soit normal il faut et il suffit que chaque filtre irreductible soit divisible par un seul utrafiltre.*

Comme exemples d'un réticulé normal n'ayant pas de dernier élément nous pouvons indiquer 1°) Les entiers naturales ordonnés par la relation « divise ». 2°) La famille de tous les ensembles compacts d'un espace (d'Hausdorff) localement compact.

Leopoldo Nachbin dans un travail (inédit) où il montre, en particulier, que dans le réticulé des ensembles fermés d'un space (d'Hausdorff) compact (infini) il existent des filtres irreductibles qui ne sont pas des ultrafiltres; a aussi démontré que chaque filtre irreductible est divisible par un seul ultrafiltre. Nous voyons maintenant, non seulement que cette propriété a lieu dans tous les espaces qui vérifient l'axiome de la normalité, mais aussi qu'il n'y a pas d'autres espaces où elle puisse avoir lieu.

Le théorème dual de celui que nous venons d'indiquer est aussi va lable et à ce propos il est intéressant de signaler que les seuls espaces topologiques qui verifient l'axiome de la normalité dual sont ceux qui vérifient l'axiome de l'extrême disconnexion de Stone, c.a.d. les espaces où la fermeture d'un esemble ouvert est un ensemble ouvert. Dans ces conditions les seuls espaces topologiques où le réticulé des ensembles fermés possède les deux propriétés arithmétiques suivantes:

1°) Chaque filtre irreductible est divisible par un seul ultrafiltre.

2°) Chaque idéal irreductible est divisible par un sel ultra-idéal, ou ce qui revient au même: chaque ultrafiltre divise un seul suprafiltre.

sont les espaces qui vérifient l'axiome de normalité et celui de l'extrême disconnexion.

Nous dirons qu'un réticulé distributif $R_{0,1}$ est *régulier* si tout élément est la borne inférieure de ses voisinages. Tout réticulé distributif régulier est orthogonal. Il serait important de déterminer une propriété arithmétique équivalente à la regularité.

Dans les applications à la topologie nous aurons à considérer avec H. Wallman les réticulés qui sont orthogonaux et normaux, auquels nous donnerons le non de *réticulés orthonormaux*. Indiquons en passant les résultats suivants :

1°) Tout réticulé orthonormal $R_{0,1}$ est régulier.
2°) Tout réticulé régulier et compact est orthonormal.
3°) Dans un réticulé orthonormal tout élément irreductible est un atome.

Remarquons encore que si $R_{0,1}$ est normal alors Φ est aussi normal et réciproquement.

Nous pouvons maintenant indiquer une caractérisation de la famille de tous les filtres fermés d'un espace (d'Hausdorff) compact.

Pour qu'un réticulé Φ soit isomorphe à la famille de tous les filtres fermés d'un espace (d' Hausdorff) compact il faut el il suffit que Φ ait les propriétés suivantes :

I) *Φ est distributif, complet et compact.*
II) *Tout élément de Φ est la borne inférieure d'élements inférieurement compates.*
III) *Les éléments inférieurement compacts de Φ, distincts de O, coincident avec les éléments atomiques de Φ.*
IV) *Chaque élément irreductible est divisible par un seul atome ou ce qui est équivalent Φ vérifie l'axiome de la normalité* (A. A. Monteiro, [**17**], 3).

Si nous voulons caractériser la famille de tous les filtres fermés d'un espace métrisable compact il suffit de remplacer l'axiome II, par le suivant :

II') *Il existe une famille dénombrable K, d'éléments inferieument compacts, telle que tout élément de Φ soit la borne inférieure d'éléments de K.*

Il est intéressant de remarquer que Φ ne peut être orthogonal à moins que l'espace compact donné soit formé par un nombre fini de points.

7. Les arithmétiques complètement normales. — Nous nous proposons d'étudier d'une façon un peu plus détaillée les filtres des réticulés orthomormaux, mais suparavant nous allons indiquer une caractérisation arithmétique des espaces topologiques qui vérifient l'axiome de la complète normalité, c.a.d. eaux pour lesquels tous les sous-espaces vérifient l'axiome de la normalité, ou, ce qui revient au même, ceux pour lesquels « deux parties séparées A et B (c.a.d. telles que $\overline{A} \wedge B = A \wedge \overline{B} = O$) ont des voisinages disjoints». Les deux définitions que nous venons d'indiquer font intervenir des parties de l'espace qui ne sont pas nécessairement fermées; donc une difficulté essentielle consiste à trouver une définition de ces espaces ne faisant intervenir que les parties fermées de l'espace considéré.

Etant donné un *réticulé* R, nous dirons qu'il est *complètement normal* ou *relativement normal* s'il vérifie lex deux conditions suivantes: 1°) R est distributif; 2°) Tout segment $[a, b]$ (c.a.d. la famille de tous les éléments x tels que $a \leq x \leq b$) est un réticulé normal. Alors on peut démontrer que : « *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace topologique vérifie l'axiome de la complète normalité c'est que le réticulé R de ses ensembles fermés soit complètement normal* ». Nous allons maintenant indiquer une caractérisation arithmétique des réticulés complètement normaux :

Pour qu'un réticulé distributif R *soit complètement normal il faut et il suffit que les filtres de* R *vérifient une quelconque des conditions suivantes :*

I) *La famille de tous les filtres qui divisent un filtre irreductible est linéariement ordonné.*

II) *Tout filtre propre qui divise un filtre irreductible est irreductible.*

III) *La famille de tous les filtres irreductibles qui divisent un filtre irreductible est un ensemble linéairement ordonné.*

En particulier pour que dans un espace T1, les filtres fermés vérifient une quelconque des conditions, I, II, et III que nous venons d'indiquer il faut et suffit que l'espace soit complètement normal.

Nous voyons ainsi que dans les espaces complètement normaux les filtres fermés ont une arithmétique analogue à celle des entiers: donc la même propriété a lieu dans les espaces métriques et en particulier dans la droite euclidienne. Dans de tels espaces les filtres irreductibles qui sont des multiples d'un ultrafiltre donné ont un

diagramme qui ressemble à un arbre et la famille de tous les filtres irreductibles a un diagramme qui ressemble à une forêt. Il est assez curieux de trouver de tels résultats pour les espaces complètement normaux, car les ensembles linéaires, avec la topologie des intervales, sont des espaces complètement normaux. George Kurepa [15], dans ses études sur le célèbre problème de Souslin, a été conduit à considerer des ensembles ordonnés où les diviseurs de chaque élément forment une chaîne.

Il est aussi intéressant de considérer l'axiome de la complète normalité duale. A ce propos on peut démontrer le résultat suivant :

Pour qu'un réticulé distributif* R *vérifie l'axiome de la complète normalté duale il faut et il suffit que les filtres de* R *vérifient une quelconque des conditions suivantes :

I) *Les filtres irreductibles multiples d'un filtre irreductible forment un ensemble linéairement ordonné.*

II) *Deux filtres irreductibles incomparables sont relativement premiers.*

Si R a un premier élément chacune de ces conditions peut être remplacée par « les fitres irreductibles multiples d'un ultrafiltre forment une chaîne ».

Un réticulé peut vérifier l'axiome de la normalité et son dual sans vérifier l'axiome de la complète normalité ni son dual, mais si un réticulé complètement normal vérifie l'axiome de la normalité dual il vérifie aussi l'axiome de la complète normalité dual.

La situation la plus simple au point du vue arithmétique est donc celle qui est indiquée dans la définition suivante :

Nous dirons qu'un réticulé a une arithmétique hypernormale ou linéaire s'il vérifie l'axiome de la complète normalité et son dual.

Le diagramme des filtres irreductibles d'un réticulé qui a une arithmétique linéaire est formé par une famille de chaînes (c.a.d. d'ensembles linéairement ordonnés) telle que deux éléments qui appartiennent à deux chaînes distinctes sont incomparables et l'on se trouve alors dans une situation complètement analogue à celle de l'arithmétique des entiers.

D'après les remarques précédentes, ***pour que le réticulé des ensembles fermés d'un espace topologique ait une arithmétique linéaire il faut et il suffit que l'espace en question vérifie l'axiome de la complète normalité et celui de l'extrême disconnexion.***

Dans ces conditions les espaces T1 pour lesquels les filtres fermés ont une arithmétique linéaire sont les espaces complètement normaux et extrêmement disconnecés, c.a.d. les espaces hypernormaux, dans la terminologie de Edwin Hewitt ([11], p. 328, Def. 17).

Ces espaces on été envisagés pour la première fois, semble-t-il, par Paul Urysohn [22] comme des espaces tels que si A et B sont des parties séparées (c.a.d. telles que $\overline{A} \wedge B = A \wedge \overline{B} = O$) alors il existent des voisinages fermés de A et B qui sont disjoints et E. Hewitt a montré que cela revient à supposer que l'espace est complètement normal et extrêmement disconnexe. D'après les remarques que nous avons faites nous pouvons définir ces espaces en ne faisant intervenir que les parties fermés de l'espace.

Nous voyons que lorsqu'on considère les espaces normaux, complètement normaux et hypernormaux on se rapproche de plus en plus, au point de vue arithmétique, des entiers naturels et l'on pourrait ainsi dire que l'étude des axiomes de séparation a un caractère nettement arithmétique.

Etant donné le rôle fondamental des espaces (d'Hausdorff) compacts il est naturel d'étudier d'une façon un peu détaillée l'arithmétique des espaces normaux et plus généralement des réticulés normaux.

8. ARITMÉTIQUE DES VARIÉTÉS DANS LES RÉTICULÉS NORMAUX. Dans ce paragraphe $R = R_{01}$ sera supposé un réticulé normal.

Parmi les multiples primaires d'un ultrafiltre U noūs devons distinguer ceux qui sont irreductibles de ceux qui ne le sont pas; les premiers sont ceux que nous avons appelé les *puissances de* U.

Parmi les puissances de U nous aurons á considérer les *puissances maximales de* U, c.a.d. les suprafiltres divisibles par U.

Dans un réticulé normal la borne supérieure W *de tous les multiples primaires d'un même ultrafiltre* U *est un filtre primaire,* c.a.d. la famille de tous les multiples primaires de U contient un élément maximal W et nous dirons par cette raison que W est un *filtre primaire maximal*.

On montre facilement que la *borne supérieure de toutes les puissances maximales de l'ultrafilre* U *coïncide avec* W.

Por mettre en évidence l'importance des filtres primaires maximaux nous allons introduire une nouvelle notion.

> ***Nous dirons qu'un filtre* V *d'un réticulé distributif est une variété si chaque élément de* V *est le voisinage d'un élément de* V.**

On démontre de suite que si V′ et V″ sont des variétés alors les filtres $V' \wedge V''$ et $V' \vee V''$ sont aussi des variétés; nous pouvons donc affirmer que la famille de toutes les variétés est un réticulé qui a pour premier élément le filtre O et pour dernier élément le filtre 1. Nous dirons qu'une variété V est propre si $V \neq O$. La famille des variétés propres est inductive inférieurement donc chaque variété propre est divisible par une variété minimale. Aux variétés minimales noms donnerons le noms *d'ultravariétés.*

Si F est un filtre nous représenterons par V(F) la famille de tous les voisinages des éléments de F. On reconnait immédiatement que: 1°) V(F) est un filtre tel que $F \leq V(F)$; 2°) Si $F' \leq F''$ alors $V(F') \leq V(F'')$; 3° Pour que F soit une variété il faut et il suffit que $F = V(F)$. Si R est normal alors V(F) est une variété quel que soit F, donc $VV(F) = V(F)$, en particulier dans un réticulé normal la famille de tous les voisinages d'un élément x est une variété. Le filtre V(F) sera dit la *variété du filtre* F. Nous avons alors le théorème suivant:

> *Dans un réticulé normal la variété d'un ultrafiltre* U *est une ultravariété, qui est identique au filtre primaire maximal associé á* U, c.a.d. $W = V(U)$.

Nous voyons donc que pour déterminer une ultravariété il suffit de déterminer la borne supérieure (c.a.d. le plus petit multiple commun) de toutes les puissances maximales d'un ultrafiltre U et on peut montrer que toutes les ultravariétés peuvent être obtenues de cette maniére. En résumé dans les réticulés normaux nous pouvons identifier les ultravariétés avec les filtres primaires maximaux. Nous voyons ainsi qu'il existe dans les réticulés normaux une correspondance biunivoque entre les ultrafiltres et les ultravariétés de telle manière que chaque ultrafiltre divise une seule ultravariété.

> *Dans un réticulé normal chaque variété propre est la borne supérieure d'une famille, non vide, d'ultravariétés* et en particulier chaque variété est la borne supérieure de puissances maximales. Nous voyons ainsi que les variétés ont un certain caractère de simplicité au point de vue arithmétique.

La notion de filtre primaire peut être généralisée de la maniére suivante: Nous dirons que *le filtre* F' *est un multiple primaire du filtre* F si F' est un multiple de F et si tout ultrafiltre que divise F' divise F. D'après cette définition un filtre primaire est un multiple primaire d'un ultrafiltre et réciproquement. Si l'on applique cette définition au cas des entiers naturels on reconnait que l'entier n' est un multiple primaire de l'entier n si dans la décomposition de n et n' en facteurs premiers figurent les mêmes nombres premiers.

Dans les réticulés normaux nous avons les résultats suivants: 1°) La variété V(F) du filtre F est un multiple primaire de F; 2° Tout multiple primaire de F est un diviseur de V(F); 3°) Si une variété V est un multiple de F alors tout multiple primaire de F divise V ; 4°) Les multiples primaires de F ont pour variété le filtre V(F).

Nous donneront le nom de *radical du filtre* F *à la borne supérieure de tous les ultrafiltres qui divisent* F, que nous representerons par la notation Rad F. Nous aurons naturellement Rad F $\leq$ F, Rad (Rad F) $=$ Rad F.

Dans un réticulé normal les notions de variété et de radical vérifient les deux formules suivantes:

$$\text{Rad F} = \text{Rad}(\text{V}(\text{F})); \qquad \text{V}(\text{F}) = \text{V}(\text{Rad F})$$

Si F est un filtre primaire son radical est un ultrafiltre et sa variété est une ultravariété.

Interprétons ces résultats dans le cas particulier où R est la famille de tous les ensenbles fermés d'un espace (d'Hausdorff) compact. On peut montrer que le radical d'un filtre F est un filtre principal Rad F $=$ $F_1(x)$. Si V est une variété de R son radical sera un filtre principal Rad V $=$ F (x) et l'on prouve que V est la famille de tous les voisinages (fermés) de l'ensemble fermé x.

Nous voyons que les ultrafiltres sont insuffisants pour distinguer un filtre de son radical. En particulier la représentation d'une variété comme le p. p. c. m. de filtres irreductibles doit faire intervenir, en général, des filtres irreductibles qui ne sont pas des ultrafiltres.

Nous savons que tout filtre propre F peut être représenté comme le p. p. c. m. des filtres irreductibles: $F = \vee_i P_i$, où les P_i sont irreductibles. Cette représentation a l'inconvénient suivant: les filtres P_i ne sont pas, en général, relativement premiers à moins que R vérifie des conditions très spéciales qui ne se trouvent pas réalisées dans le cas des espaces topologiques les plus courants. Les filtres primaires ont pour but de rémedier, dans une certaine mesure, à cet inconvénient.

Parmi les diviseurs irreductibles de $F \neq O$ considérons ceux qui sont multiples d'un même ultrafiltre U et determinons son p. p. c. m. F_u. Convenons d'écrire $F_u = O$ si U est incompatible avec F. Si R es normal chaque $F_u \neq O$ est un filtre primaire et nous pouvons écrire $F = \vee F_u$, les F_u étant relativement premiers deux à deux. Cette *représentation* de F sera dite *normale*.

Si $F' = \vee F'_u$ et $F'' = \vee F''_u$ sont des représentations normales et si nous posons $S_u = F'_u \vee F''_u$, $T_u = F'_u \wedge F''_u$, $S = F' \vee F''$, $T = F' \wedge F''$ alors nous aurons $S = \vee S_u$ et $T = \vee T_u$; ce sont précisement les règles pour calculer le p. p. c. m. et le p. g. c. d. de deux entiers.

Dans le cas particulier où R a une arithmétique linéaire les filtres primaires qui figurent dans une représentation normale sont irreductibles, et alors chaque filtre propre est le p. p. c. m. de puissances relativement premières deux à deux $F = \vee P_u$, où les puissances (de U) P_u ont en outre la propriéte suivante : si P'_u est une puissance de U telle que $P'_u \leq F$ alors $P'_u \leq P_u$; c. a. d. les P_u de la représentation normale de F sont « les plus grandes » puissances de U qui divisent F. L'analogie avec les entiers est alors presque complète avec l'exception du fait qua dans la représentation normale on peut eventuellement suprimer plusieurs puissances ; c'est ce qui a lieu par exemple dans les algèbres de Boole (infinies).

Le cas particulier des réticulés distributifs qui vérifient la condition de la chaîne descendante a été considéré, par F. Klein, dès les débuts du développement de la théorie des réticulés ; mais il s'agit, naturellement, d'un cas trop particulier, pour qu'on puisse l'appliquer à la théorie des espaces topologiques.

9. La compactification des espaces topologiques. — La théorie de la représentation des réticulés distributifs par des familles d'ensembles est liée à certains problèmes de topologie.

Soit $R = R_{0,1}$ un réticulé distributif et E un ensemble. Supposons qu'à chaque élément x de R on fait correspondre une partie $f(x)$ de E. Nous dirons que f est une *représentation inférieure* si (1) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ et une *représentation superiéure* si (2) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$; si (1) et (2) son vérifiées f sera dite una *représentation de* R par une famille d'ensembles. Chacune des conditions (1) et (2) implique la condition : (3) « si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$ ». Si f est une transformation biunivoque qui vérifie (3) et (4) « si $f(x) \leq f(y)$ alors $x \leq y$ » nous dirons que f est un *isomorphisme.*

Si l'on veut déterminer les représentations inférieures qui soient des isomorphismes on ne diminue pas la généralité (voir G. Birkhoff et O. Frink [4]) en supposant que les points de E sont des filtres de R et l'on peut procéder de la manière suivante.

> Technnique A. *On se donne une famille, non vide,* E *de filtres propres de* R, *à chacun desquels nous donnerons le nom de point. A chaque élément* x *de* R *ont fait correspondre la famille* f (x) *de tous les filtres de la collection* E *qui contiennent l'élément* x,

on démontre facilement que f est une répresentation inférieure ; pour que f *soit une représentation il faut et il suffit que tous les filtres de* E *soient premiers et pour que* f *soit une représentation isomorphe il faut et il suffit que chaque filtre principal soit la borne supérieure de filtres de la famille* E. On obtient la représentation de Stone [3] si E est la famille de tous les filtres irreductibles de R et celle de G. Birkhoff si E est la famille de tous les filtres complétement irreductibles de R.

Dans ces conditions un réticulé distributif R est isomorphe à un anneau d'ensembles (Théorème de G. Birkhoff) *c.a.d* à une famille A de parties E telle que l'intersection et la réunion de deux ensembles de A est un ensemble de A (comme nous supposons que $R = R_{0,1}$, A contient l'ensemble E et la partie vide). Si R est une algèbre de Boole, R est isomorphe à un corps d'ensembles (Théorème de M. Stone [21], 1).

La famille A peut être prise comme base d'ensembles fermés d'une topologie sur l'espace E; l'espace topologique ainsi obtenu aura des propriétés qui dépendent de R et de la famille E de filtres irreductibles choisie sur R.

Si E est la famille de tous les filtres irreductibles l'espace topologique a des propriétés qui ont été étudiées par M. Stone [21], 3).

A ce propos nous voulons faire les remarques suivantes:

1°) Pour que l'espace topologique E ait la propriété de Borel-Lebesgue il faut et il suffit que tous les ultrafiltres appartiennent à la famille E;

2°) Pour que les points de E soient des ensembles fermés il faut et il suffit que les filtres de E soient incomparables deux à deux.

En particulier pour que l'espace topologique E soit un espace T1 qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue il faut et il suffit que E soit la famille de tous les ultrafiltres de R. Dans ce cas pour que f soit une représentation isomorphe il faut et il suffit que R soit disjonctif (H. Wallman [23]). Nous voyons ainsi, quelle est l'origine de la méthode de Wallman pour obtenir des extensions des espaces T1, qui vérifient la propriété de Borel-Lebesgue; elle est essentiellement liée à la technique A, largement utilisée par M. Stone dans le théorie des algèbres de Boole.

Appelons filtre radical à tout filtre de la forme Rad F, en convenant, que Rad $O = O$; alors la famille de tous filtres radicaux d'un réticulé distributif $R_{0,1}$ est isomorphe à la famille de tous les ensembles fermés d'un espace T1, qui a la propriété de Borel-Lebesgue. Henri Wallman a démontré que si $R_{0,1}$ est orthonormal alors l'espace topologique en question est compact, *c.a.d* l'axiome de séparation d'Hausdorff est verifiée. En appliquant cette construction de Wallman à la famille R de tous les ensembles fermés d'un espace normal E, on obtient la compactification de Cech-Stone de l'espace donné E (voir Paul Alexandroff [1]). H. Wallman a aussi démontré l'élégant résultat suivant: pour que l'espace topologique obtenu par la construction précédente soit un espace d'Hausdorff *il faut* que le réticulé $R_{0,1}$ soit normal; cela montre en particulier que l'espace de *tous* les ultrafiltres fermés d'un espace topologique ne sera pas un espace compact à moins que l'espace donné vérific l'axiome de la normalité.

Paul Alexandroff [1], dans le remarquable travail que nous venons de citer, a indiqué une autre construction de la compactification de Wallman W (E) d'un espace normal E et pour cela il utilise une technique distincte de celle que nous venons d'indiquer.

> Technique B. *On se donne une famille, non vide,* E *de filtres propres de* $R = R_{0,1}$ *à chacun desquels nous donnerons le nom de point. A chaque élément* x *de* R *on fait correspondre la famille* f (x) *de tous les filtres de la collection* E *qui sont compatibles avec* x.

On voit de suite que f est une *représentation supérieure* de R. Pour que f soit une représentation il faut et il suffit que tous les filtres de la famille E soient *primaires.*

Si R est un réticulé orthonormal et si E est la famille de toutes les *ultravariétés* de R (qui sont des filtres primaires maximaux) alors f est una représentation isomorphe de R par un anneau B de sous-ensembles de E. Si nous prenons B comme base d'ensembles fermés pour définir una topologie sur E, nous obtenons un espace compact A (R), que nous appelons la *compactification d'Alexandroff de* R, et l'on peut démontrer que A (R) est homeomorphe à *la compactification de Wallman* W (R). Si l'on applique cette construction à la famille R de tous les ensembles fermés d'un espace normal, on peut démontrer que la méthode indiquée est essentiellement identique à celle que Alexandroff a utilisée pour obtenir la compactification de Cech-Stone d'un space normal (voir *loc. cit.*).

Nous voyons ainsi que dans les méthodes de compactification de Wallman et d'Alexandroff, E est une famille de filtres *primaires* du réticulé orthonormal R et tandis que Wallman considère la famille E de tous les *filtres primaires minimaux* (c.a.d. les ultrafiltres) Alexandroff utilise la famille E de tous les *filtres primaires maximaux* (c.a.d. les ultravariétés). Les résultats que nous avons indiqués sur l'arithmétique des réticulés orthonormaux mettent en évidence les relations de nature arithmétique qui existent entre les «*points*» de Wallman et ceux d'Alexandroff.

Si R est une algèbre de Boole tous les filtres primaires sont des ultrafiltres, donc les deux méthodes précedentes sont identiques et coincident avec celle qui a été indiquée par M. Stone pour démontrer que le réticulé de tous les filtres d'une algèbre de Boole est isomorphe à la famille de tous les ensembles fermés d'un espace compact totalement disconnexe.

Les résultats que nous avons indiqué sont suffisants pour obtenir une caractérisation de la famille de tous les filtres d'un réticulé normal ou orthonormal.

Leopoldo Nachbin ([18],1) a obtenu une caractérisation de la famille de tous les filtres d'une algèbre de Boole et plus généralement une caractérisation de la famille de tous les idéaux d'un anneau booléien.

Dans les espaces topologiques qui ne sont pas normaux, le réticulé R des ensembles fermés contiendra des filtres irreductibles qui ne sont pas primaires et par conséquent ils auront une arithmétique beaucoup plus complexe. Les plus importants d'entre eux sont les espaces de Tychonoff, c.a.d. les espaces complètement réguliers, qu'il faudrait caractériser au point de vue arithmétique. Nous n'avons obtenu aucum résultat dans cette direction. Nous allons donc, par la suite, nous borner à l'étude du probléme de la compactification de certaines catégories d'espaces complètement réguliers qui ne sont pas nécéssairement normaux et nous renvoyons pour cela au numéro suivant.

Nous voulons auparavant faire quelques remarques sur la méthode de compactification B. Soit $R = R_{0,1}$ un réticulé distributif.

Nous dirons qu'un élément v est un *voisinage normal* de a, s'il existe un élément w tel que 1°) $v \vee w = 1$; 2°) a et w sont séparés. Nous dirons que deux éléments a et b sont *complètement séparés* s'il existent des voisinages v' et v'' (respectivement a et b) qui sont incompatibles. Il y a lieu de considérer les réticulés qui vérifient l'axiome suivant:

Axiome de la Presque-normalite : Si a *et* b *sont séparés alors* a *et* b *sont complètement séparés*,

plus faible que l'axiome de la normalité. Dans un tel réticulé nous dirons que deux ultrafiltres U′ et U″ sont *équivalents* s'ils divisent un même filtre irreductible. Alors on peut démontrer que la relation que nous venons de définir est non seulement reflexive et symétrique mais aussi transitive et nous ne savons pas si la réciproque est exacte.

Nous dirons qu'un réticulé distributif $R = R_{0,1}$ est *presque-normal* s'il est régúlier et vérifie l'axiome de la presque-normalité. Dans un tel réticulé nous dirons qu'un filtre propre V est une *varieté normale* si chaque élément v de V est un voisinage normal d'un élément de V. La famille de toutes varietés normales est inductive inférieurement. Soit E la famille de toutes les ultravariétés normales, c.a.d. des variétés normales minimales. Si à chaque élément x de R on fait correspondre la famille $f(x)$ de toutes les ultravariétés normales compatibles avec x alors f est une représentation supérieure de R qui ne sera pas en général une représentation. En prenant les ensembles de la forme $f(x)$ comme base d'ensembles fermés pour définir une topologie sur E, nous obtenons un espace compact.

Un espace T1 tel que le réticulé des ensembles fermés soit presque-normal sera dit un espace presque-normal. On peut démontrer qu'un tel espace est complètement régulier, mais nous ne savons pas localiser ces espaces parmi les espaces connus et nous ne connaissons non plus un exemple d'un espace presque-normal qui ne soit pas normal. En tout cas, les remarques que nous venons de faire montrent que nous pouvons nous attendre à obtenir la compactification d'un espace topologique en utilisant des filtres qui ne sont pas primaires, comme l'a montré Paul Alexandroff [1] en considérant des filtres d'ensembles ouverts, dans la définition desquels il fait intervenir explicitement les nombres réels.

La difficulté principale que nous trouvons dans l'étude des espaces complètement réguliers, c'est que nous ne connaissons aucune caractérisation de ces espaces au moyen de propriétés du réticulé R de ses ensembles fermés, dans laquelle n'interviennent pas d'une façon trop directe les nombres réels, permettant d'obtenir les propriétés arithmétiques équivalentes.

10. Les espaces booléiens. — Nous allons maintenant étudier les *espaces booléiens*, c. a. d. les espaces compacts totalement disconnexes ou ce qui revient au même les espaces compacts de dimension zéro, que M. Stone a étudié dans sa théorie de la représentation topologique des algèbres de Boole.

Un *élément* z d'un réticulé distributif $R = R_{0,1}$ sera dit *booléien* si z a un complément. Nous allons étudier les réticulés (assez proches des algèbres de Boole) indiqués dans la définition suivante :

Un réticulé R sera dit régulièrement disconnexe si tout élément x *de* R *est la borne inférieure d'éléments booléiens.*

McKinsey et Tarski disent qu'une algèbre de Brouwer A est totalement disconnexe si A est un réticulé régulièrement disconnexe, d'après la définition que nous venons d'indiquer. Comme exemples de réticulés régulièrement disconnexes nous pouvons indiquer : 1°) les algèbres de Boole ; 2°) le réticulé des ensembles fermés d'un espace booléien ; 3°) le réticulé des ensembles fermés des espaces régulièrement disconnexes, c. a. d. des espaces T1, dans lesquels chaque ensemble fermé est l'intersection d'ensembles fermés et ouverts.

Pour indiquer un exemple de nature plus générale introduisons les définitions suivantes. Une famille d'ensembles fermés d'un espace topologique sera dite une base (fermée) de l'espace si tout ensemble fermé est l'intersection d'une famille, non vide, d'ensembles basiques. Une *base* est *multiplicative* si l'intersection de deux ensembles basiques est un ensemble basique. Une base sera dite distributive si elle est un réticulé distributif lorsqu'on ordonne les ensembles basiques par la relation d'inclusion. Une base distributive n'est pas nécessairement multiplicative.

On peut démontrer que : *toute base distributive d'un espace booléien est un réticulé régulièrement disconnexe.* Nous nous proposons de démontrer que l'exemple le plus général de réticulé régulièrement disconnexe est celui que nous venons d'indiquer.

Nous dirons qu'un *filtre* S de R est *stonien* si pour chaque s de S il existe un élément booléien b de S tel que $b \leq s$. La famille de filtres stoniens propres est inductive inférieurement ; les éléments minimaux de cette famille seront appelés *ultrafiltres stoniens*, et ne seront pas en général irreductibles.

Nous dirons qu'un *filtre* C est *connexe* si les conditions $C = A \vee B$; $O = A \wedge B$ impliquent $C = A$ ou $C = B$. Les filtres irreductibles sont connexes. La famille de tous les filtres connexes est inductive supérieurement; les éléments maximaux de cette famille seront appelés les *composantes connexes.*

Chaque filtre connexe propre divise une et une seule composante connexe et deux composantes connexes distinctes sont incompatibles. En outre on peut démontrer les résultats suivants :

1°) Les seuls filtres stoniens propres et connexes sont les ultrafiltres Stoniens.

2°) Les notions de composante connexe et d'ultrafiltre stonien sont identiques.

3°) Chaque composante connexe est la borne inférieure de filtres booléiens.

Il se trouve que les composantes connexes sont des éléments naturels dans l'étude des réticulés régulièrement disconnexes.

Soit R régulièrement disconnexe et S la famille de tous les ultrafiltres stoniens de R. A chaque x de R faisons correspondre la famille $X = f(x)$ de tous les ultrafiltres stoniens de R compatibles avec x. Prenons la famille de tous les ensembles de la forme $X = f(x)$ comme sous-base fermée (en réalité il s'agit d'une base) pour définir une topologie sur l'ensemble S. On peut démontrer que *l'espace topologique ainsi obtenu* S(R) *est un espace booléien* et nous dirons que S(R) est la *compactification de Stone* de R. Si R n'est pas régulièrement disconnee, S(R) est aussi un espace booléien, mais alors la transformation $f(x)$ n'est pas biunivoque; précisement pour que f soit biunivoque il faut et il suffit que R soit régulièrement disconnexe.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant :

Pour qu'un réticulé R *soit isomorphe à une base distributive d'un espace de Boole il faut et el suffit que* R *soit régulièrement disconnexe. S'il en est ainsi,* f(x) *est un isomorphisme de* R *sur une base distributive de la compactification de Stone* S(R) *du réticulé* R.

Des résultats que nous venons d'indiquer on déduit facilement les résultats suivants, obtenus par M. Stone ([**21**], 2) :

1°) Si R est une algèbre de Boole, nous obtenons le théorème de M. Stone qui se rapporte à la représentation de R par la famille de tous les ensembles fermés et ouverts d'un espace de Boole.

2°) Si R est le réticulé de tous les ensembles fermés d'un espace régulièrement disconnexe E, on peut démontrer que l'espace booléien S(R) est une extension de l'espace E. On retrouve alors le théorème 55 de M. Stone ([**21**], 2), d'après lequel : pour qu'un espace topologique E ait une extension qui soit un espace booléien il faut et il suffit que E soit régulièrement disconnexe.

Nous nous proposons d'indiquer une caractérisation descriptive de l'espace S(R).

Soit E un espace topologique régulièrement disconnexe dont R *est le réticulé des ensembles fermés. La compactification de Stone* S(R) *de* R *s'applique continuement sur toute extension booléienne de l'espace* E *et dans cette application les points de* E *sont invariants. Réciproquement si* E′ *est une extension booléienne de l'espace régulièrement disconnexe* E *telle que : pour chaque extension booléienne* E″ *de l'espace* E *il existe une transformation continue de* E′ *sur* E″ *qui laisse invariants les points de* E ; *alors* E′ *est un espace homeomorphe à la compactification stonienne* S(R) *du réticulé* R.

Pour user une expression plus sugestive nous pouvons dire que S(R) est la plus grande extension booléienne de l'espace régulièrement disconnexe E.

Il serait important d'obtenir une caractérisation arithmétique des réticulés régulièrement disconnexes.

Remarquons que dans un réticulé régulièrement disconnexe, chaque ultrafiltre stonien est divisible, en general, par plusieurs ultrafiltres. Pour voir qu'il en est ainsi il suffit de montrer que :

Dans un réticulé distributif $R_{0,1}$ *les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

1°) *Chaque ultrafiltre stonien est divisible par un seul ultrafiltre.*

2°) *Chaque filtre qui divise un filtre connexe est un filtre connexe.*

3°) $R_{0,1}$ *vérifie l'axiome de la disconnexion normale c.a.d. pour chaque couple* a, b *d'éléments de* $R_{0,1}$ *tel que* $a \wedge b = 0$, *il existe un élément booléien* z *tel que* $a \leq z$, $b \wedge z = 0$.

4°) Φ *vérifie l'axiome de la disconnexion normale.*

Un *réticulé* sera dit *normalement disconnexe* s'il est orthogonal (c.a.d. disjonctif) et vérifie l'axiome de la disconnexion normale. Un tel réticulé est toujours régulièrement disconnexe.

Si nous appliquons la construction de Wallman à un réticulé régulièrement disconnexe R, nous obtenons un espace W (R) de Fréchet, qui vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue et la fonction qu'à chaque élément x fait correspondre la famille $f(x)$ de tous les ultrafiltres (de R) qui contiennent x est un isomorphisme de R sur une base multiplicative de W (R). Cependant l'espace W (R) n' est pas, en général, un espace booléien, car la famille de tous les ultrafiltres contient un nombre excessif de points. Pour que W (R) soit un espace booléien il faut et il suffit que R soit normalement disconnexe et s'il en est ainsi W (R) est un espace homeomorphe à la compactification de Stone S (R). En outre, dans ce cas particulier S (R) est aussi homeomorphe à la compactification d'Alexandroff, A (R).

On pourrait être conduit au même résultat en démontrant qu'une base distributive R d'un espace booléien est multiplicative si et seulement si R est normalement disconnexe. Cela montre bien que les bases distributives d'un espace booléien ne sont multiplicatives qu'à titre exceptionnel.

Nous avons ainsi obtenu une caractérisation algébrique simple des bases distributives (férmées) des espaces compacts de dimension zero. Il serait important de résoudre le même problème pour les espaces compacts quelconques.

11. LES ALGÈBRES DE BROUWER. — Les résultats que nous avons indiqué sur l'arithmétique des filtres ont été établis dans des systèmes algébriques très simples, à savoir : dans les réticulés distributif, $R_{0,1}$; tandis que la famille des ensembles fermés d'un espace topologique est un réticulé distributif d'une nature plus spéciale; il est donc naturel d'étudier les réticulés que Garret Birkhoff ([3], 1 et 2) a appelé «*Logiques de Brouwer*» et pour lesquels nous adopterons, avec A. Tarski et McKinsey [16], le nom *d'Algèbres de Brouwer.*

Nous allons d'abord indiquer une caractérisation de cette notion au moyen d'axiomes indépendants.

Si A *est un ensemble sur lequel sont définies trois opérations binaires* $\wedge$, $\vee$, $\perp$ *qui vérifient les axiomes suivants* (*où* 0 *et* 1 *sont des éléments de* A)

B0) $1 \vee a = 1$
B1) $a \perp a = 0$
B2) $(a \perp b) \vee a = a$
B3) $b \vee (a \perp b) = a \vee b$
B4) $(b \vee c) \perp a = (c \perp a) \vee (b \perp a)$
B5) $c \perp (a \wedge b) = (c \perp a) \vee (c \perp b)$

nous dirons que A *est une algèbre de Brouwer.*

On peut démontrer que ces axiomes sont indépendants et que la notion d'algèbre de Brouwer que nous venons de définir coïncide avec celle qui a été introduite par Garrett Birkhoff sous le nom de Logique de Brouwer. On démontre en particulier, à partir des axiomes indiqués, que A est un réticulé distributif par rapport aux opérations $\wedge$ et $\vee$ et que $(a \perp b)$ a les propriétés caractéristiques suivantes : 1°) $a \leq (a \perp b) \vee b$; 2°) si x est tel que $a \leq x \vee b$ alors $a \perp b \leq x$.

Un exemple simple d'une algèbre de Brouwer c'est la famille A de tous les ensembles fermés d'un espace topologique où :

1°) $a \wedge b$ et $a \vee b$ représentent l'intersection et l'union des ensembles fermés a et b
2°) 0 et 1 représentent l'ensemble vide et l'espace tout entier
3°) Si a et b sont deux ensembles fermés alors $a \perp b$ représente l'ensemble $\overline{a \wedge b'}$ (b' étant l'ensemble complémentaire de b et $\bar{x}$ l'adhérence de l'ensemble x).

Une algèbre de Boole est aussi une algèbre de Brouwer par rapport aux operations : $a \wedge b$, $a \vee b$ et $a \perp b = a \wedge b'$.

Il est intéressant de remarquer que les algèbres de Brouwer peuvent être caractérisées au moyen des deux opérations :

$$a + b = (a \perp b) \vee (b \perp a) \quad \text{et} \quad ab = a \wedge b$$

si l'on postule les axiomes suivants :

A1) $a + b = b + a$
A2) $a + 0 = a$
A3) l'équation $a + x = 0$ a une solution et une seule $(-a)$

A4) $(ab)\,c = a\,(bc)$

A5) $ab = ba$

A6) $aa = a$

A7) $a1 = a$

A8) $(ax + abx)\,x = axx + abxx$

A9) $(a+b) - ab = a + (b-ab)$; où $a-b = a + (-b)$

A10) $(a+b-ab) - a = b-ab$

A11) $(a+b+(-a)\,b) + ab = a + b$

A12) $(a+b-ab)\,c = ac + bc - abc$.

Alors on démontre que A est une algèbre de Brouwer par rapport aux opérations : $a \vee b = a+b - ab$; $a \wedge b = ab$ et $a \perp b = a+ab$ de telle manière que $a+b = (a \perp b) \vee (b \perp a)$.

Nous avons ainsi pour les algèbres de Brouwer un résultat analogue à celui que M. Stone ([21], 1) a démontré pour les algèbres de Boole. La situation actuelle est beaucoup plus complexe, car dans une algèbre de Brouwer A l'adition $(a+b)$ n'est pas associative à moins que A soit une algèbre de Boole, c. a. d. A n'est pas un groupe par rapport à l'adition et en outre la multiplication (ab) n'est pas distributive par rapport à l'adition.

Dans une algèbre de Brouwer il est important de considérer l'opération définie au moyen de l'égalité $x^1 = 1 \perp x$, qui possède les propriétés suivantes :

1) $x \vee x^1 = 1$; 2) Si $x \vee y = 1$ alors $x^1 \leq y$; 3) $1^1 = 0$

4) $0^1 = 1$; 5) $x^{11} \leq x$; 6) Si $x \leq y$ alors $y^1 \leq x^1$; 7) $x^{111} = x^1$;

8) $(x \wedge y)^1 = x^1 \vee y^1$; 9) $(x \vee y)^1 \leq x^1 \wedge y^1$;

10) $(x \vee y)^{11} = x^{11} \vee y^{11}$; 11) $(x \wedge y)^{11} = (x^{11} \wedge y^{11})^{11}$;

12) $(x \wedge y^1)^{11} = 0$; 13) $(x \vee y)^1 = (x^1 \wedge y^1)^{11}$.

Nous dirons que x^1 est le complement supérieur de x (voir à ce propos G. Birkhoff ([3], 1, 2).

Nous donnerons le nom de *frontière* de x à l'élément $fr(x) = x \wedge x^1$. On peut démontrer les formules :

14) $x = x^{11} \vee fr(x)$; 15) $fr(x^1) = fr(x^{11})$; 16) $fr(fr(x)) = fr(x)$.

Un élément n sera dit *rare* (ou élément frontière) s'il vérifie une des conditions suivantes (qui sont équivalentes) : n 1) $fr(n) = n$; n 2) $n^1 = 1$; n 3) $n^{11} = 0$; n 4) il existe un élément x tel que $n = x \wedge x^1$; n 5) $n \perp n^1 = 0$; n 6) $(n \perp n^1)^1 = 1$.

Pour montrer l'importance des éléments rares indiquons les résultats suivants :

1°) *La famille* N *des élémentes rares est un idéal du réticulé* A, *qui est identique à l'intersection de tous les idéaux maximaux de* A, *c. a. d.* N *est le radical inférieur de* A.

Si nous appelons *semi-simples* les algèbres de Brouwer dont le radical inférieur se réduit à l'élément 0, alors on peut prouver que:

2°) *Pour qu'une algèbre de Brouwer* A *soit semi-simple il faut et il suffit que* A *soit une algèbre de Boole.*

Nous voyons ainsi que toutes les complications qu'on peut trouver dans une algèbre de Brouwer ont son origine dans l'existence d'éléments rares distincts de 0, ou, ce qui revient au même, dans l'existence d'éléments ayant une frontière distincte de 0.

Un problème important que nous n'avons pas réussi à résoudre est celui de déterminer les conditions nécéssaires et suffisantes qui doivent vérifier les filtres irreductibles d'un réticulé distributif $A = R_{0,1}$ pour qu'il soit une algèbre de Brouwer. En tout cas nous pouvons démontrer que dans une algèbre de Brouwer tout idéal irreductible qui contient le radical inférieur est un idéal maximal.

Une autre classe importante d'éléments d'une algèbre de Brouwer est celle G des éléments x tels que $x^{11} = x$, à chacun desquels nous donnerons le nom *d'éléments de Glivenko* [**10**] (ou éléments réguliers, d'après certains auteurs). A G nous donnerons par la suitte le nom *d'algèbre de Glivenko* de A. Si l'on ordonne les éléments de G par la relation $\leq$ alors G est une algèbre de Boole (Théorème de Glivenko). Si a et b son des éléments de G, la borne supérieure de a et b (dans G) est $a \vee b$, la borne inférieure $(a \wedge b)^{11}$ et la transformation $f(x) = x^{11}$ est une représentation de A sur G.

Soient A et A′ des algèbres de Brouwer. Nous dirons qu'une transformation univoque f de A sur A′ est un homomorphisme de A sur A′ si : 1°) $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$; 2° $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$; 3° $f(a \perp b) = f(a) \perp f(b)$. Nous dirons aussi que A′ est une *représentation* ou *image homomorphe de* A. L'ensemble N de tous les éléments x de A tels que $f(x) = 0'$ (où $0'$ est le premier élément de A′) est ce qu'on appele le *noyau* de l'homomorphisme f. N a les propriétés suivantes :

N1) $0 \in N$; N2) si $a \in N$ et $b \perp a \in N$ alors $b \in N$. Pour qu'une partie N d'une algèbre de Brouwer ait les propriétés N1) et N2) il faut et il suffit que N soit un *idéal.*

Si deux images homomorphes A′ et A″ de A ont le même noyau alors A′ et A″ sont isomorphes.

Soit N un idéal de A et posons $a \equiv b$ (mod. N), (a congruent avec

b par rapport au module N) si $a + b \in$ N. Alors on démontre que la relation $\equiv$ est reflexive, symétrique et transitive et que

$$\text{C1) Si} \quad a \equiv a_1 \text{ et } b \equiv b_1 \text{ alors } a \vee b \equiv a_1 \vee b_1; \\ a \wedge b \equiv a_1 \wedge b_1; \quad a \perp b \equiv a_1 \perp b_1 \text{ (mod. N)}.$$

Les classes d'équivalence relatives à la relation $\equiv$, forment une algèbre de Brouwer que nous représenterons par A/N et qui s'appele algèbre cocient de A par N. Si à chaque élément a de A nous faisons correspondre la classe d'équivalence $f(a)$ que contient l'élément a alors la transformation $f(a)$ est un homomorphisme de A sur A/N, qu'on appele *homomorphisme naturel* de A sur A/N ; le noyau de cet homomorphisme est N. Toutes les représentations homomorphes de A peuvent être obtenues de cette manière et l'étude des représentations de A se reduit donc è l'étude des idéaux de A.

Soit F la famille de tous les élements de A qui ont pour transformé l'élément 1' de A' dans un homomorphisme de A sur A'; nous dirons que F est l'antinoyau de f. On montre que F est un filtre de A et que deux images homomorphes A' et A'' (non isomorphes) peuvent avoir le même antinoyau, c.a.d. les filtres de A ne déterminent pas (à moins d'un isomorphisme) les images homomorphes de A. Ce résultat montre que les algèbres de Brouwer sont asymétriques au point de vue arithmétique.

Si l'idéal N est identique à A, alors A/A est une algèbre de Brouwer formée par un seul élément. Si N se réduit à l'élément 0 de A, alors A/N est isomorphe á A. Ces deux représentations homomorphes de A seront dites triviales. Une *algèbre de Brouwer* A sera dite *simple* si : 1°) A contient plus d'un élément ; 2°) toutes les représentations homomorphes de A sont triviales. *Pour qu'une algèbre de Brouwer* A *soit simple il faut et il suffit que* A *soit formée par deux éléments distincts* 0 *et* 1, c.a.d. que A soit une algèbre de Boole avec deux éléments.

> *Pour que* A/N *soit une algèbre de Brouwer simple il faut et il suffit que* N *soit un idéal maximal et pour que* A/N *soit semi-simple il faut et il suffit que l'idéal* N *soit l'intersection* (c.a.d. la borne supérieure) *d'idéaux maximaux, ou ce qui est équivalent que* N *contienne le radical inférieur de* A.

Si N est le radical inférieur de A, c.a.d. la famille des éléments rares, alors A/N est isomorphe à l'algèbre de Glivenko G de A. Appelons représentation booléienne de A à toute algèbre de Boole qui soit image homomorphe de A. G est la plus grande représentation booléienne de A, c.a.d. toute représentation booléienne de A est une représentation de G.

Les idéaux de A qui contiennent N sont en correspondance biunivoque avec les idéaux de G. En ce qui concerne les filtres la situation est plus complexe.

Nous dirons qu'un *filtre* F de A est *semi-régulier* s'il ne contient pas des éléments rares. Un filtre sera dit *régulier* si la condition $x \in F$ implique $x^{11} \in F$. Un filtre propre régulier est semi-régulier, mais la réciproque n'est pas exacte. En tout cas si F est un filtre semi-régulier et K la famille de tous les éléments de la forme f^{11} (où $f \in F$) alors K est la base d'un filtre régulier qui divise F et qui est le plus grand diviseur régulier de F.

Si à chaque filtre régulier F nous faisons correspondre la famille H de tous ses éléments réguliers alors on prouve que H est un filtre de G et l'on établi ainsi une correspondance biunivoque entre les filtres réguliers de A et les filtres de l'algèbre de Glivenko G de A. Pour qu'un filtre régulier de A soit irreductible il faut et il suffit qu'il soit un suprafiltre, c.a.d. un filtre irreductible maximal. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les suprafiltres de A et les ultrafiltres de l'algèbre de Glivenko G.

Parmi les algèbres de Brouwer il est intéressant de considérer les *Algèbres de Stone*, c.a.d. celles qui vérifient la condition $x^1 \wedge x^{11} = 0$. Pour qu'une algèbre de Brouwer soit une algèbre de Stone il faut et il suffit que chaque ultrafiltre divise un seul suprafiltre, c.a.d. que l'axiome de la normalité dual soit vérifié dans A. Pour ces algèbres, qui sont normales, il existe alors une correspondance biunivoque entre les ultrafiltres de A et les ultrafiltres de l'algèbre de Glivenko correspondants.

Pour que le réticulé A de tous les ensembles fermés d'un espace topologique soit une algèbre de Stone il faut et il suffit, bien entendu, que la fermeture d'un ensemble ouvert soit un ensemble ouvert.

Une autre catégorie intéressante d'algèbres de Brouwer sont les *Algèbres de M. Ward* [**24**], c. a. d. celles qui vérifient la condition $(a \perp b) \wedge (b \perp a) = 0$. M. Ward (loc. cit.) a démontré que cette condition est vérifiée si nous avons $(a \wedge b) \perp c = (a \perp c) \wedge (b \perp c)$ ou $c \perp (a \vee b) = (c \perp a) \wedge (c \perp b)$ et que les trois conditions que nous venons d'indiquer sont équivalentes si A vérifie la condition de la chaîne ascendante. Pour qu'une algèbre de Brouwer A soit une algèbre de Ward il faut et il suffit que A vérifie l'axiome de la complète normalité dual. Dans ces conditions pour qu'un espace topologique normal soit hypernormal il faut et il suffit que le réticulé A de ses ensembles fermés soit une algèbre de Ward.

Si l'algèbre de Brouwer A est complète, l'algèbre de Glivenko correspondante G est aussi complète ; c'est ce qui a lieu, en particulier, dans le cas où A est la famille de tous les ensembles fermés d'un espace topologique E. Dans ce cas la famille de tous les filtres réguliers de A (ou ce qui est équivalent la famille de tous les filtres de G) est un réticulé isomorphe à la famille de tous les ensembles fermés d'un espace compact extrêmement disconnexe S (E) auquel nous donnerons le nom *d'espace stonien* de E, pour utiliser une terminologie introduite par J. Dixmier [**8**].

Supposons que E est un espace normal; alors A est une algèbre de Brouwer orthonormale. Les variétés de A sont des filtres réguliers particuliers et nous pouvons donc les identifier avec des ensembles fermés de l'espace stonien S (E). A chaque suprafiltre S de A, c. a. d. à chaque point de S (E), nous pouvons faire correspondre le seul ultrafiltre U qui divise S. Nous avons ainsi une transformation $U = f(S)$ qui à chaque point S de S (E) fait correspondre un point U de l'espace de Wallman W (A). L'ensemble $f^{-1}(U)$ est la famille de tous les suprafiltres multiples de U, que nous pouvons identifier avec l'ultravariété $W = V(U)$, qui est un ensemble fermé de S (E). Soit R un filtre radical de A, ou ce qui revient au même, un ensemble fermé de W (A). Les « points » de R sont les ultrafiltres qui divisent R. Soit V la variété du filtre R : comme toutes les variétes sont des filtres réguliers, nous pouvons identifier V avec un ensemble fermé de S (E). En remarquant que V est un multiple primaire de R, on peut montrer que $f^{-1}(R) = V$, d'où l'on déduit que f est une application continue de S (E) sur W (A). Les points de W (A) sont ainsi représentés, d'accord avec les idées de Stone ([**21**], 2), par des ensembles fermés d'un espace booléien particulier.

Ces remarques sont suffisantes pour montrer que l'étude arithmétique des algèbres de Brouwer est susceptible d'aider à éclaircir la théorie des espaces topologiques.

On peut interpréter une algèbre de Bronwer, comme une logique intuitioniste, mais on peut aussi adopter l'interprétation duale où les symboles $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \perp b$, a^1 représentent les propositions « a et b », « a ou b », « a réfute b » et « non a » ; 0 la proposition absurde et 1 la proposition universellement vraie. Les filtres serons alors des systèmes deductifs et les idéaux des systèmes de réfutation. Comme $a \vee a^1 = 1$ et en général $a \wedge a^1 \neq 0$, nous avons une situation opposée, pour ainsi dire, à celle qu'on trouve dans la logique intuitioniste.

Les résultats que nous avons indiqué sur la théorie des filtres peuvent être considérés conme des indications sur la théorie des systèmes deductifs d'une telle logique. Nous ne voulons pas insister dans cette note sur des considérations de cette nature.

BIBLIOGRAPHIE

1. ALEXANDROFF, P. S., *Bikompakte Erweiterungen topologischer Raüme.* — Rec. Math. (Sborn. Mat.) N. S. (1939), *15*, 403-423.
2. ALEXANDROFF, P. S. ET URYSOHN, P., *Mémoire sur les espaces topologiques compacts.* — Verh. K. Aka. Wet. Amsterdam, *14*, nº 1.
3. BIRKHOFF, G., 1) *Lattice Theory.* — Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. *25*. New York (1940). — 2) Idem, 2nd. Edition, New York (1949). — 3) *On the combination of subalgebras.* — Proc. Camb. Phil. Soc. (1933), *29*. 441-464.
4. BIRKHOFF, G. ET FRINK, O., *Representations of lattices by sets.* — Trans. Amer. Math. Soc. (1948), *64*, 299-315.
5. BOURBAKI, N., *Elements de Mathématiques.* — Livre III, Paris (1940-1949).
6. CARTAN, H., 1) *Théorie des Filtres.* — C. R. Acad. Sci. Paris (1937), *205*, 595-598. — 2) *Filtres et ultrafiltres.* — Idem. 777-779.
7. CECH, E., *On bicompact spaces.* — Ann. Math. (1937), *38*, 823-844.
8. DIXMIER, J., *Sur certains espaces considérés par M. H. Stone.* — Summa Bras. Math. (1951), *2*, Fasc. 11, 151-181.
9. FRÉCHET, M., 1) *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits.* — C. R. Acad. Sci. Paris (1917), *165*, 359-360. — 2) *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits.* — Bull. Sci. Math. (1918), *42*, 1-19.
10. GLIVENKO, V., *Sur quelques points de la logique de Brouwer.* — Acad. Roy. Belg. Bull. Sci. (5), vol. 15 (1929), p. 183-188.
11. HEWITT, E., 1) *A problem of set-theoretic topology.* — Duke Math. J. (1943), *10*, 309-333.
12. ISEKI, K., *Une condition pour qu'un lattice soit distributif.* — C. R. Acad. Sci. Paris (1950), *230*, 1726-1727.
13. KLEIN, F., *Ueber einen Zerlegungssatz in die Theorie der Abstrakten Verknüpfungen.* — Math. Ann. (1932), *106*, 114-130.
14. KOMATU, A., *On a characterization of joint homomorphic trasformation-lattices.* — Proc. Imp. Acad. Japan (1943), *19*, 119-124.
15. KUREPA, G., *Ensembles ordonnés et ramifiés.* — Publ. Math. Univ. Belgrade (1953), *4*, 1-138.
16. MCKINSEY, J. C. C. AND TARSKI, A., *On closed elements in closure algebras.* — Ann. Math. (1946), *47*, 122-162.
17. MONTEIRO, A. A., 1) *Filtros e Ideais.* — Fasc. 1, 2. «Notas de Matemática». Río de Janeiro (1948). — 2) *Sur l'arithmétique des filtres premiers.* — C. R. Acad. Sci. París (1947), *225*, 846-848. — 3) *Les filtres fermés des espaces compacts.* — Gaz. Mat., Lisboa (1951), nº 50, 95-96.
18. NACHBIN, L., 1) *Une propriété caractéristique des algèbres booléiennes.*— Portug. Math. (1947), *6*, 115-118. — 2) *On a characterization of the lattice of all ideals of a Boolean ring.* — Fundam. Math. (1949), *36*, 137-142.
19. PONTRJAGIN, L., *Topological groups.* — Princeton (1939).
20. SAMUEL, P. *Ultrafiltres and compactification of uniform spaces.* — Trans. Amer. Math. Soc. (1948), *64*, 100-132.
21. STONE, M. H., 1) *The theory of representation of Boolean algebras.* — Trans. Amer. Math. Soc. (1936), 40, 37-111. — 2) *Applications of Boolean rings to general topology.* — Trans. Amer. Math. Soc. (1937), *41*, 375-481. — 3) *Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics.* —

Cas. Pest. Math. (1937), *67*, 1-25. — 4) *Algebraic characterization of special Boolean Rings*. — Fundam. Math. (1937), *29*, 233-303.

22. URYSOHN, P., *Ueber die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*. Math. Annalen. (1925), *94*, 262-295

23. WALLMAN, H., *Lattices and topological spaces*. — Ann. Math. (1938), *39*, 112-126.

24. WARD, M., *Structure residuation*. — Ann. Math. (1938), *39*, 558-568.

25. WEIL, A., *Sur les espaces à structure uniforme*. -- Paris, Hermann (1938).