NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

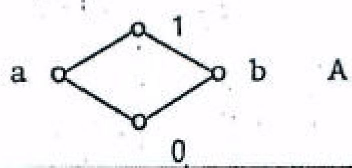
32

LUIZ MONTEIRO

ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES MONADICAS

1974
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA – ARGENTINA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA N° 32 - E R R A T A

PAGE	LINE	INSTEAD OF	SHOULD BE
24	2	I.2.2	I.1.2
24	- 5	verifican	verifica
32	11 and 12 should be afirmar que : $0 = \Delta\exists y = \Delta(\exists(\sim\exists\Delta x \wedge \Delta\exists x \wedge x)) = \Delta(\sim\exists\Delta x \wedge \Delta\exists x \wedge \exists x) = \Delta(\sim\exists\Delta x \wedge \Delta\exists x) = \sim\exists\Delta x \wedge \Delta\exists x$, luego por 0.1.4 : $\Delta\exists x \leqslant \exists\Delta x$.		
45	-1 to -4 Figure omited is : 		
47	- 9	Nos proponemos a indicar	Nos proponemos indicar
47	- 2	, $h(\Delta x) = \Delta h(x)$	,H8) $h(\Delta x) = \Delta h(x)$
48	14	L-filtro	M-filtro
48	- 6	definicion	definición
49	-10	algebras monádicas,	algebras monádicas, $h': A \twoheadrightarrow A'$ un epimorfismo
49	- 9	$h': A \twoheadrightarrow A''$	$h'': A \twoheadrightarrow A''$
51	12	Un filtro de	Un filtro F de
54	-10	que A" es isomorfa a A".	que A" es isomorfa a A'.
59	- 6	irreducle	irreducible
60	6	irreducle	irreducible
70	1	$P = \prod_{i \in I} S_i$	$P = \prod_{i=1}^{p} S_i$
70	10	$BK(S_i)$	$BK(S_j)$
74	7	monoforfismo	monomorfismo
85	- 2	$hom^*(L;B^k)$	$hom^*(L;T^k)$
86	1	$hom^*(L;B^k)$	$hom^*(L;T^k)$
90	- 3.	$2 \sum_{i=0}^{2^n - 1} \binom{2^n-1}{i} =$	$2^n \sum_{i=0}^{2^n - 1} \binom{2^n-1}{i} =$
91	2	$\binom{3 - 1}{r}$	$\binom{3^n - 1}{r}$
92	- 9	producto está resulto	problema está resuelto
97	7	$x \in A$,	$x \in D$,

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA (*)

N° 32

ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES MONADICAS

por

Luiz Monteiro

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada en parte por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

Este número contiene la Tesis Doctoral presentada por el autor a la Universidad Nacional del Sur, en el año 1970, para obtener el grado de Doctor en Matemática y aprobada el 19 de Julio de 1971.

Ce numéro contient la Thése présentée par l'auteur à l'Universidad Nacional del Sur, dans l'année 1970 pour obtenir le grade de Docteur en Mathématique, qui a été soste nue le 19 Juillet de 1971.

INTRODUCCION

Con el objetivo de encontrar una noción algebraica que desempeñase en el estudio del cálculo proporsional trivalente de Lukasiewicz un papel análogo al que desempeña el concepto de álgebra de Boole en el cálculo proposicional clásico, Gr.C.Moisil [(1940),(1941)] introdujo la noción de álgebra de Lukasiewicz trivalente, que es además una generalización de la noción de álgebra de Boole.

Este autor tomó como conectivos primitivos la conjunción ($\wedge$), la disjunción ($\vee$), la negación ($\sim$) y la posibilidad (∇), que pueden definirse, como es bien conocido, a partir de los conectivos primitivos considerados por Lukasiewicz, que son la implicación de Lukasiewicz ($\nrightarrow$) y la negación ($\sim$), por medio de las fórmulas siguientes: $a \vee b = (a \nrightarrow b) \nrightarrow b$; $a \wedge b = \sim(\sim a \vee \sim b)$; $\nabla a = \sim a \nrightarrow a$. Recíprocamente, la implicación de Lukasiewicz puede definirse por la fórmula $a \nrightarrow b = (\nabla \sim a \vee b) \wedge (\nabla b \vee \sim a)$. Desde el punto de vista del álgebra, los conectivos introducidos por Moisil son de manejo más sencillo.

P.Halmos [(1955),(1962)] mostró que la noción de álgebra de Boole monádica es el instrumento algebraico adecuado para el estudio del cálculo de predicados monádicos en la lógica clásica.
Estas álgebras, que también son conocidas con el nombre de álgebras S5 de Lewis [Lewis and Langford (1932) p.501], habían sidos estudiadas anteriormente por varios autores, pero fué Halmos el primero en demostrar que toda álgebra de Boole monádica admite una representación funcional rica.

En este trabajo introducimos el concepto de álgebra de Lukasiewicz trivalente monádica, que generaliza al de álgebra de Boole monádica, y estudiamos los problemas esenciales que plantea esta estructura algebraica.

En el capítulo 0 exponemos, sin pretenciones de originalidad, resultados de la teoría de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes que nos son necesarios ulteriormente.

En el capítulo I se introduce el concepto de álgebra de Lukasiewicz trivalente monádica, como una abstracción de la estructura de un álgebra funcional, de manera análoga a la indicada por Halmos para el caso de las álgebras de Boole monádicas. El lector interesado sólo en los resultados esenciales puede omitir la lectura de ciertos temas especiales de este capítulo: párrafos 4 y 6.

En el capítulo II se estudian los homomorfismos, la construcción de imágenes homomorficas y se caracterizan los filtros que son núcleos de álgun homomorfismo (M-filtros). En particular se estudian los M-filtros máximos y las álgebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas simples.

En el capítulo III demostramos que toda álgebra de Lukasiewicz trivalente monádica con más de un elemento es subproducto directo de álgebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas simples, lo cual suele expresarse diciendo que las álgebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas son semisimples. Estudiamos algunas particularidades de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas finitas y probamos que toda álgebra de Lukasiewicz trivalente monádica finitamente generada es finita. Estos resultados son de gran importancia por su aplicación a la determinación de la estructura de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas con un número finito de generadores libres-uno de los objetivos fundamentales de nuestro trabajo-que estudiamos en el capítulo IV. En el mismo capítulo indicamos una fórmula que dá el número de elementos de un álgebra de Lukasiewicz trivalente monádica con n generadores libres. Para el caso de un generador libre el álgebra de Lukasiewicz trivalente monádica tiene 104.976 elementos.

Finalmente, en el capítulo V damos un teorema de representación de un álgebra de Lukasiewicz trivalente monádica por medio de un álgebra funcional rica que es otro de los objetivos de este trabajo. Algunas de las técnicas aquí utilizadas, son análogas a las indicadas por A.Monteiro (1956) para las álgebras de Boole monádicas.

En una comunicación a la Unión Matemática Argentina (1968) adelantamos algunos de los resultados expuestos en esta tesis.

Queremos destacar aquí que este trabajo no podría haberse realizado sin el importante influjo que el Profesor Antonio Monteiro ha ejercido en el Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur durante más de doce años, a través de sus investigaciones, cursos y seminarios en el campo de la lógica algebraica.

Deseo expresar mi reconocimiento al Profesor Antonio Diego por la atención que nos prestara, por sus valiosas sugerencias que nos permitieron mejorar algunos resultados, así como por sus indicaciones tendientes a perfeccionar la redacción y presentación de este trabajo.

INDICE

CAPITULO III. PRODUCTO Y SUBPRODUCTO DIRECTO DE ALGEBRAS MONADICAS

CAPITULO IV. ALGEBRAS MONADICAS LIBRES

CAPITULO V. REPRESENTACION FUNCIONAL DE ALGEBRAS MONADICAS

CAPITULO 0

ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES

0.1. DEFINICIONES Y REGLAS DE CALCULO.

La teoría de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes fué fundada y desarrollada por Gr.C.Moisil (1940,1941, 1960).

A.Monteiro (1963,1964) indicó una nueva axiomática, equivalente a las indicadas por Moisil, que pasamos a reseñar.

0.1.1. DEFINICION. *Un sistema* $(A,1,\sim,\nabla,\wedge,\vee)$ *-formado por* 1°) *un conjunto no vacío* A; 2°) *un elemento* 1 *de* A; 3°) *dos operaciones unarias*, $\sim$, ∇ , *definidas sobre* A; 4°) *dos operaciones binarias*, $\wedge$, $\vee$, *definidas sobre* A *- se denomina un álgebra de Lukasiewicz trivalente si se verifican los axiomas siguientes (para todo* x,y,z *de* A):

L0) $x \vee 1 = 1$

L1) $x \wedge (x \vee y) = x$

L2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

L3) $\sim \sim x = x$

L4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

L5) $\sim x \vee \nabla x = 1$

L6) $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$

L7) $\nabla (x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

Para simplificar el lenguaje, diremos que A *es un álgebra de Lukasiewicz trivalente o más sencillamente que* A *es un álgebra de Lukasiewicz.*

Posteriormente probamos que L0 es consecuencia de L1-L7 y que los axiomas L1-L7 son independientes (L.Monteiro (1964 a)). Por lo tanto podemos tomar como axiomas para definir un álgebra de Lukasiewicz L1 a L7.

De los axiomas L1 y L2 resulta [M.Sholander (1951)] que el sistema $(A,\wedge,\vee)$ es un reticulado distributivo. Los axiomas L1-L4 establecen que el sistema $(A,\sim,\wedge,\vee)$ es un reticulado de DeMorgan [Gr.C.Moisil (1935), J.Kalman (1958), A.Monteiro (1960),(1962),(1966), L.Monteiro y D.Picco (1963), R.Maronna (1964), M.L.Gastaminza y S.Gastaminza (1968)].

Utilizando los axiomas L1,L2,L3 y L5 se prueba [L.Monteiro (1964a)] que en un álgebra de Lukasiewicz A vale:

L8) $x \vee 1 = 1$, para todo $x \in A$.

Entonces el sistema $(A,1,\wedge,\vee)$ es un reticulado distributivo con último elemento 1 y de acuerdo a la terminología introducida por A.Monteiro (1960) el sistema $(A,1,\sim,\wedge,\vee)$ es un álgebra de DeMorgan. Al respecto de esta noción ver A.Bialynicki-Birula (1957), A.Bialynicki-Birula and H. Rasiowa (1957) y A.Monteiro (1962,1966).

Se verifica facilmente que en los reticulados de DeMorgan se cumple:

L9) $\sim (x \vee y) = \sim x \quad \sim y$,

y que en las álgebras de DeMorgan $0 = \sim 1$ es el primer elemento del reticulado $(A,\wedge,\vee)$.

En un álgebra de Lukasiewicz son válidas las siguientes reglas de cálculo [ver A.Monteiro (1963),(1964)]:

L10) $x \wedge 1 = x$

L11) $x \leq \nabla x$

L12) $\nabla 1 = 1$

L13) $\nabla 0 = 0$

L14) Si $x \leq y$ entonces $\nabla x \leq \nabla y$

L15) $x \vee \nabla \sim x = 1$

L16) $\sim \nabla x \vee \nabla x = 1$ L17) $\sim \nabla x \wedge \nabla x = 0$

L18) $\nabla \nabla x = \nabla x$ L19) $\nabla (x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$

Un elemento b de un reticulado A con primer (0) y último elemento (1) se dice *booleano* si existe $b' \in A$ tal que $b \vee b' = 1$ y $b \wedge b' = 0$. Si A es distributivo, entonces 1) El complemento, b' de b, si existe, es único y 2) el conjunto de todos los elementos booleanos de A, que notaremos B(A) forman un subreticulado de A, que es un álgebra de Boole [G.Birkhoff, (1967)].

0.1.2. DEFINICION. *Un elemento* x *de un álgebra de Lukasiewicz* A *se dice invariante si* $\nabla x = x$

0.1.3. LEMA. x *es invariante sssi* x *es booleano.* (Moisil (1940)).

Por lo tanto, si A es un álgebra de Lukasiewicz, entonces:

$$B(A) = \{x \in A: \nabla x = x\}.$$

0.1.4. LEMA. *Si* A *es un álgebra de Lukasiewicz,* $x \in A$ *y* $b \in B(A)$ *entonces: I)* $b \wedge x = 0$ *sssi* $x \leqslant \sim b$; *II)* $b \vee x = 1$ *sssi* $\sim x \leqslant b$.

Recordemos que en las álgebras de Lukasiewicz se denomina operación de posibilidad a la operación unaria ∇.

0.1.5. DEFINICION. *En las álgebras de Lukasiewicz se denomina operación de necesidad al operador unario* Δ *definido por* $\Delta x = \sim \nabla \sim x$.

Es fácil ver que: $B(A) = \{x \in A: \Delta x = x\}$.

En toda álgebra de Lukasiewicz son válidas las siguientes reglas de cálculo (Gr.C.Moisil (1940), ver también

A.Monteiro (1963),(1964)).

L20) $\sim x \wedge \Delta x = 0$

L21) $x \vee \sim x = \sim x \vee \Delta x$

L22) $\Delta (x \wedge y) = \Delta x \wedge \Delta y$

L23) $\Delta x \leqslant x$

L24) $\Delta 1 = 1$

L25) $\Delta 0 = 0$

L26) Si $x \leqslant y$, entonces $\Delta x \leqslant \Delta y$

L27) $x \wedge \Delta \sim x = 0$

L28) $\sim \Delta x \vee \Delta x = 1$

L29) $\sim \Delta x \wedge \Delta x = 0$

L30) $\Delta \Delta x = \Delta x$

L31) $\Delta(x \vee y) = \Delta x \vee \Delta y$

L32) $\nabla \Delta x = \Delta x$

L33) $\Delta \nabla x = \nabla x$

Vamos a enunciar una propiedad muy importante de las álgebras de Lukasiewicz, que provee un potente método para demostrar igualdades.

0.1.6. LEMA. (Principio de Determinación de Moisil). *Para que* $x = y$ *es necesario y suficiente que* $\Delta x = \Delta y$ *y* $\nabla x = \nabla y$. (Moisil (1940) (1941); L.Monteiro, (1968a)).

0.1.7. COROLARIO. *Para que* $x \leqslant y$ *es necesario y suficiente que* $\Delta x \leqslant \Delta y$ *y* $\nabla x \leqslant \nabla y$.

Mediante la aplicación de 0.1.7. y las reglas de cálculo, es fácil ver que:

0.1.8. LEMA. *En un álgebra de Lukasiewicz se verifica la siguiente condición:* (K) $x \wedge \sim x \leqslant y \vee \sim y$, *cualesquiera que sean* x *e* y. (ver por ejemplo A.Monteiro (1964)).

Recordemos que un reticulado de DeMorgan se dice *Normal* (J.Kalman (1958), o *Lineal* (A.Monteiro (1960)), si verifica la condición (K). Las álgebras de DeMorgan que verifican la condición (K) se denominarán *álgebras de Kleene* (St. Kleene (1938),(1952). Por lo tanto, de acuerdo con esta terminología, las álgebras de Lukasiewicz son álgebras de Kleene.

El siguiente resultado se debe a A. Monteiro: "Si A es un álgebra de Kleene y $x \in A$ tiene un complemento booleano $-x$, entonces $-x = \sim x$"; la demostración de este autor fué reproducida en R. Cignoli (1965). Una versión simplificada de la misma puede verse en L. Monteiro (1969). Luego, si A es un álgebra de Lukasiewicz y $b \in B(A)$, entonces su complemento booleano es $\sim b$.

0.1.9. DEFINICION. *Una parte no vacía* A' *de un álgebra de Lukasiewicz* A *se dice una subálgebra de* A*, si* A' *es cerrada con respecto a los operadores* $\sim, \nabla, \vee$. *También diremos que* A' *es una L-subálgebra de* A.

0.1.10. DEFINICION. *Un álgebra de Lukasiewicz* A *se dice completa, si* A *es un reticulado completo.*

Como toda álgebra de Lukasiewicz es un reticulado de DeMorgan, entonces:

0.1.11. LEMA. *Si existe el supremo (ínfimo) de una familia no vacía* $\{a_i\}_{i \in I}$*, entonces tambien existe el ínfimo (supremo) de la familia* $\{\sim a_i\}_{i \in I}$ *y además:*
$\sim \bigvee_{i \in I} a_i = \bigwedge_{i \in I} \sim a_i \quad (\sim \bigwedge_{i \in I} a_i = \bigvee_{i \in I} \sim a_i)$.

0.1.12. LEMA. *En n álgebra de Lukasiewicz vale la siguiente igualdad* $x = (\Delta x \vee \sim x) \wedge \nabla x$, *o lo que es equivalente* $x = (\nabla x \wedge \sim x) \vee \Delta x$.

DEM. $(\Delta x \vee \sim x) \wedge \nabla x = (x \vee \sim x) \wedge \nabla x = (x \wedge \nabla x) \vee$
$\vee (\sim x \wedge \nabla x) = x \vee (\sim x \wedge \nabla x) = x \vee (\sim x \wedge x) = x$.

0.1.13. LEMA. *En un álgebra de Lukasiewicz:* "$\Delta x = 0$ *sssi* $x \leqslant \sim x$".

DEM. Si $\Delta x = 0$, entonces como $x = (\Delta x \vee \sim x) \wedge \nabla x$, tendremos $x = \sim x \wedge \nabla x \leqslant \sim x$. Recíprocamente si, $x \leqslant \sim x$, entonces $\Delta x = x \wedge \Delta x \leqslant \sim x \wedge \Delta x = 0$, luego $\Delta x = 0$.

0.1.14. LEMA. *En un álgebra de Lukasiewicz* A, *si existe* $a = \bigvee_{i \in I} a_i$, *entonces también existe* $\bigvee_{i \in I} \nabla a_i$ *y además:* $\nabla a = \bigvee_{i \in I} \nabla a_i$

DEM. Por hipótesis $a_i \leqslant a$ para todo $i \in I$, luego como ∇ es monótono: (S1) $\nabla a_i \leqslant \nabla a$, para todo $i \in I$.
Probemos que (S2) Si $x \in A$ verifica $\nabla a_i \leqslant x$, para todo $i \in I$, entonces $\nabla a \leqslant x$. En efecto, si $\nabla a_i \leqslant x$, para todo $i \in I$, entonces: (1) $\nabla a_i = \Delta \nabla a_i \leqslant \Delta x$, para todo $i \in I$. Como (2) $a_i \leqslant \nabla a_i$, para todo $i \in I$, entonces de (2) y (1) resulta $a_i \leqslant \Delta x$, para todo $i \in I$; luego $a = \bigvee_{i \in I} a_i \leqslant \Delta x$, y por lo tanto $\nabla a \leqslant \nabla \Delta x = \Delta x$. Luego, como $\Delta x \leqslant x$, se tiene $\nabla a \leqslant x$. (S1) y (S2) prueban el lema.

0.1.15. COROLARIO. *Si* A *es un álgebra de Lukasiewicz,* $\{b_i\}_{i \in I}$ *una familia de elementos de* B(A) *y si existe* $b = \bigvee_{i \in I} b_i$, *entonces* $b \in B(A)$.

DEM. $\nabla b = \nabla (\bigvee_{i \in I} b_i) = \bigvee_{i \in I} \nabla b_i = \bigvee_{i \in I} b_i = b$

De 0.1.15. resulta inmediatamente que:

0.1.16. COROLARIO. *Si* A *es un álgebra de Lukasiewicz completa, entonces el álgebra de Boole* B(A) *es completa* (L.Monteiro (1965)).

0.1.17. LEMA. *En un álgebra de Lukasiewicz, si existe* $\bigvee_{i\varepsilon I} y_i$ *entonces existe* $\bigvee_{i\varepsilon I} (x \wedge y_i)$ *y además* $\bigvee_{i\varepsilon I} (x \wedge y_i) =$ $= x \wedge (\bigvee_{i\varepsilon I} y_i)$.

DEM. Sea $y = \bigvee_{i\varepsilon I} y_i$, luego $y_i \leqslant y$, para todo $i \in I$ y por lo y por lo tanto (S1) $x \wedge y_i \leqslant x \wedge y$, para todo $i \in I$.

Probemos que: (S2) Si t verifica (1) $x \wedge y_i \leqslant t$, para todo $i \in I$, entonces $x \wedge y \leqslant t$. Para ello probaremos que:

(a) $\Delta(x \wedge y) \leqslant \Delta t$ y (b) $\nabla(x \wedge y) \leqslant \nabla t$.

Esto es que: $\Delta x \wedge \Delta y \leqslant \Delta t$ y $\nabla x \wedge \nabla y \leqslant \nabla t$.

De (1) resulta $\nabla{\sim}x \vee (x \wedge y_i) \leqslant \nabla{\sim}x \vee t$, para todo $i \in I$, luego $y_i \leqslant \nabla{\sim}x \vee y_i \leqslant \nabla{\sim}x \vee t$, para todo $i \in I$, y por lo tanto: $y = \bigvee_{i\varepsilon I} y_i \leqslant \nabla{\sim}x \vee t$.

Luego $\Delta x \wedge y \leqslant \Delta x \wedge (\nabla{\sim}x \vee t) = \Delta x \wedge t \leqslant t$, de donde resulta $\Delta x \wedge \Delta y \leqslant \Delta t$.

De (1) se deduce $\nabla x \wedge \nabla y_i \leqslant \nabla t$, para todo $i \in I$, luego ${\sim}\nabla x \vee (\nabla x \wedge \nabla y_i) \leqslant {\sim}\nabla x \vee \nabla t$, para todo $i \in I$, y por lo tanto $y_i \leqslant \nabla y_i \leqslant {\sim}\nabla x \vee \nabla y_i \leqslant {\sim}\nabla x \vee \nabla t$, para todo $i \in I$.

Luego $y = \bigvee_{i\varepsilon I} y_i \leqslant {\sim}\nabla x \vee \nabla t$, entonces:

$\nabla x \wedge y \leqslant \nabla x \wedge ({\sim}\nabla x \vee \nabla t) = \nabla x \wedge \nabla t \leqslant \nabla t$ y, por lo tanto, $\nabla x \wedge \nabla y = \nabla(\nabla x \wedge y) \leqslant \nabla\nabla t = \nabla t$.

De (S1) y (S2) resulta: $\bigvee_{i\varepsilon I} (x \wedge y_i) = x \wedge (\bigvee_{i\varepsilon I} y_i)$.

0.1.18. OBSERVACION. Gr.C. Moisil (1963) demostró que toda álgebra de Lukasiewicz es un álgebra de Heyting [al respecto de esta noción ver por ejemplo: G.Birkhoff (1933) p. 459, (1967) p.45, A.Monteiro (1955) (1958) y H.Rasiowa and R.Sikorski (1953)].

Moisil define la implicación intuicionista de cada par ordenado (x,y) de elementos del álgebra por intermedio de la fórmula:

$$x \Rightarrow y = \Delta{\sim}x \vee \Delta y \vee (\nabla{\sim}x \wedge \nabla y) \vee (\Delta x \wedge y \wedge {\sim}y)$$

A.Monteiro (1963 a) demostró que se puede definir más sencillamente:

$$x \Rightarrow y = \Delta{\sim}x \vee y \vee (\nabla{\sim}x \wedge \nabla y).$$

Hemos probado [L.Monteiro (1969)] más precisamente que toda álgebra de Lukasiewicz trivalente es un álgebra de Heyting trivalente [al respecto de esta noción ver L.Monteiro (1964)].

Como en toda álgebra de Heyting es válido el enunciado 0.1.17 [ver por ejemplo H.Rasiowa and R.Sikorski (1963) p.55], entonces por el resultado de Moisil podemos afirmar que en toda álgebra de Lukasiewicz es válido 0.1.17. La demostración que indicamos de 0.1.17 no presupone el conocimiento de la teoría de las álgebras de Heyting.

0.1.19. LEMA. *Si* $a = \bigvee_{i \in I} a_i$ *y* $\Delta a_i = 0$, *para todo* $i \in I$, *entonces* $\Delta a = 0$. (A.Monteiro (1966 a)).

DEM. La hipótesis $\Delta a_i = 0$, para todo $i \in I$, es equivalente (ver 0.1.13) a: $a_i \leqslant {\sim}a_i$, para todo $i \in I$. Luego, como toda álgebra de Lukasiewicz es un álgebra de Kleene, tendremos:

$$a_i = a_i \wedge {\sim}a_i \leqslant a_j \vee {\sim}a_j = {\sim}a_j \ , \quad i,j \in I$$

Luego (1) $a = \bigvee_{i \in I} a_i \leqslant \sim a_j$, para todo $j \in I$. Pero por 0.1.11 sabemos que (2) $\sim a = \bigwedge_{i \in I} \sim a_i$. De (1) y (2) resulta $a \leqslant \sim a$, lo que es equivalente a decir que $\Delta a = 0$.

0.1.20. TEOREMA. *Si existe* $a = \bigvee_{i \in I} a_i$, *entonces tambien existe* $\bigvee_{i \in I} \Delta a_i$ *y además* $\bigvee_{i \in I} \Delta a_i = \Delta \bigvee_{i \in I} a_i$. (A.Monteiro (1966 a)).

DEM. Por hipótesis $a_i \leqslant a$, para todo $i \in I$, luego:

(S1) $\Delta a_i \leqslant \Delta a$, para todo $i \in I$.

Probemos que (S2) Si $t \in A$ verifica $\Delta a_i \leqslant t$, para todo $i \in I$, entonces $\Delta a \leqslant t$.

De (1) $\Delta a_i \leqslant t$, para todo $i \in I$, resulta (2) $\Delta a_i \leqslant \Delta t$, para todo $i \in I$.

Sea (3) $a_i' = \sim \Delta t \wedge \Delta a \wedge a_i$, para todo $i \in I$; luego, teniendo en cuenta (S1) y (2), podemos afirmar que:

$\Delta a_i' = \sim \Delta t \wedge \Delta a \wedge \Delta a_i = \sim \Delta t \wedge \Delta a_i \leqslant \sim \Delta t \wedge \Delta t = 0$, esto es,

(4) $\Delta a_i' = 0$,para todo $i \in I$.

De (3) resulta por la aplicación de 0.1.17 que:

(5) $\bigvee_{i \in I} a_i' = \sim \Delta t \wedge \Delta a \wedge a = \sim \Delta t \wedge \Delta a$

De (4) y (5) se deduce por la aplicación de 0.1.19 que

$\Delta(\bigvee_{i \in I} a_i') = 0$, esto es, $\Delta(\sim \Delta t \wedge \Delta a) = 0$, luego $\sim \Delta t \wedge \Delta a = 0$ y por lo tanto $\Delta a \leqslant \Delta t$. Luego, como $\Delta t \leqslant t$, tendremos $\Delta a \leqslant t$.

0.1.21. LEMA. *En un álgebra de Lukasiewicz, si existe* $\bigwedge_{i\in I} y_i$, *entonces existen* $\bigwedge_{i\in I} \nabla y_i$, $\bigwedge_{i\in I} \Delta y_i$ *y además* $\bigwedge_{i\in I} \nabla y_i = \nabla \bigwedge_{i\in I} y_i$, $\bigwedge_{i\in I} \Delta y_i = \Delta \bigwedge_{i\in I} y_i$.

DEM. Es una consecuencia inmediata de lemas anteriores.

0.2. ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES CON CENTRO.

0.2.1. DEFINICION. *Un elemento* c *de un álgebra de Lukasiewicz* A *se dice un centro de* A, *si* $\sim c = c$. (Gr.Moisil (1940)).

Las álgebras de Lukasiewicz (trivalentes) con centro coinciden con las álgebras de Post (de orden 3). [al respecto de esta noción ver por ejemplo G.Epstein (1960),T. Traczyk (1963)].

0.2.2. LEMA. *Para que un elemento* c *de un álgebra de Lukasiewicz* A *sea un centro de* A *es necesario y suficiente que* $\Delta c = 0$ *y* $\nabla c = 1$.

Utilizando 0.2.2 y el principio de determinación, Moisil demostró que si un álgebra tiene centro, éste es único.

El Prof. D.Makinson nos hizo notar que si en un reticulado de Kleene A existe un elemento z tal que $z = \sim z$, entonces él es único.
En efecto, si w verifica $w = \sim w$, entonces por la condición (K) , ver 0.1.8, tenemos $z = z \wedge \sim z \leqslant w \vee \sim w = w$ y $w = w \wedge \sim w \leqslant z \vee \sim z = z$, luego $w = z$.

0.2.3. LEMA. *Si un álgebra de Lukasiewicz* A *tiene centro* c, *entonces*
(1) $x = \Delta x \vee (c \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x)$, *para todo* x *de* A. (Moisil (1941)).
(2) $x = (\Delta x \vee c) \wedge \nabla x = (\nabla x \wedge c) \vee \Delta x$, *para todo* x *de* A. (L.Monteiro (1965)).

0.2.4. LEMA. *Si* A *es un álgebra de Lukasiewicz con centro* c *y* S *una subálgebra de* A, *entonces las siguientes* *condiciones son equivalentes:*

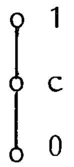
(I) S *verifica: "Si* Δx , $\nabla x \in S$ *entonces* $x \in S$"

(II) $c \in S$.

DEM. (I) $\longrightarrow$ (II). Como $\Delta c = 0 \in S$ y $\nabla c = 1 \in S$, entonces por (I) resulta que $c \in S$.

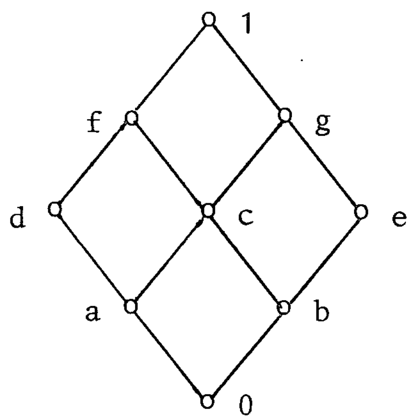
(II) $\longrightarrow$ (I). Supongamos que $c \in S$ y que Δx, $\nabla x \in S$, luego $x = (\Delta x \vee c) \wedge \nabla x \in S$.

0.2.5. EJEMPLO. Sea A el reticulado distributivo cuyo diagrama de Hasse se indica en la figura y cuyos operadores estan indicados en la tabla adjunta. El elemento representado por la letra c es un centro de A.



x	~x	∇x	Δx
0	1	0	0
c	c	1	0
1	0	1	1

0.2.6. EJEMPLO. Consideremos el reticulado distributivo A de la figura, con los operadores definidos por la tabla siguiente. A es un álgebra de Lukasiewicz que tiene por centro al elemento c.



x	~x	∇x	Δx
0	1	0	0
a	g	d	0
b	f	e	0
c	c	1	0
d	e	d	d
e	d	e	e
f	b	1	d
g	a	1	e
1	0	1	1

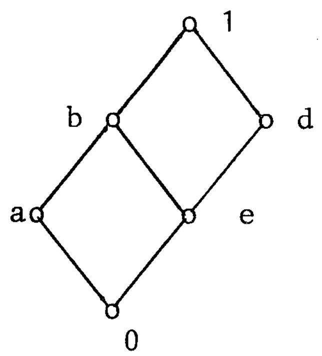
0.3. ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES CON EJE.

Vamos a indicar a continuación otro caso particular de álgebras de Lukasiewicz.

0.3.1. DEFINICION. *Se dice que un álgebra de Lukasiewicz* E *tiene un eje, si existe un elemento* $e \in E$*, tal que:*
(E1) $\Delta e = 0$
(E2) $\nabla x \leqslant \Delta x \vee \nabla e$, *para todo* $x \in E$.
El elemento e *se denomina eje del álgebra* E [Moisil (1941), pag.88].

Observemos que la condición (E2) es equivalente a cualquiera de las dos condiciones siguientes:
(E'2) $\nabla x = \nabla x \wedge (\Delta x \vee \nabla e)$; (E"2) $\nabla x \vee \nabla e = \Delta x \vee \nabla e$.

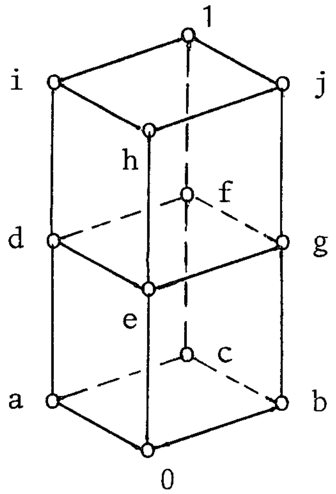
0.3.2. EJEMPLO. Sea E el reticulado distributivo cuyo diagrama se indica en la figura y cuyos operadores se indican en la tabla adjunta.



x	$\sim x$	Δx	∇x	$\Delta x \vee \nabla e$
0	1	0	0	d
a	d	a	a	1
b	e	a	1	1
d	a	d	d	d
e	b	0	d	d
1	0	1	1	1

Entonces E es un álgebra de Lukasiewicz, y de la observación de la tabla anterior resulta inmediatamente que el elemento indicado con la letra e es un eje de E.

0.3.3. EJEMPLO. Sea L el álgebra de Lukasiewicz trivalente con un generador libre. Indicamos a continuación su diagrama de Hasse y la tabla de los operadores $\sim$, ∇, Δ, Luego el elemento representado por la letra e es un eje de L.



x	~x	Δx	∇x	Δx ∨ ∇e
0	1	0	0	h
a	j	a	a	i
b	i	b	b	j
c	h	c	c	1
d	g	a	i	i
e	f	0	h	h
f	e	c	1	1
g	d	b	j	j
h	c	h	h	h
i	b	i	i	i
j	a	j	j	j
1	0	1	1	1

Moisil (1941, pag.88) demostró que si e es un eje de un álgebra A, entonces: $x = \Delta x \vee (e \wedge \nabla x \wedge \nabla\sim x)$, para todo $x \in A$.

0.3.4. LEMA. *Si* e *es un eje del álgebra* A, *entonces:* $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = \Delta x \vee (\nabla x \wedge e)$, *cualquiera que sea* $x \in A$.

DEM. $x = \Delta x \vee (e \wedge \nabla x \wedge \nabla\sim x) = (\Delta x \vee e) \wedge (\Delta x \vee \nabla x) \wedge$ $\wedge (\Delta x \vee \nabla\sim x) = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x \wedge 1 = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$.

0.3.5. LEMA. *Si* e *es un eje del álgebra* A, *entonces:* $x = (\Delta x \vee \sim e) \wedge \nabla x = \Delta x \vee (\nabla x \wedge \sim e)$, *cualquiera que sea* $x \in A$.

DEM. Por 0.3.4 podemos escribir $\sim x = (\Delta\sim x \vee e) \wedge \nabla\sim x$, lue go $x = \sim\sim x = (\nabla x \wedge \sim e) \vee \Delta x = (\Delta x \vee \sim e) \wedge \nabla x$.

0.3.6. LEMA. *Si* L *es un álgebra de Lukasiewicz tal que existe un elemento* e *de* L *que verifica las condiciones:*
(1) $\Delta e = 0$
(2) $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$, *cualquiera que sea* $x \in L$
entonces e *es un eje de* L.

DEM. Por hipótesis se cumple (E1). De (2) resulta: $\nabla x = (\Delta x \vee \nabla e) \wedge \nabla x$, condición ésta que, como hemos indicado, es equivalente a (E2).

0.3.7. LEMA. *Si* c *es centro del álgebra* L, *entonces* c *también es eje de* L.

DEM. Por hipótesis $\Delta c = 0$. Además, por 0.2.3 sabemos que $x = (\Delta x \vee c) \wedge \nabla x$, luego, por 0.3.6, c es eje de L.

0.3.8. LEMA. *Si un álgebra* A *tiene eje, éste es único.*

DEM. Supongamos que existen elementos e y f de A tales que: (1) $\Delta e = 0$; (1') $\Delta f = 0$; (2) $\nabla x = \nabla x \wedge (\Delta x \vee \nabla e)$, para todo x de A; (2') $\nabla x = \nabla x \wedge (\Delta x \vee \nabla f)$, para todo x de A.

De (1) y (1') resulta que: (i) $\Delta e = \Delta f$. Por (2) y (1') podemos escribir: $\nabla f = \nabla f \wedge (\Delta f \vee \nabla e) = \nabla f \wedge (0 \vee \nabla e) = \nabla f \wedge \nabla e$. Análogamente, de (2') y (1) se deduce que $\nabla e = \nabla e \wedge \nabla f$. Por lo tanto, (ii) $\nabla e = \nabla f$. De (i) e (ii) se deduce por el principio de determinación, que $e = f$.

0.3.9. LEMA. *Si* e *es eje del álgebra de Lukasiewicz* A *y* A *no es un álgebra de Boole, entonces* $e \neq 0$ *y* $e \neq 1$.

DEM. Si $e = 1$, entonces $\Delta e = 1$, luego no se cumple (E1). Si $e = 0$, entonces se verifica (E1). Si se verificara (E2), entonces $\nabla x \leqslant \Delta x \vee \nabla e = \Delta x \vee 0 = \Delta x$, para todo x de A, esto es $\nabla x = \Delta x$, para todo x de A, luego $\nabla x = x$, cualquiera que sea $x \in A$, y por lo tanto A sería un álgebra de Boole.

0.3.10. LEMA. *Si* e *es eje del álgebra de Lukasiewicz* A *y* S *es una subálgebra de* A *tal que* $e \in S$, *entonces* S *verifica:* "Δx, $\nabla x \in S$ *implica* $x \in S$".

DEM. Analoga a la indicada en 0.2.4.

La recíproca de este lema no es válida en general. En efecto, el álgebra E indicada en 0.3.2 tiene eje, $S = \{0,1\}$ es una subálgebra de E que verifica "Si Δx, $\nabla x \in S$, entonces $x \in S$", (para ello basta ver la tabla de los dos operadores) y, sin embargo, $e \notin S$.

0.3.11. LEMA. *Si* E *es un álgebra de Lukasiewicz con eje* e *y* S *una subálgebra de* E *que verifica:* 1) $B(E) \subseteq S$, 2) $e \in S$, *entonces* $S = E$.

DEM. Si $x \in E$, entonces Δx, $\nabla x \in B(E)$, luego, por 1) y 2), podemos afirmar que $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x \in S$.

0.3.12. LEMA. *Si* E *es un álgebra de Lukasiewicz con eje, tal que* B(E) *es un álgebra de Boole completa, entonces* E *es completa.*

DEM. Sea $F = \{a_i\}_{i \varepsilon I}$ una familia arbitraria de elementos de E y consideremos las siguientes familias de elementos de B(E):

$$F_o = \{\Delta a_i\}_{i \varepsilon I} \quad \text{y} \quad F_1 = \{\nabla a_i\}_{i \varepsilon I}$$

Luego, como B(E) es completa, existen los elementos:

$$(1) \quad a_o = \bigwedge_{i \varepsilon I} \Delta a_i \qquad \text{y} \qquad (2) \quad a_1 = \bigwedge_{i \varepsilon I} \nabla a_i \ ,$$

y, además, (3) $a_o \in B(E)$ y (4) $a_1 \in B(E)$.

Consideremos el elemento (5) $a = (a_o \vee e) \wedge a_1$, donde

e es el eje de E y probemos que A es el ínfimo de la familia F.

De (5) resulta que (6) $a \leq a_o \vee e$ y (7) $a \leq a_1$. Luego, de (6) y (3), se deduce (8) $\Delta a \leq \Delta a_o \vee \Delta e = \Delta a_o \vee 0 = \Delta a_o = a_o$.

De (1) resulta (9) $a_o \leq \Delta a_i$, para todo $i \in I$, luego, de (8) y (9), tenemos (10) $\Delta a \leq \Delta a_i$, para todo $i \in I$.

De (7) y (4) resulta (11) $\nabla a \leq \nabla a_1 = a_1$, y como, por (2) se cumple (12) $a_1 \leq \nabla a_i$, para todo $i \in I$, entonces, de (11) y (12), se deduce que (13) $\nabla a \leq \nabla a_i$, para todo $i \in I$.

De (10) y (13) se concluye (ver 0.1.7): (S1) $a \leq a_i$ para todo $i \in I$.

Probemos que: (S2) Si $x \in E$ verifica $x \leq a_i$, para todo $i \in I$, entonces $x \leq a$.

De $x \leq a_i$, para todo $i \in I$, resulta (14) $\Delta x \leq \Delta a_i$, para todo $i \in I$, y (15) $\nabla x \leq \nabla a_i$, para todo $i \in I$. Como Δx, $\nabla x \in B(E)$, entonces de (14) y (1) se deduce $\Delta x \leq a_o$, luego (16) $\Delta x \vee e \leq a_o \vee e$.

Por (15) y (2) tenemos (17) $\nabla x \leq a_1$, luego, de (16) y (17), resulta $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x \leq (a_o \vee e) \wedge a_1 = a$.

0.3.13. COROLARIO. *Si* C *es un álgebra de Lukasiewicz con centro tal que* $B(C)$ *es un álgebra de Boole completa, entonces* C *es completa.*

0.3.14. OBSERVACIONES. 1) Toda álgebra de Boole A es un álgebra de Lukasiewicz donde $\nabla x = \Delta x = x$, para todo x de A, y recíprocamente.

2) Si A es un álgebra de Boole, entonces el elemento $e = 0$, es el eje del álgebra de Lukasiewicz A. En efecto $\Delta e = e = 0$ y $(\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = (x \vee 0) \wedge x = x$, para todo x de A.
3) Hemos visto (0.3.7) que si c es el centro de un álgebra de Lukasiewicz L, entonces c es el eje de L.
4) En lo resta de este párrafo vamos a considerar álgebras de Lukasiewicz con eje que no son álgebras de Boole ni álgebras con centro.
5) A continuación vamos a utilizar algunos conceptos y resultados de la teoría de las álgebras de Lukasiewicz, cuyas definiciones y demostraciones se encuentran en capítulos posteriores. Por ejemplo: isomorfismo (II.1), álgebra cociente (II.1), producto cartesiano (III.1).

0.3.15. TEOREMA. *Si un álgebra de Lukasiewicz* E *tiene eje, entonces* E *es el producto cartesiano de un álgebra de Boole por un álgebra de Lukasiewicz con centro.* (Moisil 1941, pag.66-90).

Para probar este teorema, Moisil utilizó algunos resultados de la teoría de anillos. Nuestro propósito es indicar una demostración más simple de este teorema, utilizando solamente resultados de la teoría de las álgebras de Lukasiewicz.

0.3.16. LEMA. *El producto cartesiano de un álgebra de Boole* B *por un álgebra de Lukasiewicz con centro* C, *es un álgebra de Lukasiewicz con eje.*

DEM. Sea $E = B \times C$, entonces se prueba sin dificultad que el elemento $e = (0,c)$ es el eje de E, donde c es el centro de C.

Recordemos el siguiente resultado de la teoría de reticulados distributivos:

0.3.17. LEMA. *Si* R *es un reticulado distributivo con primer* (0) *y último elemento* (1), *y* z *es un elemento booleano de* R *tal que* $z \neq 0$, $z \neq 1$, *entonces los ideales principales* $I_1 = I(z)$, $I_2 = I(-z)$ *son tales que* $R \cong I_1 \times I_2$.

0.3.18. LEMA. *Si* L *es un álgebra de Lukasiewicz y* $b \in B(L) - \{0,1\}$, *entonces* $L \cong L/F(b) \times L/F(\sim b)$.

DEM. Recordemos que el complemento booleano de b es $\sim b$. Como $b \notin \{0,1\}$ entonces, por 0.3.17, podemos afirmar que el reticulado distributivo L es isomorfo al reticulado distributivo $L/F(b) \times L/F(\sim b)$, ya que $L/F(b) \cong \{x \in L: x \leqslant b\} = I(b)$ y $L/F(\sim b) \cong \{y \in L: y \leqslant \sim b\} = I(\sim b)$.

El isomorfismo en cuestión se define por intermedio de la siguiente igualdad: $f(x) = (x \wedge b, x \wedge \sim b)$, cualquiera que sea $x \in L$. Por lo tanto f verifica: (I) $f(0) = 0$, (II) $f(1) = 1$, (III) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, (IV) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.

Probemos que (V) $f(\nabla x) = \nabla f(x)$ y (VI) $f(\Delta x) = \Delta f(x)$. En efecto $\nabla f(x) = \nabla(x \wedge b, x \wedge \sim b) = (\nabla x \wedge \nabla b, \nabla x \wedge \nabla \sim b) = (\nabla x \wedge b, \nabla x \wedge \sim b) = f(\nabla x)$. En forma análoga se prueba (VI).

Como f verifica (I) a (VI), entonces podemos afirmar que f respeta al operador "$\sim$", (ver L.Monteiro (1969 b)), esto es, f es un homomorfismo de Lukasiewicz, luego, como f es biyectiva entonces f es un isomorfismo

0.3.19. LEMA. *Sea* L *un álgebra de Lukasiewicz y* a *un elemento de* L *que verifica* $\Delta a = 0$, *entonces el álgebra cociente* $Q = L/F(\nabla a)$ *es un álgebra de Lukasiewicz con centro.*

DEM. Vamos a probar que $c = |a|$, donde con $|x|$ representa mos la clase de equivalencia que contiene al elemento x, es el centro del álgebra Q. En efecto, probemos que $\sim|a| = |a|$, esto es, $\sim a \equiv a$ (mód.F(∇a)). Para ello basta observar que las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos: (1) $\Delta a = 0$; (2) $a \leqslant \sim a$; (3) $a = a \wedge \sim a$; (4) $a = \sim a \wedge \nabla a$; (5) $a \wedge \nabla a = \sim a \wedge \nabla a$; (6) $\sim a \equiv a$ (mód F(∇a)). La equivalencia de: (1) y((2), resulta de 0.1.13, (2) y (3), de las propiedades de un reticulado; (3) y (4) por el axioma L6, (4) y (5) por L11, (5) y (6) por la definición de $\equiv$.

0.3.20. LEMA. *Si* E *es un álgebra con eje* e*, entonces el álgebra cociente* $Q = E/F(\sim\nabla e) = E/F(\Delta\sim e)$ *es un álgebra de Boole.*

DEM. Queremos probar que $\Delta|x| = |x|$, cualquiera que sea $x \in Q$, esto es que $\Delta x \equiv x$ (mód.F($\Delta\sim e$)).

Como E es un álgebra con eje e, entonces $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = \Delta x \vee (e \wedge \nabla x)$, cualquiera que sea $x \in E$, luego $x \wedge \Delta\sim e = (\Delta x \wedge \Delta\sim e) \vee (e \wedge \Delta\sim e \wedge \nabla x)$, esto es $x \wedge \Delta\sim e = (\Delta x \wedge \Delta\sim e) \vee (0 \wedge x) = \Delta x \wedge \Delta\sim e$, lo que significa que $x \equiv \Delta x$ (mód.F($\Delta\sim e$)), cualquiera que sea $x \in E$.

Estamos ahora en condiciones de demostrar 0.3.15. En efecto, si E es un álgebra con eje e, entonces $\nabla e \neq 0$ y $\nabla e \neq 1$, porque si $\nabla e = 0$, entonces $e = 0$, luego (ver 0.3.9) E sería un álgebra d Boole, lo cual contradice la hipótesis (ver 0.3.14(4)). Si $\nabla e = 1$, entonces e sería un centro de E, contrariamente a lo supuesto.

Como $\nabla e \in B(E) - \{0,1\}$, entonces (ver 0.3.18) podemos afirmar que $E \cong E/F(\sim\nabla e) \times L/F(\nabla e)$. Además, por 0.3.20, $B = E/F(\sim\nabla e)$ es un álgebra de Boole y, por 0.3.19, $C = E/F(\nabla e)$ es un álgebra de Lukasiewicz con centro.

0.3.21. OBSERVACION. Si A es un álgebra centrada (lue- con eje), entonces es evidente que A = P x A, donde P representamos un álgebra de Boole con un solo elemento.
Si A es un álgebra de Boole, entonces A = A x P, donde con P representamos un álgebra de Lukasiewicz centrada con un solo elemento

CAPITULO I

ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES MONADICAS

I.1. ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES FUNCIONALES MONADICAS

Sea E un conjunto no vacío. L un álgebra de Lukasiewicz y $A = L^E$ la familia de todas las funciones definidas sobre E y que toman sus valores en L, entonces si algebrizamos A punto por punto obtenemos un álgebra de Lukasiewicz.

Dado $f \in A$, queda determinado un conjunto de elementos de L, a saber el rango de f:

$$R(f) = \{f(x) : x \in E\} = f(E).$$

En cualquiera de los siguientes casos: (1) L completa, (2) E finito, (3) R(f) finito, podemos afirmar que existe el supremo (ínfimo) del conjunto R(f).

Si $f \in A$ y existe el supremo (ínfimo) del conjunto R(f) notaremos: $\exists f = \bigvee R(f)$; $\forall f = \bigwedge R(f)$. Entonces podemos considerar las siguientes funciones:
$(\boldsymbol{\exists} f)(x) = \exists f$, $(\boldsymbol{\forall} f)(x) = \forall f$, para todo $x \in E$; luego $\boldsymbol{\exists} f$, $\boldsymbol{\forall} f \in A$.

I.1.1. DEFINICION. *Daremos el nombre de álgebra de Lukasiewicz (trivalente) funcional monádica, a toda* L-*subálgebra* S *del álgebra de Lukasiewicz* $A = L^E$ *que verifique:*

S1) *Para todo* $f \in S$, *existen los elementos* $\exists f$ *y* $\forall f$ *en* L.

S2) *Para todo* $f \in S$, $\boldsymbol{\exists} f$, $\boldsymbol{\forall} f \in S$.

El operador $\boldsymbol{\exists}$ ($\boldsymbol{\forall}$) *será denominado cuantificador funcional existencial (universal).*

Observemos que en la definición precedente no es necesario pedir que existan los elementos $\exists f$ y $\forall f$, y que $\exists\!\!\!\exists f$, $\forall\!\!\!\forall f \in S$, ya que $\exists f = \sim\forall\sim f$, $\forall f = \sim\exists\sim f$, ver 0.1.11, y en consecuencia $\exists\!\!\!\exists f = \sim\forall\!\!\!\forall\sim f$ y $\forall\!\!\!\forall f = \sim\exists\!\!\!\exists\sim f$.

En otras palabras, si S es una L-subálgebra de A tal que para todo $f \in S$ existe el elemento $\exists f$ y además $\exists\!\!\!\exists f \in S$, entonces también existe el elemento $\forall f$ y $\forall\!\!\!\forall f \in S$. La recíproca de esta afirmación también es verdadera.

I.1.2. LEMA. *Si A es un álgebra de Lukasiewicz funcional monádica, entonces el operador* $\exists\!\!\!\exists$ *definido precedentemente tiene las siguientes propiedades (cualquiera que sean* $f,g \in A$).

E0) $\exists\!\!\!\exists 0 = 0$ (*donde* $0(x)=0$ *es el primer elemento de* A)

E1) $f \leqslant \exists\!\!\!\exists f$

E2) $\exists\!\!\!\exists(f \wedge \exists\!\!\!\exists g) = \exists\!\!\!\exists f \wedge \exists\!\!\!\exists g$

E3) $\exists\!\!\!\exists(\nabla f) = \nabla(\exists\!\!\!\exists f)$

E4) $\exists\!\!\!\exists(\Delta f) = \Delta(\exists\!\!\!\exists f)$.

DEM. E0 y E1 son una consecuencia inmediata de la definición de $\exists\!\!\!\exists$.

Utilizando 0.1.17 se demuestra E2. E3 es una consecuencia de 0.1.14 y E4 una consecuencia de 0.1.19.

I.2. ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES MONADICAS

El resultado indicado en I.2.2 nos conduce en forma natural a la siguiente definición:

I.2.1. DEFINICION. *Daremos el nombre de Algebra de Lukasiewicz trivalente monádica, a todo par* $(A, \exists)$ *formado por un álgebra de Lukasiewicz* A *y un operador unario* $\exists$ *definido sobre* A *(que denominaremos cuantificador existencial) que verifica:*

E0) $\exists 0 = 0$

E1) $x = x \wedge \exists x$

E2) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$

E3) $\nabla \exists x = \exists \nabla x$

E4) $\Delta \exists x = \exists \Delta x$

Para abreviar diremos que A *es un álgebra monádica.*

Las álgebras de Boole, como dijimos en 0.3.14, son exactamente las álgebras de Lukasiewicz donde $\nabla x = \Delta x = x$. En consecuencia, el concepto introducido en I.2.1 coincide con el de álgebra de Boole monádica (P.Halmos (1962)) cuando ∇ y Δ coinciden con la identidad.

I.2.2. EJEMPLO. Consideremos el álgebra de Lukasiewicz A indicada en 0.2.6, y el operador $\exists$ definido del siguiente modo: $\exists 0 = 0$, $\exists a = \exists b = \exists c = c$, $\exists d = \exists e = \exists f = \exists g = \exists 1 = 1$. Se verifican sin dificultad que $(A, \exists)$ es un álgebra monádica.

I.2.3. LEMA. *En un álgebra monádica valen:*

E5) $\exists 1 = 1$

E6) $\exists\exists x = \exists x$

E7) *Si* $x \leqslant y$, *entonces* $\exists x \leqslant \exists y$.

E8) $\sim x \vee \nabla \exists x = 1$.

E9) $\exists x \vee \nabla \sim x = 1$.

DEM. E5, E6 y E7 se prueban en la forma habitual.
E8) Basta observar que: $1 = \sim x \vee \nabla x \leqslant \sim x \vee \nabla \exists x$.
E9) Como $x \leqslant \exists x$, entonces $1 = x \vee \nabla \sim x \leqslant \exists x \vee \nabla \sim x$, luego $\exists x \vee \nabla \sim x = 1$.

I.2.4. DEFINICION. *Diremos que un elemento* k *de un álgebra monádica* A *es un invariante o una constante de* A, *si* $\exists k = k$. *El conjunto de todos los invariantes del álgebra* A *será representado por* K *o por* K(A).

Observemos que K es el rango del operador $\exists$, esto es $K = \exists A$, y que además $0,1 \in K$.

I.2.5. LEMA. *Si* $x,y \in K$, *entonces* $x \wedge y \in K$.

DEM. Por hipótesis $\exists x = x$ y $\exists y = y$, luego $\exists (x \wedge y) = \exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y = x \wedge y$.

I.2.6. LEMA. *Si* $x \in K$, *entonces* $\sim x \in K$.

DEM. Por hipótesis (1) $\exists x = x$, entonces, teniendo en cuenta sucesivamente E0, L27, (1), E2, E4 y (1), tendremos: $0 = \exists 0 = \exists(\Delta\sim x \wedge x) = \exists (\Delta\sim x \wedge \exists x) = \exists \Delta\sim x \wedge \exists x = \Delta \exists \sim x \wedge \exists x = \Delta \exists \sim x \wedge x$, luego por 0.1.4: $\Delta \exists \sim x \leqslant \sim x$, y como el operador Δ es monótono, entonces: (2) $\Delta\Delta \exists \sim x = \Delta \exists \sim x \leqslant \Delta\sim x$.

Por (E1) y (E4) podemos afirmar que:

$$(3) \quad \Delta \sim x \leqslant \exists \Delta\sim x = \Delta \exists \sim x .$$

Luego de (2) y (3): (i) $\Delta \exists \sim x = \Delta\sim x$.

Utilizando E0, L29, (1), E4, E2, E3, tenemos: $0 = \exists 0 = \exists (\Delta x \wedge \nabla\sim x) = \exists (\Delta \exists x \wedge \nabla\sim x) = \exists (\exists \Delta x \wedge \nabla\sim x) =$

$= \exists \Delta x \wedge \exists \nabla{\sim}x = \exists \Delta x \wedge \nabla \exists {\sim}x$, de donde resulta por 0.1.4 y (1) que $\Delta x = \Delta \exists x = \exists \Delta x \leqslant {\sim}\nabla \exists {\sim}x$, luego $\nabla \exists {\sim}x \leqslant {\sim}\Delta x =$ $= \nabla{\sim}x \leqslant \exists \nabla{\sim}x = \nabla \exists {\sim}x$, esto es,(ii) $\nabla \exists {\sim}x = \nabla{\sim}x$.

De (i) e (ii) resulta por el principio de determinación de Moisil que $\exists {\sim}x = {\sim}x$, esto es, ${\sim}x \in K$.

I.2.7. LEMA. *Si* $x,y \in K$, *entonces* $x \vee y \in K$.

DEM. Es una consecuencia inmediata de I.2.5, I.2.6, L3 y L4.

I.2.8. LEMA. *En toda álgebra monádica, vale la siguiente regla de cálculo:* E10) $\exists (x \vee y) = \exists x \vee \exists y$.

DEM. Como $x \leqslant x \vee y$ e $y \leqslant x \vee y$, entonces por E7:

$$\exists x \leqslant \exists(x \vee y) \quad y \quad \exists y \leqslant \exists (x \vee y),$$

luego (i) $\exists x \vee \exists y \leqslant \exists (x \vee y)$.

Teniendo en cuenta E1 podemos afirmar que $x \vee y \leqslant$ $\leqslant \exists x \vee \exists y$, luego por E7, $\exists (x \vee y) \leqslant \exists (\exists x \vee \exists y)$, pero por E6 y I.2.7 tenemos $\exists (\exists x \vee \exists y) = \exists x \vee \exists y$, luego:

$$\text{(ii)} \quad \exists (x \vee y) \leqslant \exists x \vee \exists y.$$

De (i) y (ii) resulta: $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$.

I.2.9. LEMA. E11) $\exists {\sim}\exists x = {\sim}\exists x$.

DEM. Por E6 sabemos que $\exists x \in K$, luego por I.2.6 ${\sim}\exists x \in K$, esto es, $\exists {\sim}\exists x = {\sim}\exists x$.

I.2.10. LEMA. *Si* A *es un álgebra monádica, entonces* K(A) *es una L-subálgebra del álgebra de Lukasiewicz* A.

DEM. Por I.2.5, I.2.6 y I.2.7 podemos afirmar que K es cerrado con respecto a las operaciones $\wedge$, $\sim$ y $\vee$. Probemos que si $x \in K$, entonces $\nabla x \in K$. En efecto, si $\exists x = x$, entonces $\nabla \exists x = \nabla x$, luego por E3 tenemos $\exists \nabla x = \nabla x$, esto es, $\nabla x \in K$.

I.2.11. LEMA. *Si* ∇x, $\Delta x \in K$, *entonces* $x \in K$.

DEM. Si $\exists \nabla x = \nabla x$ y $\exists \Delta x = \Delta x$, entonces por E3 y E4 resulta que $\nabla \exists x = \nabla x$ y $\Delta \exists x = \Delta x$, luego, por el principio de determinación, tenemos $\exists x = x$, esto es, $x \in K$.

I.2.12. COROLARIO. *Si* A *es un álgebra monádica con centro (esto es, el álgebra de Lukasiewicz* A *tiene centro* c*), entonces* $c \in K(A)$.

DEM. Basta observar que $\nabla c = 1 \in K(A)$ y $\Delta c = 0 \in K(A)$.

I.2.13. LEMA. *Si* A *es un álgebra monádica tal que* $K(A) = \{0,1\}$, *entonces* A *es un álgebra de Boole.*

DEM. Supongamos que existe $x \in A$ tal que $x \wedge \sim x \neq 0$, luego como $K(A) = \{0,1\}$, entonces $\exists (x \wedge \sim x) = 1$, y por lo tanto $1 = \Delta \exists (x \wedge \sim x) = \exists \Delta (x \wedge \sim x) = \exists 0 = 0$, luego A tiene un solo elemento, lo cual contradice la hipótesis $x \wedge \sim x \neq 0$. Por lo tanto $a \wedge \sim a = 0$, cualquiera que sea $a \in A$; luego A es un álgebra de Boole.

I.2.14. LEMA. *Si* A *es un álgebra monádica con eje* e, *entonces* $e \in K(A)$.

DEM. (1) $\Delta \exists e = \exists \Delta e = \exists 0 = 0$.

Como e es eje de A, entonces: $\nabla x \leqslant \Delta x \vee \nabla e$, para todo x de A. Por otro lado $\nabla e \leqslant \exists \nabla e = \nabla \exists e$, luego:
(2) $\nabla x \leqslant \Delta x \vee \nabla \exists e$, para todo x de A.

De (1) y (2) resulta que el elemento $\exists e$ de A es un eje de A, pero como el eje de un álgebra de Lukasiewicz es único, entonces $\exists e = e$, esto es, $e \in K(A)$.

Observemos que si A es un álgebra de Lukasiewicz con eje e, S una L-subálgebra de A tal que $e \in S$, entonces e es eje del álgebra S. Luego, si A es un álgebra monádica con eje e, entonces e es eje del álgebra de Lukasiewicz K(A).

Como todo centro de un álgebra de Lukasiewicz, es un eje del álgebra, entonces I.2.12 es también una consecuencia de I.2.14.

I.2.15. LEMA. *Si* $x \in B = B(A)$, *entonces* $\exists x \in B$.

DEM. Si $\nabla x = x$, entonces $\exists \nabla x = \exists x$, luego por E3 tenemos $\nabla \exists x = \exists x$, esto es, $\exists x \in B$.

I.2.16. COROLARIO. *El sistema* $(B(A), \exists)$ *es un álgebra de Boole Monádica.* (Al respecto de la noción de Algebra de Boole Monádica, ver P.Halmos (1962), A.Monteiro (1960 a, 1960 b)).

I.2.17. LEMA. *Si* $B(A) \subseteq K(A)$, *entonces* $\exists x = x$, *para todo* x *de* A.

DEM. Si $x \in A$, entonces $\Delta x, \nabla x \in B(A)$, luego, como $B(A) \subseteq K(A)$, tenemos $\Delta x, \nabla x \in K(A)$, de donde resulta por I.2.11 que $x \in K(A)$. Luego $\exists x = x$, para todo x de A.

I.2.18. DEFINICION. *En un álgebra monádica daremos el nombre de cuantificador universal, al operador monario definido por:* $\forall x = \sim \exists \sim x$.

De la definición precedente y I.2.9 resulta inmediatamente que: (1) $\exists x = \sim \forall \sim x$; (2) $\exists \forall x = \forall x$ y (3) $\forall \exists x = \exists x$. Además, utilizando I.2.6 se prueba sin dificultad que:

$$\exists x = x \text{ si y solo si } \forall x = x.$$

I.2.19. LEMA. *El operador universal goza de las siguientes propiedades:*

U0) $\forall 0 = 0$

U1) $x = x \vee \forall x$

U2) $\forall (x \vee \forall y) = \forall x \vee \forall y$

U3) $\nabla \forall x = \forall \nabla x$

U4) $\Delta \forall x = \forall \Delta x$

U5) $\forall 1 = 1$

U6) $\forall \forall x = \forall x$

U7) *Si* $x \leqslant y$, *entonces* $\forall x \leqslant \forall y$

U8) $\sim x \wedge \Delta \forall x = 0$

U9) $\forall x \wedge \Delta \sim x = 0$

U10) $\forall (x \wedge y) = \forall x \wedge \forall y$

U11) $\exists (x \wedge \forall y) = \exists x \wedge \forall y$.

I.3. CARACTERIZACION DE UN ALGEBRA MONADICA POR INTERMEDIO DE LA FAMILIA DE SUS CONSTANTES.

El subconjunto K de los elementos invariantes $x = P(x)$ de un operador unario P definido sobre un conjunto parcialmente ordenado X, que verifica: 1) $x \leqslant P(x)$, para todo x de X; 2) Si $x,y \in X$ son tales que $x \leqslant y$, entonces $P(x) \leqslant P(y)$; 3) $P(P(x)) = P(x)$, es *condicionalmente completo*, en el sentido que para todo $x \in X$ existe, entre los elementos $k \in K$ tales que $k \geqslant x$, uno mínimo. Tal elemento es precisamente $P(x)$. Además por 3 el rango de P coincide con K. Recíprocamente, todo subconjunto K condicionalmente completo de X determina unívocamente el operador P definido por $P(x) = $ $=$ minímo $\{k \in K : k \geqslant x\}$, que verifica 1, 2 y 3, y del cual K es precisamente su conjunto de invariantes. (ver A.Monteiro et H.Ribeiro (1942)).

Diremos en lo siguiente que P es el operador asociado con el conjunto condicionalmente completo K.

I.3.1. TEOREMA. *Si* $(A, \exists)$ *es un álgebra monádica, entonces* $K = K(A)$ *verifica:*

I) K *es una L-subálgebra condicionalmente completa de* A.
II) *Si* $\Delta x = 0$, *entonces* $\Delta \exists x = 0$.

Recíprocamente, si A *es un álgebra de Lukasiewicz y* $K \subseteq A$ *verifica* I *y* II, *donde* $\exists$ *es el operador asociado con* K, *entonces* $(A, \exists)$ *es monádica.*

DEM. Ya hemos visto que K(A) es una L-subálgebra de A, (I.2.10), además, se prueba sin dificultad que K es condicionalmente completa y que verifica II.

Ahora bien si K verifica I y II, entonces se prueba en la forma habitual que:

(1) $x \leqslant \exists x$

(2) Si $k \in K$ entonces $\exists k = k$

(3) $\exists 0 = 0$

(4) $\exists \exists x = \exists x$

(5) Si $x \leqslant y$, entonces $\exists x \leqslant \exists y$

(6) $\exists (x \wedge y) \leqslant \exists x \wedge \exists y$

(7) $\exists (x \vee y) = \exists x \vee \exists y$

(8) $\exists \sim \exists x = \sim \exists x$.

Probemos que: (9) $\underline{\exists \Delta x \leqslant \Delta \exists x}$.

Como $\exists x \in K$, entonces $\Delta \exists x \in K$, luego $\exists \Delta \exists x = \Delta \exists x$.
De $x \leqslant \exists x$, resulta $\Delta x \leqslant \Delta \exists x$ y, por lo tanto;

$$\exists \Delta x \leqslant \exists \Delta \exists x = \Delta \exists x.$$

(10) <u>Si $b \in B(A)$, entonces $\exists b \in B(A)$</u>.

Por hipótesis $\Delta b = b$, luego por (9) tenemos:

$$\exists b = \exists \Delta b \leqslant \Delta \exists b \leqslant \exists b,$$

esto es, $\Delta \exists b = \exists b$, luego $\exists b \in B(A)$.

(11) $\underline{\exists \nabla x = \nabla \exists x}$.

Como $x \leqslant \exists x$, entonces $\nabla x \leqslant \nabla \exists x$, luego por (5) tenemos $\exists \nabla x \leqslant \exists \nabla \exists x$. Por otro lado $\exists x \in K$, entonces $\nabla \exists x \in K$, $\exists \nabla \exists x = \nabla \exists x$ y, por lo tanto; $\exists \nabla x \leqslant \nabla \exists x$.

Como $x \leqslant \nabla x$, entonces $\exists x \leqslant \exists \nabla x$, luego $\nabla \exists x \leqslant \nabla \exists \nabla x$. Pero $\nabla x \in B(A)$, luego por (10), tenemos $\exists \nabla x \in B(A)$, luego podemos afirmar que: $\nabla \exists x \leqslant \exists \nabla x$.

(12) $\underline{\exists (x \wedge \exists \nabla y) = \exists x \wedge \exists \nabla y}$.

Utilizando (6) y (4) tenemos que:

$$\exists (x \wedge \exists \nabla y) \leqslant \exists x \wedge \exists \exists \nabla y = \exists x \wedge \exists \nabla y.$$

Como $x = (x \wedge \nabla \exists y) \vee (x \wedge \sim\nabla \exists y)$, entonces por (7) y (6) podemos afirmar que:

$$\exists x = \exists (x \wedge \nabla \exists y) \vee \exists (x \wedge \sim\nabla \exists y) \leqslant \exists (x \wedge \nabla \exists y) \vee \vee (\exists x \wedge \exists \sim\nabla \exists y),$$

luego, como $\sim\nabla \exists y \in K$, esto es, $\exists \sim\nabla \exists y = \sim\nabla \exists y$, tenemos:

$$\exists x \leqslant \exists (x \wedge \nabla \exists y) \vee (\exists x \wedge \sim\nabla \exists y).$$

Luego, teniendo en cuenta (11),
$\exists x \wedge \exists \nabla y \leqslant (\exists(x \wedge \nabla \exists y) \wedge \nabla \exists y) \vee (\exists x \wedge \sim\nabla \exists y \wedge \nabla \exists y)$,
esto es, $\exists x \wedge \exists \nabla y \leqslant \exists(x \wedge \nabla \exists y) \wedge \nabla \exists y$.

Como $x \wedge \nabla \exists y \leqslant \nabla \exists y$, entonces $\exists(x \wedge \nabla \exists y) \leqslant \exists \nabla \exists y =$
$= \nabla \exists y$, luego: $\exists x \wedge \exists \nabla y \leqslant \exists(x \wedge \nabla \exists y) = \exists(x \wedge \exists \nabla y)$

(13) $\underline{\Delta \exists x \leqslant \exists \Delta x}$.

Sea $y = \sim \exists \Delta x \wedge \Delta \exists x \wedge x$. luego por, (10) y (1), tenemos $\Delta y = \sim \exists \Delta x \wedge \Delta \exists x \wedge \Delta x = \sim \exists \Delta x \wedge \Delta x \leqslant \sim \exists \Delta x \wedge \exists \Delta x = 0$, esto es, $\Delta y = 0$, luego por (II): $\Delta \exists y = 0$.

Como $\sim \exists \Delta x \wedge \Delta \exists x \in K \cap B(A)$, entonces por (12) podemos afirmar que: $0 = \exists y = \exists(\sim \exists \Delta x \wedge \Delta \exists x \wedge x) = \sim \exists \Delta x \wedge \Delta \exists x \wedge$
$\wedge \exists x = \sim \exists \Delta x \wedge \Delta \exists x$, luego por 0.1.4: $\Delta \exists x \leqslant \exists \Delta x$.

De (9) y (13) se deduce:

(14) $\underline{\Delta \exists x = \exists \Delta x}$.

(15) $\underline{\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y}$.

Utilizando (14) y (12) tenemos: (i) $\Delta \exists(x \wedge \exists y) =$
$= \exists \Delta(x \wedge \exists y) = \exists(\Delta x \wedge \Delta \exists y) = \exists(\Delta x \wedge \exists \Delta y) =$
$= \exists \Delta x \wedge \exists \Delta y = \Delta \exists x \wedge \Delta \exists y = \Delta(\exists x \wedge \exists y)$.

En forma análoga utilizando (11) y (12) se deduce que: (ii) $\nabla \exists(x \wedge \exists y) = \nabla(\exists x \wedge \exists y)$. Luego, de (i) e (ii), podemos afirmar mediante la utilización del principio de determinación que vale (15)

I.3.2. OBSERVACION. En general, a partir de una L-subálgebra condicionalmente completa no se obtiene un cuantificador existencial.

Consideremos por ejemplo el álgebra de Lukasiewicz indicada en 0.3.2, entonces $K = \{0,1\}$ es una L-subálgebra condicionalmente completa. En este caso tenemos $\exists e = 1$, luego $\Delta \exists e = 1$ y $\exists \Delta e = \exists 0 = 0$.

I.3.3. TEOREMA. *Si* A *es un álgebra de Lukasiewicz con eje* e*,* K *una L-subálgebra condicionalmente completa de*

A y $\exists$ el operador asociado con K, entonces (A, $\exists$) es un álgebra monádica si y solamente si $e \in K$.

DEM. Sabemos (ver I.2.14) que si (A, $\exists$) es un álgebra monádica con eje, entonces $\exists\, e = e$, esto es, $e \in K$.

En I.3.1 hemos visto que si K es una L-subálgebra condicionalmente completa, entonces el operador asociado con K, verifica las propiedades (1) a (12) indicadas en dicho teorema.

Probemos que $\Delta \exists x \leqslant \exists \Delta x$. Como el álgebra A tiene eje, entonces $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x \leqslant \Delta x \vee e$. Además, como $e \in K$, entonces $\exists\, e = e$, luego $\exists\, x \leqslant \exists\, (\Delta x \vee e) = \exists\, \Delta x \vee \exists\, e =$ $= \exists\, \Delta x \vee e$ y, por lo tanto, $\Delta \exists\, x \leqslant \Delta \exists\, \Delta x \vee \Delta e = \Delta \exists\, \Delta x \vee 0 =$ $= \Delta \exists\, \Delta x \leqslant \exists\, \Delta x$.

La demostración de la propiedad $\exists\, (x \wedge \exists\, y) = \exists\, x \wedge \exists\, y$ se hace en forma análoga a la indicada en I.3.1.

I.3.4. OBSERVACION. Si A es un álgebra de Lukasiewicz con centro c, entonces $K = \{0,c,1\}$ es una L-subálgebra de A a la que corresponde el operador dado por: $\exists\, 0 = 0$, $\exists\, x = c$, si $0 < x \leqslant c$, $\exists\, x = 1$, si $c < x \leqslant 1$ ó x es incomparable con c. (ver I.2.2).

I.3.5. DEFINICION. *Si A es un álgebra de Lukasiewicz y S una subálgebra de $B = B(A)$, diremos que una L-subálgebra S^* de A es una extensión de S si $S^* \cap B = S$.*

I.3.6. LEMA. *Si A es un álgebra de Lukasiewicz y S una subálgebra de B(A), entonces $M = \{t \in A\colon \nabla t,\ \Delta t \in S\}$ es una extensión de S y es la mayor extensión de S.*

DEM. Se prueba sin dificultad que M es una L-subálgebra de A. Además es evidente que $S \subseteq M$, luego $S \subseteq M \cap B$. Si $y \in M \cap B$, entonces $\nabla y \in S$ y $\nabla y = y$, luego $y \in S$, lo que prueba que $M \cap B = S$.

Probemos ahora que si S^* es una L-subálgebra de A tal que $S^* \cap B = S$, entonces $S^* \subseteq M$.

En efecto, si $t \in S^*$, entonces ∇t, $\Delta t \in S^* \cap B = S$, luego Δt, $\nabla t \in S$, esto es $t \in M$.

Si A es un álgebra de Lukasiewicz y $X \subseteq A$, vamos a indicar con SL(X) la L-subálgebra de A generada por X. Si $X = Y \cup \{a\}$, utilizaremos la siguiente notación: $SL(X) = SL(Y,a)$.

I.3.7. TEOREMA. *Si* A *es un álgebra de Lukasiewicz con eje* e *y* S *una subálgebra de* B(A), *entonces:* $\nabla e \in S$ *si y solo si la mayor extensión de* S *es* SL(S,e).

DEM. Necesaria. Probemos que $SL(S,e) = M$. Hemos visto (I.3.6) que (1) M es una L-subálgebra de A. Además es evidente que (2) $S \subseteq M$. Como $\nabla e \in S$ y $\Delta e = 0 \in S$, entonces (3) $e \in M$. De (1), (2) y (3) resulta que $SL(S,e) \subseteq M$.

Si $t \in M$, entonces ∇t, $\Delta t \in S$, luego Δt, e, $\nabla t \in SL(S,e)$ y por lo tanto $t = (\Delta t \vee e) \wedge \nabla t \in SL(S,e)$.

Suficiente. Como $e \in SL(S,e)$ y por hipótesis $SL(S,e) = M$, entonces en particular $\nabla e \in S$.

I.3.8. DEFINICION. *Sea* A *un álgebra de Lukasiewicz y supongamos que sobre* B(A) *está definido un operador de cuantificación* $\exists$, *esto es,* (B(A), $\exists$) *es un álgebra de Boole monádica. Diremos que un operador monario* $\exists\!\!\exists$ *definido sobre* A *es una extensión de* $\exists$ *si:*

1°) (A, $\exists\!\!\exists$) *es un álgebra monádica, y*

2°) $\exists\!\!\exists b = \exists b$ *para todo* b *de* B(A).

I.3.9. LEMA. *Si existe una extensión* $\exists\!\!\exists$ *de* $\exists$, *entonces* $\exists\!\!\exists A$ *es la mayor L-subálgebra que extiende a* $S = \exists B(A)$ *y, por lo tanto, la extensión es única.*

DEM. Para ello basta probar que $\exists\!\!\exists A = \{t \in A : \nabla t, \Delta t \in \exists B(A)\}$
Si $x \in \exists\!\!\exists A$, entonces $x = \exists\!\!\exists x$, luego $\nabla x = \nabla \exists\!\!\exists x = \exists\!\!\exists \nabla x =$
$= \exists \nabla x \in \exists B(A)$ y $\Delta x = \Delta \exists\!\!\exists x = \exists\!\!\exists \Delta x = \exists \Delta x \in \exists B(A)$. Recíprocamente, si $\nabla x, \Delta x \in \exists B(A)$, entonces $\nabla x = \exists \nabla x = \exists\!\!\exists \nabla x =$
$= \nabla \exists\!\!\exists x$ y también $\Delta x = \Delta \exists\!\!\exists x$, luego por el principio de determinación tenemos $x = \exists\!\!\exists x$.

I.3.10. TEOREMA. *Si* A *es un álgebra de Lukasiewicz con eje* e *y* $(B(A), \exists)$ *es un álgebra de Boole monádica, entonces* $\exists$ *admite extensión* $\exists\!\!\exists$ *si y solo si* $\nabla e \in S = \exists B(A)$. *La extensión es dada por la fórmula:*

$$(E^*) \qquad \exists\!\!\exists x = (\exists \Delta x \vee e) \wedge \exists \nabla x.$$

DEM. Si $\exists$ admite extensión $\exists\!\!\exists$, entonces $\nabla e = \nabla \exists\!\!\exists e = \exists\!\!\exists \nabla e =$
$= \exists \nabla e \in \exists B(A)$.

Como A tiene eje, entonces (ver 0.3.4):
$\exists\!\!\exists x = (\Delta \exists\!\!\exists x \vee e) \wedge \nabla \exists\!\!\exists x$, luego, como $\exists\!\!\exists$ verifica E3, E4 y es extensión de $\exists$, tenemos $\exists\!\!\exists x = (\exists\!\!\exists \Delta x \vee e) \wedge \exists\!\!\exists \nabla x =$
$= (\exists \Delta x \vee e) \wedge \exists \nabla x$.

Recíprocamente, veamos que si $S = \exists B(A)$ verifica $\nabla e \in S$, entonces la fórmula (E*) define un operador de cuantificación sobre A que extiende a $\exists$.

(1) <u>Si $b \in B(A)$, entonces $\exists\!\!\exists b = \exists b$</u>.

Como $b \in B(A)$, entonces $\nabla b = \Delta b = b$, luego:
$\exists\!\!\exists b = (\exists \Delta b \vee e) \wedge \exists \nabla b = (\exists b \vee e) \wedge \exists b = \exists b$.

E0) <u>$\exists\!\!\exists 0 = 0$</u>

Como $0 \in B(A)$, entonces por (1): $\exists\!\!\exists 0 = \exists 0 = 0$.

E1) <u>$x \wedge \exists\!\!\exists x = x$</u>

Como A tiene eje, entonces $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$, luego
$x \wedge \exists\!\!\exists x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x \wedge (\exists \Delta x \vee e) \wedge \exists \nabla x =$
$= ((\Delta x \wedge \exists \Delta x) \vee e) \wedge \nabla x \wedge \exists \nabla x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = x$.

(2) <u>Si $b \in B(A)$, entonces $\nabla \exists b = \Delta \exists b = \exists b$</u>.

Si $b \in B(A)$, entonces $\exists b \in B(A)$, luego se verifica (2).

E3) $\underline{\nabla \exists\!\exists x = \exists\!\exists \nabla x}$.

Teniendo en cuenta (2) y (E*) podemos escribir:

(i) $\nabla \exists\!\exists x = (\nabla \exists \Delta x \vee \nabla e) \wedge \nabla \exists \nabla x = (\exists \Delta x \vee \nabla e) \wedge \exists \nabla x$.

Como A tiene eje, entonces $\nabla x \leqslant \Delta x \vee \nabla e$, luego, como $\nabla e \in \exists B(A)$, tenemos:

(ii) $\exists \nabla x \leqslant \exists \Delta x \vee \exists \nabla e = \exists \Delta x \vee \nabla e$.

De (i), (ii) y (1) resulta $\nabla \exists\!\exists x = \exists \nabla x = \exists\!\exists \nabla x$.

E4) $\underline{\Delta \exists\!\exists x = \exists\!\exists \Delta x}$.

Utilizando (2) y (1) podemos escribir:

$\Delta\ \ x = (\Delta \exists \Delta x \vee \Delta e) \wedge \Delta \exists \nabla x = (\exists \Delta x \vee 0) \wedge \exists \nabla x =$
$= \exists \Delta x \wedge \exists \nabla x = \exists \Delta x = \ \ \Delta x$.

E2) $\underline{\exists\!\exists (x \wedge \exists\!\exists y) = \exists\!\exists x \wedge \exists\!\exists y}$.

$\exists\!\exists (x \wedge \exists\!\exists y) = (\exists \Delta (x \wedge \exists\!\exists y) \vee e) \wedge \exists \nabla (x \wedge \exists\!\exists y) =$
$= (\exists (\Delta x \wedge \Delta \exists\!\exists y) \vee e) \wedge \exists (\nabla x \wedge \nabla \exists\!\exists y) =$
$= (\exists (\Delta x \wedge \exists\!\exists \Delta y) \vee e) \wedge \exists (\nabla x \wedge \exists\!\exists \nabla y) =$
$= (\exists (\Delta x \wedge \exists \Delta y) \vee e) \wedge \exists (\nabla x \wedge \exists \nabla y) =$
$= ((\exists \Delta x \wedge \exists \Delta y) \vee e) \wedge (\exists \nabla x \wedge \exists \nabla y) =$
$= (\exists \Delta x \vee e) \wedge (\exists \Delta y \vee e) \wedge \exists \nabla x \wedge \exists \nabla y =$
$= ((\exists \Delta x \vee e) \wedge \exists \nabla x) \wedge ((\exists \Delta y \vee e) \wedge \exists \nabla y) =$
$= \exists\!\exists x \wedge \exists\!\exists y$.

Recapitulando: es bien conocido que si S es una subálgebra condicionalmente completa de un álgebra de Boole B, entonces existe un único cuantificador existencial $\exists$ sobre B tal que $S = \exists B$. Luego, si A es un álgebra de Lukasiewicz con eje y S una subálgebra condicionalmente completa de $B = B(A)$, entonces sobre B se puede definir un único operador existencial $\exists$ tal que $\exists B = S$. Además hemos visto que si $\nabla e \in S$, entonces $\exists$ admite una extensión $\exists\!\exists$. Por I.3.7, $SL(S,e)$ es la mayor extensión de S y por I.3.9 también $\exists\!\exists A = \dot{K}(A)$ es la mayor extensión de S, luego $SL(S,e) = K(A)$, por lo tanto podemos afirmar en particular que la L-subálgebra $SL(S,e)$ es condicionalmente completa.

Recíprocamente, si $(A, \exists)$ es un álgebra monádica con eje e, entonces $(B(A), \exists)$ es un álgebra de Boole monádica y $S = K(A) \cap B(A)$ es una subálgebra de $B(A)$ condicionalmente completa que verifica $\nabla e \in S$, entonces el operador $\exists\!\!\exists$ definido en I.3.10 es una extensión del operador $\exists$ (restringido a $B(A)$), luego $\exists\!\!\exists = \exists$ y $SL(S,e) = K(A)$.

Observemos además que si A es un álgebra de Lukasiewicz con centro c y S una subálgebra condicionalmente completa de $B(A)$, entonces la condición $\nabla c \in S$ se verifica automáticamente, desde que $\nabla c = 1$, luego, a toda subálgebra condicionalmente completa de $B(A)$ le corresponde un operador $\exists$, que admite la extensión $\exists\!\!\exists$ dada por la fórmula:

$$\exists\!\!\exists\, x = (\exists \Delta x \vee c) \wedge \exists \nabla x.$$

I.4. COMPARACION DE LAS ALGEBRAS MONADICAS CON LAS ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ DE CLAUSURA.

Sabemos que si A es un álgebra monádica, entonces se verifican:

C1) $\exists 0 = 0$ C2) $x = x \wedge \exists x$

C3) $\exists \exists x = \exists x$ C4) $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$

C5) $\exists \nabla x = \nabla \exists x$ C6) $\exists \Delta x = \Delta \exists x$.

I.4.1. DEFINICION. *A todo par* (A, $\exists$) *formado por un álgebra de Lukasiewicz* A *y un operador unario* "$\exists$" *definido sobre* A *que verifica las propiedades* C1-C6*, daremos el nombre de álgebra de Lukasiewicz de clausura ó álgebra de L-clausura.*

Es claro que si A es un álgebra de Boole, esta definición coincide con la noción de álgebra de clausura (P.Halmos (1962)).

De acuerdo a I.4.1, toda álgebra monádica es un álgebra de L-clausura, pero la recíproca no siempre es verdadera. En efecto, consideremos el álgebra de Lukasiewicz indicada en 0.3.2, y sea $\exists$ el operador unario definido del siguiente modo:

$\exists 0 = 0$; $\exists a = \exists b = \exists 1 = 1$; $\exists e = e$; $\exists d = d$;

entonces se verifica sin dificultad que se cumplan C1 a C6. Como $\exists(a \wedge \exists e) = \exists(a \wedge e) = \exists 0 = 0$ y $\exists a \wedge \exists e = 1 \wedge e = e$, entonces el álgebra considerada no es monádica.

Indicaremos a continuación condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de L-clausura sea un álgebra monádica:

I.4.2. TEOREMA. *En un álgebra de L-clausura* A*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

I) $\exists(x \wedge \exists \nabla y) = \exists x \wedge \exists \nabla y$

II) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$

III) $\exists A$ *es una L-subálgebra de* A.

IV) $\exists \sim \exists x = \sim \exists x$, *cualquiera que sea* $x \in A$.

DEM. I $\Rightarrow$ II) Coincide con la indicada en el punto (15) de I.3.1.

II $\Rightarrow$ III) Como A es un álgebra monádica, entonces (ver I.2.10) $\exists A$ es una L-subálgebra de A.

III $\Rightarrow$ IV) Como se cumple C3, entonces $k \in \exists A$ si y solo si $k = \exists k$, luego IV equivale a $\sim \exists x \in \exists A$, para todo x de A, y esto es una consecuencia inmediata de III y de $\exists x \in \exists A$.

IV $\Rightarrow$ I) Por C4 el operador $\exists$ es monótono, luego:

(1) $\exists(x \wedge \exists \nabla y) \leqslant \exists x \wedge \exists \exists \nabla y = \exists x \wedge \exists \nabla y$.

Por otro lado, $x = (x \wedge \exists \nabla y) \vee (x \wedge \sim \exists \nabla y) \leqslant$
$\leqslant (x \wedge \exists \nabla y) \vee (\sim \exists \nabla y)$, luego:

$\exists x \leqslant \exists(x \wedge \exists \nabla y) \vee \exists \sim \exists \nabla y = \exists(x \wedge \exists \nabla y) \vee \sim \exists \nabla y$

y, por lo tanto;

(2) $\exists x \wedge \exists \nabla y \leqslant \exists(x \wedge \exists \nabla y) \wedge \exists \nabla y \leqslant \exists(x \wedge \exists \nabla y)$.

De (1) y (2) resulta I. Observemos que la demostración del punto (12) de I.3.1 se puede hacer en la misma forma que la indicada precedentemente.

El resultado I.4.2 significa que: un álgebra de L-clausura A es monádica si y solo si B(A) es un álgebra de Boole monádica. Ya sabemos que si A es un álgebra monádica, entonces B(A) es un álgebra de Boole monádica. Recíprocamente, si A es un álgebra de L-clausura tal que B(A) es un álgebra de Boole monádica, entonces: $\nabla \exists \sim \exists x = \exists \nabla \sim \exists x = \exists \sim \Delta \exists x = \exists \sim \exists \Delta x = \sim \exists \Delta x = \sim \Delta \exists x = \nabla \sim \exists x$. En forma análoga se prueba que: $\Delta \exists \sim \exists x = \Delta \sim \exists x$, luego, por el principio de determinación de Moisil, podemos afirmar que se cumple $\exists \sim \exists x = \sim \exists x$, y por lo tanto A es un álgebra monádica.

I.5. SUBALGEBRAS MONADICAS.

I.5.1. DEFINICION. *Una parte no vacía* A' *de un álgebra monádica* A *se dice una subálgebra monádica de* A *ó una M-subálgebra de* A, *si:*

S1) A' *es una L-subálgebra de* A.

S2) *Si* $x \in A'$, *entonces* $\exists x \in A'$.

De la definición precedente resulta inmediatamente que:

I.5.2. LEMA. *Toda M-subálgebra de un álgebra monádica es un álgebra monádica.*

I.5.3. LEMA. *Si* $\{A_i\}_{i\in I}$ *es una familia no vacía de M-subálgebras de un álgebra monádica* A, *entonces* $A' = \bigcap_{i\in I} A_i$ *es una M-subálgebra de* A.

I.5.4. DEFINICION. *Dada una parte* G *de un álgebra monádica* A, *daremos el nombre de M-subálgebra engendrada por* G, *y notaremos* SM(G), *a la intersección de todas las M-subálgebras de* A *que contienen a* G.

Esta definición tiene sentido ya que A es una M-subálgebra de A que contiene a G. Además es evidente que SM(G) es la menor M-subálgebra de A que contiene a G. Si $G = \emptyset$, entonces $SM(\emptyset) = \{0,1\}$, y si A es un álgebra monádica trivial, esto es A tiene un solo elemento, entonces $SM(\emptyset) = \{0\} = A$.

Recordemos que si A es un álgebra de Lukasiewicz, S una L-subálgebra de A y $a \in A$, entonces SL(S,a) es el conjunto de todos los elementos $x \in A$, que se pueden expresar en la forma:

$$x = (s_1 \wedge \Delta a) \vee (s_2 \wedge \Delta{\sim}a) \vee (s_3 \wedge \nabla(a \wedge {\sim}a)) \vee (s_4 \wedge a \wedge {\sim}a),$$

donde s_1, s_2, s_3, $s_4 \in S$.

Observemos que si $a \in B(A)$, entonces $SL(S,a) = \{x \in A\colon x = (s_1 \wedge a) \vee (s_2 \wedge {\sim}a)$ con $s_1, s_2 \in S\}$.

Si el elemento a verifica $\Delta a = 0$, entonces (ver 0.1.13), como $a \leqslant {\sim}a$, tendremos: $SL(S,a) = \{x \in A\colon x = (s_1 \wedge \Delta{\sim}a) \vee$ $\vee (s_2 \wedge \nabla a) \vee (s_3 \wedge a)$, donde $s_i \in S$ para $i = 1,2,3\}$.

Si el álgebra A tiene centro c, entonces: $SL(S,c) = \{x \in A\colon x = s_1 \wedge (s_2 \vee c)$, donde $s_1, s_2 \in S\}$.

I.5.5. LEMA. *Si $k \in K(A)$ y S es una M-subálgebra del álgebra monádica A, entonces* $SM(S,k) = SL(S,k)$.

DEM. Es evidente que $SL(S,k) \subseteq SM(S,k)$. Para probar que $SM(S,k) \subseteq SL(S,k)$, es suficiente demostrar que $SL(S,k)$ es una M-subálgebra. Si $x \in SL(S,k)$ entonces:

$$x = \bigvee_{i=1}^{4} (s_i \wedge F_i(k))$$

donde $s_i \in S$ para $i = 1,2,3,4$ y $F_1(k) = \Delta k$, $F_2(k) = \Delta{\sim}k$, $F_3(k) = \nabla(k \wedge {\sim}k)$, $F_4(k) = k \wedge {\sim}k$.

Como $k \in K$ y K es L-subálgebra de A, entonces $F_i(k) \in K$ para $i = 1,2,3,4$, luego podemos escribir:

$$\exists x = \exists \bigvee_{i=1}^{4} (s_i \wedge F_i(k)) = \bigvee_{i=1}^{4} \exists(s_i \wedge F_i(k)) =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{4} (\exists s_i \wedge F_i(k))$$,por lo tanto, como $\exists s_i \in S$, para $i = 1,2,3,4$, podemos afirmar que $\exists x \in SL(S,k)$.

Vamos a probar que este resultado se puede generalizar, esto es:

I.5.6. LEMA. *Si S es una M-subálgebra de un álgebra monádica A y $X \subseteq K(A)$, entonces* $SM(S \cup X) = SL(S \cup X)$.

Como $SM(S \cup X) = \bigcup_{\substack{F \subseteq X \\ F \text{ finita}}} SM(S \cup F)$, entonces nos basta probar que: $SM(S \cup F) = SL(S \cup F)$, para toda parte finita F de K(A).

Vamos a probar este resultado por inducción sobre el número N(F) de elementos de F. Por I.5.5 podemos afirmar que el resultado es verdadero cuando $N(F) = 1$.

Supongamos que la igualdad es válida para todos los subconjuntos de K(A) con n-1 elementos. Sea $F = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subseteq$ $\subseteq K(A)$, entonces: $SL(S, k_1, k_2, \ldots, k_n) =$

$= SL(SL(S, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}) \;,\; k_n) =$

$= SL(SM(S, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}) \;,\; k_n) =$

$= SM(SM(S, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}) \;,\; k_n) = SM(S, k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Estamos ahora en condiciones de probar I.5.6, en efecto:

$$SL(S \cup X) = \bigcup_{\substack{F \subseteq X \\ F \text{ finita}}} SL(S \cup F) = \bigcup_{\substack{F \subseteq X \\ F \text{ finita}}} SM(S \cup F) = SM(S \cup X).$$

I.6. AXIOMAS INDEPENDIENTES PARA LAS ALGEBRAS MONADICAS.

I.6.1. LEMA. *Sea* $(A, 1, \sim, \nabla, \exists, \wedge, \vee)$ *un sistema formado por:* 1°) *un conjunto no vacío* A; 2°) *un elemento* 1 *de* A; 3°) *tres operaciones unarias,* $\sim$, ∇, $\exists$, *definidas sobre* A; 4°) *dos operaciones binarias* $\wedge$, $\vee$, *definidas sobre* A, *en forma tal que se verifiquen los axiomas (cualesquiera que sean los elementos* x,y,z *de* A*):*

M1) $x \wedge (x \vee y) = x$

M2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

M3) $\sim\sim x = x$

M4) $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

M5) $\sim x \vee \nabla x = 1$

M6) $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$

M7) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

M8) $\exists \sim 1 = \sim 1$

M9) $x \wedge \exists x = x$

M10) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$

M11) $\exists \sim\nabla\sim x = \sim\nabla\sim \exists x$,

entonces el sistema indicado es un álgebra monádica.

DEM. Ya sabemos que de los axiomas M1-M7 resulta (ver L. Monteiro (1964 a)) que el sistema $(A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$ es un álgebra de Lukasiewicz trivalente.

Como $\sim 1 = 0$, entonces M8 coincide con el axioma E0 indicado en I.2.1. El axioma M9 coincide con E1 y el M10 con E2. Como $\Delta x = \sim\nabla\sim x$, entonces el axioma M11 nos dice que $\exists \Delta x = \Delta \exists x$, esto es, se verifica E4. Por lo tanto, para que A sea un álgebra monádica, sólo nos resta probar que se cumple el axioma E3. Para ello necesitamos de una serie de propiedades que pasamos a demostrar.

(1) <u>Si $b \in B(A)$, entonces $\exists b \in B(A)$</u>.

$\exists b = \exists \Delta b = \Delta \exists b$.

(2) <u>Si $x \leqslant y$, entonces $\exists x \leqslant \exists y$</u>.

Se demuestra como en I.2.3.

(3) <u>$\nabla \exists x \leqslant \exists \nabla x$</u>.

De $x \leqslant \nabla x$, resulta $\exists x \leqslant \exists \nabla x$, luego utilizando (1) tenemos $\nabla \exists x \leqslant \nabla \exists \nabla x = \exists \nabla x$.

(4) <u>Si $\exists x = x$, entonces $\exists \sim x = \sim x$</u>.

Como hemos indicado en I.2.6, se prueba que (i) $\Delta \exists \sim x = \Delta \sim x$. Probemos que (ii) $\nabla \exists \sim x = \nabla \sim x$. En efecto $0 = \exists 0 = \exists (\Delta x \wedge \nabla \sim x) = \exists (\Delta \exists x \wedge \nabla \sim x) = \exists (\exists \Delta x \wedge \nabla \sim x) = \exists \Delta x \wedge \exists \nabla \sim x = \Delta x \wedge \exists \nabla \sim x$. Por (3) sabemos que $\nabla \exists \sim x \leqslant \exists \nabla \sim x$, luego
$\Delta x \wedge \nabla \exists \sim x \leqslant \Delta x \wedge \exists \nabla \sim x = 0$, esto es, $\Delta x \wedge \nabla \exists \sim x = 0$, luego:

$$\text{(a)} \quad \nabla \exists \sim x \leqslant \sim \Delta x = \nabla \sim x.$$

Por otro lado, como $\sim x \leqslant \exists \sim x$, entonces

$$\text{(b)} \quad \nabla \sim x \leqslant \nabla \exists \sim x.$$

De (a) y (b) resulta (ii), y de (i) e (ii) se deduce por el principio de determinación que $\exists \sim x = \sim x$.

(5) <u>Si $\exists x = x$, entonces $\exists \nabla x = \nabla x$</u>.

De $\exists x = x$,resulta por (4) que $\exists \sim x = \sim x$, luego por M11 $\exists \Delta \sim x = \Delta \exists \sim x = \Delta \sim x$, luego por (4) $\exists \nabla x = \exists \sim \Delta \sim x = \sim \Delta \sim x = \nabla x$.

(6) <u>$\exists \exists x = \exists x$</u>.

Ver demostración en I.2.3.

(7) <u>$\exists \nabla x \leqslant \nabla \exists x$</u>.

Como $x \leqslant \exists x$, entonces $\nabla x \leqslant \nabla \exists x$, luego aplicando (2), (6) y (5) tenemos $\exists \nabla x \leqslant \exists \nabla \exists x = \nabla \exists x$.

De (3) y (7) resulta: $\exists\nabla x = \nabla \exists x$.

Vamos a probar ahora que los axiomas M1-M11 son independientes.

INDEPENDENCIA DE M1. Sea $A = \{a,b,1\}$, sobre el cual definimos los operadores $\wedge$, $\sim$, ∇, $\exists$, por intermedio de la tabla siguiente y $x \vee y = x \wedge y$, para todo x,y de A.

$\wedge$	a	b	1	$\sim x$	∇x	$\exists x$
a	a	1	1	b	1	a
b	1	b	1	a	1	b
1	1	1	1	1	1	1

Entonces se prueba sin dificultad que se verifican M2-M11, y no vale M1, ya que $a \wedge (a \vee b) = a \wedge 1 = 1 \neq a$.

INDEPENDENCIA DE M2 a M7. Para probar la independencia de estos seis axiomas, nos sirven los ejemplos que hemos indicado (ver L.Monteiro (1964 a)), poniendo en cada uno de ellos $\exists x = x$, cualquiera que sea x.

INDEPENDENCIA DE M8 . Consideremos el álgebra de Lukasiewicz indicada en 0.2.5 y pongamos por definición $\exists x = 1$, para todo x. Luego se verifican M1-M7, M9-M11 y no se verifica M8: $\exists{\sim}1 = \exists 0 = 1 \neq {\sim}1$.

INDEPENDENCIA DE M9 . Sea A el álgebra de Lukasiewicz indicada en 0.2.5, entonces si definimos $\exists x = 0$, para todo x de A, todos los axiomas son verificados a excepción de M9, ya que $1 \wedge \exists 1 = 1 \wedge 0 = 0 \neq 1$.

INDEPENDENCIA DE M10. Consideremos el álgebra de Boole A, cuyo diagrama se indica en la figura.
Pongamos por definición: $\exists 0 = 0$,
$\exists a = \exists 1 = 1$, $\exists b = b$. Luego se verifican M1-M9, M11, y no se verifica M10,

ya que $\exists(a \wedge \exists b) = \exists(a \wedge b) = \exists 0 = 0$ y $\exists a \wedge \exists b =$
$= 1 \wedge b = b \neq 0$.

INDEPENDENCIA DE M11. Sea A el álgebra de Lukasiewicz indicada en 0.2.5 y pongamos por definición $\exists x = \nabla x$, cualquiera que sea $x \in A$. Entonces todos los axiomas son verificados, menos el M11, porque:

$\exists\Delta c = \nabla\Delta c = \Delta c = 0$ y $\Delta\exists c = \Delta\nabla c = \Delta 1 = 1$.

CAPITULO II

HOMOMORFISMOS

II.1. HOMOMORFISMOS Y ALGEBRAS COCIENTES.

II.1.1. DEFINICION. *Dadas dos álgebras de Lukasiewicz monádicas* A *y* A', *un homomorfismo de* A *en* A' *es una aplicación* $h:A \to A'$ *que verifica:*

H1) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$

H2) $h(\sim x) = \sim h(x)$

H3) $h(\nabla x) = \nabla h(x)$

H4) $h(\exists x) = \exists h(x)$.

Esto quiere decir que h *es un homomorfismo de la estructura de álgebra de Lukasiewicz, lo que llamaremos L-homomorfismo, que verifica la propiedad adicional* H4.

Si h *es una epiyección (inyección),* h *se dirá un epimorfismo (monomorfismo). Si* h *es a la vez un mono y epimorfismo se dice que* h *es un isomorfismo y se nota* $A \cong A'$ *ó* $A = A'$.

Si $h:A \to A'$ es un epimorfismo, entonces diremos que A' es una <u>imagen homomorfica</u> de A. Nos proponemos a indicar un procedimiento que permite obtener todas las imágenes homomorficas de A a partir de construcciones efectuadas sobre A.

Un L-homomorfismo, además de H1, H2, H3, verifica las propiedades:

H5) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$, H6) $h(1) = 1$

H7) $h(0) = 0$, $h(\Delta x) = \Delta h(x)$

y si h es un homomorfismo, vale también

H9) $h(\forall x) = \forall h(x)$.

II.1.2. DEFINICION. *Si* A *y* A' *son álgebras monádicas y* $h: A \longrightarrow A'$ *es un homomorfismo, se llama núcleo de* h *al conjunto:* $N(h) = \{x \in A: h(x) = 1\}$.

Se prueba sin dificultad que un homomorfismo h es un monomorfismo si y solo si $N(h) = \{1\}$.

II.1.3. LEMA. *El núcleo* $D = N(h)$ *de un homomorfismo tie̲ne las siguientes propiedades:*

N1) D *es un filtro*

N2) $\Delta D \subseteq D$

N3) $\forall D \subseteq D$.

DEM. Como h es un homomorfismo de reticulado se verifica N1. La propiedad N2 (N3) es una consecuencia de H8 (H9).

II.1.4. DEFINICION. *Daremos el nombre de L-filtro a to̲do filtro* F *de un álgebra monádica que verifica* N2 *y* N3.

La teoría de las álgebras de Boole monádicas es un caso particular de la teoría de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas. El concepto de M-filtro que acabamos de definir generaliza el de filtro monádico de la teoría de las álgebras de Boole monádicas.

Sea D un M-filtro de un álgebra monádica A. Diremos que dos elementos x e y de A son <u>congruentes módulo D</u>, y escribiremos $x \equiv y$ (D), si existe un $d \in D$ tal que $x \wedge d = y \wedge d$.

De la definicion precedente resulta que $x \equiv y$ (D) es una relación de congruencia sobre A, considerada como álgebra de Lukasiewicz.

Veamos ahora que "<u>Si $x \equiv y$ (D) entonces $\exists x \equiv \exists y$ (D)</u>". En efecto, por hipótesis existe $d \in D$ tal que $x \wedge d = y \wedge d$, luego $x \wedge d \wedge \forall d = y \wedge d \wedge \forall d$, esto es, $x \wedge \forall d =$

$= y \wedge \forall d$. Por lo tanto $\exists x \wedge \forall d = \exists(x \wedge \forall d) =$
$= \exists(y \wedge \forall d) = \exists y \wedge \forall d$.
Como $\forall d \in D$, podemos afirmar que $\exists x \equiv \exists y \ (D)$.

Si A es un álgebra monádica, D un M-filtro de A y $x \in A$, vamos a indicar con $|x|_D$ ó $|x|$ la clase de equivalencia módulo D determinada por x, e indicaremos con A/D el conjunto de todas las clases de equivalencia módulo D, algebrizada en la forma natural:

(1) $|x| \wedge |y| = |x \wedge y|$; (2) $|x| \vee |y| = |x \vee y|$
(3) $\sim|x| = |\sim x|$; (4) $\nabla|x| = |\nabla x|$
(5) $\exists|x| = |\exists x|$.

Entonces, por métodos standard (G.Birkhoff, 1967, Capítulo VI) se puede probar que A/D es un álgebra monádica, que tiene por último elemento a $|1| = D$, y que la aplicación $\varphi(x) = |x|$ de A en A/D es un homomorfismo que verifica $\varphi(A) = A/D$ y $N(\varphi) = D$. Al álgebra A/D se la denomina <u>álbra cociente de A por D</u> y al epimorfismo φ epimorfismo natural de A sobre A/D.

El siguiente resultado se prueba en la forma habitual:

II.1.5. LEMA. *Sean* A,A' *y* A'' *álgebras monádicas,* $h':A \to A''$ *un homomorfismo. Si* $N(h') \subseteq N(h'')$, *entonces existe un único homomorfismo* $h:A' \to A''$ *tal que* $h'' = h \circ h'$.
Además: 1) *Si* h'' *es epimorfismo,* h *es epimorfismo.* 2) *Si* h'' *es epimorfismo y* $N(h') = N(h'')$, *entonces* h *es un isomorfismo.*

II.1.6. COROLARIO. *Si* A *y* A' *son álgebras monádicas y* h *un homomorfismo de* A *en* A', *entonces* h(A) *es isomorfa a* A/N(h).

DEM. $A^* = h(A)$ es un álgebra monádica y $h: A \longrightarrow A^*$ es un epimorfismo de A en A^*. Como $N(h)$ es un M-filtro de A, entonces podemos considerar el álgebra cociente $A/N(h)$. Si φ es el epimorfismo natural de A sobre $A/N(h)$, entonces es fácil ver que $N(h) = N(\varphi)$ y, por lo tanto, $h(A)$ es isomorfa a $A/N(h)$, esto es, $h(A) = A/N(h)$.

Estamos ahora en condiciones de afirmar que todas las imágenes homomorficas de un álgebra monádica A se obtienen (a menos de isomorfismo) por la construcción indicada anteriormente. En efecto, si A y A' son álgebras monádicas y $h: A \longrightarrow A'$ es un epimorfismo, entonces $N(h)$ es un M-filtro de A, luego por II.1.6 concluímos que $h(A) = A/N(h)$, esto es, $A' = A/N(h)$.

II.2. SISTEMAS DEDUCTIVOS MONADICOS.

En un álgebra de Lukasiewicz se denomina implicación débil (A.Monteiro, (1963),(1967)) a la operación binaria que indicaremos con $\rightarrow$, definida por la fórmula: $x \rightarrow y = \nabla{\sim}x \vee y$.

Un subconjunto D de un álgebra de Lukasiewicz A se dice un sistema deductivo (s.d.) de A si satisface las condiciones siguientes:

D1) $1 \in D$.

D2) (Modus Ponens) Si $x \in D$ y $x \rightarrow y \in D$, entonces $y \in D$.

Un sistema deductivo D se dice propio si $D \neq A$.

Un filtro de un álgebra de Lukasiewicz A se dice un L-filtro de A si verifica "Si $f \in F$ entonces $\Delta f \in F$". Se prueba en la teoría de las álgebras de Lukasiewicz que las nociones de sistema deductivo y L-filtro son equivalentes.

II.2.1. DEFINICION. *Diremos que un sistema deductivo* D *de un álgebra monádica es monádico (s.d.m.) si verifica:*

D3) *Si* $x \in D$ *entonces* $\forall x \in D$.

De acuerdo a esta definición es obvio que las nociones de sistema deductivo monádico y M-filtro coinciden.

Es claro que si A es un álgebra monádica, entonces A y $\{1\}$ son sistemas deductivos monádicos y que la intersección de una familia no vacía de sistemas deductivos monádicos es un sistema deductivo monádico.

II.2.2. DEFINICION. *Si* H *es un subconjunto de un álgebra monádica* A *, llamaremos sistema deductivo monádico generado por* H, *y lo indicaremos por* DM(H), *a la intersección de todos los sistemas deductivos monádicos de*

A que contienen a H. *Esto es,* DM(H) *es el menor s.d.m. de* A *que contiene a* H.

Sea A un álgebra de Lukasiewicz, H una parte de A y D(H) el s.d. generado por H. Se prueba que $D(H) = F(\Delta H)$, donde $F(X)$ indica el filtro generado por el subconjunto X.

II.2.3. LEMA. *Si* A *es un álgebra monádica, entonces* $DM(H) = D(\forall H)$, *cualquiera que sea la parte* H *de* A.

DEM. Si $H = \emptyset$, entonces $DM(H) = \{1\}$ y $\forall H = \emptyset$ luego $D(\forall H) = \{1\}$.

Sea $H \neq \emptyset$, como $H \subseteq DM(H)$, entonces $\forall H \subseteq \forall DM(H) \subseteq DM(H)$, esto es, (1) $\forall H \subseteq DM(H)$. Pero (2) DM(H) es un s.d. luego, de (1) y (2), resulta (i) $D(\forall H) \subseteq DM(H)$.

Probemos que (3) $H \subseteq D(\forall H)$. Si $h \in H$, entonces $\forall h \in \forall H \subseteq D(\forall H)$, luego, como $D(\forall H)$ es un filtro y $\forall h \leqslant h$, tenemos $h \in D(\forall H)$. Si $y \in D(\forall H) = F(\Delta \forall H)$, entonces

$a = \Delta \forall h_1 \wedge \Delta \forall h_2 \wedge \dots \wedge \Delta \forall h_t \leqslant y$,

donde $\Delta \forall h_i \in \Delta \forall H$, para $i=1,2,\dots,t$, luego $\forall a = a \leqslant \forall y$, y por lo tanto $\forall y \in D(\forall H)$. Esto prueba que (4) $D(\forall H)$ es monádico, luego de (3) y (4) concluímos que (ii) $DM(H) \subseteq D(\forall H)$.

De (i) y (ii) se deduce el lema.

Llamaremos s.d.m. <u>principal</u> a todo s.d.m. generado por un conjunto con un solo elemento. Si $X = \{a\}$, notaremos $DM(X) = DM(a)$.

De acuerdo con los resultados precedentes, podemos afirmar que:

$$\underline{DM(a) = D(\forall a) = F(\Delta \forall a) = F(\forall \Delta a)},$$

de donde resulta inmediatamente:

II.2.4. LEMA. *Si* A *es un álgebra monádica, entonces* *el s.d.* D(a) *es monádico si y solo si* $\Delta a \in K(A)$.

II.2.5. COROLARIO. *Si* $a \in K(A)$, *entonces* D(a) *es un s.d.m.*

Si A es un álgebra de Lukasiewicz, H una parte de A y $a \in A$, vamos a notar por D(H,a) al s.d. generado por el conjunto $H \cup \{a\}$.

Se prueba que $D(H,a) = \{x \in A: a \to x \in D(H)\}$. Entonces, si A es un álgebra monádica, $H \subseteq A$ y $a \in A$, tenemos:

$$(*) \quad \underline{DM(H,a) = \{x \in A: \forall a \to x \in DM(H)\}}$$

En efecto, $DM(H,a) = D(\forall H, \forall a) = \{x \in A: \forall a \to x \in D(\forall H)\} = \{x \in A: \forall a \to x \in DM(H)\}$.

De (*) resulta que $\underline{DM(a) = \{x \in A: \forall a \to x = 1\}}$. En efecto, $DM(a) = DM(\emptyset,a) = \{x \in A: \forall a \to x \in DM(\emptyset) = \{1\}\} = \{x \in A: \forall a \to x = 1\}$.

Utilizando (*) se deduce inmediatamente que si H es un s.d.m. de A y $a \in A$, entonces:

$$\underline{DM(H,a) = \{x \in A: \forall a \to x \in H\} = D(H, \forall a)}.$$

Para ello basta tener en cuenta que $DM(H) = H$.

Observemos finalmente que si H es una parte no vacía de un álgebra de Lukasiewicz A, entonces D(H) es el conjunto de todos los elementos $y \in A$, para los cuales existe una parte finita $\{h_1, h_2, \ldots, h_t\} \subseteq H$ tal que

$$\underline{(h_1 \wedge h_2 \wedge \ldots \wedge h_t) \to y = 1}$$

Luego, por II.2.3 , podemos afirmar que si H es una parte no vacía de un álgebra monádica A, entonces DM(H) es el conjunto de todos los elementos y de A, para los cuales existen $h_1, h_2, \ldots, h_t \in H$, tal que

$$\underline{(\forall h_1 \wedge \forall h_2 \wedge \ldots \wedge \forall h_t) \to y = 1}$$

II.3. LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS MONADICOS PRINCIPALES Y LA TRAZA.

Vamos a indicar una construcción que permite obtener el álgebra cociente de un álgebra monádica A por un s.d.m. principal DM(a).

Sea $A'' = [0, \Delta \forall a] = \{x \in A : 0 \leqslant x \leqslant \Delta \forall a\}$ y algebrizemos este conjunto del siguiente modo:

(1) $x \cap y = x \wedge y$, (2) $x \cup y = x \vee y$,

(3) $\approx x = \sim x \wedge \Delta \forall a$, (4) $\triangledown x = \nabla x \wedge \Delta \forall a$,

(5) $\exists\, x = \exists x \wedge \Delta \forall a$, donde $x, y \in A''$.

Es evidente que el conjunto A'' es cerrado con respecto a las operaciones definidas y que la transformación $H: A \longrightarrow A''$, definida por $H(x) = x \wedge \Delta \forall a$, es una epiyección que verifica las condiciones H1, H2, H3 y H4 (ver II.1.2). Luego A'' es un álgebra monádica, más precisamente, es una imagen homomórfica de A. Además, como $H(1) = 1 \wedge \Delta \forall a = \Delta \forall a$, $\Delta \forall a$ es el último elemento de A'', luego $N(H) = \{x \in A : H(x) = \Delta \forall a\} = \{x \in A : \Delta \forall a \leqslant x\} = F(\Delta \forall a) = DM(a)$.

Por lo tanto, si $A' = A/DM(a)$, por II.1.5 podemos afirmar que A'' es isomorfa a A''. Observemos además que el homomorfismo H deja fijos los elementos de A''.

El álgebra monádica A'' se denomina <u>traza de A sobre a</u> y se nota $A'' = Tr\, A/a$.

II.3.1. TEOREMA. *En cada clase de equivalencia módulo* DM(a) *existe un único elemento de* $A'' = Tr\, A/a$. *Más precisamente, si* L *es una clase de equivalencia módulo* DM(a) *y si* $x \in L$, *entonces:* $L \cap (Tr\, A/a) = \{H(x)\}$.

DEM. Como $H(x) \wedge \Delta \forall a = x \wedge \Delta \forall a$ y $\Delta \forall a \in DM(a)$, entonces

$$(1) \qquad \underline{x \equiv H(x) \ , \ (DM(a))}.$$

Si $x \in L$, por (1) $H(x) \in L$ y como $H(x) \in (TrA/a)$, cualquiera que sea $x \in A$, resulta que $H(x) \in L \cap (Tra/a)$. Luego:

(2) $\underline{L \cap (TrA/a) \neq \emptyset}$.

Veamos finalmente:

(3) $\underline{\text{Si } x,y \in L \cap (TrA/a), \text{entonces } x=y}$.

Sabemos que el homomorfismo H deja invariantes los elementos de $Tr\ A/a$, luego de $x,y \in Tr\ A/a$ tenemos $H(x) = x$ y $H(y) = y$. Sea φ el homomorfismo natural de A sobre $A' = A/DM(a)$. Sabemos que existe un isomorfismo f de A' sobre A'' tal que $H = f \circ \varphi$. De $x,y \in L$ resulta $\varphi(x) = \varphi(y)$ y por lo tanto $x = H(x) = f(\varphi(x)) = f(\varphi(y)) = H(y) = y$.

II.4. RELACION ENTRE LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS MONADICOS DE UN ALGEBRA MONADICA A Y LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS DE K(A).

En la determinación de las imágenes homomorficas de álgebras monádicas, de Lukasiewicz, de Boole monádicas, de Boole, desempeñan un papel fundamental las nociones de sistema deductivo monádico, sistema deductivo, filtro monádico y filtro, respectivamente.

Dada un álgebra monádica A, podemos considerar:
1°) El álgebra de Lukasiewicz $K = K(A)$,
2°) El álgebra de Boole Monádica $B = B(A)$ y
3°) El álgebra de Boole $B(K) = \{x \in K: \nabla x = x\}$.
Observemos que $B(K) = K(B)$, donde $K(B) = \{y \in B: \exists x = x\}$, y que además $K(B) = B(A) \cap K(A)$.

Vamos a representar por $\mathcal{M}$ la familia de todos los sistemas deductivos monádicos de A, por $\mathcal{D}$ la familia de todos los sistemas deductivos de K(A), por $\mathcal{U}$ la familia de todos los filtros monádicos de B(A) y por $\mathcal{F}$ la familia de todos los filtros de B(K). Indicaremos a continuación algunas relaciones entre estos conjuntos.

Se verifica sin dificultad que si D es un s.d.m. de A, entonces $D^* = D \cap K(A) = \exists D$ es un s.d. de K(A) y

$$D = \{x \in A: t \leqslant x \text{ para algún } t \in D^*\} = F(D^*) \ .$$

Recíprocamente, si D^* es un s.d. de K(A), entonces el conjunto $D = F(D^*)$ es un s.d.m. de A que verifica $D^* = D \cap K(A)$. Aplicando II.2.3 y observando que $\forall D^* = D^*$, $\Delta D^* \subseteq D^*$, se tiene $F(D^*) = DM(D^*)$.
De lo precedente resulta:

II.4.1. LEMA. *La transformación $\varphi_1: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{D}$, definida por $\varphi_1(D) = D \cap K(A)$, es un isomorfismo de orden, cuando $\mathcal{M}$, $\mathcal{D}$ se ordenan por el orden de inclusión.*

$\varphi_1^{-1}: \mathcal{D} \longrightarrow M$ *es dada por* $\varphi_1^{-1}(D^*) = F(D^*) = DM(D^*)$.

Si D es un s.d.m. de A, entonces $D^{\#} = D \cap B(A) = \Delta D$ es un filtro monádico de B(A) y además $D = F(D^{\#})$. Recíprocamente, si $D^{\#}$ es un filtro monádico de B(A), entonces $D = F(D^{\#})$ es un s.d.m. de A tal que $D^{\#} = D \cap B(A)$. Como $\Delta D^{\#} = D^{\#}$, $\forall\, D^{\#} \subseteq D^{\#}$, aplicando II.2.3, se tiene $F(D^{\#}) = DM(D^{\#})$. Dejamos a cargo del lector las verificaciones. Estamos así en condiciones de afirmar que

II.4.2. LEMA. *La transformación* $\varphi_2: M \longrightarrow \mathcal{U}$, *definida por* $\varphi_2(D) = D \cap B(A)$, *es un isomorfismo de orden, cuando* M, $\mathcal{U}$ *se ordenan por el orden de inclusión.*
$\varphi_2^{-1}: \mathcal{U} \longrightarrow M$ *es dada por* $\varphi_2^{-1}(D^{\#}) = F(D^{\#}) = DM(D^{\#})$.

Por un resultado de la teoría de las álgebras de Lukasiewicz, podemos afirmar que $\varphi_3(D') = D' \cap B(K) = \Delta D'$, donde $D' \in \mathcal{D}$, establece un isomorfismo de orden entre $\mathcal{D}$ y $\mathcal{F}$. La transformación inversa φ_3^{-1} hace corresponder a cada filtro T de B(K) el filtro engendrado en K(A) por T: $\varphi_3^{-1}(T) = F_{K(A)}(T)$.

También sabemos que si definimos $\varphi_4(F) = F \cap K(B) = \exists F$ para $F \in \mathcal{U}$, φ_4 es un isomorfismo de orden entre $\mathcal{U}$ y $\mathcal{F}$. La transformación inversa es dada por $\varphi_4^{-1}(S) = F_{B(A)}(S)$.

La conmutación $\varphi_3 \circ \varphi_1 = \varphi_4 \circ \varphi_2$ explicitada en el diagrama es un reflejo de la conmutación de los operadores Δ y $\exists$ en las álgebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas.

$$\begin{tikzcd} D \in \mathcal{M} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \exists D \in \mathcal{D} \arrow[d, "\varphi_3"] \\ \Delta D \in \mathcal{U} \arrow[r, "\varphi_4"'] & \exists \Delta D = \Delta \exists D \in \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

Sea A un álgebra monádica, D un sistema deductivo monádico y h el homomorfismo natural de A sobre A/D, entonces la restricción h* de h a K(A) es un L-homomorfismo de K(A) sobre K(A/D) que tiene por núcleo a $\exists$ D, luego:

K(A)/ $\exists$ D y K(A/D) son álgebras de Lukasiewicz isomorfas.

Si h' representa la restricción de h a B(A), h' es un homomorfismo del álgebra de Boole monádica B(A) sobre el álgebra de Boole monádica B(A/D) que tiene por núcleo a ΔD, luego:

B(A)/ΔD y B(A/D) son álgebras de Boole monádicas isomorfas.

Finalmente tenemos que:

BK(A)/$\Delta\exists$D y BK(A/D) son álgebras de Boole isomorfas,

donde BK(A) = B(A) $\cap$ K(A).

II.5. PROPIEDADES DE LA FAMILIA DE LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS MONADICOS.

Nos proponemos en este párrafo indicar algunas propiedades de los sistemas deductivos monádicos y caracterizar los sistemas deductivos monádicos máximos.

Sea A un álgebra monádica <u>no trivial</u>, esto es, con más de un elemento. Un sistema deductivo monádico M de A se dice <u>maximal</u> si es un elemento maximal del conjunto de los sistemas deductivos monádicos propios de A ordenado por inclusión.

Un sistema deductivo monádico I se dice <u>irreducible</u> si 1°) I es propio y 2°) Si $I = D_1 \cap D_2$, donde D_1 y D_2 son sistemas deductivos monádicos, entonces $I = D_1$ ó $I = D_2$.

Un sistema deductivo monádico C se dice <u>completamente irreducible</u> si 1°) C es propio y 2°) Si $C = \bigcap_{j \in J} D_j$, donde $\{C_j\}_{j \in J}$ es una familia de sistemas deductivos monádicos, entonces existe $j_o \in J$ tal que $C = D_{j_o}$.

II.5.1. TEOREMA. *En un álgebra monádica* A, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) M *es un s.d.m. máximo.*
2) M *es un s.d.m. irreducible.*
3) M *es un s.d.m. completamente irreducle.*

DEM. Hemos visto en el párrafo anterior que la transformación $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_1 = \varphi_4 \circ \varphi_2$ establece un isomorfismo de orden entre el conjunto de los sistemas deductivos monádicos del álgebra A y el de los filtros del álgebra de Boole $B(K) = BK(A)$. Es entonces inmediato que los elementos maxi males , irreducibles y completamente irreducibles de estos conjuntos se corresponden por φ. Como las nociones de filtro maximal, filtro completamente irreducible y filtro irreducible coinciden en las álgebras de Boole, también coinciden las nociones de s.d.m. máximo, s.d.m. completamente irreducible y s.d.m. irreducle en un álgebra de Lukasiewicz monádica.

Mediante la utilización de la transformación φ se prueba inmediatamente que: Todo sistema deductivo monádico propio es intersección de sistemas deductivos monádicos maximos. En particular, desde que $\{1\}$ es un s.d.m., se tiene que: la intersección de todos los sistemas deductivos monádicos máximos de un álgebra de Lukasiewicz monádica se reduce al elemento 1.

Vamos a completar estos resultados con una caracterización de los sistemas deductivos monádicos máximos.

II.5.2. TEOREMA. *En un álgebra monádica* A *los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) M *es un s.d.m. máximo.*
2) *Si* $a \notin M$, *existe* $m \in M$ *tal que* $\Delta\forall a \wedge m = 0$.
3) *Si* $\Delta\forall a \vee b \in M$, *entonces* $a \in M$ *ó* $b \in M$.
4) *Si* $a \notin M$, *entonces* $\nabla\sim\forall a \in M$.
5) *Si* $a,b \notin M$, *entonces* $\forall a \rightarrow b \in M$ *y* $\forall b \rightarrow a \in M$.

DEM. 1 $\Rightarrow$ 2) Consideremos el s.d.m. $D = DM(M,a) = D(M,\forall a) = F(M,\Delta\forall a) = \{x \in A\colon m \wedge \Delta\forall a \leqslant x,\ \text{con } m \in M\}$.
Si fuese $\Delta\forall a \wedge m \neq 0$, para todo $m \in M$, entonces D sería un s.d.m. propio tal que $M \subset D$. Absurdo.

2 $\Rightarrow$ 3) Si $a \notin M$, por (2) existe $m \in M$ tal que $\Delta\forall a \wedge m = 0$. Como $b \wedge m = (\Delta\forall a \vee b) \wedge m \in M$, entonces $b \in M$.

3 $\Rightarrow$ 4) Como $\Delta\forall a \vee \nabla\sim\forall a = 1 \in M$ y $a \notin M$, entonces, por

(3), $\nabla\sim\forall a \in M$.

$4 \Rightarrow 5$) Si $a \notin M$, entonces $\nabla\sim\forall a \in M$, luego $\forall a \rightarrow b = \nabla\sim\forall a \vee b \in M$. Análogamente se prueba que $\forall b \rightarrow a \in M$.

$5 \Rightarrow 1$) Si M no es máximo, entonces existe un s.d.m. M^* tal que $M \subset M^* \subset A$. Sean $a \in M^* - M$ y (i) $b \in A - M^*$, luego $a,b \notin M$ y por lo tanto, de (5) se deduce en particular que $\forall a \rightarrow b \in M$, luego (ii) $\forall a \rightarrow b \in M^*$. Como $a \in M^*$, entonces (iii) $\forall a \in M^*$. De (ii) y (iii) se deduce que $b \in M^*$, lo que contradice (i).

Cuando $\exists x = x$, respectivamente $\nabla x = x$, para todo x, el teorema precedente da caracterizaciones de los sistemas deductivos máximos, respectivamente filtros monádicos máximos, en las álgebras de Lukasiewicz trivalentes, respectivamente álgebras de Boole monádicas. Y, por cierto, contiene a las caracterizaciones de ultrafiltros en las álgebras de Boole, en el caso $\exists x = \nabla x = x$, para todo x.

II.6. ALGEBRAS MONADICAS SIMPLES.

II.6.1. DEFINICION. *Un álgebra monádica* A *se dice simple si:*

1) A *no es trivial*
2) *las únicas imágenes homomórficas de* A *son* A *y el álgebra monádica trivial.*

Como las imágenes homomórficas de A son de la forma A/D donde D es un s.d.m. de A, entonces se prueba sin dificultad que:

II.6.2. LEMA. *Un álgebra de Lukasiewicz monádica* A, *no trivial, es simple si y solo si sus únicos sistemas deductivos monádicos son* $DM(1) = \{1\}$ *y* $DM(0) = A$.

Desde que "A simple" significa que $\{1\}$ es un s.d.m. maximal, se tiene que (II.5.2,2):

<u>A es simple si y solo si cualquiera que sea $a \neq 1$, $\forall \Delta a = 0$</u>.

Si A es un álgebra de Boole y $K(A) = \{0,1\}$, entonces <u>A es simple</u> pués si $a \neq 1$, entonces $\forall a = 0$, luego $\forall \Delta a = \forall a = 0$. Si A es un álgebra con centro c y $K(A) = \{0,c,1\}$, <u>A es simple</u> . En efecto, si $a \neq 1$, entonces $\forall a = 0$ ó $\forall a = c$, luego en cualquier caso $\forall \Delta a = 0$. Por otra parte, si A es simple, K(A) tiene <u>dos ó tres elementos</u>, pués si $k \in K(A)$ y $k \notin \{0,1\}$, $0 = \forall \Delta k = \Delta \forall k = \Delta k$ y, análogamente, $\Delta {\sim} k = 0$, o sea $\nabla k = 1$; luego k es necesariamente <u>el</u> centro de A (ver 0.2). Resumiendo:

II.6.3. TEOREMA. *Para un álgebra de Lukasiewicz monádica* A *son equivalentes:*

1) A *es simple*
2) *Cualquiera que sea* $a \neq 1$, $\forall \Delta a = 0$

3) K(A) *tiene dos o tres elementos, en el primer caso* A *es un álgebra de Boole y en el segundo* A *es un álgebra centrada.*

Cuando $\exists x = x$, para todo x, el teorema anterior indica que i) las álgebras de Lukasiewicz simples son $\{0,1\}$ y $\{0,c,1\}$. Por otra parte cuando $\nabla x = x$, para todo x, II.6.3 dice que ii) las álgebras de Boole monádicas simples A, son aquellas tales que $K(A) = \{0,1\}$.

Que las álgebras de Lukasiewicz monádicas simples son exactamente las descriptas en el punto 3 de II.6.3 es también una consecuencia de i) ó ii). En efecto, desde que los sistemas deductivos monádicos de A, los sistemas deductivos de K(A) y los filtros monádicos de B(A) se corresponden biyectivamente (II.4.1 y II.4.2), decir que A es simple, esto es que tiene exactamente dos sistemas deductivos monádicos, equivale a decir que K(A) es un álgebra de Lukasiewicz simple, esto es, tiene exactamente dos sistemas deductivos, y también equivale a decir que B(A) es un álgebra de Boole monádica simple.

En el primer caso, por i) $K(A) = \{0,1\}$ ó $K(A) = \{0,c,1\}$. En el segundo, por ii) $K(B(A)) = \{0,1\}$, luego por un razonamiento análogo al indicado en la página 62, K(A) tiene dos o tres elementos.

En forma standard se prueba que:

II.6.4. LEMA. *Si* M *es un s.d.m. máximo de un álgebra monádica* A, *entonces* A/M *es un álgebra monádica simple.*

II.6.5. TEOREMA. *Si* A *es un álgebra monádica y* M *un s.d.m. tal que* A/M *es un álgebra monádica simple, entonces* M *es un s.d.m. máximo de* A.

CAPITULO III

PRODUCTO Y SUBPRODUCTO DIRECTO DE ALGEBRAS MONADICAS

III.1. PRODUCTO DIRECTO DE ALGEBRAS MONADICAS.

Dada una familia $\{(A_i, \exists_i)\}_{i\in I}$, no vacía, de álgebras monádicas, el producto cartesiano $P = \prod_{i\in I} A_i$ es un álgebra de Lukasiewicz cuando se algebriza P coordenada a coordenada. Si para $a = (a_i)_{i\in I} = (a_i) \in P$ definimos $\exists a = (\exists_i a_i)_{i\in I}$, entonces $(P, \exists)$ es un álgebra monádica, llamada producto directo (o cartesiano) de las álgebras monádicas A_i.

Los siguientes resultados son de fácil comprobación:

Si A es un álgebra monádica, $\{k_i\}_{i\in I} \subseteq K(A)$ y existe $\bigwedge_{i\in I} k_i = k$, entonces $k \in K(A)$.

III.1.1. LEMA. *Si* $P = \prod_{i\in I} A_i$, *donde las* A_i *son álgebras monádicas, entonces* $k = (k_i)_{i\in I} \in K(P)$ *si y solo si* $k_i \in K(A_i)$, *para cada* $i \in I$. *Esto es* $K(P) = \prod_{i\in I} K(A_i)$. *También* $B(P) = \prod_{i\in I} B(A_i)$.

Si $P = \prod_{i\in I} A_i$, la proyección i-ésima Π_i de P en A_i es un homomorfismo de P en A_i.

Un álgebra monádica A se dice subproducto directo de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de álgebras monádicas si:

1°) A es isomorfa a una subálgebra A* del álgebra monádica

$P = \prod_{i \in I} A_i$.

2°) $\Pi_i(A^*) = A_i$, para todo $i \in I$.

Si, además, $\Pi_i : A^* \longrightarrow A_i$ no es un isomorfismo para ningún $i \in I$, A se dice <u>subdirectamente reducible</u>. Caso contrario, se dice que A es <u>subdirectamente irreducible</u>.

III.1.2. TEOREMA. *Para que un álgebra monádica A sea subproducto directo de una familia* $\{A_i\}_{i \in I}$ *de álgebras monádicas es necesario y suficiente que exista una familia* $\{D_i\}_{i \in I}$ *de sistemas deductivos monádicos de A tal que:*

1) $\bigcap_{i \in I} D_i = \{1\}$.

2) $A_i = A/D_i$ *para todo* $i \in I$.

DEM. <u>La condición es necesaria</u>: Por hipótesis A es isomorfa a una subálgebra A^* de $P = \prod_{i \in I} A_i$. Sea h el isomorfismo de A sobre A^*, como Π_i es un homomorfismo de A^* sobre A_i, la transformación $h_i = \Pi_i \circ h$ es un epimorfismo de A sobre A_i. Luego $D_i = N(h_i)$ es un s.d.m. de A que verifica $A_i = A/D_i$ (ver II.1.6).

Sea $D = \bigcap_{i \in I} D_i$. Si $x \in D$, entonces $h_i(x) = 1$ para todo $i \in I$, esto es, $1 = \Pi_i(h(x)) = x_i$, cualquiera que sea $i \in I$. Por lo tanto $h(x) = 1$ y, como h es biunívoca, $x=1$, luego $D = \{1\}$.

<u>La condición es suficiente</u>: Sea $\{D_i\}_{i \in I}$ una familia de sistemas deductivos monádicos de A tal que $\bigcap_{i \in I} D_i = \{1\}$.

Probemos que A es subproducto directo de la familia $\{A_i = A/D_i\}_{i\varepsilon I}$.

Para cada $i \in I$, sea m_i el homomorfismo natural de A sobre A_i, pongamos por definición: $\varphi(f) = (m_i(f))_{i\varepsilon I}$, donde $f \in A$. Es claro que φ es una función de A en $P = \prod_{i\varepsilon I} A_i$, luego una epiyección de A en $A^* = \varphi(A) \subseteq P$.

$\underline{\varphi(f \vee g)} = (m_i(f \vee g))_{i\varepsilon I} = (m_i(f) \vee m_i(g))_{i\varepsilon I} =$
$= (m_i(f))_{i\varepsilon I} \vee (m_i(g))_{i\varepsilon I} = \underline{\varphi(f) \vee \varphi(g)}$.

En forma análoga se prueba que: $\underline{\varphi(\sim f) = \sim\varphi(f)}$; $\underline{\varphi(\nabla f) = \nabla\varphi(f)}$; $\underline{\varphi(\exists f) = \exists\varphi(f)}$. Luego φ es un epimorfismo. Probemos que φ es inyectiva: $N(\varphi) = \{x \in A: \varphi(x) = 1\} =$
$= \{x \in A: m_i(x) = 1$, para todo $i \in I\} =$
$= \{x \in A: x \in D_i$ para todo $i \in I\} = \bigcap_{i\varepsilon I} D_i = \{1\}$.

Como $\Pi_i \circ \varphi = m_i$ y m_i es suryectiva, Π_i lo es también.

III.1.3. TEOREMA. *Toda álgebra monádica A, no trivial, es subproducto directo de una familia de álgebras monádicas simples.*

DEM. Sea $M = \{M_i\}_{i\varepsilon I}$ la familia de todos los sistemas deductivos monádicos máximos de A. Sabemos que $\bigcap_{i\varepsilon I} M_i = \{1\}$, luego si $S_i = A/M_i$, podemos afirmar por III.1.2 que A es subproducto directo de la familia $\{S_i\}_{i\varepsilon I}$. Además por II.6.4 las álgebras monádicas S_i son simples.

Nos interesa destacar el siguiente:

III.1.4. COROLARIO. *Toda álgebra monádica A, no trivial,* *es isomorfa a una subálgebra* A* *de un álgebra monádica* P *tal que* K(P) *es completa en* P.

DEM. Por III.1.3, A es isomorfa a una subálgebra A* de $P = \prod_{i \in I} S_i$, donde las S_i son álgebras monádicas simples. Por II.6.3, $K(S_i)$ tiene dos ó tres elementos, luego $K(S_i)$ es un reticulado completo en S_i, para todo $i \in I$. Por lo tanto K(P) es completa en P (III.1.1).

III.1.5. TEOREMA. *Si* A *es un álgebra monádica no trivial, y* A *no es simple, entonces* A *es subdirectamente reducible.*

DEM. Por III.1.3, A es subproducto directo de una familia $\{S_i\}_{i \in I}$ de álgebras monádicas simples. En particular, A es isomorfa a una subálgebra A* de $P = \prod_{i \in I} S_i$. Si alguna de las proyecciones Π_i fuese un isomorfismo, A* sería isomorfa a S_i y, como A es isomorfa a A*, A sería isomorfa al álgebra monádica simple S_i. Absurdo.

III.1.6. TEOREMA. *Sea* A *un álgebra monádica no trivial.* A *es subdirectamente irreducible si y solo si* A *es simple.*

DEM. <u>La condición es necesaria</u>: Si no fuese simple, por III.1.5, A sería subdirectamente reducible. Absurdo.

<u>La condición es suficiente</u>: Supongamos que A es subdirectamente reducible, esto es, 1) A es isomorfa a una subálgebra A* de un producto cartesiano $P = \prod_{i \in I} A_i$ de álgebras monádicas; 2) $\Pi_i(A^*) = A_i$, para todo $i \in I$; 3) ninguna de las

proyecciones Π_i es inyectiva.

Por 1) y 2), cada A_i es imágen homomorfica de A. Como A es simple, $A_i = A$ ó $A_i = \{0\}$. Si fuese $A_i = A$, Π_i sería inyectiva. Absurdo. Luego A_i es trivial, para todo $i \in I$. P y en consecuencia A serían triviales contra lo supuesto.

III.2. ALGEBRAS MONADICAS FINITAS.

En este párrafo vamos a indicar algunos resultados sobre las álgebras monádicas finitas.

Observemos en primer lugar que si A es un álgebra monádica cualquiera:

$F(y)$ es un s.d.m. de A si y solo si $y \in B(K) = BK(A)$

Sea A un álgebra monádica finita y D un s.d.m. de A. Como D es en particular un filtro, entonces $D = F(y)$, con $y \in A$. Por lo anterior, podemos afirmar que $y \in BK(A)$. Luego $DM(y) = F(\Delta \forall y) = F(y) = D$.

Vemos así que los sistemas deductivos monádicos de A son principales y coinciden con los filtros principales $F(y)$, con $y \in BK(A)$.

De esta observación resulta inmediatamente:

III.2.1. LEMA. *Sea* A *un álgebra monádica finita.* $F(a)$ *es un sistema deductivo monádico máximo de* A *si y solo si* a *es un átomo del álgebra de Boole* $BK(A)$.

Podemos entonces afirmar que si A es un álgebra monádica finita, el número de sistemas deductivos monádicos máximos es finito e igual al número de átomos del álgebra de Boole $BK(A) = B(K)$.

Sea A un álgebra monádica finita. Si $b_1, b_2, \ldots, b_p$ son los átomos de $BK(A)$, entonces $F(b_i) = DM(b_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, p$, es la familia de todos los sistemas deductivos monádicos máximos de A.

Sabemos que $S_i = A/DM(b_i)$ es un álgebra monádica simple, cualquiera que sea i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, y además A es isomorfa a una subálgebra de $P = \prod_{i \in I} S_i$, donde el isomorfismo en cuestión se define por:

$$h(x) = (h_1(x)\ ,\ h_2(x)\ ,\ \ldots\ ,\ h_p(x))\ ,$$

cualquiera que sea $x \in A$ y donde h_i es el homomorfismo natural de A sobre S_i.

Vamos a probar que en este caso (A finita), A es isomorfa a P. Para ello nos falta probar que <u>h es suryectiva</u>.

Dado $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in P$, entonces para cada $y_i \in S_i$, existe $x_i \in A$ tal que $h_i(x_i) = y_i$. Sea $x = \bigvee_{i=1}^{p} (x_i \wedge b_i)$. Como $b_i \in BK(A)$, $h_j(b_i) \in BK(S_i) = \{0,1\}$, luego $h_j(b_i) = 0$ para $j \neq i$ y $h_j(b_j) = 1$. Por lo tanto, $h_j(x) = \bigvee_{i=1}^{p} (h_j(x_i) \wedge h_j(b_i)) = h_j(x_j) \wedge h_j(b_j) = h_j(x_j) \wedge 1 = h_j(x_j) = y_j$. Esto prueba que $h(x) = y$. C.Q.D.

Tenemos así el siguiente resultado:

III.2.2. TEOREMA. *Sea* A *un álgebra monádica finita, entonces* $A \cong \prod_{i=1}^{p} S_i$, *donde las* S_i *son álgebras monádicas simples y* p *indica el número de átomos de* BK(A).

Hemos visto (II.3) que $A/DM(b_i) = [0,b_i]$, por lo tanto, si A es un álgebra monádica finita, ella es el producto cartesiano de los segmentos $[0,b_i]$, $i = 1,2,\ldots,p$, donde $\{b_i\}_{1 \leq i \leq p}$ es la familia de todos los átomos de BK(A).

El teorema III.2.2 aplicado a las álgebras de Lukasiewicz y a las álgebras de Boole monádicas conduce a resultados conocidos para esas clases de álgebras. Nos interesa para posteriores aplicaciones el caso de las álgebras de Lukasiewicz.

III.2.3. TEOREMA. *Si* A *es un álgebra de Lukasiewicz finita, entonces* $A \cong B^j \times T^k$, *donde* $B = \{0,1\}$, $T = \{0,c,1\}$ *y* $p = j+k$.

DEM. Basta observar que en este caso $S_i = B$ ó $S_i = T$ (ver II.6.3).

Una aplicación inmediata del teorema precedente es:

III.2.4. COROLARIO. *Toda álgebra de Lukasiewicz finita tiene eje.*

DEM. B^j es un álgebra de Boole y T^k tiene centro, luego, por 0.3.16, A tiene eje.

III.2.5. COROLARIO. A *es un álgebra de Lukasiewicz finita centrada si y solo si* $A \cong T^p$.

III.3. ALGEBRAS MONADICAS FINITAMENTE GENERADAS.

Vamos a probar que si un álgebra monádica no trivial A tiene un conjunto de generadores finito, entonces A es finita. Esto es, si G es un subconjunto finito de A con n elementos (N(G) = n) tal que SM(G) = A, A es finita.

El siguiente resultado es de fácil comprobación.

III.3.1. LEMA. *Si* A *y* A' *son álgebras monádicas,* $G \subseteq A$, SM(G) = A *y* h *un homomorfismo de* A *en* A', *entonces* h(G) *genera la subálgebra* h(A) *de* A', *esto es* SM(h(G)) = h(A).

Sea A un álgebra monádica simple. Dos casos pueden presentarse: 1) A es un álgebra de Boole y K(A) = {0,1}; 2) A es álgebra con centro c y K(A) = {0,c,1}.

Sea $G \subseteq A$ tal que SM(G) = A . En el primer caso, si notamos con SB(G) la subálgebra booleana de A generada por G, tenemos $G \subseteq SB(G)$ y $K(A) \subseteq SB(G)$, luego $A = SM(G) \subseteq SB(G)$, esto es, SB(G) = A = SM(G). En el otro caso, como $G \subseteq SL(G,c)$ y $K(A) \subseteq SL(G,c)$, se tiene SL(G,c) = SM(G) = A.

Observemos que si excluímos la hipótesis SM(G) = A, el resultado anterior no es válido. Por ejemplo si A tiene centro c, SM({0,1}) = {0,1} y $\{0,c,1\} \subset SL(\{0,1\}, c)$.

Hemos probado así:

III.3.2. LEMA. *Sea* A *un álgebra monádica simple,* $G \subseteq A$ *y* SM(G) = A. *Si* A *es un álgebra de Boole monádica simple:* SM(G) = SB(G). *Si* A *es álgebra monádica con centro* c *tal que* K(A) = {0,c,1} : SM(G) = SL(G,c).

Sea A un álgebra monádica no trivial y $G \subseteq A$ tal que 1) $N(G) = n \in N$ y 2) SM(G) = A. Sabemos que A es isomorfa a una subálgebra A* del álgebra monádica $P = \prod_{M \in \mathcal{M}} S_M$, donde

$\mathcal{M}$ es la familia de todos los sistemas deductivos monádicos máximos de A y $S_M = A/M$ para cada $M \in \mathcal{M}$. El isomorfismo en cuestión se define del siguiente modo:

$$H(x) = (h_M(x))_{M\in\mathcal{M}} ,$$

donde h_M indica el homomorfismo natural de A sobre $S_M=A/M$.

Vamos a establecer la hipótesis provisoria:

(I) <u>Fijado $n \in N$, existe t tal que $N(A/M) \leqslant t$, para todo $M \in \mathcal{M}$</u>.

Con esta hipótesis, <u>identificando álgebras isomorfas</u>, podemos afirmar que el número de álgebras $S_M = A/M$, $M \in \mathcal{M}$, es finito. Sea $s = N(A/M)$, $M \in \mathcal{M}$, 1°) sobre un conjunto finito sólo es posible definir un número finito de estructuras de álgebra de Lukasiewicz monádica (eventualmente ninguna). Luego, para cada $s \leqslant t$, hay sólo un número finito de álgebras A/M con $N(A/M) = s$. 2°) Por (I), si $s > t$ no existen álgebras cocientes con s elementos. De 1°) y 2°) resulta que:

(II) <u>Existe solamente un número finito de álgebras cocientes A/M, $M \in \mathcal{M}$</u>.

Sean $S^1, S^2, \ldots, S^F$ álgebras monádicas fijas, no isomorfas entre sí, tales que cada álgebra S^j sea isomorfa por lo menos a una de las álgebras cociente A/M, $M \in \mathcal{M}$ y, recíprocamente, toda álgebra A/M, $M \in \mathcal{M}$, sea isomorfa a alguna de las álgebras S^j. Las álgebras S^j son entonces simples.

Sea $\mathcal{M}^j = \{M \in \mathcal{M}: A/M \cong S^j\}$, es claro que $\mathcal{M}$ es unión disjunta de los $\mathcal{M}^j$ y podemos entonces escribir:

$$P = \prod_{M\in\mathcal{M}} A/M = \prod_{j=1}^{F} \left(\prod_{M\in\mathcal{M}^j} A/M \right).$$

Si para cada $M \in \mathcal{M}^j$ fijamos un isomorfismo σ_M: $A/M \longrightarrow S^j$, se tiene que:

$$\sigma : P \longrightarrow \prod_{j=1}^{F} \Big(\prod_{M \in \mathcal{M}^j} S_M^j \Big) = P^*$$

$S_M^j = S^j$, para todo $M \in \mathcal{M}^j$, donde σ es el isomorfismo que lleva un punto a de P de coordenadas a_M, $M \in \mathcal{M}$, en el punto $\sigma(a)$ de coordenadas $\sigma_M(a_M)$, $M \in \mathcal{M}^j$, $1 \leqslant j \leqslant F$.

El álgebra A es sumergida en P^* por el monoforfismo composición $H^* = \sigma \circ H : A \longrightarrow P^*$.

Vamos a probar que cada $\mathcal{M}^j$ es un conjunto finito y dar una cota en términos de $n = N(G)$ del número de sus elementos, de donde resultará que A es finita y, en virtud de lo observado antes de III.2.2, que H^* es un isomorfismo de A en P^*.

Sea $\mathrm{Hom}^*(A;S^j)$ el conjunto de los epimorfismos de A en S^j y $F^*(G;S^j)$ el conjunto de las funciones $f: G \longrightarrow S^j$ tales que $SM(f(G)) = S^j$, el cual es una parte del conjunto $F(G;S^j)$ de todas las funciones de G en S^j. Sea $r: \mathrm{Hom}^*(A;S^j) \longrightarrow F^*(G;S^j)$ la aplicación de restricción, es decir la que asocia con cada epimorfismo $h: A \longrightarrow S^j$, su restricción a G: $f = h_{/G}$. Esta aplicación es inyectiva, desde que si $h_{/G} = h'_{/G}$, $\{x \in A: h(x) = h'(x)\}$ es una M-subálgebra de A que contiene a G, esto es $h = h'$.

Sea $\mathrm{Aut}(S^j)$ el grupo de automorfismos de S^j. Para cada $h \in \mathrm{Hom}^*(A;S^j)$ asociemos su núcleo $N(h) \in \mathcal{M}^j$, se tiene así la aplicación: $s: \mathrm{Hom}^*(A;S^j) \longrightarrow \mathcal{M}^j$, la cual es suryectiva, desde que si $M \in \mathcal{M}^j$, el epimorfismo $h = \sigma_M \circ h_M$ tiene núcleo $h^{-1}(1) = h_M^{-1}(\sigma_M^{-1}(1)) = h_M^{-1}(1) = M$. Además $s^{-1}(M) = \{\alpha \circ h : \alpha \in \mathrm{Aut}(S^j)\}$, donde $M \in \mathcal{M}^j$, como resulta inmediatamente de II.1.5. Se tiene entonces:

$$N(\mathcal{M}^j) \leqslant N(\mathrm{Hom}^*(A;S^j)) \leqslant N(F(G;S^j)) < \infty ,$$

y más precisamente:

$$\text{(III)} \quad N(\mathcal{M}^j) = \frac{N(\mathrm{Hom}^*(A;S^j))}{N(\mathrm{Aut}(S^j))} \leqslant \frac{N(F^*(G;S^j))}{N(\mathrm{Aut}(S^j))} \leqslant \frac{N(F(G;S^j))}{N(\mathrm{Aut}(S^j))}$$

Nuestro objetivo inmediato es probar que la hipótesis (I) es efectivamente verificada. Para ello consideremos previamente el caso particular en que A es un álgebra de Lukasiewicz con centro c y G un conjunto de n elementos de A tales que $SL(G,c) = A$. Las álgebras de Lukasiewicz con centro simples son isomorfas a $T = \{0,c,1\}$, (ver II.6.3). En consecuencia los cocientes A/M, $M \in \mathcal{M}$, tienen exactamente $t=3$ elementos, de modo que en este caso la hipótesis (I) es verificada y entonces A es finita, luego

$$A \cong \prod_{M \in \mathcal{M}^1} S_M^1 \text{ , donde } \mathcal{M}^1 = \{M \in \mathcal{M} : A/M \cong T\}$$

Observando que $\mathrm{Aut}(T)$ contiene solo a la identidad y utilizando la acotación (III), obtenemos $N(\mathcal{M}^1) \leqslant N(\mathrm{Hom}^*(A;T))$. Si a cada $h \in \mathrm{Hom}^*(A;T)$ asociamos su restricción a G, se tiene que $h_{/G} = h'_{/G}$ implica $h_{/G\cup\{c\}} = h'_{/G\cup\{c\}}$, pues $h(c) = h'(c) = c \in T$ de donde $h=h'$, luego $h \longrightarrow h_{/G}$ es inyectiva y, por lo tanto, $N(\mathrm{Hom}^*(A;T)) \leqslant N(F(G;T)) = 3^n$. Luego, $A \cong T^h$ con $h \leqslant 3^n$. Esta cota no puede mejorarse porque el álgebra de Lukasiewicz trivalente centrada libre $C(n)$ con n generadores libres es isomorfa a $T^{(3^n)}$.

Vamos ahora a demostrar que la hipótesis (I) que establecimos anteriormente es verificada.

III.3.3. LEMA. *Si* A *es un álgebra monádica,* $G \subseteq A$, $N(G) = n \in N$, $SM(G) = A$ *y* M *es un sistema deductivo monádico máximo de* A, *entonces* $N(A/M) \leqslant 3^{(3^n)}$.

DEM. $A' = A/M$ es un álgebra monádica simple. Primer caso: <u>A' es un álgebra de Boole monádica simple</u>. Sea h el homomorfismo natural de A sobre A', luego $SB(h(G)) = SM(h(G)) = A'$ (III.3.2). $h(G)$ es un conjunto de a lo sumo n generadores del álgebra de Boole A', por lo tanto A' es finita y tiene a lo sumo $2^{(2^n)}$ elementos, $N(A/M) \leqslant 2^{(2^n)}$.

Segundo caso: <u>A' es un álgebra monádica con centro c tal que</u>: <u>$K(A) = \{0,c,1\}$</u> .

En este caso $SL(h(G),c) = SM(h(G)) = A'$ (III.3.2). A' es un álgebra de Lukasiewicz con centro y como es generada por $h(G)$ y c donde $N(h(G)) = s \leqslant n$ se sigue de lo precedente que: $N(A/M) \leqslant 3^{(3^s)} \leqslant 3^{(3^n)}$.

Hemos probado así el resultado enunciado al principio de este párrafo:

III.3.4. TEOREMA. *Toda álgebra monádica finitamente generada es finita.*

III.3.5. COROLARIO. *Si* A *es un álgebra monádica, entonces* $SM(B(A) \cup K(A)) = SL(B(A) \cup K(A)) = A$.

DEM. La primera igualdad se deduce de I.5.6, desde que B(A) es una M-subálgebra de A.

Sea $a \in A$ y consideremos SM(a), luego, por III.3.4,

$SM(a)$ es finita. En particular, $SM(a)$ es un álgebra de Lukasiewicz trivalente finita, luego (III.2.4) $SM(a)$ tiene eje. Esto es (ver 0.3.6), existe $e \in SM(a)$ tal que $\Delta e = 0$ y $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$, cualquiera que sea $x \in SM(a)$. En particular, (1) $a = (\Delta a \vee e) \wedge \nabla a$.

Como e es eje del álgebra monádica $SM(a)$, entonces (I.2.14) $e \in K(SM(a)) \subseteq K(A)$ y como $\Delta a, \nabla a \in B(A)$, la fórmula (1) muestra que $a \in SM(B(A) \cup K(A))$. Luego $A = SM(B(A) \cup K(A))$.

CAPITULO IV

ALGEBRAS MONADICAS LIBRES

IV.1. ALGEBRAS MONADICAS LIBRES. DEFINICION Y GENERALIDADES.

En este capítulo nos proponemos determinar el álgebra monádica con un número finito de generadores libres.

IV.1.1. DEFINICION. *Dado un número cardinal* $\alpha > 0$ *diremos que* L *es un álgebra de Lukasiewicz trivalente monádica con* α *generadores libres, si*

L1) *L contiene un subconjunto* G *de potencia* α *tal que* $SM(G) = L$.

L2) *Toda aplicación* f *de* G *en* A, *donde* A *es un álgebra monádica arbitraria, puede prolongarse a un homomorfismo* $\overline{f}$, *necesariamente único, de* L *en* A.

En estas condiciones diremos que G *es un conjunto de generadores libres de* L. *Un álgebra monádica se dice libre si tiene un conjunto de generadores libres. Para poner en evidencia el número cardinal* α, *escribiremos* $L = M(\alpha)$.

Como la noción de álgebra monádica se define por igualdades, la existencia y unicidad (a menos de isomorfismo) de $M(\alpha)$ es consecuencia de un teorema de G.Birkhoff ((1967), Cap.VI).

Para determinar la estructura del álgebra libre M(n), donde $n > 0$ es un número natural, procederemos en principio como lo hicimos en III.3 para un álgebra con n generadores, representando a M(n) como un producto cartesiano P* de álgebras simples. Utilizaremos las notaciones y algunos de los resultados de III.3.

Por lo visto en el capítulo anterior, podemos afirmar

(1963 a) *Seminario sobre álgebras de Lukasiewicz trivalentes*. Seminario realizado en la Uni. Nac. del Sur. 1963.

(1964) *Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*. Bull.Math.Soc.Sci.Math.Phy.R.P. Roum., 7(55)(1963), 3-12.

(1966) *Algebras de DeMorgan*. Curso dictado en la Uni. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1966.

(1966 a) *Seminario sobre álgebras de Lukasiewicz trivalentes*. Uni. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1966.

(1967) *Construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole Monadiques, I.* Math. Japon. 12 (1967), 1-23.

MONTEIRO (A.) et RIBEIRO (H.)

(1942) *L'opération de fermeture et ses invariants dans les systèmes partiellement ordonnés*. Portugaliae Math. 3(1942), 171-184.

MONTEIRO (L.)

(1964) *Sur les algèbres de Heyting trivalentes*. Notas de Lógica Matemática N°19, Uni. Nac del Sur, Bahía Blanca, (1964).

(1964 a) *Axiomes indépendants pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.Roum., 7 (55)(1963), 199-202.

(1965) *Sur les algèbres de Lukasiewicz Inyectives*. Proc. Japan Acad., 41 N°7 (1965), 578-581.

(1968) *Algebras de Lukasiewicz monádicas*. Rev. Unión Mat. Arg. 23, N°4 (1968), p.200.

(1969) *Les algèbres de Heyting et de Lukasiewicz trivalentes*. Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol. XI N°4 (1970), 453-466.

(1969 a) *Sur le principe de détermination de Moisil dans les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.Roum. 13 (61), (1969), 447-448.

(1969 b) *Extension d'homomorphismes dans les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*. International Logic Rewiew. 2 (1970), 193-200.

MONTEIRO (L.) et PICCO (D.)

(1963) *Les réticulés de Morgan et l'opération de Sheffer*. Bull. Acad. Pol. Sci. S.Sci. Math., astr.phys., 11 (1963), 355-358.

RASIOWA (H.) and SIKORSKI (R.)

(1953) *Algebraic treatment of the notion of satisfiability*. Fundamenta Mathematica, 40 (1953), 62-95.

(1963) *The Mathematics of Metamathematics*. Monografie Matematyczne.Tom.41. Warzawa. 1963.

SHOLANDER (M.)

(1951) *Postulates for distributive lattices*. Canadian Journal of Mathematics. 3 (1951), 28-30.

TRACZYK (T.)

(1963) *Axioms and some properties of Post algebras*. Colloq. Math., 10 (1963), 193-209.

VARSAVSKY (O.)
(1956) *Quantifiers and equivalence relations*. Revista Matemática Cuyana 2 (1956), 29-51.

Esta lista bibliográfica menciona los trabajos utilizados en la redacción de esta tesis. Para mayor información consultar el libro standard de Rosser (J.B.) and Turquette (A.), *Many-Valued Logics*, North Holland, Amsterdam. 1952.

que M(n) es finita cualquiera que sea el número natural $n > 0$. Además para determinar la estructura de M(n), nos basta conocer la estructura de los factores de $P^* \cong M(n)$ y el número de veces que aparece cada uno de ellos en el producto cartesiano P^*.

Vamos a adoptar una notación para las posibles álgebras cocientes $S_M = M(n)/M$, donde M es un sistema deductivo monádico máximo de M(n). Por III.3.3 sabemos que estos cocientes son de dos tipos; 1°) M(n)/M es un álgebra de Boole con constantes 0,1, generada por $m \leqslant n$ generadores (precisamente los elementos de $h_M(G)$); 2°) M(n)/M es un álgebra de Lukasiewicz centrada cuyas únicas constantes son son 0,c,1 donde c es el centro del álgebra, y es generada por $h_M(G) \cup \{c\}$. En el primer caso $M(n)/M \cong B^j$, donde $1 \leqslant j \leqslant 2^n$, $B = \{0,1\}$, con $K(B^j) = \{0,1\}$.En el segundo $M(n)/M \cong T^k$, donde $1 \leqslant k \leqslant 3^n$, con $K(T^k) = \{0,c,1\}$.

Esto es, los posibles cocientes M(n)/M, $M \in \mathcal{M}$, son álgebras monádicas simples B^j $(1 \leqslant j \leqslant 2^n)$ ó T^k $(1 \leqslant k \leqslant 3^n)$. Obtenemos así la expresión siguiente:

$$M(n) \cong P^* = \prod_{j=1}^{2^n} \Big(\prod_{M \in \mathcal{M}_B^j} B_M^j \Big) \times \prod_{k=1}^{3^n} \Big(\prod_{M \in \mathcal{M}_T^K} T_M^k \Big)$$

donde $\mathcal{M}_B^j$ designa aquí el conjunto $\{M \in \mathcal{M}: M(n)/M \cong B^j\}$ y $\mathcal{M}_T^k = \{M \in \mathcal{M}: M(n)/M \cong T^k\}$ (veremos más adelante que estos conjuntos son no vacíos).

IV.2. CALCULO DE $N(M_B^j)$ Y $N(M_T^k)$, $1 \leqslant j \leqslant 2^n$, $1 \leqslant k \leqslant 3^n$

De acuerdo a la fórmula (III) de III.3

$$(A) \quad \begin{cases} N(M_B^j) = \dfrac{N(\mathrm{Hom}^*(M(n);B^j))}{N(\mathrm{Aut}(B^j))} \\ \\ N(M_T^k) = \dfrac{N(\mathrm{Hom}^*(M(n);T^k))}{N(\mathrm{Aut}(T^k))} \end{cases} .$$

En primer lugar calcularemos los numeradores de estas fracciones.

Empecemos por observar que si $f \in F^*(G;S)$, donde S es un álgebra monádica simple, como $M(n)$ es libre, f puede extenderse a un único homomorfismo $\bar{f}$ de $M(n)$ en S. Además, $S = SM(f(G)) \subseteq SM(\bar{f}(M(n)) = \bar{f}(M(n))$, esto es, $\bar{f}$ es una epiyección, luego $\bar{f} \in \mathrm{Hom}^*(M(n);S)$. Como $\bar{f}_{/G} = f$, entonces la aplicación de restricción r definida en III.3 es biyectiva. Luego $N(\mathrm{Hom}^*(M(n);B^j)) = N(F^*(G;B^j))$, $1 \leqslant j \leqslant 2^n$ y $N(\mathrm{Hom}^*(M(n);T^k)) = N(F^*(G;T^k))$, $1 \leqslant k \leqslant 3^n$.

Vamos ahora a indiçar resultados que nos permitiran calcular el número de elementos de $\mathrm{Hom}^*(M(n);B^j)$ y $\mathrm{Hom}^*(M(n);T^k)$.

Sea L la L-subálgebra de $M(n)$ generada por G, esto es, $L = SL(G)$. Probemos que L es isomorfa al álgebra de Lukasiewicz libre con n generadores libres, esto es $L \cong L(n)$. Para ello sea A un álgebra de Lukasiewicz arbitraria y f una función de G en A. Como $(A, \exists)$, donde $\exists x = x$, pàra todo x de A, es un álgebra monádica, f puede extenderse a un único homomorfismo $\bar{f}$ de $M(n)$ en A. Si f' es la restricción de $\overline{f}$ a L, esto es, $f' = \overline{f}_{/L}$, f' es un L-homomorfismo de L en A tal que $f'(g) = \overline{f}(g) = f(g)$, cualquiera que sea $g \in G$. Esto prueba que $L \cong L(n)$.

Para simplificar la notación, de ahora en adelante vamos a escribir M en vez de M(n) y L en lugar de L(n).

Veamos que existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto Hom*(M;A) de los epimorfismos de M en un álgebra monádica A, y el conjunto hom*(L;A) de los L-homomorfismos h de L en A tales que $SM(h(L)) = A$.

IV.2.1. LEMA. *La aplicación que a cada* $H \in \mathrm{Hom}^*(M;A)$ *hace corresponder su restricción a* L *es una biyección.*

DEM. Si $H \in \mathrm{Hom}^*(M;A)$, donde A es un álgebra monádica fija, la restricción $h = H_{/L}$ de H a L es un L-homomorfismo de L en A. Además, (I) $SM(h(L)) = A$ ya que $SM(h(L)) \supseteq SM(h(G)) = SM(H(G)) = A$. Recíprocamente, si h es un L-homomorfismo de L en A que verifica (I), como $h_{/G}$ es una función de G en A y $M = M(n)$ es libre, $h_{/G}$ puede extenderse a un único homomorfismo H de M en A. Además, $H_{/L} = h$ y $H(M) = A$.

Este resultado muestra que nuestro problema queda así reducido al cálculo del número de elementos de los conjuntos:

<u>$\mathrm{hom}^*(L;B^j)$, $1 \leq j \leq 2^n$</u> ; <u>$\mathrm{hom}^*(L;T^k)$, $1 \leq k \leq 3^n$</u>.

IV.2.2. LEMA. *Sean* A *y* A' *álgebras de Lukasiewicz,* $H: A \longrightarrow A'$ *un L-homomorfismo y* $h = H_{/B(A)}$.

1) $H(B(A)) \subseteq B(A')$ *y* $h: B(A) \longrightarrow B(A')$ *es un homomorfismo booleano.*

2) H *queda unívocamente determinado por* h.

3) *Si* $B(A') \subseteq H(A)$, *entonces* h *es un epimorfismo de* $B(A)$ en $B(A')$.

4) *Si* $H(A) \subseteq B(A')$, $h = H_{/B(A)}$ *verifica* $h(\Delta x) = h(\nabla x)$, *para todo* $x \in A$. *Recíprocamente, si* $g: B(A) \longrightarrow B(A')$ *es un homomorfismo booleano tal que* $g(\Delta x) = g(\nabla x)$, *para todo* $x \in A$, *entonces* g *se extiende unívocamente a un L-homomorfismo* $H: A \longrightarrow A'$ *tal que* $H(A) \subseteq B(A')$.

5) *Si* A *tiene eje* e, $H(A) \subseteq B(A')$ *si y solo si* $H(e) = 0$. *Si* $g: B(A) \longrightarrow B(A')$ *es un homomorfismo booleano tal que* $g(\nabla e) = 0$, g *se extiende unívocamente a un L-homomorfismo* $H: A \longrightarrow A'$ *tal que* $H(A) \subseteq B(A')$.

6) *Si* A' *es un álgebra con centro* c, *un homomorfismo booleano* $g: B(A) \longrightarrow B(A')$ *se extiende a un único L-homomorfismo* $H: A \longrightarrow A'$.

DEM.

1) Es una consecuencia inmediata de las propiedades de un L-homomorfismo.

2) Si H y H' son L-homomorfismos de A en A' tales que $h = H_{/B(A)} = H'_{/B(A)} = h'$, entonces (1) $\Delta H(x) = H(\Delta x) = h(\Delta x) = h'(\Delta x) = H'(\Delta x) = \Delta H'(x)$. Análogamente, (2) $\nabla H(x) = \nabla H'(x)$.
De (1) y (2) se deduce por el principio de determinación de Moisil que $H = H'$.

3) Dado $b \in B(A')$, como $B(A') \subseteq H(A)$, $b = H(a)$ con $a \in A$. Luego $\Delta a \in B(A)$ y $h(\Delta a) = H(\Delta a) = \Delta H(a) = \Delta b = b$.

4) Como $H(A) \subseteq B(A')$, entonces $\Delta H(x) = H(x) = \nabla H(x)$, cualquiera que sea $x \in A$, luego $h(\Delta x) = H(\Delta x) = \Delta H(x) = H(x) = \nabla H(x) = H(\nabla x) = h(\nabla x)$.
Si $g: B(A) \longrightarrow B(A')$ verifica $g(\Delta x) = g(\nabla x)$, pongamos por definición: $H(x) = g(\Delta x)$. De acuerdo a esta defini-

ción $H(x) \in B(A')$, cualquiera que sea $x \in A$, luego $H(A) \subseteq B(A')$. Además, si $b \in B(A)$, $H(b) = g(\Delta b) = g(b)$. Finalmente probemos que H es un L-homomorfismo. $H(x \vee y) = g(\Delta(x \vee y)) = g(\Delta x \vee \Delta y) = g(\Delta x) \vee g(\Delta y) = H(x) \vee H(y)$; $H(\nabla x) = g(\Delta\nabla x) = g(\nabla x) = H(x) = \nabla H(x)$; $H(\sim x) = g(\Delta\sim x) = g(\sim\nabla x) = \sim g(\nabla x) = \sim H(x)$.

5) $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$, cualquiera que sea x de A, luego, si $H(e) = 0$, $H(x) = (H(\Delta x) \vee H(e)) \wedge H(\nabla x) = H(\Delta x) \wedge H(\nabla x) = H(\Delta x) \in B(A')$ y por lo tanto $H(A) \subseteq B(A')$. Recíprocamente, como $H(e) \in H(A) \subseteq B(A')$, $\Delta H(e) = H(e)$, esto es, $0 = H(0) = H(\Delta e) = H(e)$. Observemos que en este caso $h(\nabla e) = H(\nabla e) = \nabla H(e) = 0$.
Sea $g: B(A) \longrightarrow B(A')$ un homomorfismo booleano tal que $g(\nabla e) = 0$. Como $\nabla x \leqslant \Delta x \vee \nabla e$, cualquiera que sea $x \in A$, $g(\nabla x) \leqslant g(\Delta x) \vee g(\nabla e) = g(\Delta x)$, luego, como $g(\Delta x) \leqslant g(\nabla x)$, se tiene $g(\Delta x) = g(\nabla x)$, para todo $x \in A$. Entonces, por 4), g se extiende unívocamente a un L-homomorfismo $H:A \longrightarrow A'$ tal que $H(A) \subseteq B(A')$.

6) El L-homomorfismo H, se define del siguiente modo: $H(x) = (g(\Delta x) \vee c) \wedge g(\nabla x)$. [L.Monteiro (1965),(1969 b)].

Si $H \in hom^*(L;B^j)$, en particular $SM(H(L)) = B^j$. Como B^j es un álgebra de Boole monádica simple, por III.3.2, $B^j = SM(H(L)) = SB(H(L)) = H(L)$. Tenemos así que en este caso $hom^*(L;B^j)$ es el conjunto de todos los L-epimorfismos de L en B^j.

Observemos que $L = L(n)$ es finita, desde que $M = M(n)$ lo es. Luego L tiene eje e.

Como $H(L) = B^j$, por IV.2.2 (3 y 5) podemos afirmar que

$h = H_{/B(L)}$ es un epimorfismo booleano de $B(L)$ en $B(B^j) = B^j$, tal que $h(\nabla e) = 0$

Si representamos con $\hom^*(B(L);B^j)$ el conjunto de los epimorfismos g de $B(L)$ en B^j tales que $g(\nabla e) = 0$, por IV.2.2 podemos afirmar que la operación de restricción $H \longrightarrow H_{/B(L)}$ establece una biyección de $\hom^*(L;B^j)$ en $\hom^*(B(L);B^j)$, luego

IV.2.3. LEMA. $\hom^*(L;B^j)$ *y* $\hom^*(B(L);B^j)$, $1 \leqslant j \leqslant 2^n$, *tienen el mismo número de elementos.*

IV.2.4. LEMA. *Sea* C *un álgebra de Lukasiewicz con centro* c *y* S *una L-subálgebra de* C, *entonces* $SL(S,c) = C$ *si y solo si* $B(C) \subseteq S$.

DEM. <u>Necesaria</u>: Supongamos que $SL(S,c) = C$, como (ver I.5) $SL(S,c) = \{x \in C: x = s_1 \wedge (s_2 \vee c)$, donde $s_1,s_2 \in S\}$, si $b \in B(C) \subseteq C = SL(S,c)$, $b = s_1 \wedge (s_2 \vee c)$ con $s_1,s_2 \in S$, luego $b = \Delta b = \Delta s_1 \wedge (\Delta s_2 \vee 0) = \Delta s_1 \wedge \Delta s_2 \in S$.

<u>Suficiente</u>: Como $B(C) \subseteq S \subseteq SL(S,c)$ y $c \in SL(S,c)$, entonces por 0.3.11 podemos afirmar que $SL(S,c) = C$.

Si $H \in \hom^*(L;T^k)$, $1 \leqslant k \leqslant 3^n$, en particular $SM(H(L)) = T^k$, luego por III.3.2 $SL(H(L),c) = T^k$. Como $H(L)$ es una L-subálgebra de T^k y $SL(H(L),c) = T^k$, entonces por IV.2.4: $B(T^k) \subseteq H(L)$. Si fuese $B(T^k) = H(L)$, entonces $SM(B(T^k)) = SM(H(L))$, pero $B(T^k)$ es una M-subálgebra del álgebra monádica T^k, luego $SM(B(T^k)) = B(T^k)$ y, por lo tanto, tendríamos $SM(H(L)) = B(T^k) \neq T^k$, contradicción.

Hemos demostrado así que si $H \in hom^*(L;T^k)$, (I) $B(T^k) \subset H(L)$. Sea $h = H_{/B(L)}$, luego h es un homomorfismo booleano de $B(L)$ en $B(T^k)$. De (I) resulta, por IV.2.2 (3), que h es un epimorfismo booleano de $B(L)$ en $B(T^k)$. Observemos además que $h(\nabla e) \neq 0$. En efecto, si $h(\nabla e) = 0$, entonces $H(e) = 0$, lo cual equivale de acuerdo a IV.2.2 (5) a que $H(L) \subseteq B(T^k)$ y contradice (I). Como $B(T^k) \cong B^k$, de ahora en adelante usaremos esta notación.

Representaremos por $hom^{\#}(B(L);B^k)$ el conjunto de todos los epimorfismos g de $B(L)$ en B^k tales que $g(\nabla e) \neq 0$. Tenemos así la correspondencia $H \longrightarrow H_{/B(L)}$, de $hom^*(L;T^k)$ en $hom^{\#}(B(L);B^k)$, que es evidentemente inyectiva. Si $g \in hom^{\#}(B(L);B^k)$, por IV.2.2 (6) sabemos que g se extiende a un único L-homomorfismo de L en T^k. Obviamente $H(e) \neq 0$, ya que caso contrario tendríamos $g(\nabla e) = H(\nabla e) = \nabla H(e) = = \nabla 0 = 0$. Además, $0 < H(e) = (g(\Delta e) \vee c) \wedge g(\nabla e) = = (0 \vee c) \wedge g(\nabla e) = c \wedge g(\nabla e) \leqslant c$ y por lo tanto $\exists H(e) = c$. Probemos que $SM(H(L)) = T^k$. En efecto $B^k = g(B(L)) \subseteq H(L) \subseteq \subseteq SM(H(L))$. De $H(e) \in H(L)$, resulta $c = \exists H(e) \in SM(H(L))$. Luego $SM(H(L))$ es una L-subálgebra de T^k tal que $B(T^k) = = B^k \subseteq SM(H(L))$ y $c \in SM(H(L))$, por lo tanto, por 0.3.11, podemos afirmar que $SM(H(L)) = T$.

Acabamos así de probar que la correspondencia $H \longrightarrow H_{/B(L)}$ establece una biyección entre $hom^*(L;B^k)$ y $hom^{\#}(B(L);B^k)$.

IV.2.5. LEMA. $hom^*(L;B^k)$ *y* $hom^{\#}(B(L);B^k)$, $1 \leqslant k \leqslant 3^n$, *tienen el mismo número de elementos.*

Los resultados IV.2.3 y IV.2.5 muestran que nuestro problema se reduce a calcular el número de epimorfismos booleanos que, en uno de los casos, transforman el elemento ∇e en 0 y, en el otro, en un elemento diferente de 0. Por lo tanto, vamos a considerar el siguiente problema: Si B y B' son álgebras de Boole finitas no triviales, $b \in B$ ¿cuál es el número de epimorfismos $h: B \longrightarrow B'$ tales que 1°) $h(b) = 0$, 2°) $h(b) \neq 0$?

Es sabido que podemos representar cada elemento de B por el conjunto de los átomos de B que lo preceden. Sea P el conjunto de los átomos de B, B es entonces representado por el conjunto $P(P)$ de todas las partes de P, supondremos identificadas las álgebras B y $P(P)$ y análogamente B' y $P(P')$, donde P' es el conjunto de todos los átomos de B'.

Es bien conocido que toda inyección $f: P' \longrightarrow P$ define un epimorfismo $h: B = P(P) \longrightarrow B' = P(P')$ por $h(a) = f^{-1}(a)$, para todo $a \in B$, y que todo epimorfismo $h:B \longrightarrow B'$ es definido de esta manera. Por lo tanto, el número de epimorfismos de B en B' es igual al número de inyecciones de P' en P, esto es $V_{s,t} = \frac{s!}{(s-t)!}$, donde $N(P) = s$ y $N(P')=t$, con la convención $V_{s,t} = 0$ si $s < t$.

Fijado $b \in B = P(P)$, observemos que $h(b) = f^{-1}(b) = \emptyset$ si y solo si $f(P') \subseteq P - b = \complement b$. En consecuencia el número de epimorfismos de B en B' que anulan b, coincide con el número de aplicaciones inyectivas de P' en $\complement b$, que es $V_{s-r,t}$ donde $r = N(b)$. Luego el número de epimorfismos de B en B' que no anulan b, es $V_{s,t} - V_{s-r,t}$.

A.Monteiro, en un trabajo no publicado, demostró que el álgebra de Lukasiewicz trivalente libre $L = L(n)$, con n generadores libres es isomorfa a $B^{(2^n)} \times T^{(3^n-2^n)}$. Luego todo elemento x de L puede representarse en la forma $(x_1, x_2, \ldots, x_{3^n})$, donde $x_i \in B$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, y $x_i \in T$, para $2^n+1 \leqslant i \leqslant 3^n$. El eje e de L tiene por coordenadas $x_i = 0$, para $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, y $x_i = c$, para $2^n+1 \leqslant i \leqslant 3^n$, luego ∇e tiene por coordenadas $y_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$ e $y_i = 1$, $2^n+1 \leqslant i \leqslant 3^n$. Como $x = (x_i) \in B(L)$ si y solo si $x_i = 0$ ó $x_i = 1$, entonces $B(L)$ tiene $2^{(3^n)}$ elementos, esto es $B(L) \cong B^{(3^n)}$, luego el conjunto P de todos los átomos de $B(L)$ tiene $s = 3^n$ elementos.

Los átomos de $B(L)$ que preceden a ∇e son de la forma $b = (y_i)$, donde

$$\begin{cases} y_i = 0, \text{ para } 1 \leqslant i \leqslant 2^n, \\ y_{i_o} = 1, \text{ para algún } i_o \text{ tal que } 2^n+1 \leqslant i_o \leqslant 3^n, \\ y_j = 0, \text{ para } j \neq i_o,\ 2^n+1 \leqslant j \leqslant 3^n, \end{cases}$$

luego ∇e es precedido por exactamente $r = 3^n - 2^n$ átomos de $B(L)$. Como el conjunto de los átomos de B^j, $1 \leqslant j \leqslant 2^n$, tiene $t=j$ elementos, aplicando lo anterior vemos que hay $V_{2^n,j}$ epimorfismos de $B(L)$ en B^j, $1 \leqslant j \leqslant 2^n$, que anulan ∇e. Concluímos entonces:

IV.2.6. LEMA. $N(\mathrm{Hom}^*(M(n);B^j)) = V_{2^n,j}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^n$.

$B^k \cong B(T^k)$, $1 \leqslant k \leqslant 3^n$, tiene exactamente $t=k$ átomos , luego hay $V_{3^n,k} - V_{2^n,k}$ epimorfismos de $B(L)$ en B^k, $1 \leq k \leq 3^n$, que no anulan ∇e. Tenemos así:

IV.2.7. LEMA. $N(Hom^*(M(n);T^k) = V_{3^n,k} - V_{2^n,k}$, $1 \leq k \leq 3^n$.

Observemos que si $2^n+1 \leq k \leq 3^n$, entonces $N(Hom^*(M(n);T^k)) = V_{3^n,k}$, ya que en este caso $V_{2^n,k} = 0$.

Calcularemos ahora los denominadores de las fracciones (A).

IV.2.8. LEMA. *Sea* S *un álgebra monádica simple.* H *es un automorfismo de* S *si y solo si* H *es un L-automorfismo de* S.

DEM. Es evidente que la condición es necesaria. Para probar que es suficiente basta demostrar que $H(\exists x) = \exists H(x)$, cualquiera que sea $x \in S$.

Sabemos que $K(S) = \{0,1\}$ ó $K(S) = \{0,c,1\}$. Como H es un L-automorfismo, $H(0) = 0$, $H(1) = 1$, $H(c) = c$, luego $H(k) = k$, cualquiera que sea $k \in K(S)$. Entonces podemos afirmar que $H(x) \leq H(\exists x) = \exists x \in K(S)$. Si $H(x) \leq k'$, con $k' \in K(S)$, como $k' = H(k')$, entonces $H(x) \leq H(k')$, de donde resulta por ser H inyectiva que $x \leq k'$, luego $H(\exists x) = \exists x \leq \exists k' = k'$. Acabamos así de probar que $H(\exists x)$ es la menor constante de S que sigue a $H(x)$, esto es $\exists H(x) = H(\exists x)$.

IV.2.9. COROLARIO. $N(Aut(B^j)) = j!$, $1 \leq j \leq 2^n$.

DEM. Los automorfismos de B^j, coinciden de acuerdo con IV.2.8 con los automorfismos booleanos de B^j. Como el núme ro de tales homomorfismos está dado por el número de inyecciones de los átomos de B^j en los átomos de B^j, su número es $V_{j,j} = j!$.

IV.2.10. LEMA. *Si* C *es un álgebra de Lukasiewicz con centro* c, H *un* L-*automorfismo de* C, *entonces la correspondencia* $H \longrightarrow H_{/B(C)}$ *establece una biyección entre* Aut(C) *y* Aut(B(C)).

DEM. Como $B(C) \subseteq H(C) = C$, entonces (IV.2.2 (3)) $H_{/B(C)}$ es un automorfismo de B(C). Si $g \in Aut(B(C))$, por IV.2.2 (6), g se extiende a un único L-homomorfismo H de C en C. Veamos que en este caso H es biyectiva. Si $H(x) = H(y)$ entonces $H(\Delta x) = \Delta H(x) = \Delta H(y) = H(\Delta y)$ y análogamente $H(\nabla x) = H(\nabla y)$, esto es, $g(\Delta x) = g(\Delta y)$ y $g(\nabla x) = g(\nabla y)$, luego, como g es inyectiva, $\Delta x = \Delta y$ y $\nabla x = \nabla y$, esto es, $x=y$.

Como $B(C) = g(B(C)) \subseteq H(C)$ y H(C) es una L-subálgebra de C que contiene al centro, ya que $c = H(c) \in H(C)$, entonces (0.3.11) $H(C) = C$.

De acuerdo a IV.2.8 los automorfismos de T^k, $1 \leq k \leq 3^n$, coinciden con los L-automorfismos de T^k y por IV.2.10 el número de tales L-homomorfismos está dado por el número de automorfismos booleanos de $B(T^k) \cong B^k$, luego:

IV.2.11. LEMA. $N(Aut(T^k)) = N(Aut(B^k)) = k!, 1 \leq k \leq 3^n$.

Por los resultados precedentes podemos afirmar que:

$$N(M_B^j) = \frac{N(Hom^*(M(n);B^j)}{N(Aut(B^j))} = \frac{V_{2^n,j}}{j!} = \binom{2^n}{j}, \quad 1 \leq j \leq 2^n,$$

$$N(M_T^k) = \frac{V_{3^n,k} - V_{2^n,k}}{k!} = \binom{3^n}{k} - \binom{2^n}{k} \ , \quad 1 \leqslant k \leqslant 2^n, \quad y$$

$$N(M_T^k) = \frac{V_{3^n,k}}{k!} = \binom{3^n}{j} \ , \quad 2^n+1 \leqslant k \leqslant 3^n.$$

Por lo tanto

$$M(n) \cong \prod_{j=1}^{2^n} [B^j]^{\binom{2^n}{j}} \times \prod_{k=1}^{2^n} [T^k]^{\binom{3^n}{k}-\binom{2^n}{k}} \times \prod_{k=2^n+1}^{3^n} [T^k]^{\binom{3^n}{k}} \ ,$$

y en consecuencia

$$N(M(n)) = \prod_{j=1}^{2^n} [2^j]^{\binom{2^n}{j}} \times \prod_{k=1}^{2^n} [3^k]^{\binom{3^n}{k}-\binom{2^n}{k}} \times \prod_{k=2^n+1}^{3^n} [3^k]^{\binom{3^n}{k}} .$$

Entonces $N(M(n)) = 2^{s(n)} \times 3^{t(n)}$, donde

$$s(n) = \sum_{j=1}^{2^n} j \ \frac{(2^n)!}{j!(2^n-j)!} = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{(2^n-1)!\,2^n}{(j-1)!(2^n-j)!} =$$

$$= 2^n \sum_{j=1}^{2^n} \binom{2^n-1}{j-1} = 2 \sum_{i=0}^{2^n-1} \binom{2^n-1}{i} =$$

$$= 2^n \times 2^{[2^n-1]} = 2^{[2^n+n-1]} \quad , \quad y$$

$$t(n) = \sum_{k=1}^{3^n} k \binom{3^n}{k} - \sum_{k=1}^{2^n} k \binom{2^n}{k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{3^n} \frac{k(3^n)!}{k!(3^n-k)!} - s(n) = \sum_{k=1}^{3^n} \frac{(3^n-1)!3^n}{(k-1)!(3^n-k)!} - s(n) =$$

$$= 3^n \sum_{k=1}^{3^n} \binom{3^n-1}{k-1} - s(n) = 3^n \sum_{r=0}^{3^n-1} \binom{3\ -1}{r} - s(n) =$$

$$= 3^n \times 2^{[3^n-1]} - 2^{[2^n+n-1]} .$$

IV.2.12. PROPOSICION. *El álgebra de Lukasiewicz monádica libre* M(n)*, con* n *generadores libres, tiene:*

$$2^{[2^{(2^n+n-1)}]} \times 3^{[3^n . 2^{(3^n-1)} - 2^{(2^n+n-1)}]} \quad \textit{elementos.}$$

Por ejemplo: $N(M(1)) = 2^4 \times 3^8 = 104.976$;
$N(M(2) = 2^{32} \times 3^{2.272}$; $N(M(3)) = 2^{1.024} \quad 3^{5.888}$.

CAPITULO V

REPRESENTACION FUNCIONAL DE ALGEBRAS MONADICAS

V 1. CONSIDERACIONES PRELIMINARES.

En este capítulo probaremos que toda álgebra monádica A se puede representar isomórficamente por un álgebra funcional monádica $\hat{A} \subseteq L^E$ (I.1.1). Más precisamente, $\hat{A}$ será un álgebra funcional rica en el sentido que toda función $\hat{a} \in \hat{A}$ tiene máximo y mínimo, esto es, existen j', $j'' \in E$ tales que

$$(1)\ \exists\, \hat{a} \equiv \bigvee_{j \in E} \hat{a}(j) = \hat{a}(j') \quad y \quad (2)\ \forall\, \hat{a} \equiv \bigwedge_{j \in E} \hat{a}(j) = \hat{a}(j'').$$

(Es fácil ver que (1) y(2) son equivalentes).

El teorema de representación que probaremos generaliza al teorema correspondiente para las álgebras de Boole monádicas (P.Halmos (1962)). Su demostración sigue la pauta de la demostración dada por A.Monteiro [(1960 a) , (1960 b)] del teorema de Halmos y se apoya esencialmente en esa idea.

Expliquemos brevemente la idea que conduce al teorema de representación. Si el producto está resulto, cada elemento a de A es representado por una función $\hat{a}$: $E \longrightarrow L$, en particular a los elementos $k \in K = K(A)$ corresponden funciones constantes, pués $\hat{k} = \widehat{\exists k} = \exists\, \hat{k}$, siendo $\exists\, \hat{k}$ la función con valor constante $\bigvee_{j \in E} \hat{k}(j)$. La imagen $\hat{K}$ de K es una L-subálgebra del álgebra de todas las funciones constantes de L^E, la cuál es L-isomorfa a L de una manera evidente. Si ocurre que $\hat{K}$ coincide con el conjunto de todas las funciones constantes de L^E, es $L \cong \hat{K} \cong K$ y podemos suponer entonces iden tificadas L y K, de modo que la función $\hat{k}$ sea identificada con la función identicamente igual a k.

Conviene entonces considerar por razones de simplicidad el problema resuelto en el caso particular siguiente:

(§) <u>El álgebra A es isomorfa a un álgebra funcional monádica $\hat{A} \subseteq K^E$, por un isomorfismo $\wedge$: $A \longrightarrow \hat{A}$, tal que si $k \in K$, entonces $\hat{k} \equiv k$.</u>

En estas condiciones, cada $j \in E$ determina el L-homomorfismo $\hat{a} \longrightarrow \hat{a}(j)$ de $\hat{A}$ en $K = K(A)$ y por lo tanto el L-homomorfismo j^*: $A \longrightarrow K(A)$ definido por $j^*(a) = \hat{a}(j)$, el cual tiene la propiedad de dejar invariantes los elementos $k \in K$; $j^*(k) = \hat{k}(j) = k$. Esto conduce a estudiar todos los L-homomorfismos de un álgebra monádica A en K(A) con esta propiedad, con el propósito de constituir con ellos el conjunto de puntos E de nuestra representación.

V.2. CARACTERES.

V.2.1. DEFINICION. *Un L-homomorfismo* h: $A \longrightarrow K = K(A)$ *se dice un caracter del álgebra monádica* A, *si* h *es un prolongamiento de la identidad sobre* K, *esto es, si* $h(k) = k$ *para todo* $k \in K$.

Hemos dicho que si $\hat{A} \subseteq K^E$ es una representación de A en las condiciones (§) indicadas en V.I, cada $j \in E$ determina un carácter j^* de A. Es inmediato verificar que el conjunto $\& = \{j^*: j \in E\}$ es un conjunto separador de caracteres en el sentido de la definición siguiente:

V.2.2. DEFINICION. *Un conjunto* & *de caracteres del álgebra monádica* A *se dice separador si dados* $a,b \in A$, $a \neq b$ *existe* $h \in \&$ *tal que* $h(a) \neq h(b)$.

V.2.3. LEMA. *Para que* & *sea un conjunto separador de caracteres de* A *es necesario y suficiente que si* $a \neq 1$ *exista* $h \in \&$ *tal que* $h(a) \neq 1$.

DEM. Es evidente que la condición es necesaria. Si $a \neq b$, entonces (1) $a \not\leq b$ ó (2) $b \not\leq a$. Si ocurre (1), tendremos (3) $\nabla a \not\leq \nabla b$ ó (4) $\Delta a \not\leq \Delta b$. Consideremos el caso (3), luego $\sim\nabla a \vee \nabla b \neq 1$ y por lo tanto existe $h \in \&$ tal que $\sim\nabla h(a) \vee \nabla h(b) = h(\sim\nabla a \vee \nabla b) \neq 1$, luego $h(a) \neq h(b)$. En los restantes casos la demostración es similar.

V.2.4. TEOREMA. *Sea* A *un álgebra monádica y* & *el conjunto de sus caracteres. La aplicación* $\wedge: A \longrightarrow K^{\&}$ *definida por* $\hat{a}(h) = h(a)$, *para todo* $h \in \&$, $a \in A$, *establece un L-homomorfismo de* A *sobre* $\hat{A} \subseteq K^{\&}$ *tal que, para todo* $k \in K$, $\hat{k} \equiv k$.
Si & *es separador,* $\wedge: A \longrightarrow \hat{A}$ *es un isomorfismo y* $\hat{A}$

un álgebra funcional monádica.

Si $\mathcal{E}$ *verifica la condición: "Para todo* $a \in A$ *existe* $h \in \mathcal{E}$ *tal que* $\exists a \leqslant h(a)$*",* $\mathcal{E}$ *es separador y* $\hat{A} \cong A$ *es rica.*

DEM. $\widehat{(a \vee b)}(h) = h(a \vee b) = h(a) \vee h(b) = \hat{a}(h) \vee \hat{b}(h) = (\hat{a} \vee \hat{b})(h)$. En forma análoga se prueba que $\widehat{\sim a} = \sim\hat{a}$ y $\widehat{\nabla a} = \nabla\hat{a}$, luego $\wedge : A \longrightarrow \hat{A}$ es un L-homomorfismo de A sobre $\hat{A}$.

Veamos que: (1) Si $k \in K(A) = K \subseteq A$, $\hat{k}$ es la función identicamente igual a k. En efecto $\hat{k}(h) = h(k) = k$, para todo $h \in \mathcal{E}$.

Si $\mathcal{E}$ es separador, dados $a, b \in A$, $a \neq b$, existe $h \in \mathcal{E}$ tal que $h(a) \neq h(b)$, luego $\hat{a}(h) = h(a) \neq h(b) = \hat{b}(h)$, lo que prueba que $\hat{a} \neq \hat{b}$. Luego A y $\hat{A}$ son L-isomorfas.

(2) Dado $\hat{a} \in \hat{A}$, existe $\bigvee_{h\in\mathcal{E}} \hat{a}(h) = \exists a$.

(i) $\hat{a}(h) \leqslant \exists a$, para todo $h \in \mathcal{E}$.

En efecto, de $a \leqslant \exists a$ resulta $\hat{a}(h) = h(a) \leqslant h(\exists a) = \exists a$.

(ii) Si $\hat{a}(h) \leqslant k \in K$, para todo $h \in \mathcal{E}$, entonces $\exists a \leqslant k$. Como, por hipótesis, $\hat{a} \leqslant \hat{k}$, por ser $\wedge$ un L-isomorfismo es $a \leqslant k$, luego $\exists a \leqslant k$.

Por (i) y (ii) se tiene (2).

(3) $\exists\hat{a} = \widehat{\exists a}$.

Resulta inmediatamente de (1) y(2) $(\exists\hat{a})(h) = \bigvee_{h\in\mathcal{E}} \hat{a}(h) = \exists a = (\widehat{\exists a})(h)$.

Si $\exists a \leqslant h_o(a)$ para álgún $h_o \in \mathcal{E}$, se sigue que $\hat{a}(h_o) = \exists a$, puesto que $\exists a \leqslant ho(a) = \hat{a}(h_o) \leqslant \exists a$, lo que prueba que el supremo $\exists a$ de la función $\hat{a}$ es alcanzado precisamente en h_o, luego $\hat{A}$ es rica.

Veamos finalmente que en este caso $\wedge$ también es inyectiva, para lo cual basta probar que si $\hat{a} \equiv 1$, entonces $a = 1$. Si $\hat{a}(h) = h(a) = 1$ para todo $h \in \mathcal{E}$, $\sim h(a) = h(\sim a) = 0$, para todo $h \in \mathcal{E}$. Por hipótesis existe $h \in \mathcal{E}$ tal que $\exists \sim a \leqslant h(\sim a) = 0$, luego $\exists \sim a = 0$, esto es, $\forall a = 1$ y en consecuencia $a = 1$.

V.3. SISTEMAS DEDUCTIVOS LIBRES E INDIVIDUOS.

Vamos a probar más adelante que las hipótesis del teorema indicado en el párrafo anterior son verificadas en el caso en que el álgebra de Boole $B(A) \cap K(A)$ es completa.

Precisaremos de las siguientes nociones y resultados:

V.3.1. DEFINICION. *Un sistema deductivo* D *de un álgebra monádica* A *se dice libre si para todo* $x \in A$, $\exists x = 1$. *Esto es equivalente a afirmar que* $D \cap K(A)=\{1\}$. *Un s.d.* D *maximal entre los sistemas deductivos libres se dirá un ultralibre.*

Mediante la aplicación del lema de Zorn se deduce de inmediato que todo sistema deductivo libre se puede extender a un ultralibre.

V.3.2. LEMA. *Para que un sistema deductivo* D *sea libre es necesario y suficiente que cada clase de equivalencia módulo* D *contenga a lo sumo una constante.*

DEM. Necesaria: Sean $k_1, k_2 \in K(A)$, tales que $k_1 \equiv k_2$ (D), luego $k_1 \wedge d = k_2 \wedge d$, con $d \in D$. Entonces $k_1 = k_1 \wedge 1 =$
$= k_1 \wedge \exists d = \exists(k_1 \wedge d) = \exists(k_2 \wedge d) = k_2 \wedge \exists d = k_2 \wedge 1 =$
$= k_2$.

Suficiente: Como D es una clase de equivalencia módulo D y $1 \in D$, entonces $D \cap K(A) = \{1\}$. Luego D es libre.

V.3.3. DEFINICION. *Un sistema deductivo* D *se dice un individuo si toda clase de equivalencia módulo* D *contiene una y sola una constante.*

Las nociones de individuo y carácter se relacionan estrechamente, dado que:

V.3.4. PROPOSICION. *Un sistema deductivo* D *es un individuo si y solo si* D *es el núcleo de un (y un solo) carácter.*

DEM. Suficiente: Si h es un carácter de A, sabemos que D = = N(h) es un sistema deductivo de A. Si $y \in A$, luego h(y) = = $k \in K$. Como h(k) = k, se tiene h(y) = h(k) o sea $y \equiv k$ (mód D). Esto prueba que cada clase de equivalencia módulo D contiene una constante. Si $k_1, k_2 \in K(A)$ son tales que $k_1 \equiv k_2(D)$, entonces $k_1 = h(k_1) = h(k_2) = k_2$.
Necesaria: Si D es un individuo, existe un carácter h de A tal que D = N(h). Basta considerar $h = (\varphi_{/K})^{-1} \circ \varphi$ donde φ es el epimorfismo natural de A en A/D.

V.3.5. LEMA. *Todo individuo es un ultralibre.*

DEM. Sea D un individuo, por V.3.2 es inmediato que D es libre y por V.3.4 D = N(h), donde h es un carácter de A. Si U fuese un sistema deductivo libre tal que $D \subset U$, existiría $y \in U-D$. Luego $1 \neq h(y) = k \in K$. Como h(k) = k = h(y), entonces $k \equiv y$ (D), esto es, existe $d \in D$ tal que $k \wedge d = y \wedge d$, luego $k = k \wedge 1 = k \wedge \exists d = \exists (k \wedge d) = \exists (y \wedge d)$. Como $y,d \in U$, $y \wedge d \in U$, luego $k = \exists (y \wedge d) = 1$. Contradicción.

V.3.6. OBSERVACION. Ni aún en un álgebra de Boole monádica B, un ultralibre es necesariamente un individuo. Pero A.Monteiro [(1960 a),(1960 b)] ha probado que ello ocurre en el caso en que el álgebra de Boole K(B) es completa, este teorema nos será útil luego.

Veamos ahora la relación que existe entre los sistemas deductivos libres de un álgebra monádica A y los filtros libres del álgebra de Boole monádica $B(A)$.

Si D es un sistema deductivo libre de A, es evidente que $D^* = D \cap B(A)$ es un filtro libre de $B(A)$. Además se verifica sin dificultad que dado un filtro libre D^* de $B(A)$, $D = F(D^*)$ es un sistema deductivo libre de A tal que $D \cap B(A) = D^*$. Poniendo $\varphi^*(D) = D \cap B(A)$, se tiene que:

> V.3.7. LEMA. φ^* *define un isomorfismo de orden entre la familia* T *de sistemas deductivos libres de* A *y la familia* T^* *de filtros libres de* $B(A)$, *ordenados por inclusión. Además* φ^* *pone en correspondencia biyectiva:* a) *los conjuntos de ultralibres de* A *y* $B(A)$ *respectivamente y* b) *los conjuntos de individuos de* A *y* $B(A)$ *respectivamente.*

DEM. Es inmediato que φ^* es un isomorfismo de orden de T en T^*. Luego es obvio que los elementos maximales de las familias T y T^* se corresponden por φ^*. Sea D un individuo de A, luego $D^* = \varphi^*(D)$ es un filtro de $B(A)$. Sea $b \in B(A)$ tal que $b \in |x|_{D^*}$, luego $b \in |x|_D$, como D es un individuo existe $k \in K(A)$ tal que $k \equiv x\ (D)$, luego $k \equiv b(D)$ y $\Delta k \equiv b\ (D)$, en consecuencia $\Delta k \equiv b\ (D^*)$ y, como $\Delta k \in K(A) \cap B(A)$, en cada clase de equivalencia módulo D^* existe una constante de $B(A)$, tal constante es única puesto que D^* es libre (V.3.5).

Recíprocamente, si D^* es un individuo de $B(A)$, entonces $D = F(D^*)$ es un sistema deductivo libre de A.

Sea $S = \bigcup_{k \in K(A)} |k|_D$, luego (1) $K(A) \subseteq S$. Se prueba sin dificultad que (2) S es una L-subálgebra de A. De (1) y (2) resulta: (3) S es una M-subálgebra de A.

Veamos que (4) $B(A) \subseteq S$. Si $b \in B(A)$, entonces $b \equiv k(D^*)$, con $k \in K(A) \cap B(A)$, luego $b \equiv k$ (D) y, por lo tanto, $b \in S$. De (3) y (4) resulta (III.3.5) $A = SM(B(A) \cup K(A) \subseteq S$, luego $S = A$, lo que prueba que en cada clase de equivalencia módulo D, existe una constante y, como D es libre, una sola.

Como corolario de este lema y del teorema de A.Monteiro (V.3.6) resulta que:

V.3.8. PROPOSICION. *En un álgebra monádica* A *tal que* $K(A) \cap B(A)$ *es un álgebra de Boole completa, los individuos coinciden con los ultralibres.*

DEM. Sea U un ultralibre de A, luego $U^* = U \cap B(A)$ es un individuo de B(A), ya que $K(A) \cap B(A)$ es un álgebra de Boole completa. Por lo tanto (V.3.7), U es un individuo de A.

V.3.9. OBSERVACION. Es también corolario de V.3.7 que la intersección de los sistemas deductivos ultralibres de un álgebra monádica A se reduce a $\{1\}$. En efecto, esto ocurre para los filtros ultralibres de un álgebra de Boole monádica, A.Monteiro [(1960 a),(1960 b)], luego para B(A) y, mediante la aplicación φ^*, ocurre en A, desde que $\varphi^*(\{1\}) = \{1\}$.

Estamos ahora en condiciones de probar el resultado enunciado al principio de este capítulo.

V.4. TEOREMA DE REPRESENTACION.

Comenzaremos con un caso particular:

V.4.1. TEOREMA. *Sea* A *un álgebra monádica tal que* $K(A) \cap B(A)$ *es un álgebra de Boole completa. Entonces* A *es representable por un álgebra funcional rica* $\hat{A}$, *tal que* 1°) $\hat{A} \subseteq K^{\&}$, *donde* & *es el conjunto de los caracteres de* A *y* $K = K(A)$; 2°) *el isomorfismo* $\wedge : A \longrightarrow \hat{A}$ *verifica* $\hat{k} \equiv k$, *para todo* $k \in K$.

DEM. En virtud de V.2.4 basta mostrar que se cumple la condición siguiente: Para todo $a \in A$ existe un carácter h de A tal que $\exists a \leqslant h(a)$.

Si ello ocurre, para un $h \in \&$ se tiene $h(\exists a) = \exists a \leqslant h(a)$. Notemos que esta condición es equivalente a cualquiera de las condiciones siguientes.

(1) $\nabla h(\exists a) \leqslant \nabla h(a)$ y $\Delta h(\exists a) \leqslant \Delta h(a)$

(2) $h(\sim\nabla \exists a \vee \nabla a) = 1$ y $h(\sim\Delta \exists a \vee \Delta a) = 1$

(3) $(\sim\nabla \exists a \vee \nabla a) \wedge (\sim\Delta \exists a \vee \Delta a) \in N(h)$.

Luego, dado $a \in A$, es natural considerar el elemento $x_o = (\sim\nabla \exists a \vee \nabla a) \wedge (\sim\Delta \exists a \vee \Delta a)$, el cual es libre. En efecto $\exists x_o = \exists [\sim\nabla \exists a \vee (\sim\nabla \exists a \wedge \Delta a) \vee (\nabla a \wedge \sim\Delta \exists a) \vee \Delta a] =$

$= \sim\nabla \exists a \vee (\sim\nabla \exists a \wedge \Delta \exists a) \vee (\nabla \exists a \wedge \sim\Delta \exists a) \vee \Delta \exists a =$

$= \sim\nabla \exists a \vee 0 \vee (\nabla \exists a \wedge \sim\Delta \exists a) \vee \Delta \exists a =$

$= (\sim\nabla \exists a \vee \nabla \exists a \vee \Delta \exists a) \wedge (\sim\nabla \exists a \vee \Delta \exists a \vee \sim\Delta \exists a) =$

$= 1 \wedge 1 = 1.$

Como x_o es libre, $D(x_o)$ es un sistema deductivo libre, luego existe un ultralibre U tal que $D(x_o) \subseteq U$ y, por lo tanto, $x_o \in U$.

En nuestro caso podemos afirmar, por V.3.8, que U es un individuo, luego existe un carácter h de A tal que $U = N(h)$. Entonces $h(x_o) = 1$, de donde resulta por las equivalencias indicadas anteriormente que $\exists a = h(\exists a) \leqslant h(a)$, con $h \in \&$.

V.4.2. LEMA. *Si* A *es una M-subálgebra de un álgebra monádica* A_o *y* A_o *es representable en las condiciones:*

1°) $\hat{A}_o \subseteq K_o^E$, $K_o = K(A_o)$

2°) $\hat{k}_o \equiv k_o$, *para todo* $k_o \in K_o$,

entonces I) *la aplicación* $A \longrightarrow \hat{A}$ *es una representación de* A, *verificando* $\hat{k} \equiv k$, *para todo* $k \in K$; II) *Si* $\hat{A}_o$ *es rica,* $\hat{A}$ *también lo es.*

Indiquemos finalmente la representación funcional en el caso general. Si A es un álgebra monádica no trivial, A es (a menos de isomorfismo) una subálgebra de un álgebra monádica $A_o = P$ tal que $K(P)$ es completa en P (III.1.4). Luego $K(P) \cap B(P)$ es un álgebra de Boole completa y, en consecuencia, P es representable por un álgebra funcional rica. Luego, por V.4.2, A también lo es, por lo tanto:

V.4.3. TEOREMA. *Toda álgebra monádica es representable por un álgebra funcional monádica rica.*

BIBLIOGRAFIA

BIALYNICKI-BIRULA (A.)

(1957) *Remarks on Quasi-Boolean algebras.* Bull.Acad. Pol. Scie. Cl.III, 5 (1957), 615-619.

BIALYNICKI-BIRULA (A) and RASIOWA (H.)

(1957) *On the representation of Quasi-Boolean algebras.* Bull.Acad.Pol.Scie.Cl.III, 5 (1957), 259-261.

BIRKHOFF (G.)

(1933) *On the combination of subalgebras.* Proc.Camb. Phil.Soc. 29 (1933), 441-464.

(1967) *Lattice theory.* Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 25, 3rd. ed., Providence , 1967.

CIGNOLI (R.)

(1965) *Boolean elements in Lukasiewicz algebras I.* Proc. Japan Acad., 41, N°8 (1965), 670-675.

EPSTEIN (G.)

(1960) *The lattice theory of Post Algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., 95 (1960), 300-317.

GASTAMINŽA (M.L.) and GASTAMINZA (S.)

(1968) *Caracterization of DeMorgan lattices by the operations of implication and negation.* Proc. Japan Acad. 44 (1968)

HALMOS (P.)

(1955) *Algebraic logic I.Monadic Boolean algebras.* Compositio Mathematica, 12 (1955), 217-249.

(1959) *The representation of monadic Boolean algebras.* Duke Mathematical Journal, 26 (1959), 447-454.

(1962) *Algebraic logic.* Chelsea, New York, 1962.

KALMAN (J.A.)

(1958) *Lattices with involution.* Trans.Am.Math.Soc. 87 (1958), 485-491.

KLEENE (St.C.)

(1938) *On notation for ordinal numbers.* The Journal of Symbolic Logic. 3 (1938), 150-155.

(1952) *Introduction to Metamathematics.* North-Holland Publishing Co.Amsterdam, 1952.

LEWIS (C.I.) and LANGFORD (C.H.)

(1932) *Symbolic logic.* New York (1932). Reprinted Dover publications, New York (1959).

MARONNA (R.)

(1964) *A characterization of Morgan lattices.* Port. Math. 23 (1964), 169-171.

MOISIL (Gr.C.)

(1935) *Recherches sur l'algèbre de la logique.* Ann. Sci.Univ. Jassy, 22 (1935), 1-117.

(1940) *Recherches sur les logiques non-chrysippiennes.* Ann.Sci.Univ. Jassy, 26 (1940), 431-436.

(1941) *Sur les anneaux de caractéristiques 2 ou 3 et leurs applications.* Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest 12 (1941), 66-90.

(1960) *Sur les ideaux des algèbres Lukasiewicziennes trivalentes.* Analele Universitatii C.I. Parhon. Seria Acta Logica. 3 (1960), 83-95.

(1963) *Les logiques non Chrysippienes et leurs applications.* Acta Philosophica Fennica. 16 (1963), 137-152.

MONTEIRO (A.)

(1955) *Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer*. Rev. Unión Mat. Arg. 17 (1955), 149-160.

(1956) *Sobre el teorema de Halmos de representación de álgebras monádicas*. Rev. Unión Mat. Arg. 18 (1956), p.43.(*)

(1958) *Algebra de la Lógica I*. Curso dictado en la Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1958.

(1960) *Matrices de Morgan caractéristiques pour le Calcul Propositionnel Classique*. Anais da Academia Brasileira de Ciências, 32 (1960), 1-7.

(1960 a) *Algebras Monádicas*. Atas del Segundo Colóquio Brasileiro de Matématica. (1960), 33-52.

(1960 b) *Algebra de la Lógica II*. Curso dictado en la Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1960.

(1962) *Algebra de la Lógica III*. Curso dictado en la Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1962.

(1963) *Algebras de Lukasiewicz trivalentes*. Curso dictado en la Univ. Nac. del Sur. Bahía Blanca, 1963.

(*) El resumen correspondiente a esta comunicación no fué publicado [ver O.Varsavsky (1956), P.Halmos (1959), A. Monteiro (1960 a)]. Las demostraciones fueron expuestas en un curso dictado en la Universidad Nacional del Sur (ver 1960 b).

(1963 a) *Seminario sobre álgebras de Lukasiewicz trivalentes*. Seminario realizado en la Uni. Nac. del Sur. 1963.

(1964) *Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*. Bull.Math.Soc.Sci.Math.Phy.R.P. Roum., 7(55)(1963), 3-12.

(1966) *Algebras de DeMorgan*. Curso dictado en la Uni. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1966.

(1966 a) *Seminario sobre álgebras de Lukasiewicz trivalentes*. Uni. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1966.

(1967) *Construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole Monadiques, I.* Math. Japon. 12 (1967), 1-23.

MONTEIRO (A.) et RIBEIRO (H.)

(1942) *L'opération de fermeture et ses invariants dans les systèmes partiellement ordonnés*. Portugaliae Math. 3(1942), 171-184.

MONTEIRO (L.)

(1964) *Sur les algèbres de Heyting trivalentes*. Notas de Lógica Matemática N°19, Uni. Nac del Sur, Bahía Blanca, (1964).

(1964 a) *Axiomes indépendants pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.Roum., 7 (55)(1963), 199-202.

(1965) *Sur les algèbres de Lukasiewicz Inyectives*. Proc. Japan Acad., 41 N°7 (1965), 578-581.

(1968) *Algebras de Lukasiewicz monádicas*. Rev. Unión Mat. Arg. 23, N°4 (1968), p.200.

(1969) *Les algèbres de Heyting et de Lukasiewicz trivalentes*. Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol. XI N°4 (1970), 453-466.

(1969 a) *Sur le principe de détermination de Moisil dans les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.Roum. 13 (61), (1969), 447-448.

(1969 b) *Extension d'homomorphismes dans les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*. International Logic Rewiew. 2 (1970), 193-200.

MONTEIRO (L.) et PICCO (D.)

(1963) *Les réticulés de Morgan et l'opération de Sheffer*. Bull. Acad. Pol. Sci. S.Sci. Math., astr.phys., 11 (1963), 355-358.

RASIOWA (H.) and SIKORSKI (R.)

(1953) *Algebraic treatment of the notion of satisfiability*. Fundamenta Mathematica, 40 (1953), 62-95.

(1963) *The Mathematics of Metamathematics*. Monografie Matematyczne.Tom.41. Warzawa. 1963.

SHOLANDER (M.)

(1951) *Postulates for distributive lattices*. Canadian Journal of Mathematics. 3 (1951), 28-30.

TRACZYK (T.)

(1963) *Axioms and some properties of Post algebras*. Colloq. Math., 10 (1963), 193-209.

VARSAVSKY (O.)
(1956) *Quantifiers and equivalence relations*. Revista Matemática Cuyana 2 (1956), 29-51.

Esta lista bibliográfica menciona los trabajos utilizados en la redacción de esta tesis. Para mayor información consultar el libro standard de Rosser (J.B.) and Turquette (A.), *Many-Valued Logics*, North Holland, Amsterdam. 1952.