NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

4

ROMAN SIKORSKI

ALGEBRAS DE BOOLE

1968
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

ALGEBRAS DE BOOLE

por

Roman Sikorski

Universidad Nacional del Sur

Instituto de Matemática

Bahía Blanca - 1960

Apuntes de las lecciones sobre "Algebras de Boole", dictados por el profesor Roman Sikorski en la Universidad Nacional del Sur durante el período mayo-julio de 1958, redactados por Antonio Diego.

I. TOPOLOGIA GENERAL

1. Notaciones

Suponemos que el lector conoce los principales conceptos de la teoría general de conjuntos. Nos limitaremos a reseñar las notaciones que emplearemos en lo que sigue.

Por lo general nos referiremos a sub-conjuntos A, B, C,... de un conjunto fijo X. Con las notaciones $A \cap B$, $A \cup B$, designaremos respectivamente la intersección y la reunión de los conjuntos A y B. Para indicar que el conjunto A es una parte del conjunto B escribiremos: $A \subset B$.

Si $(A_t)_{t \in T}$ es una familia de conjuntos, con las notaciones: $\bigcap_{t \in T} A_t$, $\bigcup_{t \in T} A_t$ designaremos, respectivamente, la intersección y la reunión de los conjuntos A_t de la familia. Si la clase T de índices es numerable escribiremos también $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Con $A - B$ designaremos la diferencia de los conjuntos A y B, esto es, el conjunto de los elementos de A que no son elementos de B. El complemento de un subconjunto A del conjunto fijo X será designado $-A$. Es claro que $-A = X - A$ y que $A - B = A \cap (-B)$.

Con $\emptyset$ designaremos la parte vacía de X.

2. Espacios topológicos. Operador de interior.

Sea X un conjunto fijo e I un operador tal que a cada parte A de X asigna el conjunto $I(A) \subset X$, de modo que se verifiquen las propiedades:

I_1) $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$

I_2) $I(A) \subset A$

I_3) $I(I(A)) = I(A)$

I_4) $I(X) = X$

DEFINICION: Llamaremos operador de interior sobre X a un operador I con las propiedades indicadas.

El par (X, I) se dice un espacio topológico. El conjunto I(A), que denotaremos donde no haya lugar a confusión IA, es llamado interior del conjunto A.

Sobre cualquier conjunto no vacío X puede definirse un operador de interior, por ejemplo:

$$(1) \qquad IA = \begin{cases} X & \text{si } A = X \\ \emptyset & \text{si } A \neq X \end{cases}$$

Se verifica inmediatamente que X, con el operador de interior definido por (1), es un ejemplo de espacio topológico.

Otro ejemplo es el siguiente:

(2) $IA = A$ para todo $A \subset X$.

Un operador de interior I sobre X tiene además, las propiedades:

I_5) $I\emptyset = \emptyset$

I_6) Si $A \subset B$, $IA \subset IB$

Demostración: (I_5) Por I_2: $I\emptyset \subset \emptyset$, luego $I\emptyset = \emptyset$.
(I_6) Sea $A \subset B$, esto es, $A = A \cap B$, de donde, por I_1):

$IA = I(A \cap B) = IA \cap IB$. Luego, $IA \subset IB$.

Una técnica usual para definir un operador de interior sobre X es la que consiste en dar una familia $\mathcal{R}$ de partes de X, con las propiedades:

K_0) $\emptyset \in \mathcal{R}$.

K_1) Si $A, B \in \mathcal{R}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{R}$.

K_3) $\bigcup_{A \in \mathcal{R}} A = X$

Para cada $A \subset X$, se define

(3) $$IA = \bigcup_{\substack{B \subset A \\ B \in \mathcal{R}}} B$$

De acuerdo a la definición (3),
"$x \in IA$" equivale a "existe $B \in \mathcal{R}$ tal que $x \in B \subset A$".

Veamos que el operador I, así definido, es efectivamente un operador de interior sobre X. Para ello, indiquemos previamente las siguientes propiedades del operador I, definido por (3):

a) Si $A \subset B$, entonces $IA \subset IB$

b) Si $A \in \mathcal{R}$, es $IA = A$

Demostración: a) Sea $x \in IA$, entonces, para algún $A_1 \in \mathcal{R}$ es $x \in A_1 \subset A$, luego, como $A \subset B$, es $x \in A_1 \subset B$, lo que prueba que $x \in IB$.

b) es trivial.

Veamos ahora que I verifica I_1, I_2, I_3 e I_4:

I_1) $\underline{I(A \cap B) = IA \cap IB}$

Como $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, se sigue de la propiedad (a): $I(A \cap B) \subset IA$, $I(A \cap B) \subset IB$, luego:

(i) $I(A \cap B) \subset IA \cap IB$

Sea $x \in IA \cap IB$, esto es, $x \in IA$ y $x \in IB$. En consecuencia, existen A_1, $B_1 \in \mathcal{R}$ tales que $x \in A_1 \subset A$ y $x \in B_1 \subset B$, luego, $x \in A_1 \cap B_1 \subset A \cap B$.

Como $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{R}$, por la propiedad K_2), resulta que $x \in I(A \cap B)$, lo que prueba la inclusión:

(ii) $I(A) \cap I(B) \subset I(A \cap B)$

I_2) $\underline{IA \subset A}$

Resulta inmediatamente de la definición.

I_3) $IIA = IA$

Probemos primero que, para todo $B \in \mathcal{R}$, "$B \subset A$" equivale a "$B \subset IA$".

En efecto, si $B \subset IA$, como $IA \subset A$, es $B \subset A$. Recíprocamente, si $B \subset A$ es, por (a), $IB \subset IA$, pero como $B \in \mathcal{R}$, es, por (b), $B = IB$, de donde $B \subset IA$.

De acuerdo a la equivalencia probada:

$$IIA = \bigcup_{\substack{B \subset IA \\ B \in \mathcal{R}}} B = \bigcup_{\substack{B \subset A \\ B \in \mathcal{R}}} B = IA$$

I_4) $\underline{IX = X}$

Por K_3

$$IX = \bigcup_{\substack{B \subset X \\ B \in \mathcal{R}}} B = \bigcup_{B \in \mathcal{R}} B = X$$

Un ejemplo típico de aplicación del procedimiento indicado se presenta cuando consideramos el conjunto X de los números reales y la familia $\mathcal{R}$ de todos los intervalos abiertos (a, b), incluyendo al intervalo degenerado $\emptyset = (a, a)$. $\mathcal{R}$ tiene, como es inmediato comprobar, las propiedades K_0, K_1, K_2.

En lo que sigue, cuando nos refiramos al conjunto X de los números reales, supondremos que X tiene la topología construída a partir de la familia $\mathcal{R}$ de todos los intervalos abiertos.

3. Operador de clausura

Dado el espacio topológico (X, I) definimos, para todo $A \subset X$,

$$CA = -I-A$$

El operador C, así definido, satisface las siguientes propiedades, duales de las I_1, I_2, I_3, I_4:

C_1) $C(A \cup B) = CA \cup CB$

C_2) $A \subset CA$

$C_3)$ $CCA = CA$

$C_4)$ $C\emptyset = \emptyset$

Probemos, a título de ejemplo, la propiedad (C_1):

Por la definición de C:

$$\begin{aligned} C(A \cup B) &= -I-(A \cup B) \\ &= -I(-A \cap -B) \text{ (por ley de De Morgan)} \\ &= -(I-A \cap I-B) \text{ (por } I_1) \\ &= -I-A \cup -I-B \text{ (por ley de De Morgan)} \\ &= CA \cup CB \end{aligned}$$

Dualmente, puede probarse que si se dá un operador C sobre X, con las propiedades C_1, C_2, C_3, C_4, el operador I definido por la identidad: $IA = -C-A$, para todo $A \subset X$, es un operador de interior sobre X.

DEFINICION: Llamaremos operador de clausura sobre X a un operador C con las propiedades C_1, C_2, C_3, C_4.

Una manera alternativa de dar una topología sobre X es dar un operador de clausura C sobre X, el operador $I = -C-$ es el operador de interior en esa topología.

Observemos que si a partir del operador de clausura C definimos el operador de interior $I = -C-$, y de éste el operador de clausura $C^* = -I-$ se tiene $C^* = C$. En efecto, $C^* = -I- = -(-C-)- = C$.

Se demuestra sin dificultad que un operador de clausura sobre X verifica las propiedades:

C_5) $CX = X$

C_6) Si $A \subset B$, entonces $CA \subset CB$.

En los textos de topología las notaciones Int(A), $\mathring{A}$, para designar el interior de A, y $\bar{A}$, para designar la clausura de A, son de uso frecuente.

4. Abiertos y cerrados

DEFINICION: Una parte A de X se dice un conjunto abierto si $A = IA$.

De las propiedades I_4), I_5) resulta que X y $\emptyset$ son conjuntos abiertos.

Los conjuntos abiertos de un espacio topológico X son aquellos, y solo aquellos, subconjuntos A de X de la forma $A = IB$. En efecto, si A es abierto, $A = IA$. Recíprocamente, si $A = IB$, A es abierto porque $IA = IIB = IB = A$.

TEOREMA 1: La familia $\mathcal{A}$ de todos los conjuntos abiertos de un espacio topológico X tiene las propiedades siguientes:

(i) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.

(ii) Si $A_t \in \mathcal{A}$ para todo $t \in T$, entonces

$$\bigcup_{t \in T} A_t \in \mathcal{A} .$$

(iii) $X, \emptyset \in \mathcal{A}$.

DEMOSTRACION: (i) Sean $A, B \in \mathcal{A}$, es decir, $A = IA$, $B = IB$. Entonces, $A \cap B = IA \cap IB = I(A \cap B)$, esto es, $A \cap B \in \mathcal{A}$.

(ii) Sea $A_t \in \mathcal{A}$, para todo $t \in T$; probemos en primer lugar:

$$\alpha) \quad \bigcup_{t \in T} A_t \subset I \bigcup_{t \in T} A_t$$

Para todo $t \in T$ vale la inclusión: $A_t \subset \bigcup_{t \in T} A_t$. Entonces, por la monotonía del operador I:

$$IA_t \subset I \bigcup_{t \in T} A_t$$

Pero A_t es abierto por hipótesis, luego $IA_t = A_t$, de donde $A_t \subset I \bigcup_{t \in T} A_t$ para todo $t \in T$, y, finalmente, $\bigcup_{t \in T} A_t \subset I \bigcup_{t \in T} A_t$, lo que prueba α).

Por I_2:

$$\beta) \quad I \bigcup_{t \in T} A_t \subset \bigcup_{t \in T} A_t$$

De α) y β) se obtiene la igualdad

$$I \bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} A_t$$

que muestra que $\bigcup_{t \in T} A_t \in \mathcal{A}$.

(iii) Ya ha sido observado que X, $\emptyset$ son abiertos.

<u>COROLARIO: La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.</u>

<u>DEFINICION: Una parte de $A \subset X$ se dice un conjunto cerrado si y solo si $A = CA$.</u>

A es cerrado si y solo si $-A$ es abierto. En efecto, A es cerrado equivale a $A = CA = -I-A$, esto es, $-A = I-A$, lo que significa que $-A$ es abierto.

<u>TEOREMA 2: La familia $\mathcal{F}$ de todos los conjuntos cerrados de un espacio topológico X tiene las propiedades siguientes:</u>

(i) Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{F}$.

(ii) Si $A_t \in \mathcal{F}$ para todo $t \in T$, $\bigcap_{t \in T} A_t \in \mathcal{F}$.

(iii) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.

DEMOSTRACION: (i) Si $A, B \in \mathcal{F}$, $-A, -B \in \mathcal{A}$, luego $-A \cap -B = -(A \cup B) \in \mathcal{A}$, esto es, $A \cup B \in \mathcal{F}$.

(ii) Sea $A_t \in \mathcal{F}$ para todo $t \in T$, entonces $-A_t \in \mathcal{A}$ para todo $t \in T$, y, en consecuencia $\bigcup_{t \in T} -A_t \in \mathcal{A}$.
Por la ley de De Morgan: $-\bigcap_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} -A_t$, luego, $-\bigcap_{t \in T} A_t \in \mathcal{A}$, esto es, $\bigcap_{t \in T} A_t \in \mathcal{F}$.

(iii) Como $\emptyset, X \in \mathcal{A}$, $-\emptyset = X$ y $-X = \emptyset$ son cerrados.

COROLARIO: Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son cerrados, $A_1 \cup A_2 \ldots$ $\ldots \cup A_n$ es cerrado.

TEOREMA 3: IA es el abierto más grande contenido en A.

DEMOSTRACION: $IA \subset A$ e Ia es abierto. Si G es un abierto tal que $G \subset A$, $G = IG \subset IA$.

COROLARIO: $IA = \bigcup_{\substack{G \subset A \\ G \in \mathcal{A}}} G$

DEMOSTRACION: Basta observar que, la reunión de los abiertos G contenidos en A es un conjunto abierto y, evidentemente, el abierto más grande contenido en A.

Dualmente, valen:

TEOREMA 4: CA es el cerrado más pequeño que contiene a A.

COROLARIO: $CA = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \in \mathcal{F}}} F$.

Observemos que si G es abierto y F cerrado se tiene: G - F es abierto y F - G es cerrado.

Indicamos el siguiente ejemplo de espacio topológico:

Sea X un conjunto infinito y sea:

$$(3) \qquad CA = \begin{cases} A, \text{ si } A \text{ es finito (o vacío)} \\ X, \text{ si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

C es un operador de clausura sobre X, como se verifica sin dificultad.

El operador de interior correspondiente, $I = -C-$, puede definirse por las condiciones:

$$(3') \qquad IA = \begin{cases} A, \text{ si } -A \text{ es finito} \\ \emptyset, \text{ si } -A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

En la topología sobre X definida por (3) ó (3') los cerrados son el conjunto X y sus partes finitas (incluída $\emptyset$) y los abiertos son los complementarios de partes finitas (incluída X) y el conjunto vacío.

<u>DEFINICION: Una familia de conjuntos $\mathcal{R}$ de un conjunto X con las propiedades K_0, K_1, K_2 del párrafo 2 se dice una base de abiertos</u>.

Del hecho que los conjuntos abiertos son de la forma IB resulta que, en la topología definida por el procedimiento indicado en el párrafo 2, mediante una base de abiertos $\mathcal{R}$, un conjunto es abierto, si y solo si es reunión de conjuntos de $\mathcal{R}$.

5. Espacios métricos

Ejemplos particularmente interesantes de espacios topológicos son los espacios métricos que pasamos a definir:

Sea X un conjunto no vacío y ρ una función que hace corresponder a cada par ordenado (x, y) de elementos de X el número real $\rho(x, y)$, de modo que se verifiquen las propiedades:

D_1) $0 \leq \rho(x, y) < +\infty$

D_2) $\rho(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$

D_3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

D_4) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

DEFINICION: La función ρ, verificando D_1 a D_4), se dice una métrica sobre X, el número real $\rho(x, y)$ la distancia de x a y y X un espacio métrico.

Dados $x_0 \in X$ y $r > 0$, llamaremos esfera de centro x_0 y radio r, en notación $K(x_0, r)$, al conjunto de los puntos $x \in X$ tales que $\rho(x_0, x) < r$.

DEFINICION: Para cada conjunto $A \subset X$ llamaremos interior de A; escribiendo "IA", al conjunto de todos los puntos $x_0 \in X$ tales que $K(x_0, r) \subset A$ para algún $r > 0$.

<u>TEOREMA 5: Un espacio métrico X con el operador I definido arriba es un espacio topológico.</u>

DEMOSTRACION: Se trata de probar que el "interior de un conjunto" en el sentido de la definición anterior verifica las condiciones I_1 á I_4.

Mostremos previamente:

a) Si $r' \leq r''$, $K(x_0, r') \subset K(x_0, r'')$

b) Para todo $x \in K(x_0, r)$ existe $r' > 0$ tal que $K(x, r') \subset K(x_0, r)$.

a) Sea $x \in K(x_0, r')$; por definición es $\rho(x_0, x) < r'$, pero $r' \leq r''$, luego $\rho(x_0, x) < r''$ esto es $x \in K(x_0, r'')$.

b) Sea $\rho(x_0, x) = d < r$. Tomando $r' = r-d > 0$, resulta $K(x, r') \subset K(x_0, r)$. En efecto, si $y \in K(x, r')$ es $\rho(x, y) < r'$, luego, por D_4,

$\rho(x_0, y) \leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) < d + r' = d + (r-d) = r$,

por tanto, de $\rho(x_0, y) < r$, resulta $y \in K(x_0, r)$, lo que prueba que $K(x, r') \subset K(x_0, r)$.

Probemos ahora I_1 a I_4:

I_1) $\underline{I(A \cap B) = IA \cap IB}$

i) $I(A \cap B) \subset IA \cap IB$

Sea $x_0 \in I(A \cap B)$, existe entonces $r > 0$ tal que $K(x_0, r) \subset A \cap B$, luego $K(x_0, r) \subset A$, $K(x_0, r) \subset B$, esto es, $x_0 \in IA$, $x_0 \in IB$. Por consiguiente $x_0 \in IA \cap IB$, lo que prueba (i).

ii) $IA \cap IB \subset I(A \cap B)$

Sea $x_0 \in IA \cap IB$, esto es, $x_0 \in IA$, $x_0 \in IB$. Existen entonces números positivos r', r'' tales que $K(x_0, r') \subset A$, $K(x_0, r'') \subset B$.

Si designamos con r al menor de los números r', r'', de acuerdo con (a) tendremos:

$$K(x_0, r) \subset K(x_0, r') \ , \ K(x_0, r) \subset K(x_0, r'')$$

Luego $K(x_0, r) \subset A$, $K(x_0, r) \subset B$ y, en consecuencia, $K(x_0, r) \subset A \cap B$, esto es, $x_0 \in I(A \cap B)$, lo que demuestra (ii). De (i) é (ii) se sigue I_1.

I_2) $\underline{IA \subset A}$

De la definición de esfera se sigue (por D_2) que $x_0 \in K(x_0, r)$. Si $x_0 \in IA$ es $K(x_0, r) \subset A$ para algún r, como $x_0 \in K(x_0, r)$ es $x_0 \in A$.

I_3) $\underline{IIA = IA}$

i) $IIA \subset IA$

Se sigue de I_2, reemplazando A por IA.

ii) $IA \subset IIA$

Sea $x_0 \in IA$, esto es, sea $K(x_0, r) \subset A$ para algún $r > 0$. Veamos que $K(x_0, r) \subset IA$ lo que probará ii). En efecto, si $x \in K(x_0, r)$, por b), existe $r' > 0$ tal que $K(x, r') \subset K(x_0, r)$, luego, $K(x, r') \subset A$, esto es, $x \in IA$. Por consiguiente $K(x_0, r) \subset IA$, es decir, $x_0 \in IIA$. De (i) é (ii) resulta I_3.

$I_4)\ IX = X$

Es inmediata.

Resulta de la definición de interior que los conjuntos abiertos, esto es, conjuntos de la forma IB, son reuniones de esferas. En particular, las esferas son conjuntos abiertos, por b).

DEFINICION: Diremos que una sucesión (x_n) de puntos del espacio métrico X converge a un punto x_0, escribiendo $x_n \to x_0$, si y sólo si la sucesión de números reales $\rho(x_0, x_n)$ converge a cero.

Es posible caracterizar a los conjuntos cerrados y al operador de clausura de un espacio métrico X en términos de convergencia de las sucesiones de X.

TEOREMA 6: Sea X espacio métrico. $x_0 \in CA$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x_0$.

DEMOSTRACION: Sea (x_n) una sucesión convergente contenida en A y $x_n \to x_0$. Probemos que $x_0 \in CA$.

Si $x_0 \notin CA$, es $x_0 \in -CA$. Como $-CA$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $K(x_0, r) \subset -CA$, esto es, $K(x_0, r) \cap CA = \emptyset$, y, con mayor razón, $K(x_0, r) \cap A = \emptyset$.

Para todo $x \in A$ se tiene entonces, $\rho(x_0, x) \geq r$, en particular para todos los x_n, $\rho(x_0, x_n) \geq r$, lo que está en contradicción con la hipótesis $\rho(x_0, x_n) \to 0$.

Esta contradicción prueba que $x_0 \in CA$.

Recíprocamente, si $x_0 \in CA$ vamos a probar que existe una sucesión $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x_0$:

Para ello, mostremos que para todo $r > 0$ es

$$K(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$$

En efecto, si fuese para algún $r > 0$, $K(x_0, r) \cap A = \emptyset$, esto es, si $A \subset -K(x_0, r)$, como $-K(x_0, r)$ es cerrado: $CA \subset -K(x_0, r)$, esto es, $CA \cap K(x_0, r) = \emptyset$, lo que es absurdo pues $x_0 \in CA$ y $x_0 \in K(x_0, r)$.

En particular, $K(x_0, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ para todo n natural.

Consideremos entonces la sucesión (x_n), con $x_n \in$ $\in K(x_0, \frac{1}{n}) \cap A$.

Es evidente que $(x_n) \subset A$ y, dado que $\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$, resulta que $x_n \to x_0$

COROLARIO: Un conjunto A de un espacio métrico X es cerrado si y sólo si, para toda sucesión $(x_n) \subset A$ tal que $x \to x_0$, se tiene $x_0 \in A$.

6. Subespacios topológicos

Sea X un espacio topológico e Y un sub-conjunto fijo de X.

Sea $\mathcal{A}$ la familia de los abiertos de X, esto es, de las partes A de X para las cuales $IA = A$.

Indiquemos con $\mathcal{A}_Y$ la familia de todos los subconjuntos de Y de la forma $Y \cap G$, con $G \in \mathcal{A}$.

La familia de conjuntos $\mathcal{A}_Y$ es una base de abiertos en el conjunto Y, es decir $\mathcal{A}_Y$ satisface las propiedades:

K_0) $\emptyset \in \mathcal{A}_Y$

K_1) Si $A, B \in \mathcal{A}_Y$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}_Y$

K_2) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}_Y} A = Y$

DEMOSTRACION: K_0) Como $\emptyset \in \mathcal{A}$, $Y \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{A}_Y$

K_1) Si $A = Y \cap G$, $B = Y \cap H$ con $G, H \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B = (Y \cap G) \cap (Y \cap H) = Y \cap (G \cap H)$, luego, $A \cap B \in \mathcal{A}_Y$, porque $G \cap H \in \mathcal{A}$.

K_2) Es inmediato: $Y = Y \cap X \in \mathcal{A}_Y$, porque $X \in \mathcal{A}$.

Podemos definir en Y un operador de interior I_Y sobre Y por el procedimiento indicado en § 2, poniendo para cada $A \subset Y$:

$$I_Y A = \bigcup_{\substack{B \subset A \\ B \in \mathcal{A}_Y}} B$$

Respecto de este operador de interior, diremos que Y es un <u>subespacio</u> del espacio X. También diremos que la topología determinada por I_Y sobre Y es una <u>relativización</u> de la topología de X.

Es claro que Y tomado aisladamente es un espacio topológico. Los conjuntos abiertos de Y son reuniones arbitrarias de conjuntos de la base de abiertos $\mathcal{A}_Y$.

En este caso se verifica que $\mathcal{A}_Y$ es la familia de todos los abiertos de Y. En efecto si $A \subset Y$ es abierto en Y:

$$A = I_Y A = \bigcup_{\substack{B \subset A \\ B \in \mathcal{A}_Y}} B = \bigcup_{\substack{Y \cap G \subset A \\ G \in \mathcal{A}}} (Y \cap G) = Y \cap \bigcup_{\substack{Y \cap G \subset A \\ G \in \mathcal{A}}} G = Y \cap G_0$$

G_0 es una reunión de abiertos en X, luego G_0 es abierto en X, por tanto $A \in \mathcal{A}_Y$.

Podemos entonces enunciar:

<u>Todos los abiertos del subespacio Y se obtienen como intersecciones con Y de los abiertos de X</u>.

Un conjunto $A \subset Y$ será cerrado en Y si y solo si $Y-A$ es abierto en Y.

<u>Un conjunto $A \subset Y$ es cerrado en Y si y solo si $A = Y \cap F$ donde F es cerrado en X</u>:

En efecto, si F es cerrado en X, $-F$ es abierto en X, luego $Y \cap -F$ es abierto en Y, por lo tanto $Y-(Y \cap -F) = Y \cap F = A$ es cerrado en Y.

Si es $A \subset Y$ cerrado en Y, entonces $Y-A$ es abierto en Y; por lo tanto $Y-A = Y \cap G$ con G abierto en X. Como $A = Y-(Y \cap G) = Y \cap -G$ resulta $A = Y \cap -G$, con $-G$ cerrado en X.

7. Conjuntos densos, fronteras, ralos y de 1ra. Categoría.

DEFINICION: Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice denso si y solo si $CA = X$.

Por ejemplo el conjunto A de todos los números racionales es denso en el espacio X de todos los números reales. El conjunto $-A$ de todos los números irracionales es también denso en X.

Si A es denso y B contiene al conjunto A, B es también denso.

En efecto de $A \subset B$ resulta $CA \subset CB$. Como $CA = X$ entonces $CB = X$, esto es, B es denso.

DEFINICION: Un subconjunto A de un espacio X se dice un conjunto frontera si y solo si $-A$ es denso.

Puesto que los racionales según hemos dicho constituyen un conjunto denso, el conjunto de los números irracionales es un ejemplo de conjunto frontera. También los racionales constituyen un conjunto frontera en el espacio X de todos los números reales.

Para que un conjunto A sea frontera es necesario y suficiente que $IA = \emptyset$.

En efecto, las condiciones $IA = \emptyset$ y $C-A = X$ son evidentemente equivalentes.

Si $A \subset B$ y B es frontera, entonces A es frontera.

En efecto de $A \subset B$ resulta $IA \subset IB = \emptyset$, luego $IA = \emptyset$, es decir, A es conjunto frontera.

Para que un conjunto $A \subset X$ sea frontera es necesario y suficiente que para todo abierto $G \neq \emptyset$, sea $G-A \neq \emptyset$.

Demostración: IA es el abierto más grande contenido en A. $IA = \emptyset$ equivale a decir, entonces, que para todo abierto $G \subset A$ es $G = \emptyset$, esto es, si $G \neq \emptyset$, $G \not\subset A$ ó, lo que es lo mismo, si $G \neq \emptyset$, $G-A \neq \emptyset$.

De una manera sugestiva, puede pensarse en los conjuntos densos como "conjuntos grandes" y en los conjuntos frontera como "conjuntos pequeños". Este modo intuitivo de concebir esas nociones depara sorpresas, así, los conjuntos de los números racionales y de los números irracionales son simultáneamente densos (grandes) y frontera (pequeños).

DEFINICION: Un conjunto $A \subset X$ se dirá un conjunto ralo si y solo si su clausura CA es un conjunto frontera.

De acuerdo a la definición:

A es ralo si y solo si $ICA = \emptyset$, ó, lo que es equivalente, si para todo abierto no vacío G, G-CA $\neq \emptyset$.

Un conjunto frontera cerrado es ralo.

Si $B \subset A$ y A es ralo, B es también ralo, puesto que $CB \subset CA$ y CA es, por hipótesis, frontera, luego, por un enunciado anterior CB es frontera, es decir B es ralo.

Los conjuntos ralos son, evidentemente, fronteras. En efecto si A es ralo, CA es frontera, pero $A \subset CA$, luego es frontera.

TEOREMA 7: a) Si G es abierto, CG-G es un conjunto ralo. b) Si F es cerrado F-IF es un conjunto ralo.

DEMOSTRACION: a) Sea G abierto, CG-G es cerrado. Para ver que es ralo mostremos que es frontera, esto es que $I(CG-G) = \emptyset$.

$I(CG-G) = I(CG \cap -G) = ICG \cap I-G = ICG \cap -CG = ICG-CG = \emptyset$

b) Sea F cerrado, F-IF es cerrado, veamos que es frontera, esto es, que $I(F-IF) = \emptyset$, lo que probará que es ralo:

$$I(F-IF) = I(F \cap -IF) = IF \cap I(-IF) = IF \cap -IF = \emptyset.$$

Los conjuntos constituídos por un solo punto, en el espacio X de los números reales, son conjuntos ralos.

El conjunto $A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ es también ralo; $CA = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 0\}$, $ICA = \emptyset$.

El conjunto de los números racionales es un ejemplo de conjunto frontera que no es ralo.

En el espacio X de los números reales hay conjuntos ralos de la potencia del contínuo. El, así llamado, conjunto de Cantor es un ejemplo.

Dado un intervalo cerrado $R = [a,b]$, con la notación R' designaremos al intervalo abierto $(a+\frac{b-a}{3}, b-\frac{b-a}{3})$, tercio medio del intervalo cerrado $R = [a,b]$.

Observemos que $R-R'$ es la reunión de dos intervalos cerrados, disjuntos: $R-R' = [a,a+\frac{b-a}{3}] \cup [b-\frac{b-a}{3}, b]$.

Dada una reunión finita de intervalos cerrados I_i disjuntos $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$, escribiremos "$\propto I$" para designar el conjunto $(I_1-I_1') \cup (I_2-I_2') \cup \dots \cup (I_n-I_n')$, reunión de 2n intervalos cerrados disjuntos.

Definamos inductivamente la siguiente familia de conjuntos:

0) $R_0 = [0,1]$

1) $R_1 = \propto R_0 = [0,1] - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

2) $R_2 = \propto R_1 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

- -

n) $R_1 = \propto R_{n-1}$ (reunión de 2n intervalos cerrados disjuntos, cada uno de longitud $\frac{1}{3^n}$.

El conjunto $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n$, es llamado el <u>conjunto de Cantor</u>.

D no es vacío, evidentemente $0,1 \in D$.

Veamos que D es ralo:

i) D es cerrado, pues es intersección de los cerrados R_n.

ii) $ID = \emptyset$; en efecto D no puede contener ningún intervalo (a,b). Si así fuese $(a,b) \subset R_n$ para todo n. Siendo R_n reunión de intervalos disjuntos, (a,b) estaría contenido en alguno de ellos. Esto es absurdo en cuanto la longitud de cada uno de estos intervalos, $\frac{1}{3^n}$, puede hacerse menor que $\epsilon = b-a$ para n suficientemente grande.

Probemos que D tiene la potencia del contínuo.

Todo $x \in [0,1]$ puede ser escrito en la forma:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots \; , \; 0 \leq a_i < 3,$$

Así, a todo número $x \in [0,1]$ podemos hacer corresponder una sucesión $(a_1, a_2, \dots)$ que llamaremos una <u>representación</u> de x.

Ciertos números admiten dos representaciones distintas, por ejemplo $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^n} \dots$, admite las representaciones $(2,0,0,\dots)$ y $(1,2,2,2,2,\dots)$

Observemos que:

$x \notin R_1$ si y solo si para toda representación de x es $a_1 = 1$

$x \notin R_2$ " " " " " " " " " " $a_2 = 1$

- -

$x \notin R_n$ " " " " " " " " " " $a_n = 1$

En consecuencia $x \in D = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$, esto es, $x \in R_n$ para todo n, equivale a decir que $a_n \neq 1$ para todo n, en alguna representación $(a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots)$ de x.

El conjunto D puede entonces ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de todas las sucesiones $(a_1, a_2, \ldots)$ cuyos términos a_i son 0 ó 2. Este último conjunto es, evidentemente, coordinable con el conjunto de todas las sucesiones cuyos términos son 0 ó 1, cuya potencia es $2^{\aleph_0}$, (potencia del contínuo).

DEFINICION: Un conjunto A de un espacio topológico X se dice que es de primera categoría si es $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde los A_n son conjuntos ralos.

En el espacio X de los números reales todo conjunto numerable es de 1ra. categoría, en particular el conjunto de los números racionales es de 1ra. categoría.

El espacio todo X puede ser un conjunto de 1ra. categoría, como por ejemplo el espacio Y de los números racionales con la topología relativizada.

El espacio X de los números reales no es de 1ra. categoría.

Si $A \subset B$ y B es de 1ra. categoría, A es de 1ra. categoría.

En efecto, sea $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, donde los B_n son ralos.

$A = A \cap B = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)$. Como $A \cap B_n \subset B_n$, $A \cap B_n$ es ralo para todo n, luego A es de 1ra. categoría.

La reunión de una familia finita o numerable de conjuntos de 1ra. categoría, es de 1ra. categoría.

En efecto, ella se reduce a una reunión numerable de conjuntos ralos.

En particular la reunión de dos conjuntos de 1ra. categoría es un conjunto de 1ra. categoría.

Indiquemos finalmente la siguiente

DEFINICION: Un conjunto A de un espacio topológico X se dice que tiene la propiedad de Baire si existe un abierto G tal que
A-G y G-A son conjuntos de 1ra. categoría

Hablando intuitivamente, los conjuntos con la propiedad de Baire son aquellos que se "aproximan mucho" a conjuntos abiertos.

8. Espacios compactos

DEFINICION: Un espacio topológico X se dice que es compacto si para toda familia $\{G_t\}_{t \in T}$ de conjuntos abiertos tal que $X = \bigcup_{t \in T} G_t$ existe un subconjunto finito $T_0 \subset T$ tal que $X = \bigcup_{t \in T_0} G_t$.

OBSERVACION: En general, si una familia $\{A_t\}_{t\in T}$ de conjuntos es tal que $A \subset \bigcup_{t\in T} A_t$, se dice que $\{A_t\}_{t\in T}$ es un <u>cubrimiento</u> de A. Una sub-familia de la dada, $\{A_t\}_{t\in T_0}$, $T_0 \subset T$, se dice un <u>subcubrimiento</u>, si es también un cubrimiento de A.

Podemos decir, entonces, que un espacio X es compacto si cualquier cubrimiento de abiertos de X, contiene un subcubrimiento finito.

<u>TEOREMA 8: Un espacio X es compacto si y solo si para cada familia $\{F_t\}_{t\in T}$ de conjuntos cerrados tal que la intersección de cualquier número finito de conjuntos F_t de la familia es no-vacía se tiene que $\bigcap_{t\in T} F_t \neq \emptyset$.</u>

DEMOSTRACION: Sea X compacto. Supongamos que exista una familia $\{F_t\}_{t\in T}$ de cerrados tal que

i) $\bigcap_{t\in T} F_t = \emptyset$

ii) $\bigcap_{t\in T_0} F_t \neq \emptyset$, para toda parte finita $T_0 \subset T$.

La familia de abiertos $\{-F_t\}_{t\in T}$ verifica entonces

i') $\bigcup_{t\in T} -F_t = X$

ii') $\bigcup_{t\in T_0} -F_t \neq X$, para toda parte finita $T_0 \subset T$,

como resulta de tomar el complemento en i) e ii).

Por ser X compacto, de i'), resulta que $\bigcup_{t\in T_0} -F_t = X$, para alguna parte finita $T_0 \subset T$, lo que contradice ii').

La contradicción muestra que en un espacio compacto vale la condición del teorema.

Recíprocamente, supongamos que X es un espacio verificando la condición del teorema y probemos que X es compacto:

Sea $X = \bigcup_{t \in T} G_t$ donde los conjuntos G_t son abiertos. Tomando el complemento se tiene

$$\text{iii)} \quad \emptyset = \bigcap_{t \in T} -G_t$$

Como $\{-G_t\}_{t \in T}$ es una familia de cerrados de X con intersección vacía, no es posible que para toda parte finita $T_0 \subset T$ sea $\emptyset \neq \bigcap_{t \in T_0} -G_t$ (pues si así fuese, por la condición supuesta, la intersección de todos los $-G_t$ sería no-vacía, lo que es contradictorio con iii). En consecuencia existe $T_0 \subset T$, T_0 finito, tal que $\emptyset = \bigcap_{t \in T_0} -G_t$, y, tomando el complemento, $X = \bigcup_{t \in T_0} G_t$, T_0 finito, $T_0 \subset T$. El espacio X es compacto.

<u>DEFINICION: Un conjunto Y de un espacio topológico X se dice compacto si Y, como subespacio topológico, es compacto</u>.

Observando que los abiertos del subespacio Y son de la forma $Y \cap G$ donde G es abierto en X, y que se puede escribir indistintamente:

$$Y \subset \bigcup_{t \in T} G_t \quad \text{ó} \quad Y = \bigcup_{t \in T} (Y \cap G_t) \text{ :}$$

se verifica:

Un conjunto $Y \subset X$ es compacto si y solo si todo cubrimiento de abiertos (en X) de Y contiene un sub-cubrimiento finito.

Un ejemplo de conjunto compacto en el espacio X de los números reales se indica en el teorema siguiente:

TEOREMA 9: Un conjunto Y cerrado y acotado del espacio de los números reales es compacto.

DEMOSTRACION: Dividiremos la demostración en dos pasos. En el 1er. paso mostraremos que todo cubrimiento numerable de abiertos de Y, contiene un subcubrimiento finito.

En el 2do. paso mostraremos que un cubrimiento arbitrario por abiertos de Y contiene un subcubrimiento numerable. La afirmación del teorema resultará de aplicar, sucesivamente, las conclusiones del 2do. y 1er. paso.

1er. paso: Sea $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n abierto para todo n.

Para todo $m = 1,2,\dots$, es

$$F_m = Y - \bigcup_{n=1}^{m} G_n \neq \emptyset$$

a menos que exista un subcubrimiento $(G_1,G_2,\dots,G_m)$ de Y para algún m, en cuyo caso la demostración termina.

Sea $(x_n) \subset Y$ una sucesión de números reales obtenida tomando para cada m $(m = 1,2,\ldots)$ $x_m \in F_m$, como Y es acotado la sucesión (x_n) es acotada.

Existe entonces una subsucesión (x_{m_p}) convergente, $x_{m_p} \to x$. Por corol. de Teorema 6, § 5, $x \in Y$, pues Y es cerrado por hipótesis.

(F_m) es una familia monótona decreciente de cerrados. Si $m_p \geqslant m$ se tiene $x_{m_p} \in F_m$, entonces la sucesión $(x_{m_p})_{m_p \geqslant m}$ está contenida en F_m, luego, por el teorema citado aplicado al cerrado F_m, $x \in F_m$. Luego, para todo m, $x \notin G_m$, esto es, $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, lo que está en contradicción con la afirmación anterior "$x \in Y$", por cuanto $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$.

<u>2do. paso</u>: Sea $Y \subset \bigcup_{t \in T} G_t$, G_t abierto para todo $t \in T$. Para cada $x \in Y$, existe $t \in T$ tal que $x \in G_t$, por consiguiente existe un intervalo (a_x, b_x), donde a_x, b_x pueden tomarse racionales, tal que $x \in (a_x, b_x) \subset G_t$.

La familia de todos los intervalos con extremos racionales es numerable.

Luego la familia de los intervalos con extremos racionales, $(a_x, b_x)_{x \in Y}$, tales que, para cada $x \in Y$, existe un $t \in T$ tal que $x \in (a_x, b_x) \subset G_t$, es a lo sumo numerable.

Para cada intervalo de esta familia hagamos corresponder uno y sólo un conjunto G_t, tal que $(a_x, b_x) \subset G_t$.

Los G_t así escogidos son en cantidad a lo sumo numerable, y, como $Y \subset \bigcup_{x \in Y}(a_x, b_x)$, con mayor razón ellos cubren a Y.

En particular el conjunto de Cantor es compacto.

TEOREMA 10: Un conjunto cerrado F de un espacio compacto X, es compacto.

DEMOSTRACION: Sea F cerrado, $F \subset \bigcup_{t \in T} G_t$; donde los G_t son abiertos. Se tiene entonces $X = -F \cup \bigcup_{t \in T} G_t$.

La familia constituída por los conjuntos G_t y el conjunto $-F$ es un cubrimiento por abiertos de X.

Siendo X compacto, para una parte To finita de T se tendrá $X = -F \cup \bigcup_{t \in To} G_t$, y, entonces, $F \subset \bigcup_{t \in To} G_t$, lo que prueba que F es compacto.

9. Espacios de Hausdorff, regulares y totalmente disconexos

DEFINICION: Un espacio topológico X se dice un espacio To si y sólo si para todo par de puntos $x, y \in X$ $(x \neq y)$ existe un conjunto abierto G que contiene solo uno de los puntos x, y.

Si X tiene más de un punto y los únicos abiertos de X son X y $\emptyset$, X no es un espacio To, evidentemente.

<u>DEFINICION: Un espacio topológico X se dice un espacio T_1 si y solo si, dados un par de puntos $x, y \in X$ $(x \neq y)$ existe un abierto G tal que $x \in G$, e $y \notin G$.</u>

Es evidente que todo espacio T_1 es también To.

Como ejemplo de un espacio topológico que siendo To no es T_1, consideremos: $X = \{x, y\}$ cuyos conjuntos abiertos sean X, $\emptyset$, $\{x\}$.

<u>Un espacio topológico X es un espacio T_1 si y solo si los conjuntos $\{x\}$ que contienen un solo punto $x \in X$, son cerrados</u>.

En efecto, sea X un espacio T_1, veamos que, para cualquier $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado.

Para cada $y \notin \{x\}$, esto es, $y \neq x$, existe, por hipótesis, un conjunto abierto G_y tal que $y \in G_y$, $x \notin G_y$, luego,

$$-\{x\} = \bigcup_{y \neq x} G_y$$

En consecuencia, puesto que para cada $y \neq x$, G_y es abierto. $-\{x\}$ es abierto, esto es $\{x\}$ es cerrado.

Recíprocamente: supongamos que para cada $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado y probamos que X es un espacio T_1.

Sean $x \neq y$ puntos de X; considerando $G = -\{y\}$, que es abierto, se verifica, evidentemente, $x \in G$, $y \notin G$. Lo que prueba que X es T_1.

<u>DEFINICION: Diremos que un espacio topológico X es</u>

un espacio T_2, ó de Hausdorff, si y solo si para todo par de puntos $x,y \in X$ existen abiertos G, H tales que

$$G \cap H = \emptyset \quad y \quad x \in G, \quad y \in H$$

Por ejemplo, los espacios métricos son espacios de Hausdorff. En efecto dados x, y, $x \neq y$, es $\rho(x,y) = \varepsilon > 0$. Las esferas $G = K(x, \frac{\varepsilon}{2})$, $H = K(y, \frac{\varepsilon}{2})$ verifican las condiciones: $x \in G$, $y \in H$, G y H son abiertos y son disjuntos, pues de existir $z \in G = K(x, \frac{\varepsilon}{2})$ y $z \in H = K(y, \frac{\varepsilon}{2})$ sería

$$\varepsilon = \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \; (\varepsilon < \varepsilon \,!)$$

Es evidente que todo espacio de Hausdorff es también un espacio T_1.

El ejemplo siguiente muestra que existen espacios T_1 que no son de Hausdorff.

Sea X infinito y sean sus abiertos los complementos de partes finitas de X, $\emptyset$ y X. Los cerrados son, por consiguiente, las partes finitas, $\emptyset$ y X. Por lo tanto, los conjuntos con un solo punto son cerrados, esto es, el espacio es T_1.

El espacio no es T_2 pues de existir en X dos abiertos no vacíos, H,G disjuntos, $H \cap G = \emptyset$ sería $-H \cup -G = X$, lo que no puede ser porque $-H$, $-G$ son finitos y X es infinito.

DEFINICION: Un espacio topológico X se dice regular si dados un abierto G y un punto $x \in G$, existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y $CU \subset G$.

El ejemplo precedente muestra un espacio T_1 que no es regular.

Para que un espacio topológico X sea regular es necesario y suficiente que para todo cerrado F y todo punto $x \notin F$ existan abiertos U,V tales que $x \in U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

La condición es necesaria: Sea X regular, F cerrado y $x \notin F$, esto es, $x \in -F$, donde $-F$ es abierto. Existe entonces un abierto U tal que $x \in U$, $CU \subset -F$.

Sea $V = -CU$, V es abierto, $F \subset -CU = V$, y como $U \subset CU$, $U \cap V = \emptyset$.

La condición es suficiente: Sea G abierto y $x \in G$; $F = -G$ es cerrado y $x \notin F$, luego existen V y U abiertos tales que $x \in U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Veamos que U verifica además la condición $CU \subset G$, lo que probará que el espacio es regular.

De $F \subset V$, se tiene $-V \subset -F = G$. De $U \cap V = \emptyset$ resulta $U \subset -V$, luego $CU \subset -V$ pues $-V$ es cerrado. En consecuencia $CU \subset G$.

TEOREMA 11: Todo espacio métrico es regular.

DEMOSTRACION: Sea G un conjunto abierto del espacio métrico X y sea $x \in G$. Como G es abierto existe una esfera $K(x,r) \subset G$.

Consideremos la esfera $U = K(x, \frac{r}{2})$ y probemos que $CU \subset K(x,r)$.

Veamos, para ello, que el conjunto $S = \{y;\ \rho(x,y) \leq \frac{r}{2}\}$ es un conjunto cerrado.

En efecto, si (x_n) es una sucesión de puntos $x_n \in S$ y $x_n \to x_o$, es $x_o \in S$.

(i) $\rho(x, x_o) \leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,x_o) \leq \frac{r}{2} + \rho(x_n,x_o)$, para todo n.

(ii) $\rho(x_n,x_o) \to 0$

De (i) e (ii) se sigue $\rho(x,x_o) \leq \frac{r}{2}$; luego $x_o \in S$.

Evidentemente, $U \subset S \subset K(x,r)$. Siendo S cerrado $CU \subset S \subset K(x,r)$. $x \in U$, U es abierto y $CU \subset K(x,r) \subset G$.

<u>TEOREMA 12: Todo espacio de Hausdorff compacto es regular.</u>

DEMOSTRACION: Sea F un conjunto cerrado y $x \notin F$.

Para cada $y \in F$ ($x \neq y$ necesariamente) existen abiertos G_y, H_y disjuntos tales que $x \in G_y$, $y \in H_y$, pues el espacio es de Hausdorff.

La familia $(H_y)_{y \in F}$ es un cubrimiento por abiertos de F.

Como el espacio es compacto y F es cerrado, F es un conjunto compacto (teor. 10), luego existe un subcubrimiento finito de F:

$$F \subset H_{y_1} \cup H_{y_2} \cup \ldots \cup H_{y_n}$$

Sean

$$V = H_{y_1} \cup H_{y_2} \cup \dots \cup H_{y_n}$$

$$U = G_{y_1} \cap G_{y_2} \cap \dots \cap G_{y_n}$$

U y V son abiertos $x \in U$, $F \subset V$ y U,V son disjuntos:

$U \cap V \subset (G_{y_1} \cap H_{y_1}) \cup (G_{y_2} \cap H_{y_2}) \cup \dots \cup (G_{y_n} \cap H_{y_n}) = \emptyset$

En consecuencia, el espacio es regular.

TEOREMA 13: Si X es un espacio de Hausdorff compacto, todo conjunto de 1ra. categoría es un conjunto frontera.

DEMOSTRACION: Sea $A \subset X$ un conjunto de 1ra. categoría, esto es, sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; con A_n ralo para todo n.

Podemos suponer $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ donde los F_n son cerrados ralos (frontera) tomando $F_n = CA_n$.

Vamos a probar que para todo abierto G no vacío, $G-A \neq \emptyset$.

Como es espacio X es de Hausdorff y compacto, es regular (teor. 12).

$G-F_1 \neq \emptyset$, pues F_1 es frontera y $G-F_1$ es abierto. Por la regularidad, si $x_1 \in G-F_1$, existe un abierto G_1 tal que

$$x_1 \in G_1 \text{ , } CG_1 \subset G-F_1 \subset G$$

$G_1-F_2 \neq \emptyset$, pues F_2 es frontera y G_1-F_2 es abierto. Por la regularidad, si $x_2 \in G_1-F_2$, existe un abierto G_2 tal que $x_2 \in G_2$, $CG_2 \subset G_1-F_2 \subset G_1$. Por inducción definimos la sucesión de abiertos no vacíos $G, G_1, G_2, \dots, G_n$ tales que

$G_n \subset CG_n \subset G_{n-1} - F_n \subset G_{n-1}$. La sucesión (G_n) es monótona decreciente, y así lo es también la sucesión de cerrados (CG_n).

Cada subfamilia finita $(CG_{n_0}, CG_{n_1}, \ldots, CG_{n_k})$ tiene como intersección el más pequeño de los conjuntos CG_{n_i}, luego todas las intersecciones finitas de la familia (CG_n) son no-vacías.

Como el espacio es compacto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} CG_n \neq \emptyset$. Sea x un punto en esta intersección.

En particular $x \in CG_1 \subset G$, luego $x \in G$ (i). Además, $x \in CG_n \subset G_{n-1} - F_n$ para todo n, luego, cualquier sea n, $x \notin F_n$. Esto es $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, de donde $x \notin A$ (ii).

De (i) e (ii) $x \in G-A$, esto es $G-A \neq \emptyset$

<u>DEFINICION: Un espacio topológico X se dice totalmente disconexo si, para cada par de puntos $x, y \in X$, existen abiertos disjuntos H, G tales que $x \in G$, $y \in H$ y $G \cup H = X$.</u>

De la definición se sigue inmediatamente que G y H son simultáneamente, abiertos y cerrados.

De otra manera: un espacio topológico X es totalmente disconexo cuando, para cada par de puntos $x, y \in X$, existe un conjunto G simultáneamente abierto y cerrado que contiene a uno de los puntos dados y no contiene al otro.

Es claro que los espacios totalmente disconexos son espacios de Hausdorff.

Un conjunto frontera Y, considerado como subespacio en el conjunto X de los números reales es un espacio totalmente disconexo.

En efecto, dados $x \neq y, x, y \in Y$, sea $x < y$, existe necesariamente $z \notin Y$, $x < z < y$, pues de otro modo el intervalo $(x,y) \subset Y$, lo que no puede ser puesto que Y es frontera.

Tomando:
$$G = Y \cap \{t \; ; \; t < z\}$$
$$H = Y \cap \{t \; ; \; t > z\}$$

tendremos evidentemente:
$$G \cap H = \emptyset \; , \; G \cup H = Y \; (z \notin Y) \; , \; x \in G, \; y \in H$$

Resulta de aquí que el conjunto de Cantor, considerado como subespacio en el conjunto de los números reales, es totalmente disconexo.

II. REPRESENTACION TOPOLOGICA DE RETICULADOS DISTRIBUTIVOS Y ALGEBRAS DE BOOLE

1. Revista de nociones de la teoría de reticulados

En un conjunto A parcialmente ordenado por la relación $\leq$ (reflexiva, antisimétrica y transitiva) un elemento $a \in A$ se dice supremo de un conjunto $(a_t)_{t \in T} \subset A$ si

(i) $a_t \leq a$ para todo $t \in T$.

(ii) Si $a_t \leq k$ para todo $t \in T$, entonces $a \leq k$.

El supremo de un conjunto $(a_t)_{t \in T}$, si existe, será designado con la notación "$\bigvee_{t \in T} a_t$".

El concepto dual es el de ínfimo. Un elemento $b \in A$ se dice ínfimo de un conjunto $(b_t)_{t \in T} \subset A$ si

(i') $b \leq b_t$, para todo $t \in T$.

(ii') Si $k \leq b_t$ para todo $t \in T$, entonces $k \leq b$.

El ínfimo de un conjunto $(b_t)_{t \in T}$, si existe, será designado con la notación "$\bigwedge_{t \in T} b_t$".

Supremo e ínfimo de un conjunto de dos elementos $\{a,b\}$ se designarán, respectivamente "$a \vee b$" y "$a \wedge b$".

<u>DEFINICION: Un conjunto A parcialmente ordenado tal que para cada par $a,b \in A$ existen $a \vee b$ y $a \wedge b$ se dice un reticulado.</u>

Un reticulado A se dice distributivo si para elementos $a,b,c \in A$ cualesquiera vale:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Se demuestra sin dificultad que un reticulado es distributivo si y solo si vale la ley dual de la anterior:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Una familia $\mathcal{A}$ de partes de un conjunto fijo X se dice un <u>anillo de conjuntos</u> si

a_1) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$

a_2) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$

Un anillo de conjuntos es un ejemplo de reticulado distributivo.

Sea B un sub-reticulado del reticulado A, es decir sea B un conjunto de elementos cerrado respecto de las operaciones $\vee, \wedge$ de A. A veces será conveniente precisar, si el supremo (o el ínfimo) de la familia $(a_t)_{t \in T} \subset B$ se considera en relación al sub-reticulado B o en relación al reticulado A; para distinguir el 1ro. del 2do. caso escribiremos:

$$\overset{B}{\bigvee_{t \in T}} a_t, \quad \overset{A}{\bigvee_{t \in T}} a_t \quad \left(\overset{B}{\bigwedge_{t \in T}} a_t, \quad \overset{A}{\bigwedge_{t \in T}} a_t \right)$$

<u>DEFINICION: Si A es un reticulado, una parte I de A se dirá un ideal si y solo si</u>

I_1) Cualesquiera sean $a,b \in I$, $a \vee b \in I$

I_2) Si $a \in I$ y $b \leq a$, entonces $b \in I$

El concepto dual es el de filtro

DEFINICION: Una parte F de un reticulado A se dirá un filtro si y solo si:

F_1) Cualesquiera sean $a,b \in F$, $a \wedge b \in F$.

F_2) Si $a \in F$ y $a \leq b$, entonces $b \in F$.

Los ideales y filtros que no coinciden con el reticulado A (que es, evidentemente, ideal y filtro) se dicen propios.

Un ideal se dice ideal primo si y solo si es propio y verifica la condición:

Si $a \wedge b \in I$, entonces $a \in I$ ó $b \in I$

Dualmente: un filtro F se dice filtro primo si y solo si es propio y verifica la condición:

Si $a \vee b \in F$, entonces $a \in F$ ó $b \in F$

Se puede probar que un ideal I es ideal primo si y solo si A-I es un filtro primo.

Enunciaremos el teorema siguiente, que juega un papel central en la teoría de representación de reticulados:

TEOREMA 1: Si F, I son, respectivamente, un filtro y un ideal de un reticulado distributivo, y si $F \cap I = \emptyset$: **existe un filtro primo P tal que**

$\underline{F \subset P \ \ y \ \ P \cap I = \emptyset}$

Observación: Si Q es el complemento de P, $Q = A-P$, Q es un ideal primo: $I \subset Q$ y P,Q son disjuntos.

Del teorema 1 resulta que todo filtro F, propio, en un reticulado distributivo es intersección de filtros primos.

Basta observar que para todo $a \notin F$, existe un filtro primo P tal que $F \subset P$ y $a \notin P$. Esto es una consecuencia del teorema 1 si se considera el ideal principal $I = \{ x; \ x \leq a \}$.

En caso de que existan, primero o último elemento de un reticulado A serán designados, respectivamente, con las notaciones 0, 1.

<u>DEFINICION: Llamamos álgebra de Boole a todo reticulado distributivo A con 1ro. y último elementos tal que para cada $a \in A$, existe un elemento $-a \in A$ tal que</u>

$$\underline{a \wedge -a = 0 \quad y \quad a \vee -a = 1}$$

<u>$-a$ se dice el complemento de a</u>.

Una familia $\mathcal{B}$, de partes de un conjunto fijo X, tal que

K_1) Si $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cup B \in \mathcal{B}$

K_2) Si $A \in \mathcal{B}$, $-A = X - A \in \mathcal{B}$

se dice un <u>cuerpo de conjuntos</u> de X.

Un cuerpo de conjuntos es un ejemplo de álgebra de Boole.

DEFINICION: Sean A, A' reticulados. Una transformación unívoca h de A en (sobre) A' se dice un homomorfismo de A en (sobre) A' si h conserva las operaciones $\vee$, $\wedge$, esto es si, cualesquiera sean $a, b \in A$,

$$h_1)\quad h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$$

$$h_2)\quad h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$

Si h es un homomorfismo de A sobre A', A' se dice una imagen homomorfa de A.

Si h es biunívoca, h se dice un isomorfismo de A en A', o de A sobre A', según el caso. En el caso de existir un isomorfismo h de A sobre A', A y A' se dice que son reticulados isomorfos. Desde el punto de vista del álgebra dos reticulados isomorfos son indiscernibles.

Definiciones análogas se introducen en el caso de que A y A' sean álgebras de Boole, en este caso hay que exigir además que h conserve la complementación, esto es:

$$h_3)\quad h(-a) = -h(a).$$

Observación: Es suficiente exigir que h verifique $h_3)$ y una de las $h_1)$ $h_2)$. Por ejemplo, si $h_2)$ y $h_3)$ se verifican vale $h_1)$:

$$h(a \vee b) = h(-(-a \wedge -b)) = -h(-a \wedge -b) = -(h(-a) \wedge h(-b)) =$$

$$= -(-h(a) \wedge -h(b)) = h(a) \vee h(b)$$

2. Representación de un reticulado distributivo

Suponemos que el lector conoce el siguiente teorema de representación de Stone.

TEOREMA 2: Todo reticulado distributivo A es isomorfo a un anillo de conjuntos.

Recordemos las ideas esenciales que intervienen en la demostración de este teorema.

Sea $\mathfrak{S}$ el conjunto de todos los filtros primos del reticulado A.

Dado $a \in A$, representamos por $h(a)$ el conjunto de todos los filtros primos P tales que $a \in P$. Se tiene entonces:

$$P \in h(a) \qquad \text{equivale a} \qquad a \in P$$

h es una transformación de A en el conjunto de todas las partes de $\mathfrak{S}$. Se prueba que h es biunívoca y que verifica las condiciones:

$$h_1)\ h(a \vee b) = h(a) \cup h(b)$$

$$h_2)\ h(a \wedge b) = h(a) \cap h(b)$$

La familia de todos los conjuntos de la forma $h(a)$: $\mathcal{R}_0 = \{h(a)\}_{a \in A}$, es, entonces, un anillo de conjuntos isomorfo al reticulado dado A.

Si A tiene primer elemento 0, $h(0) = \emptyset \in \mathcal{R}_0$

Si A tiene último elemento 1, $h(1) = \mathfrak{S} \in \mathcal{R}_0$

En general A no tendrá primer elemento y por lo tanto $\emptyset \notin \mathcal{K}_0$. Consideremos la familia $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \{\emptyset\}$.

Veamos que la familia $\mathcal{K}$ de conjuntos de $\mathcal{S}$ tiene las propiedades de una base de abiertos, lo que nos va a permitir introducir una topología en $\mathcal{S}$.

K_0) $\emptyset \in \mathcal{K}$. Es evidente.

K_1) Si $G,H \in \mathcal{K}$, $G \cap H \in \mathcal{K}$. En efecto, $\mathcal{K}$ es un anillo de conjuntos.

K_2) $\bigcup_{G \in \mathcal{K}} G = \mathcal{S}$. Sea $P \in \mathcal{S}$, esto es sea P un filtro primo de A. Tomando $a \in P$ se tiene $P \in h(a) \in \mathcal{K}$.

Podemos entonces definir un operador de interior sobre $\mathcal{S}$, poniendo, para cada $B \subset \mathcal{S}$:

$$IB = \bigcup_{\substack{G \in \mathcal{K} \\ G \subset B}} G = \bigcup_{\substack{a \in A \\ h(a) \subset B}} h(a)$$

El espacio $\mathcal{S}$ con la topología así definida se dice el <u>espacio de Stone</u> del reticulado distributivo A.

Destaquemos que todos los conjuntos $h(a) \in \mathcal{K}$ son abiertos y que todo abierto es reunión de conjuntos de $\mathcal{K}$. (cap. I, § 2)

Probemos ahora el siguiente teorema, debido a M. Stone:

<u>TEOREMA 3: El espacio de Stone $\mathcal{S}$ de un reticulado distributivo A es un espacio T_0. Si A tiene último elemento, $\mathcal{S}$ es un espacio compacto.</u>

DEMOSTRACION: <u>$\mathcal{S}$ es un espacio To</u>. Sean $P, Q \in \mathcal{S}$, $P \neq Q$. Los filtros primos P, Q son distintos, existe por tanto un elemento $a \in A$ tal que, por ejemplo,

$$a \in P \quad , \quad a \notin Q$$

esto equivale a decir que

$$P \in h(a) \quad , \quad Q \notin h(a)$$

$h(a)$ es abierto y el espacio es, entonces, To.

<u>Si A tiene último elemento, $\mathcal{S}$ es compacto</u>.

Sea $\{G_t\}_{t \in T}$ una familia de abiertos de $\mathcal{S}$ tal que

$$\mathcal{S} = \bigcup_{t \in T} G_t$$

Siendo cada abierto reunión de conjuntos $h(a) \in \mathcal{K}$, podemos escribir:

$$\mathcal{S} = \bigcup_{b \in B} h(b)$$

Donde $B \subset A$ es el conjunto de todos los $b \in A$ tales que $h(b) \subset G_t$ para algún $t \in T$.

Supongamos que para cada conjunto finito de elementos de B, $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, sea

$$h(b_1) \cup h(b_2) \cup \ldots h(b_n) = h(b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n) \neq \mathcal{S} = h(1).$$

Como h es un isomorfismo

$$b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n \neq 1$$

para cualquier conjunto finito de elementos de B.

Consideremos el conjunto I de todos los elementos x de A tales que existe un número finito de elementos de B $b_1, b_2, \ldots b_n$ tales que:

$$x \leq b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n$$

Se reconoce de inmediato que I es un ideal que contiene a B, (es el ideal generado por B). Como $1 \notin I$, I es un ideal propio.

Por teorema 1, puesto que el filtro $\{1\}$ y el ideal I son disjuntos existe un filtro primo P que es disjunto de I. Como $B \subset I$, para todo $b \in B$, $b \notin P$, esto es, para todo $b \in B$, $P \notin h(b)$, o sea:

$$P \notin \bigcup_{b \in B} h(b) = \mathcal{S}$$

Esto es absurdo, en consecuencia existe una parte finita de B, $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset B$, tal que

$$h(b_1) \cup h(b_2) \cup \ldots \cup h(b_n) = \mathcal{S}$$

Escogiendo para cada $b_1, b_2, \ldots, b_n$ un G_{t_i} tal que $h(b_i) \subset G_{t_i}$, se tiene

$$G_{t_1} \cup G_{t_2} \cup \ldots \cup G_{t_n} = \mathcal{S}$$

Lo que muestra que existe una subfamilia finita, del cubrimiento de $\mathcal{S}$ dado, que cubre a $\mathcal{S}$. Probamos así que $\mathcal{S}$ es compacto.

3. <u>Representación topológica de un álgebra de Boole</u>

Si el reticulado distributivo A es, además, un álgebra de Boole, el espacio de Stone asociado $\mathcal{S}$, que ya sabemos es To y compacto, presenta otras particularidades que vamos a precisar.

La familia $\mathcal{K} = \{h(a)\}_{a \in A}$ es un cuerpo de conjuntos del espacio $\mathcal{S}$, isomorfo al álgebra de Boole A.

En este caso h conserva la complementación, en efecto, de las igualdades:

$$a \wedge -a = 0$$

$$a \vee -a = 1$$

se sigue

$$h(a) \cap h(-a) = h(o) = \emptyset$$

$$h(a) \cup h(-a) = h(1) = \mathcal{S}$$

luego:

$$h(-a) = -h(a) = \mathcal{S} - h(a)$$

Probemos el siguiente teorema de M. Stone:

<u>TEOREMA 4: Si A es un álgebra de Boole, el espacio de Stone de A, $\mathcal{S}$, es un espacio compacto, totalmente disconexo. El cuerpo de conjuntos $\mathcal{K}$ isomorfo a A, coincide con la familia de todos los conjuntos de $\mathcal{S}$, simultáneamente abiertos y cerrados</u>.

DEMOSTRACION: $\mathcal{S}$ es totalmente disconexo:

Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{S}$, $P_1 \neq P_2$; es decir P_1, P_2 son dos filtros primos de A distintos. Existe, entonces, al menos un elemento en uno de ellos que no pertenece al otro, sea por ejemplo:

$$a \in P_1 \quad , \quad a \notin P_2$$

esto es

$$P_1 \in h(a) \quad , \quad P_2 \notin h(a)$$

o, lo que es lo mismo

$$P_1 \in h(a) \quad , \quad P_2 \in -h(a) = h(-a)$$

Los conjuntos h(a), h(-a) son abiertos, disjuntos y su reunión es el espacio $\mathcal{S}$, lo que prueba que $\mathcal{S}$ es totalmente disconexo.

Probemos que $\mathcal{R} = \{h(a)\}_{a \in A}$ es precisamente la familia de todos los abiertos cerrados de $\mathcal{S}$.

Es claro que todo $h(a) \in \mathcal{R}$ es abierto cerrado porque h(a) es abierto y $-h(a) = h(-a)$ es también abierto, luego h(a) es cerrado.

Sea G un conjunto abierto cerrado. Por ser abierto,

$$G = \bigcup_{b \in B} h(b) \quad , \quad B \subset A$$

Como G es cerrado, él es compacto porque $\mathcal{S}$ es un espacio compacto (teor. 10, cap. I), luego existe un número finito de elementos de B: $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tales que

$$G = h(b_1) \cup h(b_2) \cup \ldots \cup h(b_n)$$

Pero, por ser h un isomorfismo,

$$h(b_1) \cup h(b_2) \cup \ldots h(b_n) = h(b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n),$$

luego,

$$G = h(b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n) \in \mathcal{R}$$

<u>COROLARIO: Toda álgebra de Boole es isomorfa a la familia de todos los conjuntos abiertos cerrados de un espacio topológico compacto totalmente disconexo.</u>

4. Isomorfismos de un álgebra de Boole sobre un cuerpo de conjuntos preservando ciertos ínfimos y supremos infinitos.

DEFINICION: Un elemento $a = \bigvee_{t \in T} a_t$ ($a = \bigwedge_{t \in T} a_t$) se dice un supremo (ínfimo) esencialmente infinito de la familia $\{a_t\}_{t \in T}$ de elementos de un reticulado A si $a \neq \bigvee_{t \in T_o} a_t$ ($a \neq \bigwedge_{t \in T_o} a_t$), para toda subfamilia finita $\{a_t\}_{t \in T_o}$ de la familia dada.

Sea A un álgebra de Boole y sea h el isomorfismo (al cual llamaremos desde ahora isomorfismo de Stone), de A sobre el cuerpo de conjuntos $\{h(a)\}_{a \in A}$ del espacio de Stone $\mathcal{S}$.

Observemos que el isomorfismo de Stone h no conserva ningún supremo y ningún ínfimo esencialmente infinito.

Sea $a = \bigvee_{t \in T} a_t$ y supongamos que $h(a) = \bigcup_{t \in T} h(a_t)$.

Como se vió en la demostración del teorema 4, por ser h(a) compacto, existen $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, tales que

$$h(a) = h(a_{t_1}) \cup h(a_{t_2}) \cup \ldots \cup h(a_{b_n}) =$$
$$= h(a_{t_1} \vee a_{t_2} \vee \ldots \vee a_{t_n})$$

Como h es un isomorfismo, se tiene

$$a = a_{t_1} \vee a_{t_2} \vee \ldots \vee a_{t_n},$$

lo que muestra que a no es un supremo esencialmente infinito de la familia $\{a_t\}_{t \in T}$.

Se prueba sin dificultad, pasando a complementarios que h no conserva tampoco ínfimos esencialmente infinitos.

En materia de conservar ínfimos o supremos esencialmente ininfinitos el isomorfismo de Stone no podría ser peor.

Notemos que si

$$a = \bigvee_{t \in T} a_t,$$

en general vale la inclusión:

$$\bigcup_{t \in T} h(a_t) \subset h(a)$$

En efecto, de $a_t \leq a$ para todo $t \in T$, resulta, visto que h conserva el orden, $h(a_t) \subset h(a)$, y, por lo tanto, $\bigcup_{t \in T} h(a_t) \subset h(a)$.

Asimismo si $a = \bigwedge_{t \in T} a_t$, en general vale la inclusión:

$$h(a) \subset \bigcap_{t \in T} h(a_t)$$

Vamos a probar ahora que las diferencias:

$$h(a) - \bigcup_{t \in T} h(a_t) \qquad ; \qquad \bigcap_{t \in T} h(a_t) - h(a)$$

son, hablando intuitivamente, conjuntos pequeños.

<u>TEOREMA 5: Si A es un álgebra de Boole, h el isomorfismo de Stone y si $a = \bigvee_{t \in T} a_t$ ($a = \bigwedge_{t \in T} a_t$) el conjunto $F = h(a) - \bigcup_{t \in T} h(a_t)$ ($H = \bigcap_{t \in T} h(a_t) - h(a)$) es un conjunto ralo del espacio de Stone de A.</u>

DEMOSTRACION: Como h(a) es cerrado y $\bigcup_{t \in T} h(a_t)$ es abierto, $F = h(a) - \bigcup_{t \in T} h(a_t)$, es un conjunto cerrado.

Veamos que F es un conjunto frontera, es decir, $IF = \emptyset$.

Siendo F cerrado, ésto probará que es ralo.

Si fuese $IF \neq \emptyset$; como IF es una reunión de conjuntos $h(b)$, $b \in A$, existe un $a_o \in A$ tal que

$$h(a_o) \neq \emptyset \quad y \quad h(a_o) \subset F \subset h(a)$$

Como h es un isomorfismo:

$$a_o \neq 0 \quad y \quad a_o \leq a$$

de donde

$$(i) \quad a - a_o < a$$

De $h(a_o) \subset h(a) - \bigcup_{t \in T} h(a_t)$, se tiene, para todo $t \in T$,

$$h(a_o) \subset h(a) - h(a_t),$$

y como $h(a_t) \subset h(a)$, para todo $t \in T$,

$$h(a_t) \subset h(a) - h(a_o) = h(a - a_o),$$

luego, puesto que h es un isomorfismo, para todo $t \in T$, $a_t \leq a - a_o$.

Por consiguiente, teniendo en cuenta (i):

$$a = \bigvee_{t \in T} a_t \leq a - a_o < a$$

$a < a$ es absurdo, luego $IF = \emptyset$.

Probemos ahora que si $a = \bigwedge_{t \in T} a_t$, el conjunto $H = \bigcap_{t \in T} h(a_t) - h(a)$ es ralo:

De $a = \bigwedge_{t \in T} a_t$, obtenemos $-a = \bigvee_{t \in T} -a_t$. Por lo ya probado podemos afirmar que $h(-a) - \bigcup_{t \in T} h(-a_t)$ es ralo, pero este conjunto coincide con H:

$$h(-a) - \bigcup_{t \in T} h(-a_t) = -h(a) \cap - \bigcup_{t \in T} -h(a_t) = -h(a) \cap \bigcap_{t \in T} h(a_t) = \bigcap_{t \in T} h(a_t) - h(a) = H,$$

luego H es ralo.

Ya hemos visto que el isomorfismo de Stone de un álgebra de Boole no conserva ínfimos ni supremos esencialmente infinitos.

Se presenta naturalmente el interrogante:

¿Existen representaciones de un álgebra de Boole, por un cuerpo de conjuntos, que conserven algunos supremos e ínfimos esencialmente infinitos?

Más precisamente, sean dadas dos familias $(a_s)_{s\in S}$, $(b_s)_{s\in S'}$ de elementos del álgebra de Boole A. Sea cada uno de los elementos a_s, b_s supremo e ínfimo respectivamente de elementos de A, es decir:

$$(\ell)\quad \begin{cases} a_s = \bigvee_{t\in T_s} a_{s,t} & \text{para todo } s\in S \\ b_s = \bigwedge_{t\in T'_s} b_{s,t} & \text{para todo } s\in S' \end{cases}$$

Estamos interesados en averiguar condiciones necesarias y suficientes que aseguren la existencia de un isomorfismo h de A sobre un cuerpo de conjuntos que conserve las igualdades (ℓ), es decir que verifique las condiciones siguientes:

$$(C)\quad \begin{cases} h(a_s) = \bigcup_{t\in T_s} h(a_{s,t}) & \text{para todo } s\in S \\ h(b_s) = \bigcap_{t\in T'_s} h(b_{s,t}) & \text{para todo } s\in S' \end{cases}$$

A un tal isomorfismo h, diremos un ℓ-isomorfismo.

DEFINICION: Si A es un álgebra de Boole y h un homomorfismo de A sobre un cuerpo de conjuntos de un conjunto fijo X diremos que h es un ℓ-homorfismo, si y solo si de las igualdades (ℓ) se deducen las igualdades (C).

Introduciremos ahora el concepto de ℓ-filtro, destinado a desempeñar el papel que corresponde a los filtros primos en la representación de Stone, esto es, a ser los puntos del espacio de representación.

DEFINICION: Diremos que un filtro primo P del álgebra de Boole A es un ℓ-filtro si P verifica las dos condiciones siguientes:

ℓ_1) Dado $s \in S$, si $a_s = \bigvee_{t \in T_s} a_{s,t} \in P$, entonces existe $t \in T_s$ tal que $a_{s,t} \in P$.

ℓ_2) Dado $s \in S'$, si $b_{s,t} \in P$ para todo $t \in T'_s$, entonces $b_s = \bigwedge_{t \in T'_s} b_{s,t} \in P$.

Observemos que para un ℓ-filtro P valen también:

ℓ'_1) Dado $s \in S$, $a_s \in P$ equivale a: existe $t \in T_s$ tal que $a_{s,t} \in P$.

ℓ'_2) Dado $s \in S'$, $b_s \in P$ equivale a: para todo $t \in T'_s$, $b_{s,t} \in P$.

Tanto en ℓ'_1) como en ℓ'_2) una de las implicaciones se reduce a ℓ_1 ó ℓ_2, respectivamente, la implicación inversa es una consecuencia, en ambos casos, del hecho de ser P un filtro.

TEOREMA 6: Para que exista un ℓ-isomorfismo h de un álgebra de Boole A sobre un cuerpo de conjuntos es necesario y suficiente que, para todo $a \neq 0 (a \in A)$, exista un ℓ-filtro P tal que $a \in P$.

DEMOSTRACION: Con $\mathfrak{S}_o$ designaremos el conjunto de todos los filtros primos de A, y con h_o el isomorfismo de Stone. $\mathfrak{S}_\ell$ designará el conjunto de todos los ℓ-filtros de A y h_ℓ el ℓ-isomorfismo.

a) Suficiente: Para cada $a \in A$, sea $h_\ell(a)$ el conjunto de todos los ℓ-filtros conteniendo el elemento a. Es claro que $h_\ell(a) \subset \mathfrak{S}_\ell$.

Vamos a probar que la transformación $a \rightarrow h_\ell(a)$ es un ℓ-isomorfismo de A en el cuerpo de conjuntos de todas las partes de $\mathfrak{S}_\ell$. Es claro que $\mathfrak{S}_\ell \subset \mathfrak{S}_o$ y que para todo $a \in A$: $h_\ell(a) = h_o(a) \cap \mathfrak{S}_\ell$.

h_o es un isomorfismo de A en el conjunto de todas las partes de $\mathfrak{S}_o$, y la transformación $X \rightarrow X \cap \mathfrak{S}_\ell$ es un homomorfismo del conjunto de todas las partes X de $\mathfrak{S}_o$ sobre el conjunto de todas las partes de $\mathfrak{S}_\ell$, luego h_ℓ es un homomorfismo de A en el conjunto de todas las partes de $\mathfrak{S}_\ell$. Para probar que h_ℓ es un isomorfismo es preciso todavía mostrar que h_ℓ es biunívoca. Para ello, siendo A un álgebra de Boole, es suficiente mostrar que si $a \neq 0$, entonces $h_\ell(a) \neq \emptyset$.

Pero esto es, precisamente, lo que asegura la condición del teorema.

Si $\mathcal{K}_\ell = (h_\ell(a))_{a \in A}$, h_ℓ es un isomorfismo de A sobre el cuerpo de conjuntos $\mathcal{K}_\ell$.

Resta probar que h es un ℓ-isomorfismo de A sobre $\mathcal{K}_\ell$.

i) Para todo $s \in S$, $h_\ell(a_s) = \bigcup_{t \in T_s} h_\ell(a_{s,t})$

$P \in h_\ell(a_s)$ equivale a $a_s \in P$. Como P es un ℓ-filtro, por ℓ_1', $a_s \in P$ equivale a $a_{s,t} \in P$, para algún $t \in T_s$, esto es, $P \in h_\ell(a_{s,t})$, para algún $t \in T_s$. Esto es lo mismo que decir $P \in \bigcup_{t \in T_s} h_\ell(a_{s,t})$. Tenemos, entonces, $P \in h_\ell(a_s)$ equivale a

$P \in \bigcup_{t \in T_s} h_\ell(a_{s,t})$,

luego (i) se verifica.

ii) Para todo $s \in S'$, $h_\ell(b_s) = \bigcap_{t \in T_s'} h_\ell(b_{s,t})$

$P \in h_\ell(b_s)$ equivale a $b_s \in P$. Como P es un ℓ-filtro, por ℓ_2', $b_s \in P$ equivale a $b_{s,t} \in P$, para todo $t \in T_s'$, esto es, $P \in h_\ell(b_{s,t})$, para todo $t \in T_s'$; esto es lo mismo que decir $P \in \bigcap_{t \in T_s'} h\ (b_{s,t})$. Tenemos, entonces, $P \in h\ (b_s)$ equivale a $P \in \bigcap_{t \in T_s'} h\ (b_{s,t})$

luego (ii) se verifica.

b) Necesario: Sea h un ℓ-isomorfismo del álgebra de Boole A sobre un cuerpo $\mathcal{K}$ de partes de un conjunto X.

Queremos probar que si $a \neq o$, $a \in A$, existe un ℓ-filtro P tal que $a \in P$.

Sea $a \neq o$, $a \in A$. Como h es un isomorfismo $h(a) \neq \emptyset$, luego existe $x_o \in h(a)$ $(x_o \in X)$.

Llamaremos P al conjunto de todos los elementos $b \in A$ tales que $x_o \in h(b)$. De acuerdo a la definición de P:

$$b \in P \text{ equivale a } x_o \in h(b)$$

Veamos que P es un ℓ-filtro tal que $a \in P$.

Es claro que $a \in P$ y, por lo tanto,

i) $P \neq \emptyset$

ii) Si $b, c \in P$, entonces $b \wedge c \in P$

Sean $b, c \in P$, esto es, $x_o \in h(b)$ y $x_o \in h(c)$; luego $x_o \in h(b) \cap h(c) = h(b \wedge c)$, esto es, $b \wedge c \in P$.

iii) Si $b \in P$ y $b \leq c$, entonces $c \in P$. De $b \leq c$ se sigue $h(b) \subset h(c)$. Como $b \in P$, es $x_o \in h(b)$; en consecuencia $x_o \in h(c)$, esto es, $c \in P$.

iv) $0 \notin P$. Si fuese $0 \in P$, sería $x_o \in h(0) = \emptyset$, absurdo.

v) Si $b \vee c \in P$, $b \in P$ ó $c \in P$.

$b \vee c \in P$ equivale a $x_o \in h(b \vee c) = h(b) \cup h(c)$, luego $x_o \in h(b)$ ó $x_o \in h(c)$, esto es, ó $b \in P$ ó $c \in P$.

i), ii), iii) prueban que P es un filtro, iv) asegura que P es propio y por v) P es un filtro primo. vi) y vii) que siguen probarán que es ℓ-filtro.

vi) Si $a_s \in P$, existe $t \in T_s$ tal que $a_{s,t} \in P$.

Sea $a_s \in P$, esto es, sea $x_o \in h(a_s)$. Como h es ℓ-isomorfismo:

$$h(a_s) = \bigcup_{t \in T_s} h(a_{s,t}),$$

luego, existe $t \in T_s$ tal que $x_o \in h(a_{s,t})$, es decir, existe $t \in T_s$ tal que $a_{s,t} \in P$.

vii) Si $b_{s,t} \in P$ para todo $t \in T'_s$, entonces $b_s \in P$. Sea $b_{s,t} \in P$ para todo $t \in T'_s$, esto es $x_o \in h(b_{s,t})$ para todo $t \in T'_s$, luego, $x_o \in \bigcap_{t \in T'_s} h(b_{s,t})$, como h es ℓ-isomorfismo: $\bigcap_{t \in T'_s} h(b_{s,t}) = h(b_s)$, luego $x_o \in h(b_s)$, es decir $b_s \in P$.

Observación: El concepto de ℓ-filtro coincide con el concepto de filtro primo en el caso de que los conjuntos S,S' indica dos en (ℓ) son vacíos, o que las clases T_s, T'_s son finitas.

Vamos a indicar, ahora, un caso, especialmente interesante por sus aplicaciones al cálculo funcional de primer orden de la Lógica, en el cual se puede asegurar la existencia de una representación h sobre un cuerpo de conjuntos que conserva un conjunto numerable de ínfimos y supremos esencialmente infinitos.

TEOREMA 7: Si las clases S,S', indicadas en (ℓ), son a lo sumo numerables, existe un ℓ-isomorfismo h de A sobre un cuerpo de conjuntos.

DEMOSTRACION: Utilizaremos las conclusiones obtenidas en la demostración de la parte (a) del teorema 6.

Según lo allí expuesto para que la transformación h_ℓ definida por:

$$h_\ell(a) = h_o(a) \cap \mathcal{S}_\ell ,$$

sea un ℓ-isomorfismo de A sobre el cuerpo de conjuntos $\mathcal{K}_\ell = \{h_\ell(a)\}_{a \in A}$ de $\mathcal{S}_\ell$ es suficiente que, para todo $a \in A$, exista un ℓ-filtro P tal que $a \in P$.

Esto es equivalente a decir que para todo $a \in A$

$$h_\ell(a) = h_o(a) \cap \mathcal{S}_\ell \neq \emptyset$$

y escribiendo $Z = \mathcal{S}_o - \mathcal{S}_\ell$, equivalente a $h_o(a) - Z \neq \emptyset$, para todo $a \in A$.

Pero esta condición es equivalente a decir que Z es un conjunto frontera del espacio de Stone $\mathcal{S}_o$, puesto que los conjuntos $h_o(a)$ son una base de abiertos en $\mathcal{S}_o$.

La demostración del teorema se reducirá, entonces a probar que Z es un conjunto frontera en $\mathcal{S}_o$.

Dado $s \in S$, sea $F_s = h_o(a_s) - \bigcup_{t \in T_s} h_o(a_{s,t})$.

F_s es el conjunto de todos los filtros primos P que no verifican la condición siguiente:

ℓ_1) Si $a_s = \bigvee_{t \in T_s} a_{s,t} \in P$, entonces, para algún $t \in T_s$, $a_{s,t} \in P$.

En efecto, decir que P no verifica ℓ_1) equivale a decir que $a_s \in P$ y, para todo $t \in T_s$, $a_{s,t} \notin P$, esto es, que $P \in h_o(a_s)$ y $P \notin h_o(a_{s,t})$, para todo $t \in T_s$, esto equivale a decir

$$P \in h_o(a_s) - \bigcup_{t \in T_s} h_o(a_{s,t})$$

El conjunto de todos los filtros P que no verifican la condición ℓ_1) para algún $s \in S$ es, entonces $F = \bigcup_{s \in S} F_s$

Del mismo modo se prueba que el conjunto

$$H_s = \bigcap_{t \in T'} h_o(b_{s,t}) - h_o(b_s)$$

es el conjunto de todos los filtros primos P que no verifican la condición siguiente, para $s \in S$ fijo:

ℓ_2) Si $b_{s,t} \in P$ para todo $t \in T'_s$, $b_s = \bigwedge_{t \in T'_s} b_{s,t} \in P$.

El conjunto de todos los filtros primos P que no verifican la condición ℓ_2) para algún $s \in S$ es entonces $H = \bigcup_{s \in S'} H_s$.

Resulta entonces que el conjunto de los filtros primos que no son ℓ-filtros, es decir al conjunto de los filtros primos donde ℓ_1) ó ℓ_2) no valen, es $H \cup F$.

En consecuencia

$$Z = \bigcup_{s \in S} F_s \cup \bigcup_{s \in S'} H_s$$

Por teorema 5, F_s y H_s son ralos para todo $s \in S$, $s \in S'$.

Como, por hipótesis, S y S' son numerables, Z es de 1ra. categoría. Siendo el espacio de Stone $\mathcal{S}_o$, compacto y de Hausdorff Z es un conjunto frontera (teorema 13, cap. I).

5. Homomorfismo de un cuerpo de conjuntos sobre otro, inducido por una función puntual

Sean X, Y conjuntos no vacíos y φ una función definida sobre X tomando sus valores en Y.

Sea $A \subset Y$, con la notación $\varphi^{-1}(A)$ representamos el conjunto de todos los puntos $x \in X$ tales que $\varphi(x) \in A$. $\varphi^{-1}(A)$ suele llamarse la imagen inversa de A por φ.

Observemos que φ^{-1} es una transformación unívoca definida sobre la familia 2^Y de todas las partes de Y, que toma sus valores en la familia 2^X de todas las partes de X.

Puede verificarse sin dificultad que φ^{-1} tiene las propiedades siguientes, para A, B partes cualesquiera de Y:

i) $\varphi^{-1}(A \cap B) = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B)$

ii) $\varphi^{-1}(A \cup B) = \varphi^{-1}(A) \cup \varphi^{-1}(B)$

iii) $\varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $\varphi^{-1}(Y) = X$

iv) $\varphi^{-1}(-A) = -\varphi^{-1}(A)$

La transformación $h: A \to \varphi^{-1}(A)$, es entonces, un homomorfismo del álgebra de Boole 2^Y en el álgebra de Boole 2^X.

Para que h sea, además, un isomorfismo, esto es, para que h sea biunívoca, es necesario y suficiente que φ sea una transformación de X <u>sobre</u> Y.

En efecto, como $\varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, para que $h = \varphi^{-1}$ sea biunívoca es necesario que dado un punto $y \in Y$, $h(\{y\}) = \varphi^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, esto es que exista un $x \in X$ tal que $\varphi(x) = y$, es decir, es necesario que φ sea una función de X sobre Y.

Sean A,B partes distintas de Y, veamos que $\varphi^{-1}(A) \neq \varphi^{-1}(B)$, si φ es una función de X sobre Y. Existe por lo menos un punto en alguno de los conjuntos A,B que no está en el otro. Sea $y \in A$, $y \notin B$; como $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $\varphi(x) = y$. Si fuese $\varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(B)$, como $x \in \varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(B)$ será $\varphi(x) = y \in B$, lo que es absurdo. Luego de $A \neq B$ se sigue

$$h(A) = \varphi^{-1}(A) \neq \varphi^{-1}(B) = h(B).$$

Sean $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ cuerpos de conjuntos de X e Y, respectivamente.

Si el homomorfismo h anteriormente indicado es tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, se tiene $h(A) \in \mathcal{B}$ la transformación h restringida a $\mathcal{A} \subset 2^Y$ es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Si, además, φ es una función de X sobre Y, es claro que h es un isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

Si φ es una transformación biunívoca de X sobre Y y si $h(A) = \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ equivale a $A \in \mathcal{A}$, el isomorfismo h es un isomorfismo de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{B}$. Y en este caso diremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cuerpos de conjuntos equivalentes.

A un homomorfismo (isomorfismo) h obtenido a partir de una función puntual φ, en la forma descripta, se dice un homomorfismo (isomorfismo) inducido por la función φ.

Sea $\mathcal{S}_\ell$ el conjunto de todos los ℓ-filtros de un álgebra de Boole A, $h_\ell(a)$ el conjunto de los ℓ-filtros de A conteniendo $a \in A$, y $\mathcal{K}_\ell = \{h_\ell(a)\}_{a \in A}$.

Aplicaremos los resultados anteriores para probar el siguiente teorema:

<u>TEOREMA 8: Supongamos que para cada elemento $a \neq 0$ de un álgebra de Boole A exista un ℓ-filtro conte-</u>

niendo á a (en cuyo caso A es isomorfa al cuerpo de conjuntos $\mathcal{K}_\ell = \{h_\ell(a)\}_{a \in A}$ de $\mathcal{S}_\ell$). Para todo ℓ-isomorfismo h de A sobre un cuerpo de partes $\mathcal{K}$ de un conjunto X existe una función puntual φ de X en $\mathcal{S}_\ell$ tal que

$$h(a) = \varphi^{-1}(h_\ell(a)), \text{ para todo } a \in A.$$

Observación: Identificando A con $\mathcal{K}_\ell$, puesto que son isomorfos, el teorema viene a afirmar que cualquier ℓ-homomorfismo de $\mathcal{K}_\ell$ sobre un cuerpo de conjuntos $\mathcal{K}$ de un conjunto X, es inducido por una transformación puntual φ de X en $\mathcal{S}_\ell$.

DEMOSTRACION: Sea $x \in X$, indiquemos con la notación P_x al conjunto de todos los $a \in A$ tales que $x \in h(a)$. Por la demostración de la parte b) del teorema 6, P_x es un ℓ-filtro de A, es decir $P_x \in \mathcal{S}_\ell$.

Sea φ la transformación, que a cada $x \in X$ hace corresponder el ℓ-filtro $P_x \in \mathcal{S}_\ell$: $\varphi(x) = P_x$.

La función φ tiene la propiedad requerida.

En efecto:

i) $x \in h(a)$ si y solo si $a \in P_x$

ii) $a \in P_x$ equivale a $P_x \in h_\ell(a)$

De i) e ii):

iii) $x \in h(a)$ equivale a $P_x \in h_\ell(a)$

Por la misma definición de φ

iv) $P_x \in h_\ell(a)$ equivale a $\varphi(x) \in h_\ell(a)$, esto es, a $x \in \varphi^{-1}(h_\ell(a))$.

De iii) y iv) resulta que:

$x \in h(a)$ equivale a $x \in \varphi^{-1}(h_\ell(a))$.

Luego $h(a) = \varphi^{-1}(h_\ell(a))$.

En particular, si los conjuntos S,S' en las igualdades (ℓ) son vacíos, $\mathcal{S}_\ell$ coincide con el espacio de Stone $\mathcal{S}_o$, $h = h_o$ es el isomorfismo de Stone y se tiene el siguiente:

<u>COROLARIO: Para todo homomorfismo h de un álgebra de Boole A sobre un cuerpo de conjuntos $\mathcal{K}$ de un conjunto X, existe una función puntual φ de X en el espacio de Stone de A, $\mathcal{S}_o$, tal que</u>

$$\underline{h(a) = \varphi^{-1}(h_o(a)) \text{ para todo } a \in A}$$

Observación: Identificando el álgebra de Boole A con el cuerpo $\mathcal{K}_o$ de los conjuntos abiertos-cerrados de $\mathcal{S}_o$, el corolario anterior puede enunciarse en la forma siguiente:

<u>Para todo homomorfismo h del cuerpo $\mathcal{K}_o$ de los conjuntos abiertos-cerrados del espacio de Stone $\mathcal{S}_o$ de un álgebra de Boole A sobre un cuerpo de conjuntos $\mathcal{K}$ de un conjunto X, existe una transformación puntual φ de X en $\mathcal{S}_o$ tal que $h(a) = \varphi^{-1}(a)$, para todo $a \in \mathcal{K}_o$.</u>

III. COMPLETAMIENTO DE UN ALGEBRA DE BOOLE

1. Planteo del problema

Dada un álgebra de Boole A sabemos que ella es isomorfa a un cuerpo de conjuntos $\mathcal{R}_o$ del espacio de Stone $\mathcal{S}_o$ de A.

La familia $2^{\mathcal{S}_o}$ de todas las partes del conjunto $\mathcal{S}_o$ es un álgebra de Boole completa, es decir existen ínfimos y supremos de familias arbitrarias de elementos de $2^{\mathcal{S}_o}$.

$\mathcal{R}_o$ es una sub-álgebra del álgebra de Boole $2^{\mathcal{S}_o}$.

Desde el punto de vista del álgebra podemos identificar A y $\mathcal{R}_o$. Podemos, entonces, decir que A es una sub-álgebra del álgebra de Boole completa $2^{\mathcal{S}_o}$.

El isomorfismo h_o de A sobre $\mathcal{R}_o$, como ya hemos observado, no conserva índimos y supremos esencialmente infinitos.

En el cap. II hemos visto, también, que A puede considerarse una sub-álgebra de $2^{\mathcal{S}_\ell}$, el isomorfismo h_ℓ de A en $2^{\mathcal{S}_\ell}$ puede llegar a conservar una cantidad numerable de ínfimos y supremos esencialmente infinitos.

Se plantea naturalmente el siguiente:

<u>Problema</u>: Dada un álgebra de Boole A ¿Existe un álgebra de Boole completa A^* y un isomorfismo h de A en A^* tal que h conserve todos los ínfimos y supremos de elementos de A?

Más precisamente, el isomorfismo h, debe verificar:

(1) Si $a = \bigvee_{t \in T} a_t$ en A, entonces $h(a) = \bigvee_{t \in T} h(a_t)$ en A^*

(2) Si $a = \bigwedge_{t \in T} a_t$ en A, entonces $h(a) = \bigwedge_{t \in T} h(a_t)$ en A^*

En general no es posible que A^* sea un cuerpo de conjuntos.

2. <u>Extensión mínima completa de un álgebra de Boole</u>

En § 7 cap. I hemos probado que los conjuntos de la. categoría de un espacio topológico X, tienen las dos propiedades siguientes:

(i) La reunión de dos conjuntos de la. categoría es un conjunto de la. categoría.

(ii) Un sub-conjunto de un conjunto de la. categoría, es un conjunto de la. categoría.

En consecuencia:

<u>La familia I_o de todos los conjuntos de la. categoría de un espacio X, es un ideal del álgebra de Boole 2^X de todas las partes del conjunto X</u>.

Respecto del ideal I_o es posible definir en 2^X una relación de congruencia:

<u>DEFINICION: Diremos que $A, B \in 2^X$ son congruentes, módulo I_o, escribiendo "$A \equiv B (\mathrm{mod}\ I_o)$", si y solo si</u>

$$\underline{(A - B) \cup (B - A) \in I_o}.$$

Puede verificarse en efecto que $\equiv$ es una relación de equivalencia en 2^X compatible con las operaciones $\cup$, $\cap$, $-$ entre conjuntos, es decir, si $A \equiv A'$, $B \equiv B' (\mathrm{mod}\ I_0)$, entonces

$$A \cup B \equiv A' \cup B' \ (\mathrm{mod}\ I_0)$$
$$A \cap B \equiv A' \cap B' \ (\mathrm{mod}\ I_0)$$
$$-A \equiv -A' \ (\mathrm{mod}\ I_0)$$

Recordemos que un conjunto U se dice que tiene la propiedad de Baire, si y solo si, existe un abierto G tal que

$$U - G \in I_0 \quad y \quad G - U \in I_0$$

Observando que I_0 es un ideal, esto equivale a decir:

$$(U - G) \cup (G - U) \in I_0$$

o bien:

$$U \equiv G \ (\mathrm{mod}\ I_0)$$

Los conjuntos con la propiedad de Baire son, por lo tanto, aquellos conjuntos congruentes, módulo I_0, a algún abierto del espacio.

Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los conjuntos, de un espacio topológico X, con la propiedad de Baire. Probemos que $\mathcal{B}$ tiene las siguientes propiedades:

(1) Todos los conjuntos de la. categoría tienen la propiedad de Baire: $I_0 \subset \mathcal{B}$.

(2) Todos los conjuntos abiertos tienen la propiedad de Baire.

(3) Todos los conjuntos cerrados tienen la propiedad de Baire.

DEMOSTRACION (1): Sea $Z \in I_0$, como $\emptyset$ es abierto y

$$(Z - \emptyset) \cup (\emptyset - Z) = Z \in I_0$$

esto es:

$$Z \equiv \emptyset \pmod{I_0},$$

se sigue que Z tiene la propiedad de Baire, luego:

$I_0 \subset \mathcal{B}$.

DEMOSTRACION (2): Es trivial, si G es abierto, como

$$G \equiv G \pmod{I_0}$$

G, tiene la propiedad de Baire.

DEMOSTRACION (3): Sea F un conjunto cerrado.

Por Teor. 7, cap. I, $F - IF$ es ralo, luego es de la. categoría.

$$F - IF \in I_0$$

Además

$$IF - F = \emptyset \in I_0$$

En consecuencia:

$$F \equiv IF \pmod{I_0}$$

Como IF es abierto, F tiene la propiedad de Baire.

Probemos ahora el siguiente teorema:

<u>TEOREMA 1: La familia $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos con la propiedad de Baire, de un espacio X, es un cuerpo de conjuntos.</u>

DEMOSTRACION(i): Si $U, V \in \mathcal{B}$ entonces $U \cup V \in \mathcal{B}$.

Por hipótesis existen abiertos G, H tales que

$$U \equiv G \ (\text{mod } I_0), \ V \equiv H \ (\text{mod } I_0)$$

luego:

$$U \cup V \equiv H \cup G \ (\text{mod } I_0)$$

Como $H \cup G$ es abierto, $U \cup V \in \mathcal{B}$.

(ii) <u>Si $U \in \mathcal{B}$, entonces $-U \in \mathcal{B}$</u>.

Por hipótesis $U \equiv G(\text{mod } I_0)$, para algún abierto G, luego:

$$-U \equiv -G \ (\text{mod } I_0)$$

-G es cerrado, luego por (3) -G tiene la propiedad de Baire, existe entonces un abierto H tal que

$$-G \equiv H \ (\text{mod } I_0)$$

Por el carácter transitivo de la relación $\equiv$

$$-U \equiv H \ (\text{mod } I_0)$$

esto es $-U \in \mathcal{B}$.

De i) y ii) se sigue que $\mathcal{B}$ es un cuerpo de conjuntos de X.

El ideal I_0 de los conjuntos de la. categoría es, según (1), parte de $\mathcal{B}$, luego I_0 es un ideal del álgebra de Boole $\mathcal{B}$.

Podemos, en consecuencia, considerar el álgebra de Boole cociente $A^* = \mathcal{B}/I_0$, cuyos elementos son las clases laterales de los elementos de $\mathcal{B}$:

Si $V \in \mathcal{B}$, la clase lateral $|V|$ correspondiente es:

$$|V| = \{U; \ U \in \mathcal{B} \ , \ U \equiv V \ (\text{mod } I_0)\}$$

En A^* las operaciones booleanas se definen por las igualdades:

$$|U| \vee |V| = |U \cup V|$$
$$|U| \wedge |V| = |U \cap V|$$
$$-|U| = |-U|$$

Observación: De acuerdo a la definición de $\mathcal{B}$, cada clase lateral $|U|$, $U \in \mathcal{B}$, puede ser representada por $|G|$ donde G es abierto en X. En efecto de $U \in \mathcal{B}$ se sigue que $U \equiv G \pmod{I_o}$ para algún abierto G y por lo tanto $|U| = |G|$.

Para resolver el problema planteado en el párrafo 1, vamos a aplicar estos resultados al espacio de Stone.

TEOREMA 2: Sean A un álgebra de Boole, $\mathcal{S}_o$ el espacio de Stone correspondiente, $\mathcal{K}_o$ el cuerpo de los abiertos cerrados de $\mathcal{S}_o$, h_o el isomorfismo de A sobre $\mathcal{K}_o$, $\mathcal{B}$ el cuerpo de los conjuntos con la propiedad de Baire de $\mathcal{S}_o$, e I_o el ideal de los conjuntos de 1a. categoría.

i) $A^* = \mathcal{B}/I_o$ es un álgebra de Boole completa.

ii) $h(a) = |h_o(a)|$ define un isomorfismo de A en A^*.

iii) h conserva todos los ínfimos y supremos de A.

DEMOSTRACION: (i) $A^* = \mathcal{B}/I_o$ es completa.

Sea dada una familia arbitraria de elementos de A^*: $\{|G_t|\}_{t \in T}$ donde supondremos los G_t abiertos.

Vamos a probar que existe el supremo en A^*, de la familia dada.

Sea $G_o = \bigcup_{t \in T} G_t$, demostraremos que $|G_o|$ es el supremo de la familia dada; $|G_o| = \bigvee_{t \in T} |G_t|$.

a) $|G_t| \leq |G_o|$, para todo $t \in T$

De $G_t \subset G_o$ para todo $t \in T$, resulta $|G_t| \leq |G_o|$.

b) Si $|G| \in A^*$ es tal que $|G_t| \leq |G|$ para todo $t \in T$, entonces $|G_o| \leq |G|$.

De $|G_t| \leq |G|$ se sigue que

$$|G_t| - |G| = |G_t - G| = 0$$

esto es $G_t - G \in I_o$.

Como $G_t - CG \subset G_t - G$, también $H = G_t - CG \in I_o$

H es abierto y es de la. categoría. En $\mathcal{S}_o$, que es un espacio compacto y de Hausdorff, se verifica (Teor. 13, cap. I) que todo conjunto de la. categoría es un conjunto frontera, luego $H = IH = \emptyset$, esto es, $G_t - CG = \emptyset$, por consiguiente, $G_t \subset CG$

luego,

$$G_o = \bigcup_{t \in T} G_t \subset CG = G \cup (CG-G),$$

por lo tanto:

$$|G_o| \leq |G \cup (CG-G)| = |G| \vee |CG-G|$$

Por teor. 7, cap. I, CG-G es ralo, luego $CG - G \in I_o$, esto es, $|CG-G| = 0$

luego

$$|G_o| \leq |G| \vee 0 = |G|.$$

(ii) <u>$h(a) = |h_o(a)|$ define un isomorfismo de A en A^*.</u>

h_o es un isomorfismo de A sobre $\mathcal{R}_o$, $\mathcal{R}_o \subset \mathcal{B}$, pues los conjuntos de $\mathcal{R}_o$ son abiertos.

La transformación de cada elemento $U \in \mathcal{B}^*$ en su clase lateral $|U| \in A^*$ es un homomorfismo de $\mathcal{B}$ sobre A^*. Luego, la transformación compuesta definida, para cada $a \in A$, por

$$h(a) = |h_o(a)|$$

es un homomorfismo de A en A^*.

Para probar que h es un isomorfismo, basta probar que si $a \neq 0$, entonces $h(a) \neq 0 = |\emptyset|$.

Para $a \neq 0$, $h_o(a)$ es un abierto no vacío. $h_o(a)$ no es de la. categoría pues si así fuese $h_o(a)$ sería un conjunto frontera, esto es $I\, h_o(a) = h_o(a) = \emptyset$, contra lo supuesto, luego $h_o(a) \notin I_o$, es decir, $|h_o(a)| \neq 0$.

iii) <u>h conserva ínfimos y supremos de A</u>.

Supongamos que en A se tiene

$$a = \bigvee_{t \in T} a_t,$$

entonces:

$$h_o(a) = \left(\bigcup_{t \in T} h_o(a_t)\right) \cup \left(h_o(a) - \bigcup_{t \in T} h_o(a_t)\right)$$

luego:

$$|h_o(a)| = \left|\bigcup_{t \in T} h_o(a_t)\right| \vee \left|h_o(a) - \bigcup_{t \in T} h_o(a_t)\right|$$

Hemos probado (teor. 5, cap. II) que el conjunto:

$$h_o(a) - \bigcup_{t \in T} h_o(a_t)$$

es ralo, y por tanto de la. categoría, luego:

$$\left|h_o(a) - \bigcup_{t \in T} h(a_t)\right| = 0$$

y por consiguiente:

$$|h_o(a)| = \left|\bigcup_{t \in T} h_o(a_t)\right|$$

En (i) se ha probado que si los conjuntos G_t, para todo $t \in T$, son abiertos y $G_o = \bigcup_{t \in T} G_t$, es $|G_o| = \bigvee_{t \in T} |G_t|$.

Siendo los conjuntos $h_o(a_t)$ abiertos en $\mathcal{S}_o$:

$$|\bigcup_{t \in T} h_o(a_t)| = \bigvee_{t \in T} |h_o(a_t)|$$

y, en definitiva,

$$h(a) = \bigvee_{t \in T} h(a_t)$$

Veamos ahora que h conserva los ínfimos en A:

Sea $b = \bigwedge_{t \in T} b_t$ en A, por las leyes de De Morgan $-b = \bigvee_{t \in T} -b_t$, luego $h(-b) = \bigvee_{t \in T} h(-b_t)$.

Puesto que h es isomorfismo:

$$-h(b) = \bigvee_{t \in T} -h(b_t) = -\bigwedge_{t \in T} b_t,$$

esto es,

$$h(b) = \bigwedge_{t \in T} h(b_t).$$

De acuerdo a (ii) del teorema anterior, A es isomorfa a una subálgebra A_o de A^*. Podemos así considerar a A como una subálgebra de A^*.

$A^* = \mathcal{B}/I_o$ se llama la extensión mínima completa de A (o extensión de Mac Neille de A).

La justificación del término "mínima" en la denominación de A^* se encuentra en el siguiente teorema que enunciamos sin demostración:

<u>TEOREMA 3: Dada el álgebra de Boole A, las siguientes propiedades de un álgebra de Boole completa $\mathcal{Q}$ son equivalentes:</u>

1º) $\mathcal{Q}$ es isomorfa a $A^* = \mathcal{B}/I_o$.

2º) Existe un isomorfismo h de A sobre una subálgebra $\mathcal{A}_o$ de $\mathcal{A}$ tal que

a) h respeta todos los supremos e ínfimos

b) h (A) = $\mathcal{A}_o$ engendra completamente a $\mathcal{A}$ (esto es $\mathcal{A}$ es la menor sub-álgebra completa de $\mathcal{A}$ que contiene a $\mathcal{A}_o$.

3º) A es isomorfa a una sub-álgebra $\mathcal{A}_o$ de $\mathcal{A}$ tal que

a') Para todo $a \in \mathcal{A}$ tal que $a \neq 0$ existe un elemento $a_o \in \mathcal{A}_o$ tal que $0 \neq a_o \leq a$ ($\mathcal{A}_o$ se dice, entonces, densa en $\mathcal{A}$).

b') $\mathcal{A}_o$ engendra completamente $\mathcal{A}$.

4º) A es isomorfa a una sub-álgebra $\mathcal{A}_o$ de $\mathcal{A}$ y si h_o es el isomorfismo de A sobre $\mathcal{A}_o$, entonces, si h es un isomorfismo cualquiera de A en un álgebra de Boole completa B, existe un isomorfismo g de $\mathcal{A}$ en B tal que $h = gh_o$.

IV. ALGEBRAS DE BOOLE LIBRES

1. Algebras m-libres

Sea A un álgebra de Boole y K una parte no vacía de A.

Es fácil verificar que la intersección de una familia, no vacía, cualquiera, de sub-álgebras del álgebra A es una sub-álgebra de A. Consideremos la familia de todas las sub-álgebras de A que contienen al conjunto K. Ella no es vacía, pues A es evidentemente de esa familia. La intersección de todas las sub-álgebras conteniendo K es entonces una sub-álgebra $\bar{K}$ de A.

$\bar{K}$ contiene a K y es la menor sub-álgebra de A con esta propiedad. $\bar{K}$ se dice la sub-álgebra generada por K. K se dice un conjunto de generadores de $\bar{K}$.

En especial, cuando $\bar{K} = A$ diremos que A es generada por la familia de generadores K.

<u>DEFINICION: Diremos que A es un álgebra libre que tiene por generadores libres los elementos del conjunto $K \subset A$, si y solo si, se verifican las propiedades</u>

(i) K genera A

(ii) Cada transformación unívoca f de K en un álgebra de Boole B, cualquiera, puede extenderse a un homomorfismo h de A en B. Es decir, existe un homomorfismo h de A en B tal que $h(k) = f(k)$ para todo $k \in K$.

Observación: a) En caso de existir el homomorfismo h de A en B, es único.

En efecto; sean h_1, h_2 homomorfismos de A en B, extensiones de f ; el conjunto A' de todos los $a \in A$ tales que $h_1(a) = h_2(a)$ es, como se verifica fácilmente, una sub-álgebra de A. $K \subset A'$ porque si $k \in K$ $h_1(k) = f(k) \cdot h_2(k)$. Luego $A' = A$, esto es $h_1(a) = h_2(a)$ para todo $a \in A$, luego $h_1 = h_2$.

b) Un álgebra de Boole A^o isomorfa a un álgebra de Boole libre A, es un álgebra libre.

Sea g el isomorfismo de A sobre A^o. Sea $K^o = g(K)$, se ve de inmediato que K^o genera A^o. Sea B un álgebra de Boole arbitraria y f una transformación unívoca de K^o en B. $f \circ g$ es, entonces, una transformación de K en B, como A es libre y K un conjunto de generadores libres de A existe un homomorfismo h' de K en B tal que $h'(k) = f(g(k))$, para todo $k \in K$.

Sea $h = h' \circ g^{-1}$, h es un homomorfismo de A en B y es una extensión de f porque $h(g(k) = h'g^{-1}(g(k)) = h'(k) = f(g(k))$ para todo $k \in K (g(k) \in K^o)$.

<u>TEOREMA 1: Sean A, A_1 álgebras de Boole libres y K, K_1 sean, respectivamente, conjuntos de generadores libres de A y A_1. Si K y K_1 tienen la misma potencia, las álgebras A y A_1 son isomorfas.</u>

DEMOSTRACION: K y K_1 tienen igual potencia quiere decir que existe una función biunívoca f de K sobre K_1.

Vamos a probar que existe una prolongación h de f que es un isomorfismo de A sobre A_1.

Por las hipótesis hechas sobre A y K, existe un homomorfismo h de A en A_1 tal que

$$h(k) = f(k) \text{ para todo } k \in K.$$

f^{-1} es una transformación de K_1 en A, luego, existe un homomorfismo h_1 de A_1 en A tal que

$$h_1(k_1) = f^{-1}(k_1) \text{ para todo } k_1 \in K_1$$

Consideremos ahora la transformación que a cada $x \in A$ hace corresponder $h_1(h(x)) \in A$. Esta es, evidentemente, un homomorfismo de A en A.

El conjunto A' de los elementos $x \in A$ tales que

$$x = h_1(h(x))$$

es, como se reconoce sin dificultad, una subálgebra de A.

Además, $K \subset A'$, porque si $k \in K$ $h_1(h(k)) = f^{-1}(f(k)) = k$, es decir $k \in A'$.

Como K es un conjunto de generadores de A, del hecho de ser A' una subálgebra de A conteniendo K, resulta $A = A'$; esto es,

$$h_1(h(x)) = x, \text{ para todo } x \in A.$$

Del mismo modo se prueba que

$$h(h_1(y)) = y \text{ para todo } y \in A_1.$$

En consecuencia h es una transformación biunívoca de A sobre $A_1 (h_1 = h^{-1})$. Puesto que h es un homomorfismo, h es un isomorfismo de A sobre A_1.

El teorema muestra que la potencia m de un conjunto de generadores libres de un álgebra de Boole libre determina el álgebra, a menos de un isomorfismo.

Si m es la potencia del conjunto K de generadores libres de un álgebra libre A se dice que K es un conjunto de generadores m-libres. A se dice un álgebra m-libre.

Se presenta naturalmente el interrogante; ¿para cada número cardinal m, existe un álgebra de Boole libre con un conjunto de generadores m-libres?

La respuesta es afirmativa, como pasamos a ver:

Sea E un conjunto con la potencia m.

$\alpha, \beta, \ldots$ serán usadas para designar puntos de E.

Para cada $\alpha \in E$ sea $X_\alpha = \{-1, 1\}$ y sea D el producto cartesiano

$$D = \prod_{\alpha \in E} X_\alpha$$

u,v... serán usadas para designar puntos de D, es decir funciones tales que para cada $\alpha \in E$, $u(\alpha) = -1$ ó $u(\alpha) = -1$.

Sea D_β el conjunto de todos los $u \in D$ tales que $u(\beta) = +1$.

Sea $\mathscr{D}$ el cuerpo de conjuntos de D generado por la familia $K = \{D_\beta\}_{\beta \in E}$, esto es, $\mathscr{D}$ es el cuerpo de conjuntos más pequeño conteniendo todos los $D_\beta \subset D$.

TEOREMA 2: $\mathscr{D}$ es un álgebra de Boole libre y

$K = \{D_\beta\}_{\beta \in E}$ es un conjunto de generadores libres de $\mathcal{D}$.

DEMOSTRACION: En primer lugar, K es un conjunto de generadores de $\mathcal{D}$, según la definición misma de $\mathcal{D}$.

Sea f una transformación de K en un álgebra de Boole B, arbitraria, y, para cada $\beta \in E$:

$$f(D_\beta) = b_\beta \in B$$

Podemos suponer (teorema de representación de Stone) que B es un cuerpo de conjuntos de un espacio X.

Vamos a probar que existe un homomorfismo h de $\mathcal{D}$ en B tal que, para todo $\beta \in E$,

$$h(D_\beta) = f(D_\beta) = b_\beta$$

Procuraremos definir una función puntual φ de X en D, de modo tal que el homomorfismo inducido por φ, $h = \varphi^{-1}$, restringido a $\mathcal{D}$ sea el homomorfismo de $\mathcal{D}$ en B buscado.

Claro es que φ deberá entonces verificar la condición:

$\varphi^{-1}(D_\beta) = f(D_\beta) = b_\beta$, para cada $\beta \in E$.

Esto es, $x \in b_\beta$ si y solo si $u = \varphi(x) \in D_\beta$, ó, lo que es equivalente

$$x \in b_\beta \text{ si y solo si } u(\beta) = \varphi_\beta(x) = +1$$

Somos conducidos así a definir φ de la manera siguiente:

Para cada $\alpha \in E$, escribamos

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in b \\ -1 & \text{si } x \notin b \end{cases}$$

A cada $x \in X$ hagamos corresponder el punto de D:

$$\varphi(x) = (\varphi_\alpha(x))_{\alpha \in E}$$

La función φ, así definida verifica entonces la condición:

(1) $\varphi^{-1}(D_\beta) = b_\beta$ para cada $\beta \in E$.

La transformación φ induce un homomorfismo h, del cuerpo de conjuntos $\mathcal{D}$ en el cuerpo de todas las partes del conjunto X(§ 5, cap. II), definido en la forma siguiente:

$$h(a) = \varphi^{-1}(a) \text{ para todo } a \in \mathcal{D}.$$

De (1) se sigue que

(2) $h(D_\beta) = b_\beta = f(D_\beta)$ para todo $\beta \in E$.

h es una extensión de f.

Resta probar que h es una transformación de $\mathcal{D}$ en B. ($B \subset 2^X$).

Consideremos la clase $\mathcal{D}'$ de todos los $a \in \mathcal{D}$ tales que $h(a) \in B$.

$\mathcal{D}'$ es, como se verifica de inmediato, un sub-cuerpo de conjuntos de $\mathcal{D}$. Por (2) $K \subset \mathcal{D}'$. Luego $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, esto es: para todo $a \in \mathcal{D}$, $h(a) \in B$.

h es entonces una transformación de $\mathcal{D}$ en B.

En conclusión, $h = \varphi^{-1}$ es un homomorfismo de $\mathcal{D}$ en B que verifica (2), lo que termina la demostración del teorema.

<u>COROLARIO: Dado cualquier número cardinal m existe un álgebra de Boole libre que tiene un conjunto de generadores m-libres.</u>

Basta considerar un conjunto E de potencia m. El álgebra de Boole $\mathcal{D}$ y el conjunto $K = (D_\beta)_{\beta \in E}$ de generadores. El conjunto K tiene potencia m pues para $\alpha \neq \beta$, $D_\alpha \neq D_\beta$; en efecto, un punto $u \in D$ tal que $u(\alpha) = +1$, $u(\beta) = -1$ pertenece a D_α y no a D_β .

2. El Discontinuum de Cantor

Podemos considerar al espacio D, definido en párrafo 1, como un espacio topológico, tomando el cuerpo de conjuntos $\mathcal{D}$ como una base de abiertos.

DEFINICION: El espacio D, donde se define

$$IA = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{D} \\ B \subset A}} B, \text{ para todo } A \subset D$$

es un espacio topológico, al cual llamaremos el discontinuum de Cantor.

Necesitamos introducir la noción de homeomorfismos de espacios topológicos.

DEFINICION: Si X, Y son espacios topológicos (cuyos operadores de interior representaremos con la misma letra "I") tales que existe una transformación puntual biunívoca φ de X sobre Y, para la cual se tiene

$$\varphi(IA) = I\varphi(A), \text{ para todo } A \subset X,$$

diremos que X e Y son homeomorfos y que φ es un homeomorfismo de X sobre Y.

Como es fácil de comprender dos espacios homeomorfos tienen, desde el punto de vista de la topología, idénticas propiedades.

Así, si X e Y son homeomorfos y si X es T_0, T_1, T_2, regular, compacto o totalmente disconexo, Y es, respectivamente, T_0, T_1, T_2, regular, compacto o totalmente disconexo.

Si φ es un homeomorfismo de X sobre Y, y si un conjunto $A \subset X$ es abierto, cerrado, frontera, ralo o de primera categoría, lo mismo sucede con el conjunto $\varphi(A) \subset Y$.

Así, por ejemplo, si A es abierto, esto es $A = IA$, es $\varphi(A) = \varphi(IA) = I\,\varphi(A)$, luego $\varphi(A)$ es abierto.

Sean X,Y dos espacios topológicos, φ una transformación biunívoca de X sobre Y, y sean $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ bases de abiertos de X e Y, respectivamente. Si se verifica:

$$B \in \mathcal{K} \quad \text{si y solo si} \quad \varphi(B) \in \mathcal{L}$$

entonces, φ es un homeomorfismo de X sobre Y.

En efecto: sea $IA = \bigcup_{\substack{A' \in \mathcal{K} \\ A' \subset A}} A'$, luego:

$$\varphi(IA) = \varphi\Big(\bigcup_{\substack{A' \in \mathcal{K} \\ A' \subset A}} A'\Big) = \bigcup_{\substack{A' \in \mathcal{K} \\ A' \subset A}} \varphi(A') = \bigcup_{\substack{\varphi(A') \in \mathcal{L} \\ \varphi(A') \subset \varphi(A)}} \varphi(A') =$$

$$\bigcup_{\substack{B \in \mathcal{L} \\ B \subset \varphi(A)}} B = I\,\varphi(A)$$

Vamos a probar ahora que, a menos de un homeomorfismo, el discontinuum de Cantor D, es el espacio de Stone del álgebra de Boole libre $\mathcal{D}$.

<u>TEOREMA 3: Sea $\mathcal{S}_o$ el espacio de Stone del álgebra de Boole $\mathcal{D}$ y h_o el isomorfismo de Stone de $\mathcal{D}$ sobre el cuerpo $\mathcal{K}_o$ de los abiertos-cerrados de $\mathcal{S}_o$. Existe un homeomorfismo φ de $\mathcal{S}_o$ sobre D tal que h_o es inducido por φ ; esto es</u>

(1) $h_o(A) = \varphi^{-1}(A)$ para todo $A \in \mathcal{D}$.

DEMOSTRACION: Por el procedimiento indicado en la prueba del teorema 2 es posible definir una transformación puntual φ de $\mathcal{S}_o$ en D tal que $\varphi^{-1}(A) = h_o(A)$, para todo $A \in \mathcal{D}$. En efecto, existe una transformación φ de $\mathcal{S}_o$ en D tal que $\varphi^{-1}(D_\alpha) = h_o(D_\alpha)$ para todos los generadores D_α de $\mathcal{D}$; como h_o y φ^{-1} son homeomorfismos extensión de la transformación: $D_\alpha \to h_o(D_\alpha)$, ellos coinciden en todo $\mathcal{D}$ (observ.(a), §1), esto es

$$h_o(A) = \varphi^{-1}(A) \text{ para todo } A \in \mathcal{D}$$

Por otro lado h_o^{-1} es un isomorfismo de $\mathcal{K}_o$ sobre el cuerpo de sub-conjuntos $\mathcal{D}$ del conjunto D; de acuerdo al corolario del teorema 8, cap. II, podemos afirmar que existe una transformación ψ de D en $\mathcal{S}_o$ tal que

(2) $h_o^{-1}(B) = \psi^{-1}(B)$ para todo $B \in \mathcal{R}_o$

De (1) y (2) resultan:

$\psi^{-1}\ \varphi^{-1}(A) = A$ para todo $A \in \mathcal{D}$

$\varphi^{-1}\ \psi^{-1}(B) = B$ " " $B \in \mathcal{R}_o$

Sabemos que $\mathcal{S}_o$ es totalmente disconexo. Dados dos puntos x_1, $x_2 \in \mathcal{S}_o$ existe un conjunto $B \in \mathcal{R}_o$ tal que $x_1 \in B$ y $x_2 \notin B$. $\mathcal{R}_o$ es una familia separadora.

De igual propiedad goza la familia $\mathcal{D}$. En efecto si $u, v \in D$, $u \neq v$, para algún $\alpha \in E$ es $u(\alpha) \neq v(\alpha)$. Si es $u(\alpha) = +1$, $v(\alpha) = -1$ es $u \in D_\alpha$ $v \notin D_\alpha$. Si es $u(\alpha) = -1$, $v(\alpha) = +1$ es $u \in -D_\alpha$, $v \notin -D_\alpha$, y, tanto D_α como $-D_\alpha$ pertenecen a $\mathcal{D}$.

De acuerdo a esto, para cada $x \in \mathcal{S}_o$

$$\{x\} = \bigcap_{x \in B \in \mathcal{R}_o} B$$

Visto que las aplicaciones inversas ψ^{-1}, φ^{-1} conservan intersecciones (y uniones) arbitrarias

$$\varphi^{-1}\ \psi^{-1}(x) = \varphi^{-1}\ \psi^{-1}\Big(\bigcap_{x \in B \in \mathcal{R}_o} B\Big) = \bigcap_{x \in B \in \mathcal{R}_o} \varphi^{-1}\ \psi^{-1}(B) =$$

$$= \bigcap_{x \in B \in \mathcal{R}_o} B = \{x\}$$

Del mismo modo, para todo $u \in D$:

$$\psi^{-1}\ \varphi^{-1}(u) = \{u\}$$

φ es entonces una transformación biunívoca en $\mathcal{S}_o$ sobre D,

$$\psi = \varphi^{-1}.$$

Por (1), φ transforma la base de abiertos $\mathcal{R}_0$ sobre la base de abiertos $\mathcal{D}$, luego φ es un homeomorfismo de $\mathfrak{S}_0$ sobre D.

COROLARIO: El discontinuum de Cantor es un espacio compacto, totalmente disconexo. El cuerpo de conjuntos $\mathcal{D}$ es exactamente la familia de todos los conjuntos abiertos-cerrados de D.