NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

6 - 7

ANTONIO MONTEIRO

MATRICES DE MORGAN CARACTERISTIQUES POUR LE CALCUL PROPOSITIONNEL CLASSIQUE

ALGEBRES MONADIQUES

1974
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA (*)

N° 6 - 7

MATRICES DE MORGAN CARACTERISTIQUES POUR LE CALCUL PROPOSITIONNEL CLASSIQUE

ALGEBRES MONADIQUES

par

Antonio Monteiro

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada en parte por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

N° 6

MATRICES DE MORGAN CARACTERISTIQUES POUR LE CALCUL PROPOSITIONNEL CLASSIQUE

par

Antonio Monteiro

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

Este número es una separata del artículo *Matrices de Morgan Caractéristiques pour le Calcul Propositionnel Classique*, por António Monteiro, publicado en los *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, vol.33 n°1 (1960), pag.1-7, que contiene los resultados de investigaciones realizadas en el Departamento de Matemática del "Centro Brasileiro de Pesquizas Físicas", en el período Julio-Octubre de 1959.

Ce numéro est un tirage-à-part de l'article *Matrices de Morgan Caractéristiques pour le Calcul Propositionnel Classique*, par António Monteiro, publiée dans les *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, vol.33 n°1 (1960), pag.1-7, qui contient les resultats des recherches realizées au "Departamento de Matemática, do Centro Brasileiro de Pesquizas Físicas" de Juillet a Octobre de 1959.

Matrices de Morgan Caractéristiques pour le Calcul Propositionnel Classique

ANTÓNIO MONTEIRO

Instituto de Matemática, Universidade del Sur, Bahia Blanca, Argentina et Departamento de Matemática, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, D. F.

(Reçu le 30ème Novembre 1959)

L'existence de *matrices caractéristiques irrégulières* pour le calcul propositionnel classique a été signalée par la première fois par ALONZO CHURCH et NICHOLAS RESCHER (1950)*).

D'autres exemples ont été indiqués par ALONZO CHURCH (1953) qui a aussi posé le problème général de caractériser les matrices de la nature indiquée. Cette sugestion nous a conduit à étudier une classe particulière de matrices que nous appelons, dans cette note, des *matrices de Morgan,* pour lesquelles nous arrivons à resoudre le problème posé. L'étude de l'arithmétique des filtres des réticulés de Morgan nous a conduit a indiquer une méthode assez simples pour construire des matrices de Morgan caractéristiques finies.

Nous signalons aussi l'existence de réticules de Morgan que nous appelons *essentiellement irreguliers*.

Un réticulé distributif M sur lequel est définie une opération qu'à chaque élément a de M fait correspondre un élément $-a \in M$ (appelé le *quasi-complément* de a) de telle manière que soient vérifiées les deux conditions suivantes:

$$\text{M1)} \quad -(-a) = a$$

$$\text{M2)} \quad -(a \vee b) = (-a) \wedge (-b)$$

sera dit un *réticulé de Morgan.* Cette notion a été introduite et étudiée par J. A. KALMAN (1958) sous le nom de "*distributive i-lattice*" et peut être considérée, avec cet auteur, comme une généralisation comune des algèbres de Boole et des groupes réticulés. On démontre facilement que dans un tel réticulé nous avons aussi:

$$-(a \wedge b) = (-a) \vee (-b).$$

*) Voir la liste bibliographique indiquée à la fin de cette note.

L'ensemble M des nombres entiers (celui des nombres rationels ou réels) avec son ordre naturel est un réticulé de Morgan si $-a$ désigne le symétrique de a.

L'opération d'implication sera définie dans un réticulé de Morgan par la formule $a \twoheadrightarrow b = (-a) \vee b$.

Une *algèbre de Morgan* est un réticulé de Morgan M contenant un premier élément 0 (alors M contient aussi un dernier élément $1 = -0$). Cette notion a été étudiée dans A. BIALYNICKI-BIRULA et H. RASIOWA (1957, 1958), et H. RASIOWA (1958) comme un instrument algèbrique pour l'étude des logiques constructives avec négation forte. Ces auteurs donnent dans ses travaux aux algèbres de Morgan le nom d'*algèbres quasi-booleiènnes*.

Un *filtre* d'un réticulé M est un ensemble D tel que 1°) D est une partie, non vide, de M, 2°) Si $a, b \in D$ alors $a \wedge b \in D$, 3°) Si $a \in D$ alors $a \vee m \in D$ quel que soit $m \in M$. Un *filtre* est *propre* si $D \neq M$. Un *filtre* propre D sera dit *premier* si $a \vee b \in D$ implique $a \in D$ ou $b \in D$.

Nous dirons que le filtre D_1 *divise* le filtre D_2 et nous écrirons $D_1 \leq D_2$ si l'ensemble D_2 est une partie de D_1. La famille $\Phi(M)$ de tous les filtres de M ordonnée par cette relation est un réticulé complet et si M est distributif il en est de même pour $\Phi(M)$.

Il est bien connu (M. STONE (1937), G. BIRKHOFF (1933)) que dans un réticulé distributif tout filtre propre est la borne supérieure (c'est-à-dire l'intersection) de filtres premiers:

$$D = \bigvee_{i \in I} P_i$$

Un *filtre principal* est la famille F(a) de tous les éléments x de M tels que $a \leq x$. Nous dirons que *a* engendre le filtre F(a). Il est clair que $a \leq b$ est équivalent à $F(a) \leq F(b)$.

Pour qu'un filtre principal F(a) soit premier il faut et il suffit que a soit premier, c'est-à-dire: que la condition $a \leq b \vee c$ implique $a \leq b$ ou $a \leq c$.

Introduisons dans un réticulé de Morgan M la construcciòn suivante. Soit P un filtre premier, alors $-P$ (famille de tous les éléments de la forme $-p$, où $p \in P$) est un ideal premier et son complementaire par rapport à M est un filtre premier que nous representerons par la notation I(P) (voir BIRULA-RASIOWA (1957)).

Soit E la famille de tous les filtres premiers de M *ordonnée* par la relation $\leq$ alors la transformation I est un isomorphisme de E sur son dual E^+, c'est-à-dire I est un anti-isomorphisme de E sur E.

Un ensemble ordonné isomorphe à son dual sera appelé un *ensemble ordonné symétrique*.

La transformation I a encore la propriété suivante:

$$I(I(P)) = P,$$

c'est-à-dire I est un antiisomorphisme de periode 2.

Si un ensemble ordonné E admet un anti-isomorphisme de periode 2 nous dirons que E est *complètement symétrique.*

Dans un travail que n'est pas publié, António Diego a montré qu'il existent des ensembles ordonnés symétriques que ne sont pas complètement symétriques.

Un filtre premier P est de première espéce si $P \leq I(P)$ et de seconde espèce si $I(P) \leq P$. Il peut arriver que P soit incomparable avec I(P). Si le réticulé de Morgan M vérifie la condition $x \wedge -x \leq y \vee -y$, pour tout couple $x, y \in M$, alors tout filtre premier est de première ou de seconde espèce (BIRULA-RASIOWA (1958) pag. 293). Pour qu'une algèbre de Morgan soit une algèbre de Boole, par rapport à l'opération $(-)$, c'est-à-dire: pour que $x \wedge -x = 0$ il faut et il suffit que $I(P) = P$, pour tout filtre premier P.

Un couple (M,D) formé par un réticulé de Morgan M et un filtre propre D de M sera appelé une *matrice de Morgan.* Les éléments de D seront dits les *éléments désignés.*

Une *matrice de Morgan* (M,D) sera dite *régulière* si la condition suivante est vérifiée:

MP (*Modus Ponens*) *Si $a \in D$ et $a \rightarrow b \in D$ alors $b \in D$* (voir BIALYNICKI-BIRULA (1957)). Nous dirons aussi que le filtre D est un *système deductif* (A. TARSKI).

Tout filtre de la forme $P \vee I(P)$ sera appelé un *doublet.*

THÉORÈME 1. *Pour qu'un filtre D soit régulier il faut et il suffit que D soit la borne supérieure de doublets.*

Soit T la famille de tous les éléments de M de la forme $x \vee -x$ et F(T) le filtre engendré par T.

THÉORÈME 2. *F(T) est la borne supérieure de tous les filtres premiers de première espèce.*

COROLAIRE. *Pour que F(T) soit un filtre propre il faut et il suffit qu'il existe tout au moins un filtre de première espèce.*

Nous dirons qu'un *réticulé de Morgan* est *caractéristique* si F(T) est un filtre propre.

Étant données n variables $x_1, \ldots, x_n$ les *polynomes* de ces n variables, en notation $p(x_1, \ldots, x_n)$, sont définis, par induction, par les conditions suivantes:

1°) $p(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ sont des polynomes.

2°) Si $p(x_1, \ldots, x_n)$ et $q(x_1, \ldots, x_n)$ sont des polynomes alors

$$(p(x_1, \ldots x_n) \wedge q(x_1, \ldots, x_n))$$

est un polynome.

3°) Si $p(x_1, \ldots, x_n)$ est un polynome alors

$$(-p(x_1, \ldots, x_n))$$

est un polynome.

Lorsqu'on se donne un réticulé de Morgan M tout polynome $p(x_1, \ldots, x_n)$ peut être consideré comme une *fonction polynomiale* définie sur le produit cartésien $M^n = Mx\ Mx \ldots x\ M$ (n facteurs) et prenant ses valeurs dans M.

Il est bien connu que la conjonction ($\wedge$) et la négation ($-$) constituent un système de connecteurs suffisant pour formuler le calcul propositionel classique (J. B. ROSSER (1953); J. PORTE (1958)). Dans ce calcul nous puvons considérer les polynomes $p(x_1, \ldots, x_n)$ comme des formules (bien formées) si $x_1, \ldots, x_n$ sont des variables propositionneles. Soit $\mathfrak{D}$ la famille de toutes les formules démontrables (théses, théorèmes) du calcul propositionnel classique.

DÉFINITION. *Nous dirons que la matrice de Morgan* (M, D) *est une matrice caractéristique pour le calcul propositionnel classique si les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

I) $p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{D}$

II) $p(x_1, \ldots, x_n) \in D$ *quels que soient les éléments* $x_1, \ldots, x_n$ *de* M.

Un polynome que vérifie la condition II) est ce qu'on appele parfois une tautologie de la matrice (M,D).

THÉORÈME 3. *Pour que* (M,D) *soit une matrice caractéristique pour le calcul propositionnel classique il faut et il suffit que:* $D \leq F(T)$, *ou ce qui est équivalent:* $x \vee -x \in D$ *quel que soit* $x \in M$.

De ce théorème il résulte qu'on pourra choisir un filtre propre D du réticulé de Morgan M de telle façon que (M,D) soit une matrice caractéristique pour le calcul propositionnel classique si et seulement si F(T) est un filtre propre, c'est-à-dire si et seulement si M est un réticulé de Morgan caractéristique. S'il en est ainsi, pour chaque filtre propre D tel que $D \leq F(T)$ nous obtenons une matrice caractéristique (M,D) qu'en général n'est pas régulière.

THÉORÈME 4. *Pour que la matrice de Morgan* (M,D) *soit une matrice caractéristique régulière pour le calcul propositionnel classique il faut et il suffit que le filtre propre* D *soit la borne supérieure de filtres premiers* P *tels que* $I(P) = P$.

Il peuvent exister des réticulés de Morgan caractéristique M, tels que tout filtre propre D contenant F(T) soit irregulier. Pour cela il faut et il suffit que dans M il n'existe aucun filtre premier P tel que $I(P) = P$. Les réticulés de Morgan caractéristiques de cette nature seront appelés *essentiellement irreguliers*.

Le cas opposé peut aussi se presenter, c'est-à-dire il peuvent exister des réticulés de Morgan caractéristiques M tels que tous les filtres propres D que contiennent F(T) soient reguliers. Pour cela il faut et il suffit que tous les filtres premiers P de première espèce verifient la condition $I(P) = P$ et qu'il existe tout au moins un tel filtre premier. Les réticulés de Morgan caractéristiques de cette nature seront appelés *essentiellement réguliers*. Si dans l'algèbre de Morgan M, chaque élément a un complément Booleien, c'est-à-dire si par chaque x de M il existe un élément x' de M tel que $x \vee x' = 1, x \wedge x' = 0$, alors M est non seulement une algèbre de Morgan mais aussi une algèbre de Boole, par rapport à la relation $\leq$; (cela n'implique pas d'ailleurs que les compléments x' et $-x$ soient indentiques pour tous les x). Dans une telle algèbre de Morgan chaque filtre premier de première espèce P vérifie la condition $I(P) = P$ et par conséquent si une telle algèbre contient tout au moins un filtre de première espèce alors M est réticulé de Morgan essentiellement regulier.

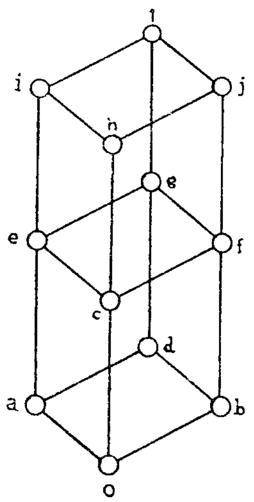
Les résultats precèdents nous fournissent une méthode de construction des algèbres de Morgan caractéristiques finies.

Il est bien connu que les réticulés distributifs M finis sont déterminés, à moins d'un isomorphisme, par l'ensemble ordonné de tous les filtres premiers de M (G. BIRKHOFF (1937)).

Comme tous les filtres premiers P sont principaux $P = F(p)$, nous pouvons identifier E avec la famille de tous éléments premiers de E, sans inconvenient.

Analoguement on peut démontrer qu'une algèbre de Morgan finie M est déterminée, à moins d'un isomorphisme, par le couple (E, I) formé par l'ensemble ordonné E de tous les éléments premiers de M et par l'anti-isomorphisme de période 2 de E sur E que nous avons défini auparavant. Cela veut dire qu'il existe une correspondance biunivoque entre les algèbres de Morgan finies et les ensembles ordonnés (E, I) complétement symétriques. Nous dirons que (E, I) est le *système determinant* de l'algèbre de Morgan M.

Les ensembles ordonnés complètement symétriques (E, I) fournissent donc une description simples et compacte des algèbres de Morgan finies M. Pour que (E,I) determine une algèbre de Morgan caractéristique pour le calcul propositionnel classique il faut et il suffit qu'il exist tout au moins un élément p de E tel que $p \leq I(p)$. Soit d_0 la borne supérieure dans M de tous les éléments de cette nature, alors $F(d_0) = F(T)$. L'élément d_0 étant connu (nous supposons que $d_0 \neq 0$) soit d un élément tel que: 1°) $d \neq o$, 2°) $d \leq d_0$, alors $(M, D = F(d))$ est une matrice caractéristique pour le calcul propositionnel classique. Les théorèmes précédents nous permetent de construire des matrices de Morgan caractéristiques essentiellement irrégulières ou essentiellement regulières. Considérons par exemple l'ensemble ordonné formé par les éléments a,b,c, h ou la relation $<$ a lieu seulement pour le couple $c < h$. Posons $I(a) = b$ $I(b) = a$, $I(c) = h$, $I(h) = c$. Alors I est un anti-isomorphisme de periode 2 de E sur E. Il existe un seul élément premier de première espèce à savoir c et comme $c < I(c)$ l'algèbre de Morgan fini M determinée par (E, I) est une matrice caractéristique essentiellement irregulière pour le calcul propositionelle classique, où l'on doit prendre $D=F(c)$. Le diagramme de cette algèbre de Morgan est indiqué dans la figure ci jointe à laquelle nous avons ajouté la table des quasi-compléments $-x$ et des éléments $x \vee -x$.



$--x=x$	$-x$	$x \vee -x$
0	1	1
a	i	i
b	j	j
c	g	g
d	h	1
e	e	e
f	f	f

Les ensembles totalement ordonnés finis peuvent être transformés dans algèbre de Morgan en définissant le pseudo-complément de chaque élement de la seule façon possible. Nous obtenons ainsi des algèbres de Morgan caractéristiques, que sont les exemples de ALONZO CHURCH et NICHOLAS RESCHER (1950), que nous pouvons appeler des *algèbres de Morgan linéaires* (finies). Comme l'à remarqué ALONZO CHURCH (1953) le produit direct de telles algèbres bien comme les sous algèbres d'un tel produit sont aussi de algèbres de Morgan caractéristiques. Il existent cependant des algèbres de Morgan caractéris tiques que ne sont pas de cette nature.

Les exemples de Church et Rescher vérifient la condition $x \wedge -x \leq y \vee -y$ c'est-à-dire nous avons affaire a des réticulés de Morgan normaux au sens de Kalman (voir: J. A. KALMAN (1958), RASIOWA (1958)), qui sont toujours des réticulés de Morgan caractéristiques.

Comme exemples de réticulés de Morgan normaux pouvons aussi indiquer les algèbres de Boole et les groupes réticulés. L'algèbre de Morgan indiquée dans la figure n'étant pas normal ne peut être representée comme une sous-algèbre d'un produit direct d'algèbres de Morgan linéaires. Cela montre bien que la notion de matrice de Morgan caractéristique est une notion que comprend effectivement comme cas particulier les exemples de Alonzo Church que nous avons cités, tout en étant une notion plus générale.

BIBLIOGRAPHIE

BIALYNICKI-BIRULA, A., (1957), *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, classe III*, 5, pag. 615-619.

BIALYNICKI-BIRULA, A. AND RASIOWA, H., (1957), *Bulletin de l'Académie Polonaise aes Sciences Classe III*, 5, pag. 259-261.

BIALYNICKI-BIRULA, (1958), *Colloquium Mathematicum*, **6**, pag. 287-291.

BIRKHOFF, GARRETT, (1933), *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **29**, 441-464.

BIRKHOFF, GARRETT, (1937), *Duke Mathematical Journal*, **3**, pag. 443-454.

CHURCH, ALONZO, (1953), Tablas de verdad no normales para el calculo proposicional. *Memoria del Congresso Científico Mexicano. I. Ciencias Físicas y Matemáticas. Universidad Autónoma de Mexico. (1953), pag. 81-89.*
Non normal truth-tables for the propositional calculus. *Boletim de la Sociedad Matemática Mexicana*, **10** *(1953) pag. 41-52.*

CHURCH, ALONZO AND RESCHER, NICHOLAS, (1950), Review of Dienes (1949). *The Journal of Symbolic Logic* **15**, *pag. 69-70.*

DIENES, Z. P., (1949), *The Journal of Symbolic Logic*, **14**, *pag. 95-97.*

KALMAN, J. A., (1958), *Transactions of the American Mathematical Society*, **87**, *pag. 485-491.*

PORTE, JEAN, (1958), *The Journal of Symbolic Logic*, **23**, *pag. 421-431.*

RASIOWA, H., (1958), *Fundamenta Mathematicae*, **46**, *pag. 61-80.*

ROSSER, J. B., (1953), Logic for Mathematicians. *New York. 1953.*

STONE, M. H., (1937), *Cas. Mat. Fys.*, **67**, *pag. 1-25.*

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

N° 7

ALGEBRES MONADIQUES

par

Antonio Monteiro

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

Este número contiene la traducción al francés del artículo *Algebras Monádicas* por Antonio Monteiro, publicado en las *Atas do Segundo Colóquio Brasileiro de Matemática,* São Paulo (1960), pag.33-52, realizada por Elena Otaño, en el año 1964, en la cual estan corregidos los errores de impresión.

Ce numéro contient la traduction en français de l'article *Algebras Monádicas* par Antonio Monteiro, publié dans les *Atas do Segundo Colóquio Brasileiro de Matemática* São Paulo (1960), pag.33-52, réalisée par Melle. Elena Otaño, dans l'année 1964, dans laquelle les erreurs d'impression on été corrigés.

ALGEBRES MONADIQUES

par

ANTONIO MONTEIRO

INTRODUCTION .

L'étude des divers calculs propositionnels (classique, intuitioniste,modal,etc.) donne origine à l'étude de certaines structures algêbriques (algèbres de Boole, de Heyting, de Lewis, etc.) qui ont aussi un grand intérêt dans les Mathématiques. Il suffit de remarquer, par exemple, que la théorie des algèbres de Boole, de Heyting et de Lewis est intimement liée à la théorie des espaces topologiques.

D'une façon générale nous pouvons dire qu'au cours de ce siécle s'est accentué la tendance à étudier les divers chapitres de la Logique, en utilisant les techniques générales de l'Algèbre, tendance qui a son origine le plus ancien dans les travaux de Boole et de ses contemporains. D'autre part la théorie des espaces topologiques joue un rôle très important dans l'étude de la Logique, depuis les travaux fondamentaux de Stone et Tarski, suivis de ceux de Rasiowa,Sikorski et d'autres auteurs.

Dans des travaux récemment publiés,Paul H.Halmos a initié l'étude de systèmes algebriques intimement liés au calcul fonctionnel classique, auxquels il appelle des algèbres Polyadiques.

L'objectif de ces conférences est, premièrement,d'exposer sommairement les résultats les plus importants obtenus par Halmos, sur la représentation des algèbres de Boole monadiques, qui sont une abstraction du calcul des fonctions propositionnelles d'une seule variable.Deuxièmement, nous abordons l'étude des algèbres de Lewis monadiques qui se présentent comme une généralisation naturelle du concept precèdent et qui est, probablement, l'instrument adéquat pour l'étude du calcul fonctionnel monadique de Lewis.

Un des problèmes fondamentaux de cette théorie attend sa solution.

Dans ces conférences nous avons fait aussi une courte référence à l'étude des algèbres de Heyting monadiques, qui ont un caractère plus complexe. Nous nous limitons dans cet article à adresser le lecteur intéressé à la liste bibliographique pour ne pas élargir cet exposé, étant donné le caractere inachevé des résultats obtenus jusqu'à maintenant.

Cet exposé a le caractère d'une introduction et pour cela nous laissons délibérément de côté beaucoup de résultats ou de compléments importants, que le lecteur trouvera dans la Bibliographie. Pour une motivation adéquate des relations entre la Logique et les algèbres de Boole monadiques, nous recommandons spécialmente le travail de Halmos publié en 1956.

I. ALGEBRES DE BOOLE MONADIQUES

1. DEFINITIONS.

Soit A une algèbre de Boole. Nous supposons, le plus souvent, dans ce travail que toute algèbre de Boole a plus d'un élément. Les symboles $\cup$, $\cap$, $-$, représenterons respectivement les opérations: borne supérieure, borne inférieure et complément.

La notion $a \leqslant b$ indiquera que $a = a \cap b$. Les symboles 0 et 1 représenteront le premier et le dernier élément de A.

DEFINITION 1. *Etant donné une algèbre de Boole* A *et un opérateur* ∇ *qu'à chaque élément* a *de* A *fait correspondre un élément* ∇a *de* A, *de telle façon que les conditions suivantes soient vérifiées:*

I) $\nabla 0 = 0$

II) $a \leqslant \nabla a$

III) $\nabla (a \cap \nabla b) = \nabla a \cap \nabla b$

nous dirons que le système (A, ∇) *est une algèbre de Boole monadique, selon la terminologie introduite par Halmos* (1954, 1955).

Des formules I), II) et III) on déduit immédiatement que

IV) $\nabla (a \cup b) = \nabla a \cup \nabla b$

V) $\nabla \nabla a = \nabla a$

Pour désigner une algèbre de Boole monadique (A, ∇)

nous utiliserons, dans ce paragraphe, l'expression: *algèbre monadique* A, ou plus simplement, *algèbre* A.

L'opérateur ∇ sera appelé opérateur de saturation ou *quantificateur* (existentiel). Parmi les quantificateurs qu'on peut définir sur une algèbre de Boole A donnée, remarquons les suivants:

1°) *Le quantificateur discret* tel que $\nabla x = x$, pour tout $x \in A$; l'algèbre monadique correspondante sera appelée discrète.

2°) *Le quantificateur caotique ou simple*, tel que: $\nabla 0 = 0$ et si $a \neq 0, \nabla a = 1$; l'algèbre monadique correspondante sera appelée *caotique ou simple*.

A partir de l'operateur ∇ nous pouvons définir l'opérateur dual Δ, appelé *quantificateur universel* au moyen de la formule: $\Delta a = - \nabla - a$; qui vérifie les conditions:

I') $\Delta 1 = 1$

II') $\Delta a \leqslant a$

III') $\Delta (a \cup \Delta b) = \Delta a \cup \Delta b$

duales de I, II, III.

Un élément c de A est *constant* ou *saturé* si $\nabla c = c$

La famille K de toutes les constantes de A est une *sous-algèbre booléenne* de A, c'est-à-dire K est fermée par rapport aux opérations $\cap$, $\cup$, $-$.

La notion d'isomorphisme entre deux algèbres monadiques se définit comme d'habitude. Une *sous-algèbre* (monadique) de (A,∇) est une partie non vide A' de A fermée par rapport aux opérations $\cap$, $\cup$, $-$, ∇. Toute sous-algèbre de

A est une algèbre monadique.

Soit $(A_i, \nabla)_{i \varepsilon I}$ une famille, non vide, d'algèbres monaqiques; nous appellerons *produit direct cartesien des algèbres* A_i à l'ensemble P de toutes les fonctions f définies sur I telles que pour chaque $i \in I$, $f(i) = f_i \in A_i$.

Représentant un élément f de P par la notation $(f_i)_{i \varepsilon I}$ ou plus sommairement par (f_i) et en posant, par définition:

$$(f_i) \cup (g_i) = (f_i \cup g_i)$$

$$(f_i) \cap (g_i) = (f_i \cap g_i)$$

$$-(f_i) = (-f_i)$$

$$\nabla(f_i) = (\nabla f_i)$$

on vérifie immédiatement que (P, ∇) est une algèbre de Boole monadique, que nous représenterons par la notation $P = \prod_{i \varepsilon I} A_i$, et nous dirons que les algèbres A_i sont les axes coordonnés de P.

La tranformation, qu'à chaque élément f de P fait correspondre sa coordonnée f_i sur l'axe A_i, sera appellée: la projection de f sur l'axe A_i. Si X est une partie de P, la projection de X sur l'axe A_i est l'ensemble des projections des divers éléments de X.

Nous venons de décrire deux procédés pour construire des algèbres monadiques à partir d'algèbres connues:
1°) Calculer des produits directs d'algèbres monadiques;
2°) Déterminer des sous-algèbres d'une algèbre monadique donnée.

Une sous-algèbre monadique A' du produit direct $P = \prod_{i \in I} A_i$: sera appellée un *sous-produit direct* des algèbres monadiques A_i, si la projection de A' sur A_i est égale à A_i, pour tout $i \in I$.

Une *algèbre monadique* A' est *sous-directement réductible* si elle est isomorphe à un sous-produit direct A' d'algèbres A_i sans que les projections de A' sur A_i soient des isomorphismes. Dans le cas contraire nous dirons que A est *sous-directement irréductible*.

2. HOMOMORPHISMES.

Etant donné deux algèbres monadiques A et A', nous appellerons *homomorphisme* (*monadique*) de A *sur* A' toute transformation univoque de A sur A' que vérifie les conditions suivantes:

1°) $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$
2°) $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$
3°) $f(-a) = -f(a)$
4°) $f(\nabla a) = \nabla f(a)$

Remarquons que la condition 2°) est une conséquence de 1°) et 3°) et que la condition 4°) est équivalente à

4') $f(\Delta a) = \Delta f(a)$

Nous pouvons définir le *noyau de l'homomorphisme* f de deux façons:

1°) Noyau de f est l'ensemble I de tous les éléments x de A tels que $f(x) = 0$.

2°) Noyau de f est l'ensemble F de tous les éléments

x de A tels que $f(x) = 1$

Le noyau F de l'homomorphisme f a les propriétés suivantes:

F1) F est *un filtre*.
F2) Si $x \in F$ *alors* $\Delta x \in F$.

Un filtre qui vérifie la condition F2) s'appelle un *filtre monadique*

Le noyau I de l'homomorphisme f a les propriétés suivantes:

I1) I *est un idéal de* A.
I2) *Si* $X \in I$ *alors* $\nabla X \in I$.

Un *idéal* qui vérifie la condition I2) s'appelle un *idéal monadique*.

Nous allons étudier la théorie des homomorphismes en prenant comme noyaux les filtres monadiques.

Etant donné un filtre monadique F, nous dirons que a et b de A sont congruents (module F) s'il existe un élément $z \in F$ tel que $a \cap z = b \cap z$.

On vérifie immédiatement que cette relation est une relation d'equivalence compatible avec les opérations $\cup$, $\cap$, $-$, ∇.

Dans ces conditions, étant donné una algèbre de Boole monadique A et un filtre monadique F, nous pouvons construire una algèbre de Boole monadique $A' = A/F$ (appellée algèbre quotient de A par F), qui est une image homomorphe de A. L'homomorphisme naturel f est celui qu'à chaque élément a de A fait correspondre la classe d'equivalence f(a) qui contient l'élément a et le noyau de f est F.

Si f est un homomorphismo monadique de A sur A' et F son noyau alors A est isomorphe à l'algèbre quotient A/F.

On voit ainsi qu'il est possible de déterminer toutes les images homomorphes de A à partir des filtres monadiques de A.

La famille des filtres monadiques propres(1) ordonnée par la relation d'inclusion est inductive supérieurement et, par conséquent, chaque filtre monadique propre est contenu dans un filtre monadique maximal que nous appellerons *filtre ultramonadique*.

On prouve aisément que chaque filtre monadique propre est l'intersection de tous les filtres ultramonadiques qui le contiennent.

Une algèbre monadique est *simple* si elle a plus qu'un élément et a une seule image homomorphe (à isomorphisme près) distincte de A. Pour qu'une algèbre monadique A soit simple il faut et il suffit que le quantificateur ∇ soit simple et que A ait au moins deux éléments.

Si F est un filtre monadique, pour que A/F soit simple il faut et il suffit que F soit un filtre ultramonadique.

Nous pouvons définir le *radical monadique* de A comme

---

(1) C'est-à-dire distinctes de A.

l'intersection de tous les filtres ultramonadiques. Comme le filtre principal $F(1)$ engendré par l'élément 1 est un filtre monadique, nous voyons immédiatement que le radical monadique de A se réduit à l'élément 1. Comme on dit couramment, A est une algèbre *"sans" radical monadique*, c'est-à-dire une *algèbre monadiquement semi-simple*.

Soit $\{M_i\}_{i\varepsilon I}$ l'ensemble de tous les filtres ultramonadiques de A. Pour chaque filtre ultramonadique M_i, soit m_i l'*homomorphisme naturel* de A sur $A/M_i = A_i$. Formons le produit cartésien $P = \prod_{i\varepsilon I} A_i$ de toutes les images homomorphiques simples de A, que nous appellerons modèles de A. On reconnait immédiatement que A est isomorphe à une sous-algèbre de P. Il suffit, pour cela, de faire correspondre à chaque élément x de A l'élément de P dont les coordonnées sont $x_i = m_i(x)$.

Nous venons de représenter toute algèbre monadique ayant plus d'un élément comme sous-produit direct d'algèbres simples, théorème classique de représentation, que nous utiliserons plus tard.

Les seules algèbres monadiques sous-directemente irréductibles sont les algèbres simples.

Remarquons que l'algèbre P, produit direct d'algèbres monadiques simples A_i, a pour constantes les éléments dont les coordonnées sont 0 ou 1 (dans chacune des algèbres A_i) et, par conséquent, la famille de toutes les constantes de P est une sous-algèbre complète de P.

Ce résultat montre que toute algèbre monadique A peut être représentée comme une sous-algèbre d'une algèbre P, dont les constantes forment une sous-algèbre (boléenne) complète, sans que P soit nécessairement complète.

3. ALGEBRES D'EQUIVALENCE.

Etant donné un concept abstrait, comme celui que nous venons d'introduire, il est important d'indiquer des exemples concrets et résoudre les problèmes de représentation correspondants.

Soit E un ensemble non vide et f une transformation univoque de E sur l'ensemble E'.

Nous dirons que deux points $a,b \in E$ sont équivalents si $f(a) = f(b)$.

La relation aRb que nous venons de définir est réflexive, symétrique et transitive, c'est-à-dire R est une relation d'équivalence définie sur E. Etant donné un point $p \in E$ nous appellerons *cellule d'équivalence* à l'ensemble C(p) de tous les points $x \in E$ tels que pRx.

Il est clair que $C(p) = f^{-1}(f(p))$. La famille de toutes les cellules d'équivalence C(p) a les propriétés suivantes:

1°) C(p) *est une partie non vide de* E.
2°) *Deux cellules d'équivalence sont disjointes ou coïncidantes.*
3°) E *est la réunion de toutes les cellules d'équivalence.*

Une famille $\{C(p)\}$ de parties d'un ensemble E ayant les propriétés 1°),2°) et 3°) s'appelle *une partition* de l'ensemble E. Il existe une correspondance bi-univoque naturelle entre les relations d'équivalence définies sur E et les partitions de E.

À chaque partition de E nous pouvons faire correspondre l'ensemble E' de toutes les cellules d'équivalence données et construire la fonction f qu'à chaque élément p de E fait correspondre la cellule d'équivalence C(p) qui contient l'élément p.

Etant donné une partie X de E posons $\nabla X = \bigcup_{p \varepsilon X} C(p)$.

Nous appellerons l'opérateur ∇ défini sur l'algèbre de Boole $A = 2^E$ de toutes les parties de E: *opérateur de saturation*. On reconnaît sans difficulté que $(A = 2^E, \nabla)$ est une algèbre de Boole monadique.

Toute sous-algèbre de $(2^E, \nabla)$ sera appelée une *algèbre d'équivalence*.

Il se pose naturellement le problème de savoir si toute algèbre de Boole monadique A est isomorphe à une algèbre d'équivalence.

Pour représenter A comme une algèbre d'équivalence,soit E l'ensemble de tous les ultrafiltres de A. Le théorème de représentation de Stone(1936,1937) affirme que, si à chaque filtre F de A nous faisons correspondre la famille f(F) de tous les ultrafiltres de A qui contiennent F,alors la famille de tous les ensembles ainsi obtenus définit une topologie sur E dans laquelle les ensembles fermés sont précisément de la forme f(F).L'espace E ainsi obtenu est un espace compact totalement disconnexe (espace booléen). Cela résulte immédiatement du fait que chaque filtre propre est l'intersection d'ultrafiltres et que chaque ultrafiltre est premier. Si $\{M_i\}_{i \in I}$ est la famille de tous les filtres ultramonadiques de A, alors les ensembles représentatifs $f(M_i)$ constituent une partition de l'espace E. Cette partition de E donne origine à un opérateur ∇ , qui transforme 2^E en une algèbre de Boole monadique ($2^E, \nabla$). Si à chaque élément x de A nous faisons correspondre la famille $\varphi(x)$ des ultrafiltres qui contiennent x, nous avons la représentation de Stone de l'algèbre A comme une sous-algèbre booléenne A' de 2^E (représentation de Stone de A). On prouve facilement que A' est u une sous-algèbre de l'algèbre monadique ($2^E, \nabla$) (Halmos 1955).

On peut préciser ce théorème de représentation en montrant que la partition indiquée auparavant donne origine à une relation d'équivalence simultanément ouvert et fermée de l'espace booléen E (Halmos 1955).

Ce théorème de représentation montre, aussi, que toute algèbre monadique est isomorphe a une sous-algèbre d'une algèbre monadique complète.

Sur ce théorème de représentation voir:C.Davis (1954) et O.Varsavsky (1957).

Il est intéressant de remarquer que, si le quantificateur ∇ est discret, tous les ultrafiltres sont monadiques, et,par conséquent, la relation d'équivalence obtenue est la relation d'identité (entre ultrafiltres), et le théorème de Halmos indiqué se réduit au théorème de représentation de Stone (1936-1937) pour les algèbres de Boole.

4. ALGEBRES MONADIQUES FONCTIONNELLES.

Soit I un ensemble non vide, K une algèbre de Boole que nous supposons complète (pour abréger) et considérons la famille $A = K^I$ de toutes les fonctions définies sur I et prenant ses valeurs dans K. A est, évidemment, une algèbre de Boole (complète). A chaque fonction $f \in A$ faisons correspondre la fonction constante ∇f définie par la formule

$$(\nabla f)(x) = \bigvee_{i \in I} f(i)$$

Alors on reconnait facilement que (A, ∇) est une algèbre de Boole monadique. Toute sous-algèbre monadique de (A, ∇) sera appellée *algèbre monadique fonctionnelle* ou plus simplement, *algèbre fonctionnelle*.

Une algèbre fonctionnelle est *riche* si, pour chaque fonction del'algèbre donnée, il existe un point x_o de I tel que $\nabla f = f(x_o)$, c'est-à-dire si chaque fonction atteint sa borne supérieure dans un point au moins de son champ de définition.

Il se présente en forme naturelle les deux problèmes suivants de représentation:

1°) Toute algèbre de Boole monadique sera-t-elle isomorphe à une algèbre fonctionnelle?

2°) Toute algèbre de Boole monadique sera-t-elle isomorphe à une algèbre fonctionnelle riche?

Paul Halmos a répondu affirmativement à cette deuxième question et par conséquent la réponse à la première est aussi affirmative.

La démonstration de ce théorème de Halmos n'est pas aussi simple que celle du théorème de représentation d'une algèbre de Boole monadique par une algèbre d'équivalence.

Une des manieres de démontrer le théorème de Halmos est celle que nous allons indiquer. La notion fondamentale est la suivante. Un *filtre* F d'une algèbre de Boole monadique est *libre* si pour tout élément f de F, on a $\nabla f = 1$, c'est-à-dire si l'unique constante qui appartient à F est 1. Un filtre libre est par conséquent un filtre propre. La famille des filtres libres ordonnée par la relation d'inclusion est inductive supérieurement et, par conséquent, par le théorème de Zorn, chaque filtre libre est contenu dans un filtre libre maximal, que nous appellerons *filtre ultralibre* et que nous représenterons par J. On prouve facilement que le radical libre de A, c'est-à-dire l'intersection de tous les filtres ultralibres, est égale à $\{1\}$.

Si J est un filtre ultralibre, formons l'algèbre quotient A/J. On voit facilement que dans chaque classe laterale module J, il y a tout au plus une constante, mais en géneral il peuvent exister des classes latérales qui ne contiennent aucune constante; plus précisement, la famille C de toutes les constantes de A est, en général, isomorphe à une sous-algèbre propre de A/J.

Ce qui est important c'est la détermination de tous les homomorphismes f de A sur l'algèbre K, tels que f(c) = c, pour $c \in K$, auxquels nous appellerons *caractères* de l'algèbre A. On prouve facilement que le noyau J d'un caractère est un filtre ultralibre tel que A/J est isomorphe à C. Nous appellerons les filtres ultralibres ayant cette propriété: des *individus*.

Le spectre d'une algèbre de Boole monadique sera la famille I *de tous les individus de* A. En général, le spectre d'une algèbre de Boole monadique est vide. Cependant on peut demontrer le théorème suivant:

Si l'algèbre monadique A *est complète ou, plus généralement, si la famille* K *de toutes les constantes de* A *est un réticulé complet, alors tout filtre ultralibre est un individu.*

La démonstration de ce théorème peut se faire en utilisant un théorème de Sikorski (1948) sur l'extension d'homomorphismes. Ce fut le chemin que nous avons suivi dans une note présentée a l'Unión Matemática Argentina. (A.Monteiro, Sobre el teorema de Halmos de representación de álgebras de Boole monádicas, Revista de la Unión Matemática Argentina, 18 (1956), pag.43), mais le résumé correspondant ne fut pas publié.

Il est possible aussi d'indiquer une démonstration directe de ce théorème sans utiliser le théorème de Sikorski.

Pour résoudre le problème de représentation, il suffit alors de remarquer que toute algèbre de Boole monadique est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre de Boole monadique dans laquelle la famille de toutes les constantes est une algèbre complète. Nous pouvons, alors, nous borner à étudier les algèbres A qui vérifient cette condition. Soit I le spectre de A.

Si J est un individu, soit j l'homomorphisme naturel de A sur $A/J = K$.

Etant donné un élément $f \in A$, soit F la fonction définie sur I et prenant ses valeurs en K, définie par l'égalité $F(J) = j(f)$. Nous écrirons $F = \varphi(f)$.

Considérons l'algèbre fonctionnelle monadique $B = K^I$; alors φ est une représentation isomorphe de A par une algèbre fonctionnelle monadique A', sous-algèbre monadique de B. En outre, A' est une algebre fonctionnelle riche. Pour voir qu'il en est ainsi, il suffit de remarquer que le filtre principal F engendré par l'élément $\nabla f \rightarrow f = -\nabla f \cup f$ est un filtre libre et, alors, pour tout individu J_o tel que $F \subseteq J_o$ on a $F(J) = j(f) = \nabla f$, étant donné que f et ∇f sont congruents module J_o.

La démonstration de ce théorème indiquée par Halmos (1955) est beaucoup plus complexe, mais elle resulte aussi d'une étude beaucoup plus profonde de la théorie des algèbres de Boole monadiques. En particulier nous voulons attirer l'attention sur la théorie des hemi-homomorphismes des algèbres de Boole, qui est un puissant instrument d'analyse.

D'autres démonstrations simples furent indiquées par d'autres auteurs; voir Halmos (1957).

Le procédé que nous avons indiqué auparavant, fondé dans le notion de filtre ultralibre, peut être considéré comme une extension naturelle des méthodes courantes, utilisé en Analyse, pour représenter une algèbre par une algèbre de fonctions.

Il est intéressant d'étudier les relations qui existent entre les individus et les filtres ultramonadiques. Il est facile de reconnaître que, si J est un individu et M un filtre ultramonadique quelconque, alors $J \cap M$ est un ultrafiltre. Varsavsky (1957) démontra l'intéressant résultat suivant: Si J est un filtre ultralibre tel que, pour tout filtre ultramonadique M, $J = M \cap U$ est un ultrafiltre, alors J est un individu.

Finalement, nous voulons remarquer que, si ∇ est le quantificateur simple, alors tous les filtres propres sont libres, donc dans ce cas les concepts de filtre ultralibre, d'ultrafiltre et d'individu coincident.
Le théorème de représentation fonctionnel de Halmos se réduit, alors, au théorème de représentation de Stone (1936-1937) pour les algèbres de Boole.

II. ALGEBRES DE LEWIS MONADIQUES

5. ALGEBRES DE LEWIS.

Le calcul propositionnel modal S4 fut considéré pour la première fois par Lewis et Langford (1932). Une première interprétation géométrique de ce calcul fut indiquée par Tang (1938). McKinsey (1941), sous l'influence des idées de Tarski, a mis en évidence les caractéristiques algébriques de ce calcul, avec l'introduction du concept de matrice norlale.

DEFINITION. *Nous appellerons algèbre de Lewis au couple* (A,C) *formé par une algèbre de Boole* A *et un opérateur* C *qui à chaque élément* a *de* A *fait correspondre un élément* Ca *de* A, *de telle façon que les conditions suivantes sont vérifiées:*

C1) $C0 = 0$

C2) $a \leqslant Ca$

C3) $C(a \cup b) = Ca \cup Cb$

C4) $CCa = Ca$

Cette notion fut introduite par Terasaka (1937), et après par McKinsey-Tarski (1944), comme une généralisation de la notion d'espace topologique, à laquelle on peut appelle aussi: algèbre de Boole topologique ou algèbre de fermeture (closure algebra).

Nous pouvons dire qu'au point de vue algèbrique le calcul propositionnel S4 est une algèbre de Lewis libre. Si p représente une proposition alors Cp représente la proposition "p *est possible*".

A partir de l'opérateur C nous pouvons définir l'opérateur I moyennant la formule $Ia = -C-a$, qui vérifie les conditions suivantes:
I1) $I1 = 1$; I2) $Ia \leqslant a$; I3) $I(a \cap b) = Ia \cap Ib$; I4) $IIa = Ia$ qui sont équivalentes aux conditions C1-C4. Nous pouvons par conséquent définir une algèbre de Lewis comme un couple (A, I) dans lequel I est un opérateur de A dans A qui vérifie I1-I4. Si p représente une proposition, alors Ip

représente la proposition "p *est nécessaire*".

Considérons l'opérateur Fr a = Ca ∩ C-a. Si p représente une proposition , Fr p représente la proposition "p *est contingent*".

Nous dirons que a est *ouvert* (*fermé*) si Ia = a(Ca = a).

6. HOMOMORPHISMES.

Etant donné deux algèbres de Lewis A et A' nous appellerons homomorphisme de A sur A' tout homomorphisme booléen de A sur A' qui vérifie la condition f(I(a)) = I(f(a)). Le noyau de l'homomorphisme f est l'ensemble F de tous les éléments a ∈ A tels que f(a) = 1. On vérifie que F est un filtre propre ouvert, c'est-à-dire, un filtre tel que si a ∈ F alors I(a) ∈ F. Réciproquement, étant donné un filtre propre ouvert F, l'algèbre quotient A/F est un algèbre de Lewis, image homomorphe de A.

La famille des filtres ouverts propres de A est inductive supérieurement et, par conséquent, chaque filtre ouvert propre est contenu dans un filtre ouvert maximal.

Les définitions d'algèbre de Lewis simple et discrète sont analogues à celles indiquées auparavant pour les algèbres de Boole monadiques.

Si F est un filtre propre ouvert, pour que A/F soit une algèbre de Lewis simple il faut et il suffit que F soit un filtre ouvert maximal. Il est facile d'indiquer des exemples d'algèbres de Lewis pour lesquelles l'intersection de tous les filtres ouverts maximaux est un filtre (ouvert) distinct du filtre principal F(1), ce que nous pouvons exprimer en disant que le radical ouvert est distinct de {1};c'est-à-dire les algèbres de Lewis ne sont pas en général semi-simples.

7. ALGEBRES DE LEWIS TOPOLOGIQUES.

Soit E un espace topologique et C l'operateur de fermeture correspondant; alors le système $(2^E,C)$ est une algèbre de Lewis (complète). Nous appellerons toute sous-algèbre de $(2^E,C)$: *algèbre de Lewis topologique*.

Il se pose naturellement le problème de savoir si toute algèbre de Lewis est isomorphe à une algèbre de Lewis topologique. La réponse à cette question est affirmative (McKinsey-Tarski (1944)).

Soit (A,C) une algèbre de Lewis et s(x) la famille de tous les ultrafiltres de A qui contient x. Soit B la famille de tous les ensembles de la forme s(a), où a est ouvert. Prenant B comme base d'ouverts pour définir une topologie sur l'ensemble E de tous les ultrafiltres de A, nous obtenons un espace topologique E, qui est compact. Alors, il est facile de montrer que (A,C) est isomorphe à une sous-algèbre de l'algèbre de Lewis topologique $(2^E,C)$.

8. ALGEBRES DE LEWIS MONADIQUES.

Supposons que A soit simultanément une algèbre de Lewis et une algèbre de Boole monadique. Pour que l'étude d'un tel système soit intéressant il faut postuler quelque relation entre les opérateurs de fermeture et de quantification. Les exemples indiqués plus loin donnent lieu à la définition suivante:

DEFINITION. *Nous dirons que le système* (A,C,∇) *est une algèbre de Lewis monadique si:*

1º) (A,C) *est une algèbre de Lewis.*

2º) (A,∇) *est une algèbre de Boole monadique.*

3º) $\nabla C \nabla = C \nabla$.

La condition 3º), qui établit une relation entre les deux opérateurs C et ∇, est équivalente a n'importe laquelle des conditions suivantes:

3') $\Delta I \Delta = I \Delta$;
4) $C \Delta C = \Delta C$;
4') $I \nabla I = \nabla I$

3') est dual de 3) et 4') est dual de 4). D'après 4')le *saturé d'un élément ouvert est ouvert.*

Il est convenable de remarquer que, si ∇ est le quantificateur discret, la condition 3) est automatiquement vérifiée et nous pouvons identifier cette algèbre de Lewis monadique particulière avec l'algèbre de Lewis (A,C). D'ailleurs, si C est l'opérateur de fermeture discret, la condition 3) est aussi vérifiée et nous pouvons identifier cette algèbre de Lewis monadique particulière avec l'algèbre de Boole monadique (A,∇).

Dans ces conditions le concept d'algèbre de Lewis monadique se présente comme une généralisation des concepts d'algèbre de Lewis et d'algèbre de Boole monadique.

On reconnaît facilement que la famille K de toutes les constantes d'une algèbre de Lewis monadique (A,C,∇) est une algèbre de Lewis (K,C), ce qui est une conséquence immédiate du postulat 3º).

Les concepts d'homomorphisme, etc.,se définent à la maniere habituelle.

9. ALGEBRES D'EQUIVALENCE OUVERT

Le premier exemple important d'une algèbre de Lewis monadique est celui que nous allons indiquer maintenant.

Soit (E,C) un espace topologique, où C représente l'opérateur de fermeture. Alors $(2^E,C)$ est une algèbre de Lewis. Etant donné une relation $\sim$ d'équivalence sur E, représentons par ∇ l'opérateur de saturation correspondant. Nous dirons que cette relation *d'équivalence est ouverte* si le saturé d'un ensemble ouvert est un ensemble ouvert, c'est-à-dire si $\nabla I = I\nabla I$. Dans ces conditions, le système $(2^E,C,\nabla)$ est une algèbre de Lewis monadique.

Nous appellerons toute sous-algèbre de $(2^E,C,\nabla)$:une *algèbre d'équivalence ouverte*.

Il se pose naturellement le problème de savoir si toute algèbre de Lewis monadique est isomorphe à une algèbre d'équivalence ouverte. La réponse à cette question est affirmative.

Indiquons la démonstration dans ses lignes générales. Soit (A,C,∇) une algèbre de Lewis monadique.Soit E la famille de tous les ultrafiltres de A.Alors la représentation de Stone de A, permet de représenter l'algèbre de Lewis (A,C) par une algèbre de Lewis topologique et l'algèbre de Boole monadique (A, ∇) par une algèbre d'équivalence.

On prouve facilement que la relation d'équivalence ainsi obtenue est ouvert et que (A,C,∇) est isomorphe à une sous-algèbre de $(2^E,C,\nabla)$.Ce résultat montre aussi que toute algèbre de Lewis monadique est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre de Lewis monadique complète (résultat qui sera utilisé plus loin).

10. ALGEBRES FONCTIONNELLES DE LEWIS.

Soit E un ensemble non vide, (K,C) une algèbre de Lewis (que nous supposons complète) et considerons la famille L = $= K^E$ de toutes les fonctions définies sur E et prenant des valeurs dans K.(Rasiowa - 1951). L est une algèbre de Boole (complète). Si à chaque fonction $f \in L$ nous faisons correspondre la fonction Cf définie par la formule $(Cf)(x) = C(f(x))$, alors (L,C) est une algèbre de Lewis. Utilisant la définition de ∇f indiquée dans le numéro 3,nous pouvons affirmer que (L, ∇) est une algèbre de Boole monadique.Comme l'on reconnaît facilement, le système (L,C,∇) est une algèbre de Lewis monadique.

Nous appelerons toute sous-algèbre de (L,C,∇) une *algèbre fonctionnelle de Lewis monadique* ou plus sommairement, une *algèbre fonctionnelle*.

Il se présente en forme naturelle, les deux problèmes de représentation suivants:

1º) Toute algèbre de Lewis monadique sera-t-elle isomorphe à une algèbre fonctionnelle?

2º) Toute algèbre de Lewis monadique sera-t-elle isomorphe à une algèbre fonctionnelle riche?

Le premier problème est beaucoup plus complexe que le problème analogue pour les algèbres de Boole monadiques et il n'est pas encore résolu.

Il existe des algèbres de Lewis monadiques finies qui ne peuvent être représentées par des algèbres fonctionnelles à moins que le champ de définition E et le champ de valeurs (K,I) des fonctions soient simultanément infinis.

Cette circonstance établit un contraste significatit avec le cas particulier des algèbres de Boole monadiques finies.

La réponse au deuxième problème est négative: il existe des algèbres de Lewis monadiques qui ne peuvent pas être représentées isomorphiquement par des algèbres fonctionnelles riches.

Nous devons, par conséquent, étudier le problème suivant:

3º) Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une algèbre de Lewis monadique soit représentable par une algèbre fonctionnelle riche.

On peut démontrer le résultat suivant

THEOREME. *Pour qu'une algèbre de Lewis monadique soit représentable isomorphiquement par une algèbre fonctionnelle riche il faut et il suffit que les opérateurs* I *et* ∇ *commutent c'est-à-dire que:* $I\nabla = \nabla I$.

La démonstration de que la condition est suffisante, est analogue à celle qui a été indiquée pour les algèbres de Boole monadiques. Nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que (A,C,∇) est une algèbre complète. De la condition $I\nabla = \nabla I$ il résulte que tout filtre ultralibre J est ouvert.
Alors l'homomorphisme naturel j de A sur K (famille des constantes de A) est un homomorphisme de l'algèbre de Lewis (A,C) sur l'algèbre de Lewis (K,C) qui laisse invariants les éléments de K. A chaque élément f de A faisons correspondre la fonction F définie sur l'ensemble E de tous les filtres ultralibres J, moyennant la formule $F(J) = j(f)$. Considérons l'algèbre fonctionnelle $L = E^K$ qui est une algèbre de Lewis monadique. La représentation $\varphi(f) = F$ est une représentation isomorphe de A qui a les propriétés demandées.

Il convient de remarquer que si l'opérateur C (et par conséquent I) est l'opérateur discret alors la condition $I\nabla = \nabla I$ est automatiquement vérifiée et le théorème de représentation que nous venons d'indiquer coïncide avec le théorème de Halmos.

11. REMARQUES.

Le calcul fonctionnel modal S4 a été par plusieurs auteurs, parmi lesquels nous citons Helena Rasiowa et Roman Sikorski (voir en particulier H.Rasiowa (1951); H.Rasiowa et R.Sikorski (1951)). Des hypothèses faites por Rasiowa (1951) pour le calcul fonctionnel S4 il résulte que dans l'algèbre de Lindembaum correspondante se vérifie la formule $\nabla C \nabla = C \nabla$, si ∇ représente un quantificateur existentiel $\exists x_k$ et C l'opérateur $\Diamond$. Dans ces conditions si nous nous bornons à considérer le calcul fonctionnel monadique S4 l'algèbre de Lindembaum correspondante est une algèbre de Lewis monadique (libre).

D'autres auteurs font des hypothèses d'une nature beaucoup plus particulière.

Sans avoir la prétention de faire une révision complète, indiquons cependant quelques propriétés de l'opération de quantification qui sont valables dans quelques théories du calcul fonctionnel modal S4.

Nous présentons ici les versions algébriques correspondantes.

Soit (A, C, ∇) un système tel que (A, C) soit une algèbre de Lewis et (A, ∇) une algèbre de Boole monadique et posons $I = -C-$.

1) *Si la formule* $C \nabla = \nabla C$ *est valable* (Barcan-1946, formule 38) alors la formule $\nabla C \nabla = C \nabla$ est vérifiée, et par conséquent (A, C, ∇) sera une algèbre de Lewis monadique.

Il existe des algèbres fonctionnelles monadiques qui ne vérifient pas la condition $C \nabla = \nabla C$. En effect soit R la euclidéenne avec sa topologie naturelle, alors $(K=2^R, C)$ est une algèbre de Lewis complète. Soit E l'ensemble des nombres rationnels et f la transformation d'identité de E dans R. Alors

$$C\nabla f = C(\bigcup_{x \varepsilon E} f(x)) = CE = R$$

$$\nabla Cf = \bigcup_{x \varepsilon E} Cf(x) = \bigcup_{x \varepsilon E} Cx = E$$

et par conséquent $C\nabla \neq \nabla C$.

Soit (K,C) une algèbre de Lewis complète dans laquelle C est complètement additif, c'est-à -dire:

$$C(\bigvee_i a_i) = \bigvee_i Ca_i$$

alors il est facile de vérifier que l'algèbre fonctionnelle monadique $L = K^E$ (où E est un ensemble non vide), vérifie la condition $\nabla C = \nabla C$.

2) *Si nous supposions que* $\nabla C \nabla = C\nabla$ *et que* C *est un quantificateur* (c'est-à-dire que $C(a \cap Cb) = Ca \cap Cb$), (voir Carnap-1946) alors il est possible de démontrer que C et ∇ commutent; résultat analogue à celui démontré par Prior (1956). Mais il est clair qu'il peut arriver que C et ∇ commutent sans que C soit un quantificateur.

3) Prior (1955, pag.211) formule le *principe de prédication de Wrigth* (1951, pag. 27) sous une forme équivalente, au point de vue algébrique, à

$$\text{(P)} \quad -(\nabla(Ca \rightarrow Ia) \cap \nabla(Ca \cap -Ia)) = 1$$

L'axiome précédent peut être formulé plus simplement sous la forme équivalente:

$$(P) \quad \nabla Fr\ a = Fr\ a$$

qui peut être énoncé en termes logiques de la manière suivante:

"Il existe un x tel que a(x) est contingent est logiquement équivalent à a(x) est contingent".

Il est possible de prouver que de l'axiome (P) il résulte $\nabla C \nabla = C \nabla$ et nous avons à faire à une algèbre de Lewis monadique.

La condition (P) peut être vérifiée sans que I et ∇ commutent (version algébrique de ce qu'affirme Prior (1955, pag. 211) pour ce calcul fonctionnel monadique S4).

4) Finalement nous pourrions ajouter à cette liste de formules particulières l'égalité $\nabla I = I \nabla$, qui se présente comme une condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre de Lewis monadique soit représentable par une algèbre fonctionnelle riche. Il est clair que, si cette condition est vérifiée, alors la formule 4') est valable et par conséquent (A,C,∇) est une algèbre de Lewis monadique. Il existe des algèbres de ce genre qui ne vérifient pas la condition (P). Il est possible d'indiquer des exemples d'algèbres de Lewis monadiques qui vérifient les conditions suivantes: 1) (P), 2) $I \nabla = \nabla I$, 3) C est un quantificateur (et par conséquent C et ∇ commutent), sans qu'aucun des deux opérateurs C et ∇ soit discret.

Dans tous les cas que nous venons d'indiquer l'égalité $\nabla C \nabla = C \nabla$ est toujours verifiée, donc le concept d'algèbre de Lewis monadique est digne de consideration.

Le problème fondamental de savoir si cette notion est une description abstraite adéquate du concept d'algèbre fonctionnelle de Lewis monadique reste posé. Dans la résolution de ce problème il faut employer des techniques différentes de celles qui furent indiquées dans ces conférences. La théorie des hemi-morphismes de Halmos convenablement généralisée peut éventuellement orienter la résolution de ce problème.

INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

BIBLIOGRAPHIE

1946 - BARCAN (Ruth): *A Functional Calculus of the First Order Based on Strict Implication.* The Journal of Symbolic Logic. 11(1946), 1-16.

1946 - CARNAP (Rudolf): *Modalities and Quantifications.* The Journal of Symbolic Logic. 11(1946), 33-64.

1954 - DAVIS (Chandler): *Modal Operators, Equivalence Relations and Projective Algebras.* American Journal of Mathematics. 76(1954), 217-249.

1954 - HALMOS (Paul): *Polyadic Boolean Algebras.* Proceedings of the Nat. Acad. of Sciences of the U.S.A. 40(1954), 296-301.

1955 - HALMOS (Paul): *Algebraic Logic, I (Monadic Boolean Algebras).* Compositio Mathematica, 12(1955), 217-249.

1956 - HALMOS (Paul): *The Basic Concepts of Algebraic Logic.* American Mathematical Monthly. 63(1956), 363-387.

1957 - HALMOS (Paul): *The Representation of Monadic Boolean Algebras.* (Mimeographed notes). (1957).

1932 - LEWIS (C.I.) and LANGFORD (C.H.): *Symbolic Logic.* New York (Century Co). 1932.

1941 - McKINSEY (J.C.C.): *A Solution of the Decision Problem for the Lewis Systems S.2 and S.4 with Aplication to Topology.* The Journal of Symbolic Logic. 6(1941), 117-134.

1944 - McKINSEY (J.C.C.) and TARSKY (Alfred): *The Algebra* *of Topology*. Annals of Mathematics. 45(1944), 141-191.

1957 - MONTEIRO (António): *Normalidad en las Algebras de Heyting Monádicas*. Actas de las X Jornadas Matemáticas Argentinas (1957), 50-51.

1957 - MONTEIRO (António) e VARSAVSKY (Oscar): *Algebras de Heyting Monádicas*. Actas de las X Jornadas Matemáticas Argentinas. (1957), 52-62.

1955 - PRIOR (A.N.): *Formal Logic*. Claredon Press. Oxford. 1955.

1956 - PRIOR (A.N.): *Modality and Quantification in S5*. The Journal of Symbolic Logic. 21(1956), 60-62.

1951 - RASIOWA (Helena): *Algebraic Treatment for the Functional Calculi of Heyting and Lewis*. Fundamenta Mathematicae. 38(1951), 99-126.

1955 - RASIOWA (H.) and SIKORSKI (R.): *An Application of Lattices to Logic*. Fundamenta Mathematicae. 42 (1955), 83-100.

1948 - SIKORSKI (Roman): *A Theorem on Extensions of Homomorphisms*. Annales de la Société Polonaise de Mathématiques. 21(1948), 332-335.

1936 - STONE (Marshall H.): *The Theory of Representation of Boolean Algebras*. Transactions of the American Mathematical Society. 40(1936), 37-111.

1937 - STONE (Marshall H.): *Applications of Boolean Rings to General Topology*. Transactions of the American Mathematical Society. 41(1937), 375-481.

1938 - TANG (Tsao-Chen): *Algebraic Postulates and a Geome-*

tric Interpretation for the Lewis Calcules of Strict Implication. Bull. Amer. Math. Soc. 44(1938), 737-744.

1937 - TERASAKA (Hidetaka): *Theorie der Topologischen Verbände*. Proc. Imperial Acad. Tokyo. 13(1937), 401-405.

1957 - VARSAVSKY (Oscar): *Quantifiers and Equivalent Relations*. Revista Matemática Cuyana. 2(1956-57), 29-51.

1951 - Von WRIGHT (George H.): *An Essay in Modal Logic. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Company. Amsterdam. 1951.