NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

8

JEAN PORTE

LA LOGIQUE MATHEMATIQUE ET LE CALCUL MECANIQUE

1972
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

LA LOGIQUE MATHEMATIQUE ET LE CALCUL MECANIQUE (1)

Par J. PORTE

Attaché de Recherches au C.N.R.S. (Paris)

1.- LE PROBLEME DE LA DECISION

Le développement actuel des procédés de calcul mécanique et de la " cybernétique " amène un grand nombre de personnes à se demander si on ne peut pas prévoir une époque où les machines remplaceront entièrement l'homme pour tout travail intellectuel.

---

(1) Dans cet article, j'ai utilisé librement le contenu de divers exposés faits par les membres du Séminaire de Logique de l'Institut Henri Poincaré, et en particulier une conférence de D. Lacombe. Une première version de cet article a été publiée (miméographiée) dans le Bulletin de l'Association Amicale de la Statistique, nº 28 (oct.-déc. 1955) pp. 21-63 et nº 29 (janv.-juin 1956), pp. 43-63.

Je n'ai pas l'intention de traiter ici ce problème général - il semble, d'ailleurs, que nos connaissances ne soient pas assez avancées pour qu'on puisse le traiter de façon réellement scientifique. Mon intention est de me limiter à un problème plus restreint, que l'on peut énoncer en termes assez vagues, de la façon suivante: <u>Existe-t-il un procédé mécanique pour résoudre tous les problèmes mathématiques</u> ?

Ce problème là n'est pas né de la cybernétique; il avait été posé il y a plus de 40 ans par les créateurs de la logique mathématique, et en particulier par Hilbert, sous la forme suivante: Etant donné une proposition mathématique quelconque, existe-t-il un procédé mécanique pour décider si une proposition est vraie ou fausse ? C'est ce qu'on appelle "<u>le problème de la décision</u>" (2)

On peut concevoir de la façon suivante les rapports du problème de la décision avec le problème général né de la cybernétique. S'il existait un "procédé mécanique" pour décider de la vérité d'une proposition mathématique quelconque, alors on pourrait construire une "machine" qui applique ce procédé; le rôle du mathématicien consiste-

---

(2) En allemand "Entscheidungsproblem" - terme que l'on retrouve souvent dans la littérature logique.

rait uniquement à énoncer des hypothèses et à demander à la machine si l'hypothèse est vraie ou non. Mais si, au contraire, un tel "procédé mécanique" n'existe pas, alors la question reste ouverte de savoir s'il n'est pas possible de construire une "machine" qui, sans être capable de décider de la vérité de n'importe quelle proposition mathématique, soit du moins capable de remplacer le cerveau d'un mathématicien. Je reviendrai sur ce point.

Si maintenant nous regardons l'état des mathématiques les plus classiques, il est immédiat que, d'une part il existe des catégories de propositions qui peuvent être "décidées" mécaniquement, d'autre part nous ne connaissons pas de procédé mécanique pour "décider" une proposition mathématique quelconque.

Un exemple trivial d'une catégorie de propositions pour lesquelles il existe une méthode de décision est le suivant: les égalités entre des expressions constituées par les représentations habituelles des nombres entiers (numérotation décimale), le signe "+" de l'addition, le signe "x" de la multiplication et les parenthèses. La méthode de décision est enseignée à l'école primaire. Si j'écris une égalité quelconque de ce genre, par exemple

$$13 \times 11 = (4 \times 25) + 2$$

pour "décider" cette proposition, il suffit d'"effectuer" les opérations dans les deux membres et de comparer les résultats; dans l'exemple donné on trouve

$$143 = 102$$

et la proposition est fausse.

D'autre part, il est clair que nous ne connaissons pas de méthode générale de décision pour des propositions mathématiques quelconques puisque des problèmes mathématiques posés depuis plusieurs siècles ne sont toujours pas résolus. Soit par exemple la proposition suivante: "Il n'existe pas de quadruplet de quatre nombres entiers: x, y, z, n, satisfaisant simultanément aux conditions suivantes:

$$x^n + y^n = z^n$$

$$x \geq 1, \quad y \geq 1, \quad z \geq 1, \quad n > 2 \text{ "}$$

Cette proposition a été énoncée par Fermat au 17ème siècle et, malgré les recherches de plusieurs générations de mathématiciens, on n'a pu ni la démontrer, ni démontrer sa négation. Or, si nous possédions une méthode générale de décision, il suffirait de l'appliquer à la proposition mise ci-dessus entre guillemets pour résoudre ce problème classique.

Maintenant, on peut se demander si nous ne nous trouvons pas dans la situation suivante: Il existerait une méthode générale de décision, mais cette méthode serait tellement compliquée qu'elle serait pratiquement inapplicable, les calculs étant trop longs - et alors on pourrait espérer construire une machine qui marche assez vite pour appliquer la méthode de décision de façon pratiquement utilisable.

En fait, une telle méthode générale de décision n'existe pas, ainsi que cela a été démontré il y a une vingtaine d'années par les travaux des logiciens, en particulier de Gödel et Church. D'une façon plus précise, les logiciens ont étudié des classes plus ou moins étendues de propositions mathématiques; pour certaines de ces classes on a démontré qu'il n'existe pas de procédés de décision, pour d'autres on a démontré qu'il existe un procédé de décision, bien que ce procédé soit quelquefois trop complexe pour être applicable pratiquement par des procédés "manuels".

Ce qui suit a pour but d'exposer quelques unes des méthodes mathématiques utilisées par les logiciens pour obtenir ces résultats.

Il faut bien souligner qu'il s'agit là de travaux purement mathématiques d'une nouvelle branche des mathématiques sans doute, mais d'une branche des mathématiques qui n'est pas essentiellement différente des branches plus anciennes. Il ne faut pas se laisser tromper par le fait que, en France, "la logique" est considérée traditionnellement comme une partie de la "philosophie": la logique mathématique n'a rien de plus philosophique que l'algèbre par exemple, ou la topologie, et ses conclusions sont acceptables (et acceptées) par des personnes ayant les positions les plus diverses dans les domaines vraiment philosophiques.

Maintenant, reprenons l'énoncé du problème de la décision donné plus haut: "Etant donné une proposition mathématique quelconque, existe-t-il un procédé mécanique pour décider si cette proposition est vraie ou fausse?". Dans cet énoncé on trouve les expressions de "proposition mathématique" (et de "proposition vraie" ou "fausse") et de "procédé mécanique". Or ces termes n'ont pas été définis. Si nous voulons traiter ce problème par des procédés mathématiques, il faut d'abord donner une définition mathématique des termes utilisés. Plus exactement, il faut transformer le problème en y remplaçant les concepts concrets et vagues par des concepts abstraits mathématiques qui leur soient "adéquats". C'est au fond ce qu'on fait en géométrie par exemple quand on remplace le concept concret et vague de "droite physique" (bord d'une règle, fil tendu,...) par le concept abstrait de "droite euclidienne" ou par celui de "géodésique".

Ainsi, au concept vague de "proposition mathématique" ou plutôt de "proposition appartenant à une certaine classe de propositions mathématiques", nous substituerons le concept (défini plus loin) de "formule d'un système formel"; et au lieu de dire que "une certaine proposition est vraie", nous dirons "une certaine formule d'un système formel est une thèse de ce système formel" (3).

De même, au concept vague de "procédé mécanique", nous substituerons le concept abstrait de "procédé récursif", qui sera défini plus loin. Et pour arriver à cette définition, nous utiliserons le concept abstrait de "fonction récursive" - notion obtenue en somme comme "sous-produit" des recherches logiques, mais qui a des applications multiples hors du champ de la logique, car elle correspond à la notion vague et concrète de "fonction d'entiers effectivement calculable".

Alors le problème de la décision prendra la forme suivante: "Pour tel système formel, existe-t-il un pro-

---

(3) Il existe aussi un concept abstrait de "vérité formelle", dû à Tarski, et qui sera laissé de côté dans ce qui suit. Voir Tarski: Logic, Semantics, Metamathematics (papers from 1923 to 1938), Oxford, 1956.

cédé récursif qui permette de décider si une formule quelconque du système est ou n'est pas une thèse de ce système". Ce sera là un problème mathématique précis pouvant être traité par des méthodes mathématiques.

Bien entendu, comme chaque fois qu'on veut appliquer un résultat mathématique à un problème concret, il restera à savoir si les notions mathématiques utilisées sont "adéquates" aux notions concrètes qu'elles sont censées représenter. Un problème d'adéquation n'est pas un problème mathématique, et ne peut être résolu que par un appel plus ou moins direct à l'expérience. Ainsi, en géométrie, chacun sait que les notions de la géométrie euclidienne sont adéquates en première approximation pour la description de certaines propriétés de l'univers réel, comme cela résulte de l'expérience quotidienne; mais on sait aussi que, en deuxième approximation, cette adéquation cesse, ainsi que cela résulte de la théorie de la relativité (donc, en définitive, des expériences physiques qui confirment la théorie de la relativité). Il en est de même en logique. Par exemple, nous admettrons que les "fonctions récursives" sont identiques aux "fonctions effectivement calculables", car cela semble résulter (plus ou moins directement) de l'expérience; mais ce n'est pas un théorème mathématique. De toutes façons, il est important de bien séparer ces problèmes d'adéquation (non mathématiques) des questions mathématiques qui ne concernent que les notions abstraites.

2.- LE PROGRAMME LOGISTIQUE ET LES SYSTEMES FORMELS

Si nous considérons le développement historique des mathématiques classiques, nous voyons qu'un des aspects de ce développement est la recherche de la "rigueur". Qu'est-ce que cela veut dire exactement? Cela signifie que, **au lieu** de considérer les êtres mathématiques comme des êtres concrets dont on examine empiriquement les propriétés, on les considère comme des êtres abstraits ayant par hypothèse certaines propriétés d'où on déduit d'autres propriétés. C'était déjà, semble-t-il, le point de vue d'Euclide: en géométrie élémentaire on démontre certaines propositions qui seraient "évidentes" si l'on considérait ces êtres géométriques comme des êtres concrets. En fait, Euclide utilisait des propositions qu'il n'énonçait pas explicitement. Mais, sous la forme que lui a donnée Hilbert, la géométrie euclidienne est devenue tout à fait rigoureuse: on admet au départ certaines propositions, dite "axiomes" d'où on déduit d'autres propositions. Les "objets" étudiés par la géométrie euclidienne sont, par définition, ceux qui satisfont aux axiomes que de tels objets existent dans la nature ou non.

C'est là la méthode "axiomatique" maintenant familière à tous les mathématiciens.

Mais qu'est-ce que " déduire " une proposition d'une autre (ou de plusieurs autres)? L'analyse du processus de déduction, tel que les mathématiciens le réalisent effectivement, a été l'une des tâches entreprises par les logiciens de la seconde moitié du 19ème siècle.

L'un des résultats de ce travail a été d'isoler un certain nombre de notions, utilisées dans les raisonnements mathématiques et traditionnellement considérées comme "logiques", et de les étudier mathématiquement. Par exemple, on trouve souvent dans les ouvrages de mathématique des propositions complexes des formes suivantes (p et q étant des propositions plus simples):

p est une condition suffisante de q
ou : q est une condition nécessaire de p
ou : si p, alors q
ou : p implique q

(ces quatre propositions sont équivalentes).

Or, bien des parties de raisonnements mathématiques peuvent être considérées comme les applications particulières de la proposition suivante:

"Pour toutes propositions p et q on a :

(p implique q) implique (non - q implique non - p)".

Des propositions de ce genre peuvent être systématisées et le résultat de la systématisation est une partie de la logique (or si l'on préfère, une partie des mathématiques) connue sous le nom de "calcul des propositions".

Il faut distinguer des propositions - logiques si l'on veut - telle que celle qui est citée ci-dessus entre guillemets, des règles de déduction. Une règle n'est pas une proposition, mais une méthode pour passer d'une ou plusieurs propositions déjà affirmées à l'affirmation d'une nouvelle proposition. Un exemple est la règle suivante (dite"règle de détachement" ou encore "modus ponens"):

- De "p" et "p implique q" , déduire "q".

Le travail des logiciens du 19ème siècle a consisté, non seulement à isoler et à étudier les notions "logiques" utilisées par les mathématiciens, mais encore à décomposer les raisonnements mathématiques de façon à les ramener à des suites d'applications de quelques règles précises, telle que la règle de détachement.

Ainsi, d'une part, ils ont développé de façon abstraite ces parties des mathématiques que l'on peut appeler "logique" car elles sont communes à des branches très diverses des mathématiques - nous en retrouverons certaines plus loin sous le nom de "calcul des propositions" et de "calcul des prédicats", et il faut y ajouter la "théorie des ensembles". D'autre part, ils sont allés au delà de la méthode axiomatique plus classique, en ceci qu'ils ne se sont pas contentés de reconstruire certaines branches des mathématiques à partir de propositions primitives ("axiomes") en utilisant des méthodes de déduction "logiques" supposées données par ailleurs mais ils ont développé de la même façon les théories généralement considérées comme "mathématiques" et celles considérées comme "logiques", les unes et les autres étant constituées de propositions obtenues à partir de "propositions primitives" par l'application de règles de déduction explicitement formulées. - De plus, certains concepts "mathématiques" fondamentaux peuvent être définis à l'aide de notions "logiques"; par exemple, on peut définir le concept de nombre entier à partir de la théorie des ensembles. On arrive ainsi à la fusion complète entre "les mathématiques" et "la logique", qui est caractéristique de l'école dite "logistique".

Le programme de l'école "logistique" (Peano, Frege, Russel, Whitehead, etc.) peut finalement se résumer ainsi: reconstruire les mathématiques de façon que tous les théorèmes soient obtenus, à partir de certaines propositions dites "primitives" ("axiomes" ou "postulats" et "définitions") par l'application de certaines règles de déduction.

La possibilité à priori de réaliser un tel programme semble résulter du fait que les mathématiciens travaillent déjà d'une façon analogue. Il se peut qu'il faille du génie (ou beaucoup de chance) pour découvrir une démonstration d'un théorème; mais, une fois qu'une telle démonstration est découverte et publiée en détail, n'importe quel étudiant peut la vérifier. La réalisation du programme logistique exige simplement qu'on puisse remplacer l'étudiant par une machine.

En fait, la possibilité de réaliser ce programme ne peut être réellement établie que par sa réalisation effective. Et encore, il restera toujours de la place pour la discussion et le désaccord, car on n'a pas défini avec précision ce que signifie l'expression "tous les théorèmes mathématiques" - et chaque mathématicien a sa conception particulière de ce qui "appartient" ou "n'appartient pas aux mathématiques"...

Ce que l'on peut dire avec certitude, c'est qu'il est possible de reconstruire suivant les principes de l'école logistique, la plus grande partie de ce que l'on entend généralement sous le nom de "mathématiques". En effet, cela a été fait par Whitehead et Russel dans leur livre "Principia Mathematica" et par leur successeurs (en particulier Quine) qui ont éliminé certaines obscurités, qui se trouvaient dans le système de Whitehead et Russel.

Un autre exemple plus moderne, de reconstruction logistique de la plus grande partie des mathématiques est constitué par les "Eléments de mathématiques" de Bourbaki (4).

Bien entendu, ni les trois volumes des "Principia", ni la vingtaine de fascicules parus des "Eléments" de Bourbaki ne contiennent effectivement la plupart des théorèmes démontrés jusqu'ici; mais dans un cas comme dans l'autre, il est assez clair que l'on pourrait prolonger ces ouvrages par d'autres volumes (ou fascicules)

(4) Les mathématiciens qui signent "N. Bourbaki" s'abstiennent, volontairement semble-t-il, de se réclamer de l'école logistique. Mais en fait le programme qu'ils essaient de réaliser est très voisin de celui de Whitehead et Russel.

de façon à intégrer dans le système la plupart des théorèmes connus. C'est une question de travail - un travail qu'on n'a d'ailleurs guère de raison de faire, à partir du moment où on s'aperçoit qu'il est faisable.

Maintenant, une fois que les mathématiques sont reconstruites suivant un procédé logistique, nous pouvons les considérer d'un point de vue purement "formel". Oublions que les propositions énoncées ont un sens, et regardons ce qui est sur le papier. Nous voyons des lignes de signes typographiques, qu'on appelle des théorèmes, les propositions primitives constituent une liste donnée de telles lignes, et les règles de déduction sont des préceptes qui permettent d'ajouter mécaniquement de nouvelles lignes à la liste. Tous les théorèmes pourraient être démontrés par quelqu'un qui ignorerait complètement leur signification (5).

---

(5) Ceci est plus apparent dans les "Principia" ou dans les travaux de Quine, que dans les "Eléments" de Bourbaki, car les auteurs de ce dernier ouvrage ont renoncé - pour des raisons qui restent inconnues au lecteur - aux avantages du symbolisme précis élaboré par les logiciens depuis une cinquantaine d'années. On pourrait aussi enseigner l'algèbre élémentaire en écrivant "le produit par trois du carré de l'inconnu", au lieu de "$3x^2$".

Si on accepte d'assimiler "les mathématiques" à un système logistique déterminé, alors les "propositions mathématiques" sont remplacées par certaines séquences de signes typographiques, le problème de savoir si une "proposition mathématique" peut être démontrée est remplacé par le problème de savoir si une séquence déterminée de signes typographiques peut être obtenue par une succession d'applications de certaines transformations en partant de certaines séquences données de signes typographiques.

Des études de ce genre sont souvent appelées "métamathématiques" car elles peuvent être considérées comme ayant "les mathématiques" comme objet. Ce terme traditionnel est assez malheureux car il semble indiquer que ce domaine est aux mathématiques ce que la métaphysique est à la physique. Or il n'en est rien, la "métamathématique" pouvant toute entière être considérée comme une partie des mathématiques, à savoir, comme un prolongement de "l'analyse combinatoire" bien connue des taupins.

En effet, dans ce qui précède j'ai parlé de "séquences de signes typographiques". Mais rien n'oblige à considérer les véritables "signes typographiques" qui sont des objets concrets; les raisonnements seraient exactement les mêmes si on considérait, par exemple, des trous dans une carte à la place de taches sur le papier. Les seules propriétés des "signes typographiques" qui importent ici sont qu'ils sont pris dans un certain "alphabet" donné d'avance et qu'on en considère les "séquences", autrement dit des "arrangements avec répétition". On peut donc considérer qu'on a un certain ensemble de base, A, constitué d'objets abstraits (ou non spécifiés) et que l'on étudie les arrangements avec répétitions à éléments dans A.

Nous arrivons ainsi à la conception d'un"système formel" ou "système logitique" abstrait, telle qu'elle a été élaborée par Hilbert et ses disciples.

Du point de vue le plus général, un système formel est une structure mathématique constituée par:

1º - Un ensemble de base, A

2º - Un sous-ensemble, F, de l'ensemble des séquences finies (arrangements avec répétition) à éléments dans A

3º - Un sous-ensemble, T, de F.

Ceci est purement abstrait, mais comme les systèmes formels sont destinés à être adéquats à l'étude des mathématiques, on donne aux ensembles A, F et T des noms qui rappellent leur origine concrète.

- A est dit "l'alphabet" du système formel ou "l'ensemble des symboles"; mais ces "symboles" ne sont pas plus des signes typographiques que les "points d'un espace topologique ne sont des marques sur le papier ou des grains de poussière.

- F est dit "l'ensemble des formules" (6) du système formel; dans une interprétation concrète, les formules correspondront aux propositions; dans les systèmes formels dont l'interprétation est la plus immédiate, les formules correspondront aux séquences de signes qui "ont un sens".

- T est dit "l'ensemble des thèses" du système formel; dans une interprétation concrète, les thèses correspondront aux théorèmes mathématiques.

---

(6) Certains auteurs appellent "formules" toutes les séquences finies à éléments dans A, et appellent les éléments de F les "formules bien formées".

Maintenant, si l'on veut qu'un système formel soit une abstraction adéquate à une "théorie mathématique", il faudra ajouter des conditions supplémentaires. En effet:

Dans une théorie mathématique, on sait toujours reconnaître si une suite de signes typographiques a un sens ou non. Ajoutons donc la condition suivante:

C1. Il existe un procédé mécanique (ou "effectif") pour reconnaître si une séquence finie à éléments dans A est ou non un élément de F.

D'autre part, les théorèmes mathématiques sont obtenus à partir des axiomes en appliquant les règles de déduction; on sait toujours reconnaître si une proposition est ou non un axiome, et on sait toujours reconnaître si une étape d'une démonstration est ou non l'application d'une règle.

Ajoutons donc la condition suivante:

C2. Il existe un sous-ensemble (fini ou infini) de T, soit T_p (ensemble des thèses primitives), et un nombre fini de transformations, $D_1, D_2, \ldots, D_n$ (les "règles de dérivation") tels que:

-Il existe un procédé effectif pour reconnaître si une séquence finie à éléments dans A est ou non un élément de T_p;

-chacune des D_i ($1 \leq i \leq n$) est "effective", c'est-à-dire qu'il existe un procédé mécanique pour reconnaître si une formule donnée est ou non obtenue à partir d'autres formules données par une seule application de la règle D_i (pour $i = 1,2,\ldots,n$).

-T est identique à l'ensemble des formules obtenues à partir des T_p en appliquant les transformations $D_1,\ldots,D_n$ un nombre fini (quelconque) de fois dans un ordre quelconque.

Un système formel satisfaisant à C1 et à C2 sera dit un "<u>système formel effectif</u>". La définition d'un système formel effectif a un défaut évident: nous avons parlé de "procédés effectifs" sans en donner la définition: En fait, il s'agit d'une notion vague qu'il faudra remplacer par une notion précise abstraite. C'est ce qui sera fait plus loin, quand on aura vu la définition des "fonctions récursives" et des "procédés récursifs"; en remplaçant dans C1 et C2 le mot "effectif" par le mot "récursif" on aura une notion précise, celle de "systèmes formels récursifs".

Pour le moment, admettons que nous sachions ce que c'est qu'un "procédé effectif". Alors il est clair qu'une reconstruction logistique des mathématiques conduit à une série de lignes de signes typographiques qui peut être considérée abstraitement comme un système formel effectif. Le problème de la décision prend alors la forme suivante: Pour ce système formel particulier, existe-t-il un procédé effectif permettant de reconnaître si une formule donnée quelconque est ou non une thèse?

Par ailleurs, ce problème peut être posé pour chaque système formel effectif. Si la réponse est positive, on dira que le système formel en question est "décidable" - Bien entendu, tous ces problèmes seraient résolus d'un seul coup si l'on pouvait démontrer que tous les systèmes formels effectifs sont décidables; mais on verra qu'il n'en est rien (7).

---

(7) D'une façon abrégée, on peut dire que C1 signifie que "la notion de formule est décidable", et que C2 signifie que "la notion de dérivation est décidable"; le système formel est dit décidable si "la notion de thèse est décidable". Les formules et les dérivations peuvent être décidables sans que les thèses le soient; en effet, par hypothèse on sait décider si une certaine formule, mettons A dérive ou non de certaines thèses primitives, mettons B_1, B_2 et B_3, par une suite donnée d'applications des règles de dérivation; mais cela ne nous donne pas le moyen de savoir en général, si pour une formule quelconque X, <u>il existe</u> une suite d'applications des règles de dérivations permettant de dériver X de certaines thèses primitives (voir plus loin § 8).

D'autre part, il est clair que la notion de "système formel effectif" est plus générale que celle de système logistique concret. En fait, il est facile de définir des systèmes formels qui n'aient aucune interprétation intuitive. Mais on peut aussi - et c'est cela qui est intéressant - définir des systèmes formels qui puissent s'interpréter comme la description abstraite d'<u>une partie</u> des mathématiques; c'est ce qu'on appelle "formaliser une théorie mathématique".

Par exemple, on pourrait sans difficulté définir un système formel adéquat pour l'arithmétique rudimentaire considérée au § 1.

Il sera sans doute plus intéressant de donner la définition explicite d'un système formel plus "naturel", non pas construit pour les besoins de l'illustration, mais réellement étudié par les logiciens. Voici donc:

3.- <u>LE SYSTEME FORMEL DU CALCUL DES PROPOSITIONS PUR</u>

Ce système a pour but de formaliser la partie des mathématiques (ou de la logique si l'on préfère) dans laquelle on considère les propositions sans les analyser. J'en donnerai la définition abstraite et ensuite l'interprétation intuitive.

<u>L'alphabet</u> A, est un ensemble infini dénombrable. Certains éléments de cet ensemble portent des noms spéciaux et seront représentés ci-dessous par des signes spéciaux. Plus précisément l'alphabet consiste en les éléments suivants:

[ ] (dits "parenthèses formelles")

$-$ (dit "négation formelle")

$\rightarrow$ (dit "implication formelle")

$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ (une suite infinie dénombrable d'éléments dits "atomes")

Bien entendu, les signes typographiques écrits ci-dessus ne sont pas les "symboles" (ou éléments de "l'alphabet") eux-mêmes, mais seulement des noms de ces symboles. Ainsi la lettre "a" affectée de l'indice "17", soit "a_{17}" est un signe typographique complexe qui représente un élément abstrait unique, qui n'est pas sur le papier car il est abstrait. Exactement de la même façon, en arithmétique élémentaire, "127" est un signe typographique complexe qui représente un nombre unique, lequel n'est pas sur le papier.

<u>L'ensemble des formules.</u> F, est un sous-ensemble de l'ensemble des séquences finies à éléments dans A, défini de la façon suivante:

> F_1: Tout atome est une formule.
>
> F_2: Si X est une formule, -X est aussi une formule.
>
> F_3: Si X et Y sont des formules $[X \rightarrow Y]$ est aussi une formule.
>
> F_4: Toute formule est obtenue à partir des atomes par applications répétées de F_2 et de F_3.

Il faut remarquer que, dans les énoncés qui précèdent, les lettres "X" et "Y" non seulement ne sont pas des symboles du système formel; mais encore représentent des séquences de symboles et non des symboles individuels; ainsi par exemple "X" pourra représenter $[a_1 \rightarrow a_2]$, ou bien $- a_3$. D'autre part, quand on dit, par exemple, "la séquence $[-x \rightarrow x]$ ", c'est un abus de langage pour: la séquence obtenue en mettant bout à bout les séquences " [-" , X , "$\rightarrow$" , X et "] " :

si " X " représente $[a_1 \rightarrow a_2]$

alors $[-X \rightarrow X]$ est $[- [a_1 \rightarrow a_2] \rightarrow [a_1 \rightarrow a_2]]$

(Remarquer que " $[-X \rightarrow X]$ " s'exprime avec 6 signes typographiques, mais que si X est $[a_1 \to a_2]$, $[-X \to X]$ est une séquence de 14 symboles).

Il n'est pas absolument immédiat que la définition de F donne un procédé effectif pour reconnaître si une séquence est ou non une formule, mais c'est assez facile à voir. En effet F_2 et F_3 sont des "règles de construction" qui conduisent toujours à des formules plus longues que celles dont on est parti, d'où la méthode de décision suivante:

- si une séquence ne contient pas d'atomes, elle n'est pas une formule (d'après F_1 et F_4); par exemple $-[[-]$ n'est pas une formule.

- Si une séquence contient des atomes, appliquer les règles de construction F_2 et F_3 à partir de ces atomes, de toutes les façons possibles, jusqu'à ce que, ou bien on obtienne la séquence en question (qui est alors une formule), ou bien on obtienne des formules plus longues que la séquence en question. Ainsi, considérons la séquence $-[a_1$; elle contient trois symboles, dont le seul atome a_1 . Les règles F_2 et F_3 donnent les formules:

  $-a_1$ qui a 2 symboles

  $- -a_1$ qui a 3 symboles

$(a_1 \rightarrow a_1)$ qui a 5 symboles

les applications successives des règles de construction donneraient nécessairement des formules plus longues que la séquence - $[a_1$, qui n'est pas une formule - De la même façon on démontrerait que

$[a_1 \rightarrow [a_2 \rightarrow a_2]]$ est une formule

L'ensemble des thèses T, est défini comme l'ensemble des formules obtenues à partir des thèses primitives par l'application répétée d'une seule règle de dérivation (énoncée plus bas).

Les thèses primitives sont définies de la façon suivante:

Si X, Y et Z sont des formules quelconques, alors:

A_1: $[[X \rightarrow [Y \rightarrow Z]] \rightarrow [[X \rightarrow Y] \rightarrow [X \rightarrow Z]]]$ est une thèse primitive.

A_2: $[X \rightarrow [Y \rightarrow X]]$ est une thèse primitive.

A_3: $[[-X \rightarrow -Y] \rightarrow [Y \rightarrow X]]$ est une thèse primitive.

- et il n'y a pas d'autres thèses primitives.

En fait les thèse primitives sont définies comme des séquences particulières; mais on vérifie facilement que ce sont des formules (c'est nécessaire pour que l'on ait réellement défini un système formel).

Il y a une infinité de thèses primitives dans ce système formel: les énoncés A_1, A_2 et A_3 consistent chacun à dire que toutes les formules qui ont une certaine forme sont des thèses primitives (8). Mais on vérifie facilement que le fait pour une formule d'être une thèse primitive est décidable.

La règle de dérivation unique (dite "règle de détachement") s'énonce ainsi:

D_1: Si X et $[X \to Y]$ sont des thèses, alors Y est aussi une thèse.

Il est facile de voir que de cette façon les thèses sont des formules. Il est facile de voir que la règle D_1 est effective.

Donnons un exemple de dérivation formelle dans ce

---

(8) Un énoncé de ce genre est souvent appelé "schéma d'axiomes" lorsqu'on appelle "axiomes" les thèses primitives.

système:

(1) a_1 est une formule (d'après F_1)

(2) $[a_1 \rightarrow a_1]$ est une formule (d'après (1) et F_3)

(3) $[a_1 \rightarrow [a_1 \rightarrow a_1]]$ est une formule (d'après (1) (2) et F_3)

(4) $[a_1 \rightarrow [a_1 \rightarrow a_1]]$ est une thèse (d'après (1) et A_2)

(5) $[a_1 \rightarrow [[a_1 \rightarrow a_1] \rightarrow a_1]]$ est une thèse (d'après (1), (2) et A_2)

(6) $[[a_1 \rightarrow [[a_1 \rightarrow a_1] \rightarrow a_1]] \rightarrow [[a_1 \rightarrow [a_1 \rightarrow a_1]] \rightarrow [a_1 \rightarrow a_1]]]$ est une thèse (d'après (1), (2), et A_1

(7) $[[a_1 \rightarrow [a_1 \rightarrow a_1]] \rightarrow [a_1 \rightarrow a_1]]$ est une thèse (d'après (5), (6) et D_1)

(8) $[a_1 \rightarrow a_1]$ est une thèse (d'après (4), (7) et D_1)

On démontrerait de même que pour tout atome a_i, $[a_i \rightarrow a_i]$ est une thèse.

- et même que, X étant une formule quelconque, $[X \rightarrow X]$ est une thèse.

Quant à <u>l'interprétation du système</u>, on peut considérer les atomes comme des abstractions remplaçant des propositions non analysées, $\rightarrow$ comme une abstraction remplaçant le mot "implique", - comme une abstraction remplaçant le mot "non", les parenthèses formelles comme des abstractions remplaçant les parenthèses; les formules sont alors des abstractions correspondant aux propositions composées à l'aide des propositions non analysées, de l'implication et de la négation.

Dans cette interprétation D_1 représente le "modus ponens", les thèses primitives représentent certaines propositions prises comme axiomes, et les thèses représentent les propositions obtenues à partir des axiomes en appliquant le "modus ponens".

On peut aussi remarquer que la traduction abstraite de la proposition signalée au § 2; "(p implique q) implique (non-q implique non-p)" serait:

$$A_31 \quad [[X\to Y]\to[-Y\to -X]]$$

Ceci ressemble au schéma A_3, mais ce n'est pas le même schéma. En fait à partir de A_1, A_2, A_3 et D_1 on peut démontrer A_31 , mais à partir de A_1, A_2, A_31 et D_1 on ne peut pas démontrer A_3.

Par ailleurs, avec cette interprétation, le schéma $[X\to X]$ est la traduction abstraite de la proposition "p implique p" qui est parfaitement triviale ! Il est clair que la logique mathématique n'a pas pour but d'obtenir des "résultats" de ce genre... La dérivation de $[X \to X]$ n'a été donnée que comme exemple montrant le mécanisme de la dérivation formelle. On pourrait donner la dérivation de formules dont l'interprétation soit moins triviale, mais il faudrait plusieurs pages - et les résultats seraient encore triviaux en un certain sens, par le fait que <u>le système formel du calcul des propositions pur est décidable</u>. Aussi, pour traiter les problèmes particuliers se rapportant aux calculs des propositions, on se sert toujours d'une des méthodes de décision (il y en a plusieurs) et non de la technique de la dérivation formelle. Par contre la technique de la dérivation formelle sera irremplaçable pour traiter les problèmes qui se posent dans un système formel indécidable.

On peut encore se poser la question suivante: admettons que les axiomes soient "intuitivement vrais" (il est facile de s'en convaincre), alors les thèses représenteront des propositions intuitivement vraies; mais est-ce que inversement, toutes les propositions (composées à l'aide des propositions non analysées, de l'implication et de la négation) intuitivement vraies sont représentées par des thèses du système formel ? Comme on n'a pas qu'ici défini les termes "intuitivement vrai" on ne peut pas traiter cette question mathématiquement, mais seulement constater que chaque proposition intuitivement vraie est représentée par une thèse. Par exemple, on peut admettre que la proposition: "(non non - p) implique p" est "intuitivement vraie"; dans tous les cas, elle est constamment utilisée en mathématique; or on peut démontrer que, quelle que soit la formule X:

$[- - X \rightarrow X]$ est une thèse du système formel.

Du moins c'est ainsi que procédaient les logiciens du début du siècle. Il y a une autre façon de traiter ce problème, qui consiste à donner un sens précis à la notion de "formule ayant comme interprétation une proposition vraie". On peut alors <u>démontrer</u> que le système formel du calcul des propositions qui contient comme thèses toutes les formules ayant comme interprétation des propositions vraies; on dit que ce système est "<u>complet</u>".

Mais l'exposé de ces techniques, dites "sémantiques" (8) sort du cadre du présent article.

---

(8) Ce mot a au moins trois sens très divers qu'il faut bien distinguer. La "sémantique" à laquelle il est fait allusion ici est la "sémantique formelle", développée par Tarski et divers autres logiciens; c'est une partie des mathématiques. La "sémantique générale" de Korzybski, très populaire aux Etats-Unis, est une doctrine philosophique. La "sémantique" des linguistes est la partie de la linguistique qui s'occupe de la signification des éléments des langues naturelles (mots, etc...); c'est, au moins en intention, une science d'observation.

4.- LES FONCTIONS RECURSIVES

Dans ce que précède, j'ai utilisé plusieurs fois le concept vague de "procédé effectif". Je vais maintenant essayer d'expliquer comment on peut substituer à ce concept vague un concept mathématique précis. Pour cela on utilisera une notion mathématique fondamentale, celle de fonctions récursives.

Les fonctions considérées ici seront des fonctions d'entiers, c'est-à-dire des fonctions d'une ou plusieurs variables définies sur l'ensemble N des nombres entiers positifs (0 compris) et prenant leurs valeurs dans N. En d'autres termes, une fonction d'entiers est une application quelconque de N ou de N^2 ou de N^3 etc.... dans N. On sait que l'ensemble de toutes les fonctions d'entiers a la puissance du continu. Nous allons définir un certain sous-ensemble dénombrable de cet ensemble. Pour cela nous considérerons des "fonctions initiales" et des "procédés d'engendrement" définis ci-dessus.

Les <u>fonctions initiales</u> sont par définition les suivantes:

a - la <u>fonction "successeur"</u>, c'est-à-dire la fonction S, d'une variable, définie par

$$S(x) = x+1 \text{ (pour tout x appartenant à N)}$$

b - <u>Les fonctions "zéros"</u>, qui sont en infinités dénombrables:

La fonction "zéro" de n variables, Z_n est définie par:

$$Z_n(x_1,\ldots,x_n) = 0 \text{ (pour tout } x_1,\ldots,x_n \text{ appartenant à N)}$$

c - <u>Les fonctions "identités"</u> (ou "projections") qui sont également en infinité dénombrable. Il existe n fonctions projections de n variables pour chaque valeur de $n \geq 1$. La p-ème fonction projection de n variables, P_n^p $(1 \leq p \leq n)$ est définie par

$P_n^p(x_1,\ldots,x_p,\ldots,x_n) = x_p$ (pour tout $x_1,\ldots,x_n$ appartenant à N)

- En particulier pour $n = 1$ il n'existe qu'une seule fonction projection,

P_1^1 , définie par

$$P_1^1(x) = x \quad \text{(pour tout x appartenant à n)}$$

(d'où le nom de "fonctions identités" donné souvent aux fonctions projections, par généralisation d'une dénomination évidente dans le cas particulier précédent).

<u>Les schémas d'engendrement</u> sont les suivants:

d - <u>Schéma de substitution</u> (ou"de composition"): on dit que la fonction h (à n variables) est engendrée par substitution des fonctions f_1, $f_2, \ldots, f_p$ (chacune à n variables) dans la fonction g (à p variables) si on a:

$h(x_1,\ldots,x_n) = g(f_1(x_1,\ldots,x_n), f_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots$
$\ldots f_p(x_1,\ldots,x_n))$

pour tout $x_1,\ldots,x_n$ appartenant à N)

e - <u>Schéma de récurrence</u>: On dit que la fonction h (à n+1 variables) est engendrée par récurrence à partir de la fonction g (à n+2 variables) et à l'aide de la fonction f (à n variables) si on a

$h\ (0,x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

et $h\ (y+1,x_1,x_2,\ldots,x_n) =$

$= g(y,\ h(y,x_1,x_2,\ldots,x_n),\ x_1,\ldots,x_n)$

(pour tout $x_1,\ldots x_n, y$ appartennant à N)

Il est facile de voir que ceci généralise la notion ordinaire de "définition par récurrence" couramment utilisée en arithmétique.

f - <u>Schéma - μ</u> : On dit que la fonction g (à n variables) est engendrée à partir de la fonction f (à $n+1$ variables) par le schéma μ si on a

$g(x_1,\ldots,x_n)$ = le plus petit y tel que $f(x_1,\ldots,x_n,y) =$ $= 0$ (pour tout $x_1,\ldots,x_n$ appartenant à N)

Cette dernière relation s'écrit généralement, pour abréger:

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \mu\, y(f(x_1,\ldots,x_n,y) = 0)$$

d'où le nom de "schéma μ" (la lettre "μ" elle-même vient de "minimum").

Maintenant, pour que le schéma μ appliqué à une fonction f conduise à une fonction d'entiers (c'est-à-dire à une fonction partout définie sur N), il faut que la fonction f obéisse à la condition suivante:

(K): Pour tout $x_1,\ldots,x_n$, appartenant à N, il existe au moins un y tel que

$$f(x_1,\ldots,x_n,y) = 0 \quad (9)$$

---

(9) Par exemple si f est définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$ pour $x > 0$ on n'aura jamais $f(x,y) = 0$ et $\mu\, y(x^2 + y^2 = 0)$ ne sera pas défini pour $x > 0$.

Si la condition (K) est réalisée, je dirai que le schéma μ est "normalement applicable", une application des schémas μ à une fonction pour laquelle la condition (K) est réalisée sera dite une "application normale" du schéma μ.

On peut maintenant donner la définition suivante:

<u>On appelle fonctions récursives les fonctions initiales et celles qui peuvent être définies à partir des fonctions initiales par un nombre quelconque d'applications des schémas de substitution et de récurrence et un nombre quelconque d'applications normales du schéma μ</u> (définition de Kleene).

Il est équivalent de dire: l'ensemble des fonctions récursives est le plus petit ensemble de fonctions d'entiers qui comprenne les fonctions initiales et qui soit fermé pour l'application du schéma de substitution, l'application du schéma de récurrence et l'application normale du schéma μ.

On dit souvent "fonctions récursives générales" au lieu de "fonctions récursives" tout court - ceci pour les distinguer des "fonctions récursives primitives" qui sont: les fonctions initiales et celles que l'on peut définir à l'aide des fonctions initiales par un nombre quelconque d'applications des schémas de substitution et de récurrence (sans utiliser le schéma μ). Il est clair que toute fonction récursive primitive est récursive générale; on démontre (c'est loin d'être trivial !) qu'il existe des fonctions récursives (générales) qui ne sont pas récursives primitives. Je n'aurai pas à me servir dans la suite, du concept de fonctions récursives primitives.

D'autre part, on peut se demander ce qui se passe si on applique le schéma μ quand la condition (K) n'est pas réalisée. On obtient alors des fonctions qui ne sont définies que sur une partie de N, ce qu'on appelle aussi des "semi-fonctions" (10). On appelle <u>semi-fonctions récursives</u> les fonctions (11) initiales et les semi-fonctions qu'on peut définir à partir des fonctions initiales par un nombre quelconque d'applications du schéma de

---

(10) Ce terme n'est pas classique. On dit, en anglais "partial functions".
Comme exemple de semi-fonction on peut citer f définie par: f(x) est la racine carrée entière exacte de x
alors: $f\ (1) = 1$
$f\ (4) = 2$ etc....
mais $f\ (2)$, par exemple, n'est pas défini.

(11) D'après les définitions précédentes, les fonctions d'entiers (définies sur N) constituent un cas particulier des semi-fonctions (définies sur une partie de N).

substitution, du schéma de récurrence et du schéma μ (12). On a alors le résultat suivant, qui est loin d'être trivial, malgré les apparences: Toute semi-fonction récursive qui est une fonction (c'est-à-dire qui est définie pour toutes les valeurs entières des variables) est une fonction récursive. On peut remarquer que, d'après le résultat précédent, la considération des semi-fonctions récursives (c'est-à-dire l'application du schéma μ aux cas où il n'est pas normalement applicable) ne conduit pas à définir d'autres fonctions (définies pour toutes les valeurs des variables) que les fonctions récursives définies plus haut.

Les fonctions récursives qui viennent d'être définies sont des fonctions d'un nombre quelconque de variables. Il est intéressant de considérer à part les fonctions récursives d'une seule variable. En fait, on peut donner des ~~fonctions récursives~~ d'une variable, une définition qui ne fasse pas intervenir les fonc-

---

(12) Pour que cette définition soit correcte il aurait fallu apporter quelques précisions à la définition de la substitution et de la récurrence appliquée à des semi-fonctions, ainsi qu'à l'application du schéma μ quand la condition (K) n'est pas satisfaite

tions à un plus grand nombre de variables.

Plus précisément, considérons les fonctions initiales suivantes:

- la fonction successeur, S, définie plus haut;
- la fonction "excès sur un carré" E, définie par
  $E(x) = x - ($ valeur entière à une unité près par défaut de $\sqrt{x})^2$ (pour tout x appartenant à N)
- et considérons les schémas d'engendrement suivants:
- schéma de composition restreinte: h est définie par composition à partir de g et de f si
  $h(x) = g(f(x))$ (pour tout x appartenant à N)
- schéma d'addition: h est définie par addition à partir de f et g si
  $h(x) = f(x) + g(x)$ (pour tout x appartenant à N)
- schéma de μ-conversion: g est engendrée par μ-conversion à partir de f si
  $g(x) = \mu y\,(f(y) = x)$ (pour tout x appartenant à N)
  (c'est-à-dire: $g(x) =$ le plus petit y tel que $f(y) =$
  $= x$)

On dira encore que la μ-conversion est "normalement applicable" à la fonction f si on a: Pour tout x appartenant à N, il existe au moins un y tel que $f(y) = x$

(condition (K')).

On a alors le résultat suivant:

Les fonctions obtenues à partir de S et E par un nombre quelconque d'application des schémas de composition restreinte et d'addition et un nombre quelconque d'applications normales de la μ-conversion, sont identiques aux fonctions récursives d'une variable (13) (définition de J. Robinson).

La théorie des fonctions récursives est actuellement en plein développement, et il n'est pas question d'en résumer ici même les résultats essentiels. Les théorèmes cités ci-dessus sans démonstration, en particulier celui qui concerne l'équivalence des deux définitions des fonctions récursives d'une variable, sont des exemples suffisants pour montrer que la théorie des fonctions récursives est une partie de la théorie des nombres qui n'a rien de spécialement "logique".

---

(13) On remarque, en passant, que les fonctions récursives d'une variable sont ainsi définies sans utiliser la récurrence. Ceci est une justification du néologisme "rékursif", transcription immédiate du mot allemand "rekursiv", qui signifie "récurrent" dans cette langue...

Mais nous nous intéressons ici à ses applications à la logique mathématique. Pour cela il faudra nous arrêter un moment sur la proposition fondamentale suivante, dite "Thèses de Church":

<u>Les fonctions récursives d'une variable sont identiques aux fonctions d'une variable entière effectivement calculables pour toute valeur de la variable.</u>

Cette proposition n'est pas un théorème (c'est pourquoi on l'appelle "thèse" ce mot ayant ici un tout autre sens que dans la théorie des systèmes formels) car elle compare le concept abstrait et précis de "fonction récursive" avec le concept concret et vague de "fonction effectivement calculable". On ne peut pas démontrer une telle proposition, on peut seulement en donner des justifications expérimentales.

En fait, ces justifications se résument en ceci: chaque fois qu'on a défini de façon précise une classe de fonctions pour lesquelles nous possédons un procédé de calcul effectif, on a pu démontrer que ces fonctions sont récursives.

Lorsqu'on définit ainsi une classe suffisamment large de fonctions, on obtient toutes les fonctions récursives, mais on n'en obtient jamais d'autres. En particulier, chaque fois qu'on a essayé de préciser ce que l'on entend par "procédé effectif de calcul" et d'en donner une définition abstraite, on a pu démontrer que les fonctions "calculables" par ce "procédé effectif abstrait" étaient identiques aux fonctions récursives. Historiquement, on a d'ailleurs commencé par cette dernière méthode: Gödel a défini par l'intermédiaire d'un système formel assez compliqué, une classe de fonctions "calculables" (qu'il a d'ailleurs appelées "récursives"); Church a défini indépendamment, par l'intermédiaire d'un autre système formel également compliqué, une classe de fonctions qu'il a appelées "λ-définissables" ; Turing a défini, indépendamment encore, des fonctions "calculables mécaniquement"; on a ensuite démontré que ces trois classes de fonctions étaient identiques; Kleene avait découvert qu'on pouvait définir cette classe de fonctions par des méthodes arithmétiques simples (c'est la définition donnée plus haut pour les fonctions récursives d'un nombre quelconque de variables); enfin, on a découvert diverses définitions équivalentes, en particulier la définition donnée plus haut des fonctions récursives d'une variable, qui est due à Julia Robinson (14).

Entre parenthèse, on peut tirer de la revue historique qui précède une sorte de morale. Le concept de "fonction effectivement calculable" est familier à tous les mathématiciens français depuis une cinquantaine d'années, Borel l'ayant largement utilisé dans divers mémoires. Mais ni Borel, ni ses élèves n'ont jamais réussi à substituer un concept précis à cette notion vague. La définition, purement arithmétique, des fonctions récursives a été obtenue par des mathématiciens qui - à l'inverse de Borel et des mathématiciens français, en général, - ne répugnaient pas à utiliser les idées les plus abstraites de la logique mathématique moderne.

Pour en revenir à la thèse de Church, l'identification des fonctions récursives avec les fonctions effectivement calculables est sujette à la réserve suivante: il faut considérer une fonction comme "ef-

---

(14) Tout ceci n'est pas aussi nouveau que le lecteur français pourrait l'imaginer: le travail fondamental de Gödel a été publié en 1934, celui de Church est de 1936 et celui de Turing également. Des définitions données ci-dessus, celle de Kleene date de 1936 et celle de J. Robinson de 1950.

fectivement calculable" si la valeur de la fonction peut être obtenue par un nombre fini d' "opérations élémentaires", le nombre des "opérations élémentaires" distinctes étant lui-même fini; mais un "nombre fini" peut être très grand ! , plus grand, par exemple, que le nombre d'électrons existant dans l'univers - de sorte qu'une fonction peut être "effectivement calculable" sans que nous ayons aucun moyen <u>pratique</u> pour la calculer... Il peut y avoir des mathématiciens pour lesquels la notion d'une fonction "effectivement" calculable mais non "pratiquement" calculable n'ait pas de sens; ils devront se contenter des résultats suivants: toutes les fonctions récursives ne sont pas "pratiquement calculables", mais toutes les fonctions "pratiquement calculables" sont récursives.

Dans ce qui suit la thèse de Church sera appliquée de la façon suivante: chaque fois qu'une fonction apparaîtra comme "effectivement calculable", on admettra qu'elle est récursive. Un tel "raisonnement" n'est pas rigoureux; mais l'expérience montre qu'on peut toujours lui substituer un raisonnement rigoureux (mais plus long !) dans lequel la thèse de Church n'est pas utilisée.

Voici d'ailleurs un exemple de tel "raisonnement" qui aboutit à préciser le rapport entre récursivité et calculabilité effective.

Dans les définitions données plus haut pour les fonctions récursives, il a été précisé qu'une application du schéma μ (ou de la μ-conversion) à une fonction récursive donnait une nouvelle fonction récursive seulement si c'était une "application normale", c'est-à-dire si la fonction à laquelle le schéma est appliqué obéissait à une certaine condition K (ou K'). Mais étant donné une fonction récursive quelconque, peut-on trouver un procédé mécanique qui permette de décider si cette fonction obéit à la condition K (ou à la condition K') ? La réponse est négative, comme il suit du raisonnement suivant:

L'ensemble des fonctions récursives d'une variable est dénombrable. Plus précisément, il est possible, par des procédés classiques, de numéroter effectivement les "procédés de définition", qui consistent en une suite finie d'applications des schémas de composition restreinte, d'addition et de μ-conversion à partir des fonctions S et E; un tel "procédé de définition" mène à une fonction récursive si, pour chaque application de la μ-conversion, la condition K' est satisfaite. Si nous avions une méthode effective permettant de décider, dans chaque cas, si la condition K' est satisfaite, nous pourrions numéroter effectivement les procédés de définitions qui conduisent à des fonctions récursives - c'est-à-dire que nous aurions un procédé effectif pour numéroter les fonctions récursives d'une variable. Soit donc f_n la n-ème fonction récursive obtenue dans cette numérotation; nous aurions un procédé effectif pour calculer $f_n(x)$, pour tout n et pour tout x appartenant à N. Définissons une nouvelle fonction g, d'une variable par:

$$g(x) = f_x(x) + 1 \quad \text{(pour tout x appartenant à N)}$$

La fonction g serait effectivement calculable, et donc récursive d'après la thèse de Church. Mais, d'après l'égalité ci-dessus, on aurait

$$g(n) \neq f_n(n) \qquad \text{pour tout n}$$

donc g ne pourrait être identique à aucune fonction f_n, c'est-à-dire à aucune fonction récursive. Nous obtenons une contradiction, ce qui montre que l'hypothèse est fausse.

D'une façon abrégée, on peut dire que, bien que la notion de récursivité soit équivalente à celle de calculabilité effective, cette notion elle-même n'est pas décidable. Quand une fonction d'entiers est donnée par une définition faisant intervenir le schéma μ (ou la μ-conversion), il peut arriver que nous puissions démontrer que cette fonction est récursive - et alors nous savons qu'elle est effectivement calculable - mais nous n'avons pas de moyen général pour décider si une telle définition définit une fonction récursive.

On peut remarquer que le raisonnement par lequel nous avons obtenu ce résultat ressemble beaucoup à celui du célèbre "paradoxe de Richard", dans lequel on "définit" un nombre réel "non définissable". Mais le paradoxe provenait de ce que la notion de "définition" était vague. Dans la théorie des fonctions récursives, il n'y a pas de paradoxe, mais seulement, la "réduction à l'absurde" d'une certaine hypothèse.

5.- ENSEMBLES RECURSIFS ET RECURSIVEMENT ENUMERABLES

Dans ce paragraphe il ne sera question que d'ensembles de nombres entiers positifs (c'est-à-dire de sous-ensembles de N).

Définissons d'abord la <u>fonction caractéristique d'un ensemble</u>. Si A est un ensemble de nombres entiers positifs, on appelle fonction caractéristique de A la fonction d'entiers C_A définie par

$C_A\ (x) = 0$ si x appartient à A

et $C_A\ (x) = 1$ si x n'appartient pas à A

On peut maintenant définir <u>un ensemble récursif</u>: <u>c'est un ensemble dont la fonction caractéristique est récursive</u>.

Dire qu'un ensemble A est récursif, c'est-à-dire qu'il existe un procédé effectif permettant de décider si un nombre entier positif quelconque x, appartient ou non à A. En effet, il suffit de calculer $C_A(x)$ et de regarder si le résultat est 0 ou 1; le calcul effectif de $C_A(x)$ est toujours possible puisque la fonction C_A est récursive. Réciproquement, si on a un procédé effectif pour décider si un nombre entier positif quelconque appartient ou non à A, on en tire immédiatement un procédé effectif pour déterminer la valeur de $C_A(x)$ pour tout x; donc, d'après la thèse de Church, la fonction C_A est récursive, et l'ensemble A est récursif.

La notion "d'ensemble récursif" est donc une notion précise abstraite adéquate à idée vague d' "ensemble décidable" - avec cette restriction que la notion de récursivité ne s'applique qu'aux ensembles de nombres entiers positifs. Mais nous verrons au § suivant comment on peut s'affranchir de cette restriction.

Il est à peu près immédiat que tout ensemble fini est récursif. Mais il y a des ensembles infinis (et dénombrables puisque ce sont des sous-ensembles de N) qui sont également récursifs; par exemple, l'ensemble des nombres premiers est récursif, de même l'ensemble des carrés parfaits est également récursif.

Considérons ce dernier ensemble. Quelle est la méthode de décision la plus simple (en théorie) pour savoir si un nombre, x, est ou non un carré parfait ? C'est évidemment d'élever successivement 1, 2, 3 etc... au carré; au bout d'un nombre fini d'essais on arrive: ou bien à un nombre y tel que $y^2 = x$ (et alors x est un carré); ou bien à un nombre z tel que $z^2 < x$ et $(z+1)^2 > x$ - et alors x n'est pas un carré, car les carrés des nombres $> z+1$ seront $> (z+1)^2 > x$. Si f est la fonction "carré de", c'est-à-dire la fonction définie par $f(y) = y^2$, on voit que la méthode consiste à calculer successivement f(1), f(2), etc... et à comparer les résultats avec le nombre donné x. L'ensemble des carrés parfaits est l'ensemble des valeurs de la fonction f. On voit que la méthode réussit parce que

a - La fonction f est récursive, et donc effectivement calculable.

b - La fonction f est croissante, de sorte que lorsqu'on a obtenu un nombre u tel que $f(u) > x$, le calcul est terminé.

Ceci peut être résumé dans le théorème suivant, dont on pourrait donner une démonstration rigoureuse (n'utilisant pas la thèse de Church): <u>l'ensemble des valeurs d'une fonction récursive croissante est un ensemble récursif</u>.

Mais que se passerait-il si la fonction considérée était récursive mais non croissante ? La méthode de décision précédente est inapplicable.

Nous définirons donc une nouvelle notion:

<u>On dit qu'un ensemble est récursivement énumérable</u> si c'est l'ensemble des valeurs d'une fonction récursive d'une variable.

Et nous aurons les résultats fondamentaux suivants (dont je ne donne pas la démonstration):

<u>Tout ensemble récursif est récursivement énumérable</u>.

<u>Il existe des ensembles récursivement énumérables qui ne sont pas récursifs</u>.

On peut remarquer que la notion d'ensemble récursivement énumérable correspond à la notion d' "ensemble effectivement énumérable", telle qu'elle est définie par Emile Borel dans les "Leçons sur la théorie des fonctions", mais elle a l'avantage d'être abstraite et précise. Cet avantage est tout à fait sérieux, car l'expression d' "ensemble effectivement énumérable" a également été utilisée par Borel et d'autres dans un sens qui correspond plutôt à la notion d'ensemble récursif (15). Or il résulte de ce qui précède que ces deux notions sont essentiellement distinctes.

(15) Ainsi dans l'ouvrage intitulé "<u>Eléments de la théorie des ensembles</u>"(Paris, 1949), Borel définit (pp.229-230) un ensemble dont il dit qu'il "n'est pas effectivement énumérable"; en fait c'est un ensemble récursivement énumérable dont nous ignorons s'il est récursif.

Remarquons encore qu'il n'est pas possible d'obtenir une notion plus large que celle d'ensemble récursivement énumérable en considérant des fonctions récursives de plusieurs variables, ou même des semi-fonctions récursives. Plus précisément on a les résultats suivants:

<u>L'ensemble des valeurs d'une fonction récursive de plusieurs variables est un ensemble récursivement énumérable</u>.

<u>L'ensemble des valeurs d'une semi-fonction récursive est un ensemble récursivement énumérable</u>.

En ce qui concerne les semi-fonctions récursives, on a aussi le résultat suivant, d'une nature un peu différente:

<u>Etant donné une semi-fonction récursive d'une variable, l'ensemble des valeurs de la variable pour laquelle la semi-fonction est définie, est un ensemble récursivement énumérable</u>.

Parmi les semi-fonctions récursives, on peut accorder une attention particulière à celles qui sont <u>définies sur un ensemble récursif</u> et non pas seulement récursivement énumérable : <u>une semi-fonction de cette espèce particulière</u> est prolongeable (d'une infinité de façons) <u>en une fonction</u> (définie partout) <u>récursive</u>.

Soit par exemple la semi-fonction f définie par:

f(x) est la racine carrée entière exacte de x

Elle n'est pas définie que si x est un carré parfait. Mais l'ensemble des carrés parfaits est un ensemble récursif; la semi-fonction f est donc prolongeable (de plusieurs façons) en une fonction récursive.

Par exemple un prolongement naturel sera la fonction g définie par:

g(x) est la racine carrée entière de x à une unité près par défaut (pour tout x appartenant à N)

C'est une fonction (définie sur N) dont on voit facilement qu'elle est récursive - Un autre prolongement sera la fonction h définie par:

$h(x) = f(x)$	si x est un carré parfait;
et $h(x) = 0$	si x n'est pas un carré parfait.

- C'est ce qu'on appelle le "<u>prolongement trivial</u>"

(15 bis) de f - Pour voir que h est récursive, appliquons la thèse de Church: On a un moyen effectif pour décider si un nombre x est ou non un carré parfait; si x est un carré parfait, sa racine carrée est effectivement calculable; si x n'est pas un carré parfait, $h(x) = 0$, ce qui se "calcule" immédiatement. Donc h(x) peut toujours être calculé effectivement; donc h est récursive - Ce qui précède est d'ailleurs une "démonstration" (utilisant la thèse de Church) générale du fait que si une semi-fonction récursive est définie sur un ensemble récursif, alors son prolongement trivial est une fonction récursive.

La réciproque de la proposition que nous venons d'étudier est d'ailleurs fausse: il existe des semi-fonctions récursives, définies sur des ensembles récursivement énumérables mais non récursifs, et dont le prolongement trivial est une fonction récursive.

Ces derniers résultats s'étendent à des semi-fonctions de plus d'une variable.

Enfin, <u>la thèse de Church s'étend aux semi-fonctions</u>

(15 bis) Cette expression n'est pas classique.

de la manière suivante:

"Les semi-fonctions récursives sont identiques aux semi-fonctions définies sur un ensemble récursivement énumérable, effectivement calculables chaque fois qu'elles sont définies.

7.- LES NUMEROTATIONS DE GÖDEL

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu les définitions des ensembles récursifs et des ensembles récursivement énumérables, et nous avons vu en particulier qu'on pouvait assimiler la notion mathématique d' "ensemble récursif" à la notion vague d' "ensemble décidable" - mais avec cette restriction que tous les ensembles étudiés au paragraphe 6 étaient des ensembles de nombres entiers positifs ! Or, au § 3, quand nous nous sommes demandés si l'ensemble des thèses de tel ou tel système formel est décidable, nous avions affaire à un <u>ensemble de formules d'un système formel</u> et non à un ensemble de nombres entiers.

Pour pouvoir appliquer les notions définies au § 6 aux ensembles étudiés au § 2, il nous faudra établir une correspondance bi-univoque effective entre l'ensemble des suites finies de symboles d'un certain système formel et l'ensemble des nombres entiers positifs (16). Une telle correspondance s'appelle <u>une numérotation de Gödel</u>; le nombre entier que cette correspondance assigne à une suite de symboles est <u>le numéro de Gödel</u> de cette suite de symboles (dans la numérotation considérée).

Il existe un grand nombre de numérotations de Gödel qui ont été définies dans la littérature logique. Je commencerai par donner un exemple simple, avant de préciser la définition.

Supposons qu'on ait un système formel dont l'alphabet soit fini; pour fixer les idées, supposons qu'il contienne 2 symboles: a et b. On pourra définir une numérotation des suites finies de a et b en prolongeant le tableau suivant:

---

(16) Plus exactement: un sous-ensemble récursif de N: voir ci-dessous.

TABLEAU I

Suites de symboles	Numéros
a	1
b	2
aa	$3 \times 1 + 1 = 4$
ab	$3 \times 1 + 2 = 5$
ba	$3 \times 2 + 1 = 7$
bb	$3 \times 2 + 2 = 8$
aaa	$3^2 \times 1 + 3 \times 1 + 1 = 13$
...	
bbb	$3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2 = 26$
aaaa	$3^3 \times 1 + 3^2 \times 1 + 3 \times 1 + 1 = 40$
....	....

En général, si on appelle $\gamma(X)$ le numéro de la suite X, et si Xu est la suite formée en ajoutant le symbole u (qui est a ou b) à droite de la suite X, on a:

ce qui, avec:
$$\begin{cases} \gamma(Xu) = \gamma(X) \circ 3 + \gamma(u) \\ \gamma(a) = 1 \\ \gamma(b) = 2 \end{cases}$$

définit par récurrence le numéro d'une suite quelconque.

Une telle numérotation a les propriétés suivantes:

1º) Etant donné une suite, on a un procédé effectif pour trouver son numéro (appliquer la formule de récurrence) et ce numéro est unique.

2º) Tout nombre entier positif n'est pas le numéro d'une suite; mais, étant donné un nombre entier positif quelconque, on a un procédé effectif pour savoir s'il existe une suite qui y correspond (dans l'exemple, un nombre est le numéro d'une suite si son développement suivant la base 3 ne comprend aucun chiffre "0").

3º) Si un nombre est le numéro d'une certaine suite, cette suite est unique, et on a un procédé effectif pour trouver la suite qui y correspond (dans l'exemple, développer le nombre suivant la base 3, remplacer "1" par "a" et "2" par "b").

Ces propriétés sont, par définition, les propriétés caractéristiques d'une numérotation de Gödel. Mais dans l'énoncé des propriétés 1º, 2º et 3º, j'ai employé le mot "effectif" qui n'a pas été défini avec précision. Il faut encore préciser.

D'après les résultats du paragraphe précédent, la propriété 2º peut s'énoncer ainsi:

(α) L'ensemble des numéros de toutes les suites est un ensemble récursif de nombres entiers positifs.

Quant aux propriétés 1º et 3º, il est facile de voir qu'elles sont équivalentes à la propriété suivante:

(β) Si XY est la suite obtenue en ajoutant la suite Y à droite de la suite X, alors il existe une <u>semi-fonction récursive c</u> telle que:

$$\gamma(XY) = c\,(\,\gamma(X),\ \gamma(Y))$$

C'est une semi-fonction car elle n'est pas définie que pour les nombres qui correspondent à des suites; mais c'est une semi-fonction qui peut se prolonger en une fonction récursive, puisque, d'après (α), l'ensemble des numéros des suites est un ensemble récursif.

En définitive, on appelle numérotation de Gödel pour un <u>système formel d'alphabet A</u>, toute application bi-univoque, γ, de l'ensemble des suites finies à éléments dans A sur un sous-ensemble récursif de N qui satisfait à la propriété (β) (17).

On peut ajouter les remarques suivantes:

- Il est facile de trouver des numérotations de Gödel qui appliquent l'ensemble des suites à éléments dans A sur N tout entier (et non pas seulement sur un de ses sous-ensembles récursifs) (18).

---

(17) La fonction récursive c peut s'appeler "fonction de concaténation". La "concaténation" étant l'opération qui donne la suite XY à partir des suites X et Y.

Pour voir que (β) équivaut à 1º et 3º, procéder comme suit:

- pour trouver le numéro d'une suite, abba par exemple, utiliser la fonction c pour calculer successivement γ(a), γ(ab), γ(abb), γ(abba).
- pour trouver la suite correspondant à un numéro X, ordonner l'ensemble des suites comme dans le tableau I et calculer leurs numéros en utilisant la fonction c; au bout d'un nombre fini d'essais, on trouvera la suite du numéro X.

(18) Pour le cas de l'exemple, on peut simplement numéroter les séquences dans l'ordre suivant:

Séquences	Numéros
a	1
b	2
aa	3
ab	4
ba	5
bb	6
aaa	7
......	....

(les séquences de même longueur sont disposées en ordre alphabétique).

- Dans ce qui précède, on a traité le cas où l'alphabet A est fini. Dans le cas d'un alphabet infini dénombrable (comme pour le système formel défini au § 3), les notions précédentes peuvent s'étendre au moyen de quelques précautions, mais la définition explicite de la fonction c est plus compliquée (19).

8.- APPLICATION DES FONCTIONS RECURSIVES AUX SYSTEMES FORMELS.

A l'aide des numérotations de Gödel, on peut étendre aux ensembles de suites de symboles les notions définies au § 6 pour les ensembles de nombres entiers positifs. En particulier, on dira que:

- Un ensemble de suites de symboles est récursif si l'ensemble des numéros (des suites appartenant à l'en-

---

(19) On peut par exemple utiliser les propriétés des nombres premiers, comme c'était le cas pour la numérotation définie par Gödel dans son mémoire de 1931. Voici une numérotation d'un autre genre pour le système formel du § 3:

$$\gamma(\,[\,) = 1,\ \gamma(\,]\,) = 3,\ \gamma(-) = 5,\ \gamma(\rightarrow) = 7,$$

$$\gamma(a_n) = 2n + 7,\ \gamma(XY) = (\gamma(X) + \gamma(Y)) =$$

$$= (\gamma(X) + \gamma(Y) - 1) - 2\ .\ \gamma(Y) + 2$$

semble) est récursif.

- <u>Un ensemble de suites de symboles est récursivement énumérable</u> si l'ensemble des numéros est récursivement énumérable.

On peut définir également ce qu'on entend par <u>règle de dérivation récursive</u>.

Supposons, pour simplifier, que la règle de dérivation considérée soit <u>semi-fonctionnelle</u>; ceci signifie que, quand la règle s'applique, le conséquent est déterminé univoquement par les antécédents. C'est le cas, par exemple, pour la règle D_1 du système formel du calcul des propositions pur défini au § 3 (règle de détachement): étant donné deux formules X et X' quelconques, la règle ne peut pas toujours s'appliquer; elle ne s'appliquera que si X' est de la forme $[X \rightarrow Y]$ (où Y est une formule, quelconque cette fois); mais alors le conséquent Y est tout à fait déterminé par les antécédents X et $[X \rightarrow Y]$ - soit donc une telle règle D qui, à partir de deux antécédents X et X' peut donner un conséquent Y, défini univoquement par X et X'; nous dirons que cette règle est récursive si la semi-fonction d définie par:

$$\gamma(Y) = d\,(\gamma(X),\ \gamma(X'))$$

est une semi-fonction récursive. Il est évident que cette définition peut se généraliser pour des règles semi-fonctionnelles à 1, 2, 3...... antécédents. Par ailleurs, d'après la thèse de Church étendue (§ 6), dire qu'une telle règle est récursive, c'est dire qu'elle est "effective" au sens vague utilisé au § 2.

Si l'on considérait, comme on le fait quelquefois, des règles de dérivation qui ne soient pas semi-fonctionnelles, c'est-à-dire pour lesquelles les antécédents ne déterminent pas entièrement le conséquent, on pourrait encore, par un procédé un peu plus compliqué, définir une notion de "récursivité" équivalente par la thèse de Church à la notion vague d' "effectivité".

Nous pouvons maintenant définir la notion de <u>système formel récursif</u>. Il suffit de prendre la notion de "système formel effectif" (§ 2) et de remplacer partout "effectif" par "récursif".

Autrement dit, les conditions C_1 et C_2 du § 2 deviennent:

C'1: L'ensemble des formules F est un sous-ensemble récursif de l'ensemble des suites à éléments dans A.

C'2: Il existe un sous-ensemble récursif (fini ou infini) de T, soit T_p (l'ensemble des thèses primitives) et un nombre fini de transformations récursives $D_1,\ldots,D_n$ (les règles de dérivation), tel que l'ensemble des thèses, T, est l'ensemble des formules obtenues à partir du T_p en appliquant les transformations $D_1,\ldots,D_n$ un nombre fini quelconque de fois dans un ordre quelconque.

On définit encore la notion de <u>système formel décidable</u>.

C'est un système formel obéissant à C'1 et à:

C'3: L'ensemble des thèses, T, est un sous-ensemble récursif de l'ensemble des formules, F.

Maintenant, le résultat essentiel est que, dans un <u>système formel récursif, l'ensemble des thèses est récursivement énumérable</u>.

Il est assez facile de "démontrer" ce résultat (en utilisant la thèse de Church) quand les règles de dérivation sont semi-fonctionnelles.

Il suffira de montrer comment on peut énumérer effectivement toutes les thèses. Dans ce qui suit, je supposerai qu'il n'y a qu'une seule règle de dérivation D, à deux antécédents. Mais le raisonnement se généraliserait facilement.

Remarquons d'abord que les thèses primitives constituent un ensemble récursif, et donc récursivement énumérable. Considérons donc cette énumération comme effectuée, et soient p_1, $p_2, \ldots, p_n$, les thèses primitives. Ensuite on définit successivement des ensembles de thèses de plus en plus larges.

Considérons d'abord p_1; la règle D étant effective, il est possible de voir si elle s'applique au couple (p_1, p_1).

Dans tous les cas, nous avons un premier ensemble de thèses:

$t_1 = p_1$

et éventuellement t_2 = résultat de l'application de D au couple (p_1, p_1)

Ajoutons, enfin à la suite $t_{n_1} = p_2$ ($n_1 = 2$ ou 3 suivant les cas).

On a ainsi une première suite de thèses: $t_1, \ldots, t_{n_1}$

Considérons la suite: $t_1, \ldots, t_{n_1}$; on peut énumérer tous les couples de ces thèses dans l'ordre suivant: $(t_1, t_1), \ldots, (t_1, t_{n_1}), (t_2, t_2), \ldots, (t_2, t_{n_1}), \ldots$ jusqu'à (t_{n_1}, t_{n_1}); pour chaque couple, on peut décider si la règle D s'applique ou non; dans les cas où elle s'applique, numérotons les thèses obtenues dans l'ordre où elles sont obtenues: $t_{n_1} + 1, t_{n_1} + 2, \ldots$

Ajoutons enfin, à la suite: $t_{n_2} = p_3$

Considérons la suite: $t_1, \ldots, t_{n_2}$ et recommençons ainsi indéfiniment.

Finalement la suite $t_1, \ldots, t_x, \ldots$ contient toutes les thèses (20) - et on voit que le procédé précédent permet de déterminer effectivement la thèse numéro x, quel que soit x (21).

---

(20) Avec le procédé exposé, les mêmes thèses seront obtenues plusieurs fois: on pourra avoir par exemple $t_{17} = t_{24}$. On pourrait modifier la numérotation en convenant de ne pas récrire les thèses déjà écrites. Ceci est un cas particulier d'un théorème général: Tout ensemble récursivement énumérable peut être énuméré récursivement sans répétition (c'est à dire par une fonction récursive qui ne prend pas deux fois la même valeur).

(21) A moins que l'ensemble des thèses soit fini; mais dans ce cas, l'ensemble des thèses est encore récursivement énumérable - car tout ensemble fini est récursif, et par suite récursivement énumérable.

<u>La réciproque de la proposition précédente est vraie</u>, plus précisément: soit un alphabet A, un ensemble F, de suites finies à éléments dans A, et T un sous-ensemble récursivement énumérable de F, alors il existe un système formel récursif ayant pour alphabet A, pour formules les F et pour thèses les T.

On peut donc dire que la définition donnée plus haut pour les systèmes formels récursifs est équivalente à la suivante: c'est un système formel satisfaisant aux conditions C'1 (données plus haut) et:

C"2: L'ensemble des thèses, T, est un sous-ensemble récursivement énumérable de l'ensemble des formules, F.

Il suit que, comparer les systèmes formels récursifs aux systèmes formels décidables, cela revient à comparer les conditions C"2 et C'3, cela revient donc à comparer les ensembles récursivement énumérables et les ensembles récursifs. En appliquant les résultats du § 5, on a immédiatement:

- Tout système formel décidable est récursif; mais:

- <u>Il existe des systèmes formels récursifs qui ne sont pas décidables</u>.

Il serait facile de donner un exemple de système formel récursif indécidable dont la définition soit assez simple, mais dont l'interprétation ne serait pas immédiate. Au paragraphe suivant, je donnerai au contraire la définition d'un système formel indécidable, le "calcul des prédicats pur", dont la définition est assez compliquée, mais qui joue un rôle central dans la logique mathématique moderne.

Maintenant, tout ce qui précède découle de l'extension aux ensembles de formules de notions (récursivité et...) définies pour les ensembles des nombres entiers. Ceci dépend donc des numérotations de Gödel. Mais on peut définir plusieurs numérotations de Gödel pour le même système formel. Tout ce qui précède a été défini par <u>une</u> numérotation particulière fixée au début, et on peut se demander ce qui se passe si on change de numérotation. En fait, il ne se passe rien. Si un ensemble de formules est récursif (ou récursivement énumérable) par rapport à une numérotation de Gödel, il est récursif (respectivement: récursivement énumérable) par rapport à n'importe quelle numérotation de Gödel et il en est de même pour les autres notions utilisées dans le présent paragraphe. Donc <u>les résultats énoncés ci-dessus sont invariants par rapport aux numérotations</u>

de Gödel (22).

9.- LE SYSTEME FORMEL DU CALCUL DES PREDICATS PUR

Au § 3, j'ai donné la définition du "système du calcul des propositions pur", système dont on peut dire qu'il formalise la théorie des propositions non-analysées.

Si on veut, au contraire, étudier la structure interne des propositions utilisées en mathématiques sans pourtant s'attacher à ce qui différencie les propositions des diverses branches des mathématiques, on est conduit à étudier de près les notions de "propriétés" ou de "relations" ainsi que la notion de "variable" et les expressions "il existe un objet tel que..." et "pour tout objet on a...". Considérons la proposition arithmétique suivante:

- tout nombre entier est divisible par au moins un

(22) Dans le cas d'un système formel à alphabet infini, il faut prendre quelques précautions supplémentaires; mais la conclusion soulignée reste vraie.

nombre premier;

Si l'on veut énoncer cette proposition plus simplement sans utiliser de pronom ni d'adjectif indéfini, on est amené à écrire la phrase équivalente:

- pour tout x, x est un nombre entier, implique que il existe un y tel que y est un nombre premier et que y divise x;

- Cette phrase est barbare si l'on veut, mais on y voit apparaître plus clairement la structure de la proposition. Ceci sera encore plus clair si on l'écrit en abrégé de la façon suivante:

- Tt x (x entier → Ex. y (y prem. et y div. x))

On voit que la phrase est constituée par des éléments assez simples.

On y distingue:

- Des mots qui relient des propositions entières, tels que "implique", "et"; ces mots représentent des notions qui ont déjà été étudiées, car elles sont l'objet du "calcul des propositions".

- Les expressions "Tt" et "Ex" suivies de variables - ces expressions sont appelées traditionnellement (et assez improprement) des "quantificateurs".

- Enfin des propositions élémentaires constituées par l'attribution d'une propriété à une variable (par exemple: "x prem.") ou par l'énoncé d'une relation entre deux ou plusieurs variables (par exemple: "x div. y") - propriétés et relations sont appelées, en logique moderne, des "prédicats"; "prem." est un prédicat à un argument et "div." est un prédicat à deux arguments.

Or, tout ce qui est"spécialement arithmétique" dans la phrase précédente est contenu dans la nature des prédicats utilisés. Mais on peut étudier les rapports existant entre les divers éléments des phrases, indépendamment de la nature des prédicats. On a ainsi une classe de propositions que l'on peut appeler "logiques" en ce sens qu'on les rencontre dans toutes les branches des mathématiques.

Par exemple, il est facile de voir que, quelle que soit la relation (prédicat à deux arguments) R, on a:

Ex.x (Tt.y (xRy))→Tt.y (Ex.x (xRy))

L'étude des propositions de ce genre est l'objet d'une partie des mathématiques (ou, si l'on préfère, de la logique) que l'on appelle "calcul des prédicats". Le "système formel du calcul des prédicats pur" est un système formel, au sens du § 2, qui peut s'interpréter comme une description abstraite de cette partie des mathématiques.

Pour définir ce système formel, je définirai successivement l'alphabet, l'ensemble des formules et l'ensemble des thèses.

<u>L'alphabet A</u> est un ensemble infini dénombrable qui comprend les éléments suivants:

1 - Les éléments [ ] , dits "parenthèses formelles"
2 - L'élément - , dit "négation formelle"
3 - L'élément →, dit "implication formelle"
4 - L'élément $\forall$ dit "quantificateur universel" (22 bis)

(22 bis) Le signe "$\forall$" qui est un A renversé, provient de l'allemand "alle".

5 - Une suite infinie (dénombrable) d'éléments dit "variables": $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$; v_n sera appelée "la n-ème variable".

6 - Une suite double infinie (dénombrable) d'éléments, dits "prédicats":

$$P^o_1 , P^o_2 , \ldots$$

$$P^1_1 , P^1_2 , \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On appelle P^d_n $(n \geqslant 1,\ d \geqslant o)$ "le n-ème prédicat de degré d".

On remarque que j'ai donné à certains de ces éléments les mêmes noms qu'à certains éléments de l'alphabet du "calcul des propositions pur" et que je les ai représentés par les mêmes signes typographiques. Ce n'est pas un hasard; comme on le verra, le calcul des prédicats pur est un "extension" du calcul des propositions.

<u>L'ensemble des formules, F</u> est un sous-ensemble de l'ensemble des suites finies à élément dans A. Pour le définir, commençons par définir une notion auxiliaire:

On appelle <u>formule atomique</u> une séquence composée d'un prédicat quelconque suivi par des variables en nombre égal au degré du prédicat, ces variables pouvant être identiques ou différentes les unes des autres -par exemple:

$$P_8^1\ v_3, \quad P_2^2\ v_1\ v_2, \quad P_7^3\ v_2\ v_1\ v_2$$

sont des formules atomiques. Comme le degré d'un prédicat peut être 0,

$$P_1^0\ ,\ P_2^0\ \text{etc....}$$

sont également des formules atomiques.

On définit ensuite l'ensemble des formules par récurrence de la façon suivante:

F1 - Toute formule atomique est une formule

F2 - Si X est une formule -X est également une formule

F3 - Si X et Y sont des formules, $[X \rightarrow Y]$ est également une formule

F4 - Si X est une formule et si a est une variable, $\forall aX$ est une formule

F5 - Toute formule est obtenue à partir des formules atomiques par applications répétées de F2,F3,F4.

Si on compare ce système formel avec celui qui a été