NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

9 - 10 - 11

DIANA BRIGNOLE

Equational Characterization of Nelson Algebras

ANTONIO MONTEIRO

Generalisation D'Un Theoreme de R. Sikorski Sur Les Algebres de Boole

Construction des Algebres de Lukasiewicz Trivalentes Dans les Algebres de Boole Monadiques - I

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA – ARGENTINA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA(*)

N° 9 - 10 - 11

EQUATIONAL CHARACTERIZATION OF NELSON ALGEBRAS

by

Diana Brignole

GENERALISATION D'UN THEOREME DE R.SIKORSKI SUR LES ALGEBRES DE BOOLE

CONSTRUCTION DES ALGEBRES DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES DANS LES ALGEBRES DE BOOLE MONADIQUES-I

par

Antonio Monteiro

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada en parte por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

N° 9

EQUATIONAL CHARACTERIZATION OF NELSON ALGEBRAS

by

Diana Brignole

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

Este artículo contiene resultados obtenidos en el Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur. El mismo debería haber sido publicado en esta colección como preprint en 1965, pero por diversas razones no fué posible imprimirlo en ese año. Fué publicado bajo el mismo título en "Notre Dame Journal of Formal Logic", Vol.X, N°3, (1969), pag. 285-297.

Cet article contient des résultats obtenus à l'Instituto de Matemática de l'Universidad Nacional del Sur. Il devrait être publié dans cette collection comme préprint en 1965, mais par plusieures raisons il n'a pas été possible de le faire paraître à cette époque. Il a été imprimé sous le même titre dans "Notre Dame Journal of Formal Logic", Vol.X, N°3 (1969), 285-297.

EQUATIONAL CHARACTERIZATION OF NELSON ALGEBRA

by

DIANA BRIGNOLE

1. INTRODUCTION. H. Rasiowa in [8] and [9] has introduced the notion of N-lattice which plays a role in the study of the constructive logics with strong negation considered by David Nelson [7] and A. Markov [4]. Not all axioms used by H. Rasiowa to characterize N-lattices, here called Nelson algebras, are equations. A paper published in collaboration with A. Monteiro, [3], gives a characterization of these algebras by equations but the proofs are heavily based on results indicated in [6] which have been obtained using transfinite induction. The purpose of this work, done under the guidance of Dr. A. Monteiro, is to indicate a purely arithmetical proof of that result. We reproduce here known results with the object of making this paper self-contained.

2. THE DEFINITION OF H. RASIOWA. Let us consider, in first place, the following definition:

2.1. DEFINITION. *A system* $\langle A,1,\sim,\wedge,\vee\rangle$ *constituted by* 1°) *a non empty set* A, 2°) *an element* $1 \in A$, 3°) *a unary operator* $\sim$ *defined on* A, 4°) *two binary operations*, $\wedge$ *and* $\vee$, *defined on* A, *will be called a quasi-boolean algebra*, [1], *or a Morgan algebra*, [5], *if the following conditions are verified:*

N1. $x \vee 1 = 1$

N2. $x \wedge (x \vee y) = x$

N3. $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

N4. $\sim\sim x = x$

N5. $(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

A system $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ verifying axioms N2 and N3 is, according to M. Scholander [10], a distributive lattice, from N1 we deduce that 1 is the last element of A. We can prove:

N'2. $a \vee (a \wedge b) = a$

N'3. $a \vee (b \wedge c) = (c \vee a) \wedge (c \vee b)$

N'5. $\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$

and that $0 = \sim 1$ is the first element of A.

We shall use the following properties of a distributive lattice with last element 1.

(α) $a \wedge a = a$

(β) $1 \wedge a = a$

(γ) $a \wedge (a \wedge b) = a \wedge b$

(δ) $a \vee (a \vee b) = a \vee b$

We shall write $a \leq b$ to indicate that $a = a \wedge b$. Let us consider not the definition of N-lattice introduced by H. Rasiowa in [8] and [9]:

2.2. DEFINITION. *A system* $\langle A, 1, \sim, \neg, \rightarrow, \wedge, \vee \rangle$ *constituted by* 1°) *a non empty set* A. 2°) *an element* $1 \in A$. 3°) *two unary operators:* $\sim$, $\neg$ *defined on* A. 4°) *three binary operations:* $\rightarrow, \wedge, \vee$ *defined on* A, *will be called a Nelson Algebra if the* *following axioms are verified:*

Axiom A1. (We write $a < b$ to indicate that $a \to b = 1$)

(1a). $a < a$

and

(1b). *if* $a < b$ *and* $b < c$ *then* $a < c$

Axioms A2. *The system* $\langle A, 1, \sim, \wedge, \vee \rangle$ *is a Morgan algebra, and on the other hand the relation* $\leq$ *defined by*

(E) $a \leq b$ *if and only if* $a < b$ *and* $\sim b < \sim a$

coincides with the order relation of the lattice $\langle A, \wedge, \vee \rangle$

Axiom A3. *If* $a < c$ *and* $b < c$ *then* $(a \vee b) < c$

Axiom A4. *If* $c < a$ *and* $c < b$ *then* $c < (a \wedge b)$

Axiom A5. $\sim(a \to b) < (a \wedge \sim b)$

Axiom A6. $(a \wedge \sim b) < \sim(a \to b)$

Axiom A7. $a < \sim\neg a$

Axiom A8. $\sim\neg a < a$

Axiom A9. $(a \wedge \sim a) < b$

Axiom A10. $a < (b \to c)$ *if and only if* $(a \wedge b) < c$

Axiom A11. $a = a \to 0$, *where* $0 = \sim 1$

In this definition, more than 11 axioms are really involved. Using the compact definition 2.1 of Morgan algebras the axiom A2 is equivalent to 6 axioms.

3. THEOREM. *If* $\langle A,1,\sim,\rceil,\wedge,\vee,\to\rangle$ *is a Nelson algebra then the following properties are verified:*

N1. $a \vee 1 = 1$

N2. $a \wedge (a \vee b) = a$

N3. $a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (b \wedge a)$

N4. $\sim\sim a = a$

N5. $\sim(a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$

N6. $(a \wedge \sim a) \wedge (b \vee \sim b) = a \wedge \sim a$

N7. $a \to a = 1$

N8. $(a \to b) \wedge (\sim a \vee b) = \sim a \vee b$

N9. $a \wedge (a \to b) = a \wedge (\sim a \vee b)$

N10. $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$

N11. $a \to (b \to c) = (a \wedge b) \to c$

Proof. Properties N1 - N5 are immediately verified since $\langle A,1,\sim,\wedge,\vee\rangle$ is a Morgan algebra, according to axiom A2.

PROPERTY N6. $(a \wedge \sim a) \wedge (b \vee \sim b) = a \wedge \sim a$

This was established by H. Rasiowa [9], p. 79, whose proof we reproduce here:

Replacing b by $(b \vee \sim b)$ in axiom A9 we obtain

(1) $(a \wedge \sim a) \to (b \vee \sim b) = 1$

and using this result we can write

(2) $\sim(b \vee \sim b) \to \sim(a \wedge \sim a) = (b \wedge \sim b) \to (a \vee \sim a) = 1$

From (1) and (2) we obtain by axiom A2, $a \wedge \sim a \leq b \vee \sim b$.

PROPERTY N7. $a \to a = 1$

It follows from axiom A1.

PROPERTY N8. $(a \to b) \wedge (\sim a \vee b) = \sim a \vee b$

This formula has been established by H. Rasiowa in [9], 2.4 (d). From axioms A5 and A7 we obtain

(1) $\sim(a \to b) < a \wedge \sim b < \sim\neg a \wedge \sim b = \sim(\neg a \vee b)$

By axiom A1, $a \to 0 < a \to 0$, from which we obtain, by A10,

$$a \wedge (a \to 0) < 0, \quad \text{i.e. } a \wedge \neg a < 0$$

As $0 < b$, by A1, $a \wedge \neg a < b$ from which we obtain, by A10,

(2) $\neg a < a \to b$

from $b \wedge a < b$ we obtain, applying again A10,

(3) $b < a \to b$

From (2), (3) and A3 it follows that

(4) $\neg a \vee b < a \to b$

From (1) and (4) we get, by A2,

(5) $\neg a \vee b \leq a \to b$

Now, we will prove that $\sim a \leq \neg a$. We have, by A9, $(\sim a \wedge a) < 0$, and then it follows, by A10,

(6) $\sim a < a \to 0 = \neg a$

Now, considering axiom A8

(7) $\sim\neg a < a = \sim\sim a$

From (6) and (7) we obtain, by A2,

(8) $\sim a \leq \neg a$

From (5) and (8) we finally obtain $\sim a \vee b \leq a \to b$

PROPERTY N9. $a \wedge (a \to b) = a \wedge (\sim a \vee b)$

This has been established in [3]. We shall now give a more direct proof. Making use of property N8 we have:

(1) $a \wedge (\sim a \vee b) \leq a \wedge (a \to b)$

We now proceed to prove that

(2) $a \wedge (a \to b) \leq a \wedge (\sim a \vee b)$

which is equivalent to the two following inequalities

(2a) $a \wedge (a \to b) < a \wedge (\sim a \vee b)$

(2b) $\sim(a \wedge (\sim a \vee b)) \to \sim(a \wedge (a \to b))$

By A1, $a \to b < a \to b$, by A10, $a \wedge (a \to b) < b$, and therefore

(3) $a \wedge (a \to b) < \sim a \vee b$

On the other hand $a \wedge (a \to b) < a$, then we get, from (3) and A4

(2a) $a \wedge (a \to b) < a \wedge (\sim a \vee b)$

From N3, N'3 and N4 we obtain

(4) $\sim(a \wedge (\sim a \vee b)) = \sim a \vee \sim(\sim a \vee b) = \sim a \vee (a \wedge \sim b)$

By axiom A6,

(5) $a \wedge \sim b < \sim(a \to b)$

From $a \wedge (a \to b) < a \to b$ we obtain

(6) $\sim(a \to b) < \sim(a \wedge (a \to b))$

From (5) and (6) we obtain

(7) $a \wedge \sim b < \sim(a \wedge (a \to b))$

From $a \wedge (a \to b) \leq a$ we obtain

(8) $\sim a < \sim(a \wedge (a \to b))$

Applying A3 to (7) and (8) we obtain

$$\sim a \vee (a \wedge \sim b) < \sim(a \wedge (a \to b))$$

and, therefore, by (4),

(2b) $\sim(a \wedge (\sim a \vee b)) < \sim(a \wedge (a \rightarrow b))$

which is what we wanted.

PROPERTY N10. $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$

This formula has been established in [3].

(A) $\sim((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)) < \sim(a \rightarrow (b \wedge c))$

Using A6, A2 and A5 we obtain

$$\sim(a \rightarrow b) < a \wedge \sim b \leq a \wedge \sim(b \wedge c) < \sim(a \rightarrow (b \wedge c))$$

Then, by A1, we can write

(1) $\sim(a \rightarrow b) < \sim(a \rightarrow (b \wedge c))$

Replacing b for c in (1) we obtain

(2) $\sim(a \rightarrow c) < \sim(a \rightarrow (b \wedge c))$

From (1) and (2), by axiom A3,

$$\sim((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)) = \sim(a \rightarrow b) \vee \sim(a \rightarrow c) < \sim(a \rightarrow (b \wedge c))$$

(B) $\sim(a \rightarrow (b \wedge c)) < \sim((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c))$

By axiom A5, we have:

(1) $\sim(a \rightarrow (b \wedge c)) < a \wedge \sim(b \wedge c)$

By axiom A6, we can write

(2) $a \wedge \sim b < \sim(a \rightarrow b)$

(3) $a \wedge \sim c < \sim(a \rightarrow c)$

From (2) and (3) we obtain , using A3,

(4) $a \wedge (\sim b \vee \sim c) < \sim(a \rightarrow b) \vee \sim(a \rightarrow c)$

i.e.

(5) $a \wedge \sim(b \wedge c) < \sim((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c))$

From (1) and (5) we finally obtain

$$\sim(a \rightarrow (b \wedge c)) < \sim((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c))$$

(C) $a \rightarrow (b \wedge c) < (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$

In first place let us prove that:

(1) *if* $x < y$ *then* $a \rightarrow x < a \rightarrow y$

which is equivalent, by A10, to:

(1') *if* $x < y$, *then* $a \wedge (a \rightarrow x) < y$

From N9 and N3 we obtain

$$a \wedge (a \rightarrow x) = a \wedge (\sim a \vee x) = (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge x)$$

By A9, $(a \wedge \sim a) < (a \wedge x)$, so we can write

$$a \wedge (a \rightarrow x) < a \wedge x < x$$

Then, if $x < y$: $a \wedge (a \to x) < y$. From $b \wedge c \leq b$ and $b \wedge c \leq b$ and $b \wedge c \leq c$ we obtain, using (1).

(2) $\quad a \to (b \wedge c) < a \to b$

(3) $\quad a \to (b \wedge c) < a \to c$

From (2), (3) and A4 we obtain

$$a \to (b \wedge c) < (a \to b) \wedge (a \to c)$$

(D) $\quad (a \to b) \wedge (a \to c) < a \to (b \wedge c)$

By A1, $a \to b < a \to b$; then, by A10,

(1) $\quad a \wedge (a \to b) < b$

In the same way:

(2) $\quad a \wedge (a \to c) < c$

Applying A4 to (1) and (2) we obtain

$$a \wedge (a \to b) \wedge (a \to c) < b \wedge c$$

which is equivalent, by A10, to

$$(a \to b) \wedge (a \to c) < a \to (b \wedge c)$$

From (A), (B), (C) and (D) we obtain N10.

PROPERTY N11. $\quad (a \wedge b) \to c = a \to (b \to c)$

This formula has been established by A. Monteiro [6], using transfinite induction. We give here an arithmetical proof:

(A) $(a \wedge b) \to c < a \to (b \to c)$

By axioms A1 and A10, we can write

$$\begin{aligned} 1 &= ((a \wedge b) \to c) \to ((a \wedge b) \to c) \\ &= (a \wedge b \wedge ((a \wedge b) \to c)) \to c \\ &= (a \wedge ((a \wedge b) \to c)) \to (b \to c) \\ &= ((a \wedge b) \to c) \to (a \to (b \to c)) \end{aligned}$$

which proves (A).

(B) $(a \to (b \to c)) < ((a \to b) \to c)$

By N8, $(\sim b \vee c) < b \to c$, then

(1) $a \wedge (\sim b \vee c) < b \to c$

By axiom A9, we can write

(2) $a \wedge \sim a < b \to c$

From (1) and (2) we obtain, applying A3,

$$a \wedge (\sim a \vee \sim b \vee c) = (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge (\sim b \vee c)) < b \to c$$

Then, by axiom A10,

(3) $b \wedge a \wedge (\sim a \vee \sim b \vee c) < c$

From N3 and N9 we obtain:

$$b \wedge a \wedge (\sim a \vee \sim b \vee c) = (b \wedge a \wedge \sim a) \vee (b \wedge a \wedge (\sim b \vee c))$$
$$= (b \wedge a \wedge \sim a) \vee (b \wedge a \wedge (b \to c))$$
$$= b \wedge a \wedge (\sim a \vee (b \to c))$$
$$= b \wedge a \wedge (a \to (b \to c))$$

which, using (3) gives:

$$b \wedge a \wedge (a \to (b \to c)) < c$$

Then, applying A10

$$a \to (b \to c) < (a \wedge b) \to c$$

(C) $\sim((a \wedge b) \to c) < \sim(a \to (b \to c))$

By axiom A1:

(1) $\sim((a \wedge b) \to c) < (a \wedge b) \wedge \sim c = a \wedge \sim(\sim b \vee c)$

and, by axiom A6:

(2) $a \wedge \sim(\sim b \vee c) < \sim(a \to (\sim b \vee c))$

From (1) and (2) we obtain

(3) $\sim((a \wedge b) \to c) < \sim(a \to (\sim b \vee c))$

Let us prove

(4) *If* $\sim x < \sim y$, *then* $\sim(z \to x) < \sim(z \to y)$

Surely, by A5, $\sim(z \to x) < z \wedge \sim x$; from the hypothesis we obtain: $z \wedge \sim x < z \wedge \sim y$. Then, we can write $\sim(z \to x) < z \wedge \sim y$. Besides, by axiom A5, $z \wedge \sim y < \sim(z \to y)$. So we can write $\sim(z \to x) < \sim(z \to y)$, and property (4) is proved. From axiom A6 and (4) we deduce:

(5) $\sim(a \to (\sim b \vee c)) < \sim(a \to (b \to c))$

(D) $\sim(a \to (b \to c)) < \sim((a \wedge b) \to c)$

By axiom A5, we have

(1) $\sim(a \to (b \to c)) < a \wedge \sim(b \to c)$

Also, by A5, we have: $\sim(b \to c) < b \wedge \sim c$, from which we obtain:

(2) $a \wedge \sim(b \to c) < a \wedge (b \wedge \sim c)$

From (1) and (2) we obtain:

(3) $\sim(a \to (b \to c)) < a \wedge b \wedge \sim c$

By axiom A5, we have:

(4) $(a \wedge b) \wedge \sim c < \sim((a \wedge b) \to c)$

From (3) and (4) we obtain

$$\sim(a \to (b \to c)) < \sim((a \wedge b) \to c)$$

From (A), (B), (C) and (D) we obtain property N11.

4. THEOREM. *Let* $\langle A, 1, \sim, \to, \wedge, \vee \rangle$ *be a system formed by* 1°) *a non empty set* A, 2°) *an element* $1 \in A$, 3°) *a unary operator* $\sim$

defined on A, 4°) *three binary operations,* $\to, \wedge, \vee$ *defined on* A, *and assume that properties* N1-N11 *are verified. If* $\neg x = x \to {\sim}1$, *then the system* $\langle A, 1, \sim, \neg, \to, \wedge, \vee \rangle$ *is a Nelson Algebra.*

Proof. Axiom A11 is verified by definition. The other axioms have to be proved. Let us first prove the two following lemmas:

4.1. LEMMA. *If* $a \leq b$ *then* $a \to b = 1$.

Let $a = a \wedge b$. Applying N7, N10 and (β) we obtain:

$$1 = a \to a = a \to (a \wedge b) = (a \to a) \wedge (a \to b) = 1 \wedge (a \to b) = a \to b$$

4.2. LEMMA. $a \to b = 1$ *if and only if* $a = a \wedge ({\sim}a \vee b)$.

(A) Assume that

(1) $a \to b = 1$

Then, applying (1) and N9, we obtain

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (a \to b) = a \wedge ({\sim}a \vee b)$$

(B) Assume that

$$a = a \wedge ({\sim}a \vee b)$$

Applying N9 we obtain

$$a \wedge (a \to b) = a \wedge ({\sim}a \vee b) = a$$

i.e.: $a \leq a \to b$. Now by Lemma 4.1, N11 and (α)

$$1 = a \to (a \to b) = (a \wedge a) \to b = a \to b$$

Now, we shall prove axioms A1-A10 referred to, in definition 2.3.

Axiom A1. *If we write* $a < b$ *for* $a \to b = 1$, *we have* (1a) $a < a$, *and* (1b) *If* $a < b$ *and* $b < c$ *then* $a < c$.

(1a). It is an immediate consequence of N1

(1b). Let us consider $a < b$ and $b < c$, i.e. $a \to b = 1$ and $b \to c = 1$. By lemma 4.2 we can write:

(1) $a = a \wedge (\sim a \vee b)$

(2) $b = b \wedge (\sim b \vee c)$

From (1) we obtain, by N5 and N'5,

(3) $\sim a = \sim a \vee (a \wedge \sim b)$

Applying successively (1) and (2); N3, N2 and (3); N3 and N3; N'2 and N'2; N3, (2) and (1) we obtain:

$$\begin{aligned}
a \wedge (\sim a \vee c) &= a \wedge (\sim a \vee b) \wedge (\sim a \vee (a \wedge \sim b) \vee c) \\
&= (\sim a \wedge a \wedge (\sim a \vee b)) \vee ((a \wedge \sim b) \wedge a \wedge (\sim a \vee b)) \vee \\
&\quad \vee (c \wedge a \wedge (\sim a \vee b)) \\
&= (\sim a \wedge a) \vee ((a \wedge \sim b) \wedge (\sim a \vee b)) \vee ((c \wedge a) \wedge (\sim a \vee b)) \\
&= (\sim a \wedge a) \vee (b \wedge a \wedge \sim b) \vee (\sim a \wedge c \wedge a) \vee (b \wedge c \wedge a) \\
&= ((\sim a \wedge a) \vee (b \wedge a \wedge \sim b) \vee (b \wedge c \wedge a) \\
&= a \wedge (\sim a \vee (b \wedge \sim b) \vee (b \vee c))
\end{aligned}$$

$$= a \wedge (\sim a \vee (b \wedge (\sim b \vee c)))$$
$$= a \wedge (\sim a \vee b)$$
$$= a$$

Then, by lemma 4.2, $a \to c = 1$, i.e. $a < c$.

Axiom A2. *The system* $\langle A, 1, \sim, \wedge, \vee \rangle$ *is a Morgan algebra, and* $a \leq b$ *is equivalent to* $a \to b = 1$ *and* $\sim b \to \sim a = 1$.

(A) It is immediate, from N1-N5 that the system is a Morgan algebra.

(B) *If* $a \leq b$ *then* $a \to b = 1$ *and* $\sim b \to \sim a = 1$.

Let us suppose $a \leq b$. Then by lemma 4.1 $a \to b = 1$. On the other hand, if $a \leq b$ then $\sim b \leq \sim a$. So, by lemma 4.1, we can write $\sim b \to \sim a = 1$.

(C) *If* $a \to b = 1$ *and* $\sim b \to \sim a = 1$, *then* $a \leq b$.

Let us suppose $a \to b = 1$ and $\sim b \to \sim a = 1$. By lemma 4.2 we have

(1) $a = a \wedge (\sim a \vee b)$

(2) $\sim b = \sim b \wedge (b \vee \sim a)$

Applying N3 to (1) and (2), we obtain:

(3) $a = (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge b)$

(4) $\sim b = (\sim b \wedge b) \vee (\sim b \wedge \sim a)$

From N4, (4), N'5, N5 and N4 we obtain:

(5) $b = {\sim}{\sim}b = {\sim}({\sim}b \wedge b) \wedge {\sim}({\sim}b \wedge {\sim}a) =$

$= ({\sim}{\sim}b \vee {\sim}b) \wedge ({\sim}{\sim}b \vee {\sim}{\sim}a) = (b \vee {\sim}b) \wedge (b \vee a)$

Applying successively (3) and (5); N3, N6, N2 and N2; N3, N3, (5) and (1), we obtain:

$$\begin{aligned} a \wedge b &= ((a \wedge {\sim}a) \vee (a \wedge b)) \wedge (b \vee {\sim}b) \wedge (b \vee a) \\ &= ((a \wedge {\sim}a) \wedge (b \vee {\sim}b) \wedge (b \vee a)) \vee ((a \wedge b) \wedge (b \vee {\sim}b) \wedge (b \vee a)) \\ &= ((a \wedge {\sim}a) \wedge (b \vee a)) \vee (a \wedge b) \\ &= (a \wedge {\sim}a) \vee (a \wedge b) \\ &= a \wedge ({\sim}a \vee b) \\ &= a \end{aligned}$$

Then, we can write $a \leq b$.

Axiom A3. *If* $a < c$ *and* $b < c$ *then* $a \vee b < c$.

A. Monteiro has proved that, in a Nelson algebra the equality $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$ holds: so that in particular, we have:

$$(a \to c) \wedge (b \to c) \leq (a \vee b) \to c$$

from which we immediately obtain axiom A3.

This equation was proved by A. Monteiro in the following way:

(A) *If* $x \leq y$ *then* $a \to x \leq a \to y$.

From $x = x \wedge y$ we obtain, applying N10,

$$a \to x = a \to (x \wedge y) = (a \to x) \wedge (a \to y)$$

i.e.: $a \to x \leq a \to y$.

(B) *If* $a \wedge x \leq {\sim}a \vee b$ *then* $x \leq a \to b$.

Let $a \wedge x \leq {\sim}a \vee b$. Then, by N9,

(1) $a \wedge x \leq a \wedge ({\sim}a \vee b) = a \wedge (a \to b) \leq a \to b$.

From (1) and (A) we obtain

(2) $a \to (a \wedge x) \leq a \to (a \to b)$

From

(3) $a \to (a \wedge x) = (a \to a) \wedge (a \to x) = 1 \wedge (a \to x) = a \to x$

and

(4) $a \to (a \to b) = (a \wedge a) \to b = a \to b$

we obtain $a \to x \leq a \to b$. From $x \leq a \to x$ and $a \to x \leq a \to b$, we have $x \leq a \to b$.

(C) $a \wedge (a \to c) \wedge (b \to c) \leq {\sim}b \vee c$

Applying successively N9, N3, N6, N3, N8, N3, N3 and N'2 and N'2 we obtain:

$$\begin{aligned} a \wedge (a \to c) \wedge (b \to c) &= a \wedge ({\sim}a \vee c) \wedge (b \to c) \\ &= (a \wedge {\sim}a \wedge (b \to c)) \vee (a \wedge c \wedge (b \to c)) \\ &= ((a \wedge {\sim}a) \wedge (b \to c)) \vee (a \to c) \end{aligned}$$

$$= ((b \vee \sim b) \wedge (b \rightarrow c)) \vee (a \wedge c)$$
$$= (b \wedge (b \rightarrow c)) \vee (\sim b \wedge (b \rightarrow c)) \vee (a \wedge c)$$
$$= (b \wedge (b \vee c)) \vee b \vee (a \wedge c)$$
$$= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge \sim b) \vee \sim b$$
$$= ((a \vee b) \wedge c) \vee \sim b$$
$$= c \vee \sim b.$$

(D) $\quad a \wedge (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c) \leq \sim a \vee c$

Applying N9 we have $\quad a \wedge (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c) =$

$$= a \wedge (\sim a \vee c) \wedge (b \rightarrow c) \leq \sim a \vee c$$

(E) $\quad a \wedge (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c) \leq \sim(a \vee b) \vee c$

From (C) and (D) we have

$$a \wedge (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c) \leq (\sim a \vee c) \wedge (\sim b \vee c) = \sim(a \vee b) \wedge c$$

(F) $\quad b \wedge (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c) \leq \sim(a \vee b) \vee c$

(F) is a consequence of (E), replacing a by b.

(G) $\quad (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c) \leq (a \wedge b) \rightarrow c$

From (E) and (F) we obtain

$$(a \vee b) \wedge (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c) \leq \sim(a \vee b) \vee c$$

Then, by (A)

$$(a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c) \leq (a \vee b) \rightarrow c$$

Axiom A4. *If* $a < b$ *and* $a < c$ *then* $a < b \wedge c$.

Let $a < b$ and $a < c$, that is

(1) $a \to b = 1$,

(2) $a \to c = 1$

From N10, (1), (2), and (α) we have

$$a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c) = 1 \wedge 1 = 1$$

i.e.: $a < b \wedge c$.

Axiom A5. $\sim(a \to b) < a \wedge {\sim}b$.

By axiom N8, ${\sim}a \vee b \leq a \to b$, and therefore

(1) $\sim(a \to b) \leq \sim({\sim}a \vee b) = a \wedge {\sim}b$

By lemma 4.4, we obtain from (1)

$$\sim(a \to b) \to (a \wedge {\sim}b) = 1$$

Axiom A6. $a \wedge {\sim}b < \sim(a \to b)$

We shall prove the equality

(1) $\sim({\sim}a \vee b) \to \sim(a \to b) = 1$

i.e.:

(2) $(a \wedge {\sim}b) \to \sim(a \to b) = 1$

which is equivalent, by lemma 4.2 to

(3) $a \wedge \sim b = (a \wedge \sim b) \wedge (\sim(a \wedge \sim b) \vee \sim(a \rightarrow b))$

Applying $\sim$ to both members in (3) we have the equivalent equality:

(4) $\sim a \vee b = \sim a \vee b \vee (a \wedge \sim b \wedge (a \rightarrow b))$

which we can write, using N8,

(5) $\sim a \vee b = \sim a \vee b \vee (a \wedge (\sim a \vee b) \wedge \sim b)$

and since this equality is verified, the same occurs with (1)

Axiom A7. $a < \sim\neg a$.

This result is obtained replacing b by 0 in axiom A5 and observing that $\sim\sim a = a$ and $a \rightarrow 0 = \neg a$.

Axiom A8. $\sim\neg a < a$.

We obtain it replacing b by 0 in axiom A6.

Axiom A9. $a \wedge \sim a < b$.

By N8 $\sim a \vee b \leq a \rightarrow b$, and therefore $\sim a \leq a \rightarrow b$. Then, by lemma 4.1, we obtain.

(1) $\sim a \rightarrow (a \rightarrow b) = 1$

From (1) and N11 we obtain $(\sim a \wedge a) \rightarrow b = 1$, i.e. $a \wedge \sim a < b$.

Axiom A10. $a < b \rightarrow c$ *is equivalent to* $a \wedge b < c$.

It is enough to observe that, by property N11, $a \to (b \to c) = 1$ is equivalent to $(a \wedge b) \to c = 1$. This end our proof.

5. CONCLUSION. From theorem 3 and 4 we obtain a definition of Nelson algebra, which, cf. [3], is the following:

5.1. DEFINITION. *Let* $\langle A, 1, \sim, \wedge, \vee, \to \rangle$ *be a system constituted by* 1°) *a non-empty set* A, 2°) *and element* $1 \in A$, 3°) *a unary operator* $\sim$ *defined on* A, 4°) *three binary operations:* $\wedge, \vee, \to$ *defined on* A. *Such a system will be called a Nelson algebra if we define* $\neg x = x \to \sim 1$, *and if the following axioms are verified:*

N1. $a \vee 1 = a$

N2. $a \wedge (a \vee b) = a$

N3. $a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (b \wedge a)$

N4. $\sim\sim a = a$

N5. $\sim(a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$

N6. $(a \wedge \sim a) \wedge (b \vee \sim b) = a \wedge \sim a$

N7. $a \to a = 1$

N8. $(a \to b) \wedge (\sim a \vee b) = \sim a \vee b$

N9. $a \wedge (a \to b) = a \wedge (\sim a \vee b)$

N10. $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$

N11. $a \to (b \to c) = (a \wedge b) \to c$

BIBLIOGRAPHY

[1] Bialynicki-Birula, A. and Rasiowa, Helena, *On the representation of quasi-Boolean algebras*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, classe III, v.5 (1957), pp. 259-261.

[2] Birkhoff, Garrett, *Lattice Theory*, Revised Edition, Am. Math. Soc., Colloquium Publications, 25(1948), xiii, 283 p.

[3] Brignole, Diana and Monteiro, Antonio, *Caracterisation des Algebres de Nelson par des égalités*, Notas de Lógica Matemática N° 20 (1964), Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

[4] Markov, A.A., *A constructive Logic*, Uspehi Mathematiceskih Nauk, (N.S.), v. 5(1950), pp. 187-188.

[5] Monteiro, Antonio, *Matrices de Morgan caracteristiques pour le calcul propositionnel classique*, Anais da Academia Brasileira de Ciencias, v. 32(1960), pp. 1-7.

[6] Monteiro, Antonio, *Construction des algebres de Nelson finies*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, v. 11(1963), pp. 359-362.

[7] Nelson, David, *Constructible falsity*, The Journal of Symbolic Logic, v. 14(1949), pp. 16-26.

[8] Rasiowa, Helena, *Algebraic Charakterisierung Intuitionistischen Logik mit Starker negation*. Constructivity in Mathematics. (Proceedings of the Colloquium held at Amsterdam, 1957), edited by A. Heyting. Studies in Logic and the foundation of Mathematics, Amsterdam, 1959.

[9] Rasiowa, Helena, *N-lattices and constructive logic with strong negation*, Fundamenta Mathematicae, v. 46(1958), pp. 61-80.

[10] Scholander, Marlow, *Postulates for distributive lattices*, Canadian Journal of Mathematics, v. 3(1951), pp. 28-30

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca, Argentina

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

N° 10

GENERALISATION D'UN THEOREME DE R.SIKORSKI SUR LES ALGEBRES DE BOOLE

par

Antonio Monteiro

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

Este número es una separata del artículo "Generalisation d'un théorème de R.Sikorski sur les algèbres de Boole", por Antonio Monteiro, publicado en el Bull. Sc. Math., 2e.série, vol.89 (1965), pag. 65-74, que contiene resultados de investigaciones realizadas en el Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur. Un preprint de este artículo fué preparado en el año 1964, pero por diversas razones no pudo publicarse.

Ce numero est un tirage-à-part de l'article "Generalisation d'un théorème de R.Sikorski sur les algèbres de Boole", par Antonio Monteiro, publiée dans le Bull. Sc. Math., 2e. série, vol.89 (1965), pag. 65-74, qui contient les resultats des recherches realizées dans l'Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur. Un préprint de cet article devrait être publié dans cette collection dans l'année 1964, mais par plusieures raisons il n'a pas été possible de le faire paraître à cette époque.

Bull. Sc. math., 2e série
89, 1965, p. 65 à 74.

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE R. SIKORSKI SUR LES ALGÈBRES DE BOOLE ;

PAR

ANTÓNIO MONTEIRO.

Nous nous proposons dans cette Note de généraliser le théorème suivant de Roman SIKORSKI [3] :

1. THÉORÈME. — *Si A est une algèbre de Boole, S une sous-algèbre de A, C une algèbre de Boole complète, h un homomorphisme de S dans C; alors il existe un homomorphisme H de A dans C, qui prolonge h, c'est-à-dire tel que $H(s) = h(s)$ pour tout $s \in S$.*

Rappelons, tout d'abord, qu'un homomorphisme de l'algèbre de Boole A dans une algèbre A' de la même nature peut être défini comme une application h de A dans A' qui vérifie les conditions suivantes :

(0) $$h(0) = 0,$$

(1) $$h(1) = 1,$$

(2) $$h(x \vee y) = h(x) \vee h(y),$$

(3) $$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y),$$

puisque, de ces conditions, on déduit tout de suite que $h(-x) = -h(x)$.

Cette remarque justifie la terminologie adoptée dans la définition suivante :

2. DÉFINITION. — *Une application d de l'algèbre de Boole A dans l'algèbre de Boole A' est un demi-homomorphisme si d vérifie les conditions suivantes :*

(d 1) $$d(1) = 1,$$

(d 2) $$d(x \vee y) = d(x) \vee d(y).$$

Pour définir un « *demi-homomorphisme* » on pourrait choisir les conditions (1) et (3), ou bien (0) et (2), ou bien (0) et (3). Les applications qui vérifient les conditions (0) et (2) ont été étudiées par B. JÓNSSON et A. TARSKI [2] sous le nom de « fonctions additives et normales », et par P. HALMOS [1] sous le nom de « hemi-homomorphismes ».

On voit de suite qu'un demi-homomorphisme est une application monotone, c'est-à-dire

(4) *Si* $a' \leqq a''$, *alors* $d(a') \leqq d(a'')$.

ce qui est équivalent à dire que $d(a' \wedge a'') \leqq d(a') \wedge d(a'')$.

En outre,

(5) $-d(a) \leqq d(-a)$, *quel que soit* $a \in A$.

En effet, comme $a \vee -a = 1$, nous aurons $d(a) \vee d(-a) = d(1) = 1$, d'où l'on déduit (5).

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant qui a une forme analogue à celle du théorème de Hahn-Banach pour les espaces vectoriels sur le corps des nombres réels.

3. THÉORÈME. — (1) *Si A est une algèbre de Boole, S une sous-algèbre de A, C une algèbre de Boole complète, d un demi-homomorphisme de A dans C, h un homomorphisme de S dans C, tel que :*

(D) $h(s) \leqq d(s)$ *pour tout* $s \in S$;

alors il existe un homomorphisme H de A dans C tel que :

(I) *H prolonge h;*

(II) $H(a) \leqq d(a)$ *pour tout* $a \in A$.

Si $S = A$, nous aurons $H = h$. Supposons donc que $S \neq A$. Soient x un élément de A tel que $x \notin S$, et B la sous-algèbre de A engendrée par l'ensemble $\{x\} \cup S$. Nous allons démontrer, tout d'abord, qu'il existe un homomorphisme H de B dans C tel que

(I) H prolonge h,

(II) $H(b) \leqq d(b)$ pour tout $b \in B$.

On voit de suite que B est l'ensemble de tous les éléments de la forme

(6) $$b = (s' \wedge x) \vee (s'' \wedge -x), \quad \text{où } s', s'' \in S.$$

Remarquons, avec R. Sikorski, que la représentation d'un élément b de B sous la forme (6) n'est pas unique, en général; c'est-à-dire on peut avoir :

$$(s' \wedge x) \vee (s'' \wedge -x) = (s_1 \wedge x) \vee (s_2 \wedge -x),$$

avec $s', s'', s_1, s_2 \in S$ sans que les deux égalités $s' = s_1$, $s'' = s_2$ soient simultanément vérifiées.

---

(1) Ce résultat a été présenté à la réunion de l'Union Matematica Argentina, le 10 octobre 1964.

D'autre part si l'on veut que H soit un homomorphisme de B dans C que prolonge h, on doit avoir nécessairement

$$\begin{aligned} H(b) &= H((s' \wedge x) \vee (s'' \wedge - x)) \\ &= H(s' \wedge x) \vee H(s'' \wedge - x) \\ &= (H(s') \wedge H(x)) \vee (H(s'') \wedge H(-x)) \\ &= (h(s') \wedge H(x)) \vee (h(s'') \wedge - H(x)) \end{aligned}$$

et nous avons à choisir la valeur $H(x)$ de telle manière que si l'on pose pour chaque $b \in B$:

$$H(b) = (h(s') \wedge H(x)) \vee (h(s'') \wedge - H(x)), \tag{7}$$

la valeur $H(b)$ donnée par cette formule soit indépendante des coefficients s', s'' choisis pour représenter b sous la forme (6), car autrement H ne serait pas une application de B dans C.

R. Sikorski [3] a déterminé les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier $H(x)$, pour que la formule (7) définisse effectivement une application de B dans C.

Remarquons tout d'abord avec Sikorski que si s_1, s_2 sont des éléments de S tels que

$$s_1 \leq x \leq s_2, \tag{8}$$

on doit avoir

$$H(s_1) = h(s_1) \leq H(x) \leq H(s_2) = h(s_2). \tag{9}$$

Comme C est une algèbre complète, les éléments

$$m_1 = \bigvee_{\substack{s_1 \leq x \\ s_1 \in S}} h(s_1), \tag{10}$$

$$M_1 = \bigwedge_{\substack{x \leq s_2 \\ s_2 \in S}} h(s_2) \tag{11}$$

existent et sont univoquement déterminés par la sous-algèbre S et l'élément x.

La formule (9) montre que $H(x)$ doit vérifier les conditions :

$$m_1 \leq H(x) \leq M_1. \tag{K 1}$$

Pour démontrer qu'un tel élément $H(x)$ existe, il faut et il suffit de démontrer que

4. Lemme. — $m_1 \leqq M_1$.

En effet : de la formule (8) on déduit que $s_1 \leqq s_2$, donc $h(s_1) \leqq h(s_2)$, d'où l'on déduit que $m_1 \leqq h(s_2)$, ce qui entraîne $m_1 \leqq M_1$. Cela montre bien qu'il existe un élément $H(x)$ vérifiant la condition (K 1).

Sikorski a aussi démontré — et c'est la partie la plus difficile de son raisonnement — que la condition (K 1) est aussi suffisante pour que la formule (7) définisse une application de B dans C.

Nous supposons connu ce résultat de Sikorski [3].

Nous allons donc supposer, à partir de ce moment, que $H(x)$ vérifie la formule (K 1); alors on voit de suite que l'application H, définie par (7), est un homomorphisme de B dans C que prolonge h.

Il reste donc à montrer que parmi les valeurs $H(x)$ qui vérifient (K 1) on peut en choisir une de telle façon que

$$H(b) \leqq d(b) \quad \text{pour tout } b \in B,$$

ce qui est équivalent à

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (h(s') \wedge H(x)) \vee (h(s'') \wedge -H(x)) \leqq d((s' \wedge x) \vee (s'' \wedge -x)), \\ \qquad \text{quels que soient } s',\ s'' \in S. \end{cases}$$

En particulier, en posant $s'' = 0$ et $s' = 0$ il faut que

$$\text{(II}')\qquad h(s') \wedge H(x) \leqq d(s' \wedge x) \quad \text{pour tout } s' \in S,$$

$$\text{(II}'')\qquad h(s'') \wedge -H(x) \leqq d(s'' \wedge -x) \quad \text{pour tout } s'' \in S.$$

D'autre part, en utilisant la condition (d 2) de la définition 2, on voit de suite que (II) est une conséquence de (II′) et (II″).

En remarquant que la condition $a \wedge x \leqq b$ (respectivement $a \wedge -x \leqq b$) est équivalente à $x \leqq -a \vee b$ (respectivement à $a \wedge -b \leqq x$), (II′) et (II″) peuvent s'écrire sous les formes équivalentes :

$$\text{(II A)}\qquad H(x) \leqq -h(s') \vee d(s' \wedge x) \quad \text{pour tout } s' \in S,$$

$$\text{(II B)}\qquad h(s'') \wedge -d(s'' \wedge -x) \leqq H(x) \quad \text{pour tout } s'' \in S.$$

Cela signifie que $H(x)$ doit vérifier la double inégalité

$$h(s'') \wedge -d(s'' \wedge -x) \leqq H(x) \leqq -h(s') \vee d(s' \wedge x),$$

quels que soient s', $s'' \in S$.

Si nous posons :

$$(12)\qquad m_2 = \bigvee_{s'' \in S} (h(s'') \wedge -d(s'' \wedge -x)),$$

$$(13)\qquad M_2 = \bigwedge_{s' \in S} (-h(s') \vee d(s' \wedge x)),$$

alors pour que la condition (II) soit vérifiée il faut et il suffit que la valeur $H(x)$ soit choisie de telle façon que

(K 2) $$m_2 \leqq H(x) \leqq M_2.$$

Des conditions (K 1) et (K 2) on déduit que

(K) $$m_1 \vee m_2 \leqq H(x) \leqq M_1 \wedge M_2.$$

Pour qu'il existe un élément $H(x) \in C$ vérifiant (K) il faut et il suffit que

(K′) $$m_1 \vee m_2 \leqq M_1 \wedge M_2.$$

Pour démontrer qu'il en est ainsi, et si nous tenons compte du lemme 4, il nous reste à démontrer les trois lemmes suivants :

5. Lemme. — $m_2 \leqq M_2$.

Démontrons tout d'abord que

(14) $h(s'') \wedge -d(s'' \wedge -x) \leqq -h(s') \vee d(s' \wedge x)$ pour tout $s', s'' \in S$.

Cette proposition est équivalente à la vérification de chacune des inégalités suivantes, pour tout s', $s'' \in S$:

$$h(s'') \leqq -h(s') \vee d(s' \wedge x) \vee d(s'' \wedge -x),$$
$$h(s') \wedge h(s'') \leqq d(s' \wedge x) \vee d(s'' \wedge -x),$$

(15) $$h(s' \wedge s'') \leqq d((s' \wedge x) \vee (s'' \wedge -x)).$$

Remarquons d'abord que par hypothèse

(16) $$h(s' \wedge s'') \leqq d(s' \wedge s''),$$

étant donné que $s' \wedge s'' \in S$.

D'autre part,

$$s' \wedge s'' = s' \wedge s'' \wedge (x \vee -x)$$
$$= (s' \wedge s'' \wedge x) \vee (s' \wedge s'' \wedge -x) \leqq (s' \wedge x) \vee (s'' \wedge -x),$$

d'où en tenant compte de la monotonie de d,

(17) $$d(s' \wedge s'') \leqq d((s' \wedge x) \vee (s'' \wedge -x))$$

et (15) est une conséquence de (16) et (17).

La formule (14) étant démontrée, on en déduit :

(18) $m_2 \leqq -h(s') \vee d(s' \wedge x)$ pour tout $s' \in S$,

d'où $m_2 \leqq M_2$ et le lemme est démontré.

6. Lemme. — $m_1 \leq M_2$.

Montrons que

(19) *Si* $s_1 \leq x$ *et* $s_1, s' \in S$, *alors* $h(s_1) \leq -h(s') \vee d(s' \wedge x)$.

La condition $s_1 \leq x$ est équivalente à : $s_1 = s_1 \wedge x$, donc pour tout $s' \in S$ nous aurons

$$\begin{aligned} h(s_1) \wedge h(s') = h(s_1 \wedge s') &\leq d(s_1 \wedge s') \\ &= d(s_1 \wedge x \wedge s') \leq d(s' \wedge x) \wedge d(s_1) \leq d(s' \wedge x), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$h(s_1) \leq -h(s') \vee d(s' \wedge x),$$

C. Q. F. D.

De (19) on déduit

$$m_1 \leq -h(s') \vee d(s' \wedge x) \quad \text{pour tout } s' \in S,$$

d'où $m_1 \leq M_2$ et le lemme est démontré.

7. Lemme. — $m_2 \leq M_1$.

Montrons d'abord que

(20) *Si* $x \leq s_2$ *et* $s_2, s'' \in S$, *alors* $h(s'') \wedge -d(s'' \wedge -x) \leq h(s_2)$.

La condition $x \leq s_2$ est équivalente à $-s_2 \leq -x$, soit à : $-s_2 = -s_2 \wedge -x$; donc pour tout $s'' \in S$ nous aurons

$$\begin{aligned} h(s'') \wedge -h(s_2) = h(s'' \wedge -s_2) &\leq d(s'' \wedge -s_2) \\ &= d(s'' \wedge -s_2 \wedge -x) \leq d(s'' \wedge -x) \wedge d(-s_2) \leq d(s'' \wedge -x), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$h(s'') \wedge -d(s'' \wedge -x) \leq h(s_2),$$

C. Q. F. D.

De (20) on déduit $m_2 \leq h(s_2)$ pour tout $s_2 \in S$ tel que $x \leq s_2$, d'où $m_2 \leq M_1$ et le lemme est démontré.

Des lemmes 4 à 7 on déduit (K') et alors il existe un élément $H(x)$ vérifiant (K).

Pour ce choix de $H(x)$ la formule (7) définit un homomorphisme H de B dans C qui prolonge h et que vérifie la condition $H(b) \leq d(b)$ pour tout $b \in B$.

La démonstration s'achève par induction transfinie.

Soit $\mathcal{O}$ la famille de tous les couples (B, H) formés par une sous-algèbre B de A et un homomorphisme H de B dans C, vérifiant les conditions suivantes :

(C 1) $$S \leq B,$$

(C 2) H est une extension de h, c'est-à-dire

$$H(s) = h(s) \quad \text{pour tout} \quad s \in S.$$

(C 3) $$H(b) \leq d(b) \quad \text{pour tout} \quad b \in B.$$

Cette famille $\mathcal{O}$ n'est pas vide car $(S, h) \in \mathcal{O}$.

Étant donnés deux couples de $\mathcal{O}$: (B, H) et (B', H') nous écrirons $(B, H) \preceq (B', H')$ pour indiquer que :

(o 1) $$B \subseteq B'$$

(o 2) L'homomorphisme H' est une extension de H, c'est-à-dire

$$H'(b) = H(b) \quad \text{pour tout} \quad b \in B.$$

On voit de suite que cette relation binaire $\preceq$ définie sur $\mathcal{O}$ est réflexive, transitive et anti-symétrique, donc $\preceq$ est une *relation d'ordre*.

L'ensemble ordonné $\mathcal{O}$ a la propriété suivante :

Propriété P. — *Si* $(B, H) \in \mathcal{O}$ *et* $B \neq A$ *alors il existe un couple* $(B', H') \in \mathcal{O}$ *tel que* (A) $(B, H) \preceq (B', H')$; (B) $B \neq B'$.

En effet, soit x un élément de A tel que $x \notin B$, et soit B' la sous-algèbre de A engendrée par l'ensemble $\{x\} \cup B$, donc

(o 1′) $$B \subseteq B'.$$

En appliquant le même raisonnement que nous avons indiqué précédemment on démontre qu'il existe un homomorphisme H' de B' dans C tel que :

(o 2′) l'homomorphisme H' est une extension de H;

(C 3′) $$H'(b') \leq d(b') \quad \text{pour tout} \quad b' \in B'.$$

De (C 1), (C 2), (o 1′), (o 2′), (C 3′) on déduit que $(B', H') \in \mathcal{O}$, et en outre les conditions (A) et (B) sont vérifiées.

Montrons maintenant que l'ensemble ordonné $\mathcal{O}$ est *inductif supérieurement*. Soit $\{(B_i, H_i)\}_{i \in I}$ une chaîne de $\mathcal{O}$, nous avons à montrer qu'il existe un couple $(B, H) \in \mathcal{O}$ tel que :

(Z) $$(B_i, H_i) \preceq (B, H) \quad \text{pour tout} \quad i \in I.$$

La famille $\{B_i\}_{i \in I}$ étant une chaîne de sous-algèbres de A, la réunion des ensembles B_i :

$$B = \bigcup_{i \in I} B_i$$

est une sous-algèbre de A, telle que

(C 1) $$S \subseteq B.$$

Nous allons définir maintenant un homomorphisme de B dans C. Pour cela, soit $b \in B$, alors il existe tout au moins un indice $i \in I$ tel que $b \in B_i$.

Posons

(21) $$H(b) = H_i(b).$$

Nous avons à montrer que H est une application de B dans C. Pour cela il suffit de montrer que la définition de $H(b)$ donnée par la formule (21) ne dépend pas du choix de l'indice $i \in I$ vérifiant la condition $b \in B_i$.

Soit $j \in I$ un indice tel que $b \in A_j$. Par hypothèse nous avons :

$$\text{Soit } (B_i, H_i) \preceq (B_j, H_j) \qquad \text{soit } (B_j, H_j) \preceq (B_i, H_i).$$

Supposons par exemple que $(B_i, H_i) \preceq (B_j, H_j)$. Comme $b \in B_i$ et H_j est une extension de H_i, alors $H_i(b) = H_j(b)$ et il est clair que la formule (21) définit une application de B dans C. On montre de suite que H est un homomorphisme de B dans C et en outre les conditions (C 1), (C 2), (C 3) sont vérifiées, donc $(B, H) \in \mathcal{O}$.

D'après les définitions de B et H, les conditions

(01_i) $$B_i \subseteq B,$$

(02_i) $$H \textit{ est une extension de } H_i$$

sont vérifiées pour tout $i \in I$. Cela montre que (Z) est vérifiée et $\mathcal{O}$ est bien inductif supérieurement.

Par le théorème de Zorn, étant donné (S, h) il existe un élément maximal $(B, H) \in \mathcal{O}$ tel que $(S, h) \preceq (B, H)$, et d'après la propriété P on doit avoir $B = A$.

L'homomorphisme H défini sur $B = A$ vérifie les conditions (C 1), (C 2), (C 3) et le théorème est démontré.

8. Corollaire. — *Si d est un demi-homomorphisme de l'algèbre de Boole A dans l'algèbre de Boole complète C et si $a_0 \neq 0$, $a_0 \in A$, alors il existe un homomorphisme de A dans C tel que : 1° $H(a_0) = d(a_0)$ 2° $H(a) \leqq d(a)$ pour tout $a \in A$.*

Soit S la sous-algèbre de A engendrée par l'élément a_0; il est clair que $S = \{0\} \cup \{a_0\} \cup \{-a_0\} \cup \{1\}$.

Si $a_0 = 1$, l'ensemble S contiendra seulement les éléments 0 et 1.

Posons $h(a_0) = d(a_0)$, $h(-a_0) = -d(a_0)$, $h(1) = 1$, $h(0) = 0$. On voit de suite que h est un homomorphisme de S dans C.

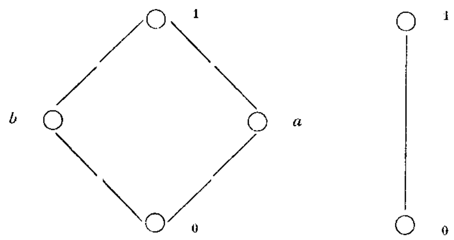
En outre $h(s) \leqq d(s)$ pour tout $s \in S$ [pour vérifier cette inégalité pour $s = -a_0$ il suffit de tenir compte de (5)].

En utilisant le théorème 2, on obtient l'homomorphisme H indiqué dans l'énoncé du corollaire.

La restriction $a_0 \neq 0$ est nécessaire car autrement on devrait avoir $h(0) = d(0) = 0$ tandis qu'en général $d(0) \neq 0$.

Remarques. — 1° Si l'on définit un demi-homomorphisme au moyen des conditions (1) et (3), l'énoncé du théorème 3 n'est pas valable.

Pour voir qu'il en est ainsi, considérons l'algèbre de Boole A dont le diagramme est indiqué sur la figure, et soit C l'algèbre de Boole contenant les deux éléments 0 et 1.



L'application de A dans C définie par les conditions $d(1) = 1$, $d(0) = d(a) = d(b) = 0$, vérifie les conditions (1) et (3).

Considérons la sous-algèbre $S = \{0, 1\}$ de A et l'homomorphisme de S dans C défini par $h(0) = 0$, $h(1) = 1$.

Il est clair que $h(s) \leqq d(s)$ pour tout $s \in S$. Il n'existe aucun homomorphisme H de A dans C qui soit un prolongement de h vérifiant la condition $H(x) \leqq d(x)$ pour tout $x \in A$, car on devrait avoir $H(0) = H(a) = H(b) = 0$ et comme $H(1) = h(1) = 1$, cette transformation H ainsi définie n'est pas un homomorphisme de A dans C.

2° Le théorème dual de (3) est valable.

3° Le théorème 1 est un cas particulier du théorème 3; pour voir qu'il en est ainsi il suffit de supposer que $d(a) = 1$ pour tout $a \in A$.

4° Le théorème 3 est encore valable si nous supposons que le demi-homomorphisme vérifie la condition $d(0) = 0$.

5° R. Sikorski [3] a montré que le théorème de M. Stone [4], d'après lequel « *chaque idéal propre de A est contenu dans un idéal maximal* » est un cas particulier du théorème 1. Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant le théorème 3. En effet soit I un idéal propre de A. Considérons l'application d de A dans l'algèbre de Boole $C = \{0, 1\}$ définie de la manière suivante :

$$d(a) = 1 \quad \text{si} \quad a \notin I,$$
$$d(a) = 0 \quad \text{si} \quad a \in I.$$

Il est évident que d est un demi-homomorphisme de A sur C.

Réciproquement, si d est un demi-homomorphisme de A sur C, alors l'ensemble I des éléments $a \in A$ tels que $d(a) = 0$ est un idéal propre de A.

Soit maintenant h l'application de la sous-algèbre $S = \{0, 1\}$ de A dans C définie par $h(0) = 0$, $h(1) = 1$; il est clair que h est un homomorphisme de S dans C tel que $h(s) \leqq d(s)$ pour tout $s \in S$. Il existe donc un homomorphisme H de A dans C tel que $H(a) \leqq d(a)$ pour tout $a \in A$, d'où l'on déduit que $H(i) = 0$ pour tout $i \in I$.

Le noyau $M = H^{-1}(0)$ de cet homomorphisme H est un idéal maximal de A qui, d'après ce que nous venons de dire, contient l'idéal I.

6° Montrons que le théorème de M. STONE [4] d'après lequel « *chaque idéal propre I de A est l'intersection d'idéaux maximaux* » est une conséquence du corollaire 8.

Pour cela il suffit de démontrer que pour chaque élément a_0 de A tel que $a_0 \notin I$ il existe un idéal maximal qui contient I sans contenir a_0.

Soit d le demi-homomorphisme de A dans C défini par $d(a) = 0$ si $a \in I$, $d(a) = 1$ si $a \notin I$.

Comme $a_0 \neq 0$ par le corollaire 8 il existe un homomorphisme H de A dans C tel que : 1° $H(a_0) = d(a_0)$; 2° $H(a) \leqq d(a)$ pour tout $a \in A$.

D'après la condition 2° on voit que le noyau de H : $M = H^{-1}(0)$ est un idéal maximal de A qui contient l'idéal I et comme $d(a_0) = 1$ la condition 1° montre que $a_0 \notin M$ et la démonstration est terminée.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] HALMOS (Paul). — Algebraic Logic I. Monadic Boolean Algebras., *Compositio Mathematica*, t. 12, 1955, p. 217-249.

[2] JÓNSSON (B.) and TARSKI (Alfred). — Boolean algebras with operators, *Amer. J. of Math.* t. 73, 1951, p. 891-939.

[3] SIKORSKI (Roman). — A theorem on extensions of homomorphisms, *Ann. Soc. polonaise de Math.* t. 21, 1948, p. 332-335.

[4] STONE (Marshall). — The Theory of representation of Boolean Algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 40, 1936, p. 37-111.

António MONTEIRO,
Instituto de Matematica,
Universidad Nacional del Sur,
Bahia Blanca, Argentina.

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

N° 11

CONSTRUCTION DES ALGEBRES DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES DANS LES ALGEBRES DE BOOLE MONADIQUE-I

par

Antonio Monteiro

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

Este número es una separata del artículo "Construction des Algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les Algèbres de Boole Monadiques-I", por Antonio Monteiro, publicado en Mathematica Japonicae, Vol.12, N°1 (1967), pag. 1-23, en la cual estan corregidos los errores de impresión. El mismo contiene resultados de investigaciones realizadas en el Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur. Un preprint de este artículo fué preparado en el año 1964, pero por diversas razones no pudo publicarse.

Ce numero est un tirage-à-part de l'article "Construction des Algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les Algèbres de Boole Monadiques-I",par Antonio Monteiro, publié dans Mathematica Japonicae, Vol.12, N°1 (1967), pag. 1-23, dans lequel les erreurs d'impression on été corrigées. Il contient les resultats des recherches realizées dans l'Instituto de Matemática de l'Universidad Nacional del Sur. Un préprint de cet article devrait être publié dans cette collection dans l'année 1964, mais par plusieures raisons il n'a pas été possible de le faire paraître à cette époque.

CONSTRUCTION DES AIGEBRES DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES DANS LES ALGEBRES DE BOOLE MONADIQUES-I.

António MONTEIRO

(Received April 26, 1967)

§1. Introduction La notion d'algèbre de Boole monadique joue, d'après P. Halmos. un rôle central dans l'étude du calcul fonctionnel monadique. La notion d'algèbre de Lukasiewicz (trivalente) introduite par Gr. C. Moisil, joue un rôle analogue dans l'étude du calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz.

Nous nous proposons d'indiquer dans cette note une construction $\mathcal{L}$ qui permet d'obtenir à partir de chaque algèbre de Boole monadique A une algèbre de Lukasiewicz (trivalente) que nous représenterons par la notation $\mathcal{L}(A)$.

Pour démontrer que $\mathcal{L}(A)$ est une algèbre de Lukasiewicz nous utiliserons des résultats de la théorie des N-lattices de Helena Rasiowa.

Après que ce résultat fut obtenu, Luiz Monteiro et Lorenzo González Coppola ont démontré que $\mathcal{L}(A)$ est une algèbre de Lukasiewicz (trivalente), sans utiliser la théorie des N-lattices. Nous renvoyons donc le lecteur ne connaissant pas cette dernière notion au travail de ces auteurs [20], qui a un caractère techniquement plus simple.

Nous avons aussi démontré qu'étant donné une algèbre de Lukasiewicz (trivalente) L il existe une algèbre de Boole monadique A telle que $\mathcal{L}(A)=L$, ce qui montre l'importance de la construction $\mathcal{L}$. La démonstration de ce second résultat sera exposée ailleurs, pour ne pas alonger cette note.

§2. Les Algèbres De Lukasiewicz Trivalentes. La notion d'algèbre de Lukasiewicz (trivalente) introduite par Gr. Moisil ([11], [12], [13], [14], [15]), peut être définie ([17], [19]) de la manière suivante:

2. 1. Définition: Un système $(A, 1, \nabla, -, \cap, \cup)$ formé par: 1°) un ensemble, non vide, A, 2°) un élément $1\in A$, 3°) deux opérations monaires $-$, ∇, et deux opérations binaires $\cup$, $\cap$ définies sur A, sera dit *une algèbre de Lukasiewicz trivalente* si les axiomes suivants sont vérifiés:

L 1) $\qquad x\cap(x\cup y)=x$

L 2) $x\cap(y\cup z)=(z\cap x)\cup(y\cup x)$

L 3) $--x=x$

L 4) $-(x\cap y)=-x\cup -y$

L 5) $-x\cup\nabla x=1$

L 6) $x\cap -x=-x\cap\nabla x$

L 7) $\nabla(x\cap y)=\nabla x\cap\nabla y$

Pour abréger nous dirons aussi que A est *une algèbre de Lukasiewicz.*

Pour identifier cette définition avec celles qui ont été indiquées par Gr. Moisil on doit poser $\nabla x=\mu x$ et $-x=Nx$. ∇ est donc le symbole que désigne *l'opération de possibilité. L'opération de nécessité* est définie par la formule $\Delta p=-\nabla -p$.

Les algèbres de Lukasiewicz jouent dans l'étude du calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz ([6], [7], [8], [9]), un rôle important et analogue à celui des algèbres de Boole dans l'étude du calcul propositionnel classique.

Parmi les propriétés des algèbres de Lukasiewicz indiquons les suivantes:

L 8) Le système $(A, \cup, \cap)$ est un réticulé distributif.

L 9) 1 est le dernier élément de A, c'est-à-dire $x\cap 1=x$.

L10) $-(x\cup y)=-x\cap -y$

L11) $x\cap -x=(x\cap -x)\cap(y\cup -y)$(1)

L12) $\nabla\nabla x=\nabla x$

L13) $x\cup\nabla x=\nabla x$

L14) $\nabla(x\cup y)=\nabla x\cup\nabla y$

L15) $\nabla-\nabla x=-\nabla x$

L16) *Principe de détermination de Moisil*: Si $\nabla a=\nabla b$ et $\Delta a=\Delta b$ alors $a=b$ ([11], [12]).

Rappelons que le calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz a été défini par cet auteur ([6], [7]), au moyen d'une matrice caractéristique M formée par trois éléments $M=\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sur laquelle sont définies: une opération unaire — (la négation) et une opération binaire $\rangle\!\!\rightarrow$ (l'implication contraposable) définies par les tables suivantes:

$\rangle\!\!\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

x	$-x$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

(1) Pour la démonstration de cette règle vcir [17].

Les opérations de disjonction ($\cup$) et *conjonction* ($\cap$) sont définies sur M par les formules:

(1) $$a \cup b = (a) \!\rightarrow b)) \!\rightarrow b$$

(2) $$a \cap b = -(-a \cup -b)$$

et ont pour tables:

$\cap$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$\cup$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

Les connectifs de possibilité et *nécessité* sont définis par les formules:

(3) $$\nabla x = -x) \!\rightarrow (-x) \!\rightarrow 0) = -x) \!\rightarrow x$$

(4) $$\Delta x = -\nabla - x$$

et ils ont pour tables:

x	∇x	Δx
0	0	0
$\frac{1}{2}$	1	0
1	1	1

On voit de suite que le système $(M, 1, \nabla, -, \cup, \cap)$ est une algèbre de Lukasiewicz. D'autre part la connaissance des opérations $\cap$, $\cup$, $-$, ∇[1] sur l'ensemble M permet de déterminer l'opération d'implication contraposable $) \!\rightarrow$; car si nous posons: $a \rightarrow b = \nabla - a \cup b$, alors:

$$a) \!\rightarrow b = (a \rightarrow b) \cap (-b \rightarrow -a)$$

L'avantage des opérations $\cup \cap -$, ∇ c'est qu'elles donnent origine à un calcul souple et facile, tandıs que les règles de calcul avec les opérations $) \!\rightarrow$ et $-$ ne sont pas comodes. D'autre part dans la définition d'algèbre de Lukasiewicz introduite par Moisil, l'opération d'implication n'est pas fixée—il y a lieu pour plusieurs choix comme l'a montré cet auteur dans ses travaux.

Dans le développement de la théorie des algèbres de Lukasiewicz nous avons fait jouer un rôle central[2] à *l'opération d'implication faible* $\rightarrow$ *définie* par la formule

[1] En réalité d'après la formule (2) l'opération $\cap$ peut être supprimée de cette liste.

[2] Ces études ne sont pas publiées mais elles ont été exposées dans un cours réalisé au ler. semestre de 1963 à l'Universidad Nacional del Sur.

$$a \to b = \nabla - a \cup b$$

et nous avons remarqué certaines analogies, au point de vue technique, entre le développement de cette théorie et celle des algèbres de Boole monadiques. Ce fut cette circonstance qui nous a conduit à penser dans la possibilité de construire les algèbres de Lukasiewicz à partir des algèbres de Boole monadiques.

§3. Les Algèbres De Nelson. Nous aurons à utiliser certains résultats relatifs à la théorie des N-lattices, que nous appelons, dans cette note, des algèbres de Nelson. Cette importante notion a été introduite par Helena Rasiowa ([22], [23]), dans l'étude de la logique constructive avec négation forte, considérée par David Nelson [21] et A. A. Markov [10].

La définition suivante, où ne figurent que des égalités, est équivalente [3][1] à celle qui a été indiquée par Helena Rasiowa ([22], [23]).

3. 1. Définition: Un système $(A, 1, -, \cap, \cup, \to)$ formé par: 1°) un ensemble non vide A, 2°) un élément $1 \in A$, 3°) une opération monaire — et trois opérations binaires $\cap$, $\cup$, $\to$ définies sur A, sera dit *un* N-*lattice* ou *une Algèbre de Nelson* si les conditions suivantes sont vérifiées:

N 1) $x \cup 1 = 1$

N 2) $x \cap (x \cup y) = x$

N 3) $x \cap (y \cup z) = (z \cap x) \cup (y \cap x)$

N 4) $- - x = x$

N 5) $-(x \cap y) = -x \cup -y$

N 6) $x \cap -x = (x \cap -x) \cap (y \cup -y)$

N 7) $x \to x = 1$

N 8) $x \cap (x \to y) = x \cap (-x \cup y)$

N 9) $(x \to y) \cap (-x \cup y) = -x \cup y$

N10) $x \to (y \cap z) = (x \to y) \cap (x \to z)$

N11) $x \to (y \to z) = (x \cap y) \to z$

Nous dirons aussi pour abréger que A est *une algèbre de Nelson.*

Nous supporerons connues les règles de calcul valables dans ces algèbres, en renvoyant le lecteur aux travaux de Helena Rasiowa. Rappelons que $0 = -1$ est le premier élément du réticulé distributif A. Outre la négation forte $(-)$ on peut définir les négations:

---

[1] Une démonstration de cette équivalence ne faisant pas intervent l'induction transfinie est indiquée dans [2].

$$\ulcorner x = x \to 0$$
$$\urcorner x = -\ulcorner -x$$

Dans les travaux de Rasiowa, et d'autres auteurs, l'élément $\ulcorner x$ est désigné par la notation $\urcorner x$.[1]

Nous aurons à utiliser aussi la règle de calcul suivante [18] :

N12) $$(x \cup y) \to z = (x \to z) \cap (y \to z)$$

Pour démontrer cette égalité, voyons successivement que:

1°) Si $x \subseteq y$ alors $y \to z \subseteq x \to z$

En effet par hypothèse $x = x \cap y$, donc

(1) $$x \to (y \to z) = (x \cap y) \to z = x \to z$$

et comme $b \subseteq a \to b$ nous pouvons écrire

(2) $$y \to z \subseteq x \to (y \to z) = x \to z,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2°) $(x \cup y) \to z \subseteq (x \to z) \cap (y \to z)$.

De $x \subseteq x \cup y$ et $y \subseteq x \cup y$ on déduit par 1°) que

$$(x \cup y) \to z \subseteq x \to z, \quad (x \cup y) \to z \subseteq y \to z$$

d'oú l'on déduit 2°).

3°) Si $b \subseteq c$ alors $a \to b \subseteq a \to c$

Par hypothèse $b = b \cap c$, donc

$$a \to b = a \to (b \cap c) = (a \to b) \cap (a \to c) \subseteq a \to c.$$

4°) Si $a \cap z \subseteq -a \cup b$ alors $z \subseteq a \to b$

Soit

(1) $$a \cap z \subseteq -a \cup b, \quad \text{alors}$$

(2) $$a \cap z \subseteq a \cap (-a \cup b) = a \cap (a \to b)$$

Donc par 3°) :

(3) $$a \to (a \cap z) \subseteq a \to (a \cap (a \to b))$$

Mais

(4) $$a \to (a \cap z) = (a \to a) \cap (a \to z) = a \to z$$

(5) $$a \to (a \cap (a \to b)) = a \to (a \to b) = (a \cap a) \to b = a \to b$$

De (3), (4) et (5) on déduit $a \to z \subseteq a \to b$ et comme $z \subseteq a \to z$, nous aurons $z \subseteq a \to b$.

5°) $x \cap (x \to z) \cap (y \to z) \subseteq -y \cup z$

En effet

$$\alpha = x \cap (x \to z) \cap (y \to z) = x \cap (-x \cup z) \cap (y \to z)$$

---

[1] La raison de ce changement est justifiée dans [18].

$$=(x\cap -x\cap(y\to z))\cup(x\cap z\cap(y\to z))$$
$$=x\cap -x\cap(y\to z))\cup(x\cap z)$$

En remarquant que $x\cap -x\subseteq y\cup -y$ nous pouvons écrire

$$\alpha\subseteq((y\cup -y)\cap(y\to z))\cup(x\cap z)$$
$$=(y\cap(y\to z))\cup(-y\cap(y\to z))\cup(x\cap z)$$

et comme $-y\subseteq y\to z$, alors, d'après N8),

$$\alpha\subseteq(y\cap(-y\cup z))\cup -y\cup(x\cap z)$$
$$=(y\cap z)\cup -y\cup(x\cap z)$$
$$=(x\cup y)\cap z\cup -y\subseteq -y\cup z$$

6°) $x\cap(x\to z)\cap(y\to z)\subseteq -x\cup z$

En effet:

$$x\cap(x\to z)\cap(y\to z)=x\cap(-x\cup z)\cap(y\to z)\subseteq -x\cup z.$$

7°) $x\cap(x\to z)\cap(y\to z)\subseteq -(x\cup y)\cup z$

En effet par 5°) et 6°) nous pouvons écrire

$$x\cap(x\to z)\cap(y\to z)\subseteq(-x\cup z)\cap(-y\cup z)$$
$$=(-x\cap -y)\cup z=-(x\cup y)\cup z$$

En changeant x par y et y par x dans 7°), nous aurons:

8°) $y\cap(x\to z)\cap(y\to z)\subseteq -(x\cup y)\cup z$

De 7°) et 8°) on déduit

9°) $(x\cup y)\cap(x\to z)\cap(y\to z)\subseteq -(x\cup y)\cup z$

De 4°) et 9°) il résulte

10°) $(x\to z)\cap(y\to z)\subseteq(x\cup y)\to z$

N12) est une conséquence de 2°) et 10°).

Montrons maintenant que

3.2. Lemme: *Si dans une algèbre de Lukasiewicz* $(A, 1, -, \nabla, \cap, \cup)$ *nous posons* $\Gamma a=\nabla -a$, $a\to b=\Gamma a\cup b$, *alors le système* $(A, 1, -, \cap, \cup, \to)$ *est une algèbre de Nelson telle que*:

N 0) $\qquad a\cup\Gamma a=1$ *et en outre*:

$\nabla a=-a\to 0$, [18].

Démonstration: Les règles N1)–N6) sont évidemment vérifiées dans les algèbres de Lukasiewicz. Démontrons maintenant les règles N7–N11) et N0).

N 7) D'après L5) et L3)

$$1=x\cup\nabla -x=x\to x$$

N 8) $x \cap (x \to y) = x \cap (\nabla - x \cup y)$

$$= (x \cap \nabla - x) \cup (x \cap y) = (-x \cap x) \cup (x \cap y)$$
$$= x \cap (-x \cup y)$$

N 9) $(x \to y) \cap y = (\nabla - x \cup y) \cap y = y$

N10) $x \to (y \cap z) = \nabla - x \cup (y \cap z)$

$$= (\nabla - x \cup y) \cap (\nabla - x \cup z) = (x \to y) \cap (x \to z)$$

N11) $(x \cap y) \to z = \nabla - (x \cap y) \cup z = \nabla(-x \cup -y) \cup z$

$$= \nabla - x \cup \nabla - y \cup z = x \to (y \to z)$$

N 0) $a \cup \Gamma a = a \cup \nabla - a = 1$

et finalement $-a \to 0 = \Gamma - a = \nabla a$.

3. 3. Lemme: *Si* $(A, 1, -, \cap, \cup, \to)$ *est une algèbre de Nelson telle que*: *N0)* $a \cup \Gamma a = 1$, *et si nous posons* $\nabla a = -a \to 0 = \Gamma - a$, *alors le système* $(A, 1, -, \nabla, \cap, \cup)$ *est une algèbre de Lukasiewicz et* $a \to b = \Gamma a \cup b$, [18].

Démonstration: Les formules L1)–L4) coincident avec N2)–N5). Montrons que

L5) $-x \cup \nabla x = 1$, en effet, d'après N0):

$$1 = -x \cup \Gamma - x = -x \cup \nabla x$$

L6) D'après N8):

$$-x \cap \nabla x = -x \cap (-x \to 0) = -x \cap (x \cup 0) = -x \cap x.$$

L7) En utilisant la formule N12)

$$\nabla(x \cap y) = -(x \cap y) \to 0 = (-x \cup -y) \to 0$$
$$= (-x \to 0) \cap (-y \to 0) = \nabla x \cap \nabla y.$$

Il nous reste donc à démontrer que

$$x \to y = \Gamma x \cup y$$

En utilisant les formules déjà connues nous aurons:

$$x \to y = (x \to y) \cap 1 = (x \to y) \cap (x \cup \Gamma x)$$
$$= (x \cap (x \to y)) \cup ((x \to y) \cap \Gamma x)$$
$$= (x \cap (-x \cup y)) \cup ((x \to y) \cap (x \to 0))$$
$$= (x \cap -x) \cup (x \cap y) \cup (x \to (y \cap 0))$$
$$= (x \cap \nabla - x) \cup (x \cap y) \cup (x \to 0)$$
$$= (x \cap \Gamma x) \cup (x \cap y) \cup \Gamma x$$
$$= (x \cap y) \cup \Gamma x = (x \cup \Gamma x) \cap (\Gamma x \cup y)$$
$$= 1 \cap (\Gamma x \cup y) = \Gamma x \cup y$$

et le théorème est démontré.

Nous avons démontré ce dernier point par une méthode distincte; la démonstration directe et simple que nous venons d'indiquer est due à Luiz

Monteiro.

En résumé nous pouvons affirmer que

3. 4. Théorème: *Les algèbres de Lukasiewicz peuvent être identifiées avec les algèbres de Nelson qui vérifient l'égalité* $x \cup \ulcorner x = 1$.

§4. Pré-Algèbres De Nelson. Rappelons maintenant la définition du calcul propositionnel constructif avec négation forte, qui a donné origine à la notion de N-lattice.

L'étude de ce calcul a été développée par H. H. Vorobiev ([24] [25]), Helena Rasiowa ([22], [23]) et Bialynicki-Birula–H. Rasiowa [1].

L'alphabet de ce calcul est formé par:

A I) Un ensemble non vide, $\{g_i\}_{i \in I}$ de variables propositionnelles.

A II) Les symboles auxiliaires: "(", ")".

AIII) Les connectifs: $\ulcorner$ (négation), $-$ (négation forte), $\cap$ (conjonction), $\cup$ (disjonction), $\rightarrow$ (implication).

L'ensemble des formules (bien formées) de ce calcul est le plus petit ensemble $\mathcal{L}$ vérifiant les conditions suivantes:

F I)	$g_i \in \mathcal{L}$
F II)	Si $x \in \mathcal{L}$ alors $-x \in \mathcal{L}$ et $\ulcorner x \in \mathcal{L}$
FIII)	Si $x, y \in \mathcal{L}$ alors $(x \cap y) \in \mathcal{L}$, $(x \cup y) \in \mathcal{L}$, $(x \rightarrow y) \in \mathcal{L}$

Pour abréger nous introduirons la notation suivante:

$$a \leftrightarrow b = ((a \rightarrow b) \cap (b \rightarrow a))$$

L'ensemble des axiomes est l'ensemble de toutes les formules de la forme (où x, y, z sont des formules)

A 1)	$(x \rightarrow (y \rightarrow x))$
A 2)	$((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)))$
A 3)	$((x \cap y) \rightarrow x)$
A 4)	$((x \cap y) \rightarrow y)$
A 5)	$((z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow (x \cap y))))$
A 6)	$(x \rightarrow (x \cup y))$
A 7)	$(y \rightarrow (x \cup y))$
A 8)	$((x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \cup y) \rightarrow z)))$
A 9)	$((x \rightarrow \ulcorner y) \rightarrow (y \rightarrow \ulcorner x))$
A10)	$(\ulcorner x \rightarrow (x \rightarrow y))$
A11)	$(-x \rightarrow (x \rightarrow y))$

A12) $-(x\rightarrow y)\leftrightarrow(x\cap -y)$

A13) $-(x\cap y)\leftrightarrow(-x\cup -y)$

A14) $-(x\cup y)\leftrightarrow(-x\cap -y)$

A15) $-\Gamma x\leftrightarrow x$

A16) $--x\leftrightarrow x$

Une partie $\mathscr{D}$ de $\mathscr{L}$ sera dite un *système déductif*, si

DI) $\mathscr{D}$ contient tous les axiomes

D2) Si $x\in\mathscr{D}$ et $(x\rightarrow y)\in\mathscr{D}$ alors $y\in\mathscr{D}$ (Règle de *modus ponens*).

L'ensemble des thèses de $\mathscr{L}$ est l'intersection $\mathscr{T}$ de tous les systèmes déductifs de $\mathscr{L}$, c'est-à-dire le plus petit ensemble $\mathscr{T}$ qui contient tous les axiomes et qui est fermé par rapport à la règle de *modus ponens*.

C'est dans l'étude de ce calcul propositionnel que Helena Rasiowa a été conduite à introduire l'importante notion de N-lattice.

En effectuant sur l'ensemble $\mathscr{L}$ une certaine construction, indiquée par H. Rasiowa, et que nous rappelons plus loin, on obtient une algèbre de Nelson qui sera indiquée dans cette note par L.

Nous avons besoin de généraliser un peu ce résultat de Rasiowa et pour cela introduisons tout d'abord la définition suivante:

4. 1. Définition: Un système $(A, -, \Gamma, \rightarrow, \cap, \cup, D)$ formé par: 1°) un ensemble non vide A, 2°) deux opérations monaires $-$, Γ et trois opérations binaires $\rightarrow$, $\cap$, $\cup$, définies sur A, 3°) une partie D de A, sera dit *une pré-algèbre de Nelson* si les conditions suivantes sont vérifiées:

I) Tous les éléments de A de la forme A1)–A16) appartiennent à D, quels que soient les éléments x, y et z de A.[1]

II) Si $x\in D$ et $(x\rightarrow y)\in D$ alors $y\in D$.

Pour abréger nous dirons aussi que (A, D) est *une pré-algèbre de Nelson*

On voit de suite que $(\mathscr{L}, \mathscr{T})$ est une pré-algèbre de Nelson. Alors on peut démontrer, en suivant dans ses lignes générales le raisonnement de H. Rasiowa [23] que

4. 2. Théorème: *Etant donnée une pré-algèbre de Nelson* (A, D) *posons* $x\equiv y$ *pour indiquer que*

$$(x\leftrightarrow y)\cap(-y\leftrightarrow -x)\in D$$

Alors nous pouvons affirmer que:

[1] Dans les formules A12)–A16) on doit supposer que $x\leftrightarrow y=((x\rightarrow y)\cap(y\rightarrow x))$.

1°) $\equiv$ *est une relation d'équivalence définie sur* A, *compatible avec les opérations* $-$, Γ, $\rightarrow$, $\cap$, $\cup$.

2°) D *est une classe d'équivalence que nous représenterons par la notation* 1.

Si $|x|$ *est la classe d'équivalence qui contient l'élément* $x \in A$, *et si nous algébrisons la famille* $A/\equiv$ *des classes d'équivalence par les formules*:

$$-|x| = |-x|$$
$$\Gamma|x| = |\Gamma x|$$
$$|x| \rightarrow |y| = |(x \rightarrow y)|$$
$$|x| \cap |y| = |(x \cap y)|$$
$$|x| \cup |y| = |(x \cup y)|$$

alors le système

$$(A/\equiv,\ 1,\ -,\ \Gamma,\ \rightarrow,\ \cap,\ \cup)$$

est une algèbre de Nelson, qu'on peut appeler l'algèbre quotient de A *par* D *(en notation* A/D).

En particulier, d'après Rasiowa [23], l'algèbre quotient $L = \mathcal{L}/\mathcal{T}$ est une algèbre de Nelson et on peut montrer, plus précisement, par les méthodes habituelles, que L a pour générateurs libres les éléments $|g_i|$ $(i \in I)$.

4. 3. Définition: Si une pré-algèbre de Nelson (A, D) est telle que:

$$x \cup \Gamma x \in D \quad \text{pour tout} \quad x \in A,$$

nous dirons que (A, D) est *une pré-algèbre de Lukasiewicz*.

Le résultat suivant justifie cette terminologie:

4. 4. Théorème: *Si* (A, D) *est une pré-algèbre de Luka-siewicz alors* A/D *est une algèbre de Lukasiewicz*.

Ce résultat est une conséquence immédiate du Lemme 3. 3

C'est ce dernier théorème qui nous a imposé le chemin que nous avons suivi pour obtenir la construction $\mathcal{L}$.

§5. Les Algèbres De Boole Monadiques. Soit $(A, 1, -, \wedge, \vee)$ une algèbre de Boole (où 1 est le dernier élément de A, $-$l'opération de négation, $\wedge$ et $\vee$ les opérations de conjonction et disjonction). Pour abréger nous dirons aussi que A est une algébre de Boole. Le premier élément de A est donné par la formule $0 = -1$.

5. 1. Définition: (P. Halmos [5]) Un système $(A, \exists)$ formé par une algèbre de Boole A et une application $\exists$ de A dans A sera dit *une algèbre* *de Boole monadique* si les conditions suivantes sont vérifiées:

(1) $\exists 0=0$ (2) $x=x \wedge \exists x$ (3) $\exists(x \wedge \exists y)=\exists x \wedge \exists y$

A propos de cette notion voir aussi Chandler Davis [4].

Nous dirons avec Halmos [5] que $\exists$ est un *quantificateur existentiel* défini sur A. Le *quantificateur universel* $\forall$, défini par l'égalité $\forall x=-\exists-x$, est une application de A dans A, ayant des propriétés duales de celles de $\exists$.

Nous supposerons connues les propriétés de $\exists$ et $\forall$ parmi lesquelles nous détachons les suivantes:

$$\exists(x \vee y)=\exists x \vee \exists y$$
$$\exists \exists x=\exists x$$
$$\forall \exists x=\exists x$$
$$-x \vee \exists x=\exists-x \vee \exists x=1$$

Ces égalitès et ses duales seront constamment utilisées dans cette note.

L'opération d'implication faible ($\rightarrow$) définie par la formule

$$a \rightarrow b=\exists-a \vee b$$

joue un rôle important. Nous poserons aussi $\Gamma a=a \rightarrow 0==\exists-a$, et nous dirons que $\Gamma\ a$ est la *négation faible* de a.

Un homomorphisme de l'algèbre $(A, \exists)$ sur l'algèbre $(A', \exists)$ est une application de A sur A' telle que

$$h(x \vee y)=h(x) \vee h(y)$$
$$h(x \wedge y)=h(x) \wedge h(y)$$
$$h(-x)=-h(x)$$
$$h(\exists x)=\exists h(x)$$

Le noyau de h est l'ensemble H de tous les $x \in A$ tels que $h(x)=1 \in A'$

5. 2. Définition: Un filtre F de A sera dit *monadique* si la condition $f \in F$ implique $\forall f \in F$.

Il est bien connu que (P. Halmos [5]):

5. 3. Théorème: *Le noyau H d'un homomorphisme h de A dans A' est un filtre monadique.*

La connaissance des filtres monadiques de A permet de déterminer les images homomorphes de A.

Nous aurons à utiliser le résultat suivant

5. 4. Théorème: *Pour qu'une partie H de A soit un filtre monadique il faut et il suffit que:*

H1) $1 \in H$

H2) Si a, $a \to b \in H$ alors $b \in H$ (modus ponens faible).

Démonstration: Soit H un filtre monadique. H1) est évidemment vérifiée. Pour démontrer H2) supposons que a, $a \to b \in H$. De $a \in H$ on déduit $\forall a \in H$ donc

$$\begin{aligned} \forall a \wedge (a \to b) &= -\exists - a \wedge (\exists - a \vee b) \\ &= -\exists - a \wedge b = \forall a \wedge b \in H \end{aligned}$$

et comme $\forall a \wedge b \leqslant b$, nous aurons aussi $b \in H$.

Supposons maintenant que H est une partie de A qui vérifie les conditions H1) et H2) et remarquons que

F0) H n'est pas vide, car $1 \in H$.

F1) Si $a \in H$ et $a \leqslant b$ alors $b \in H$.

En effet de $a \leqslant b$ on déduit

$$1 = -a \vee a \leqslant -a \vee b \leqslant \exists - a \vee b = a \to b$$

donc $a \to b = 1 \in H$ et alors de $a \in H$ on déduit par H2) que $b \in H$.

F2) Si a, $b \in H$ alors $a \wedge b \in H$.

Remarquons que

$$\begin{aligned} a \to (a \wedge b) &= \exists - a \vee (a \wedge b) = (\exists - a \vee a) \wedge (\exists - a \vee b) \\ &= 1 \wedge (\exists - a \vee b) = \exists - a \vee b \geqslant b \end{aligned}$$

De $b \in H$ et $b \leqslant a \to (a \wedge b)$ on déduit par F1) que $a \to (a \wedge b) \in H$ et comme $a \in H$ on en déduit par H2) que $a \wedge b \in H$.

Les conditions F0), F1) et F2) montrent que H est un filtre.

F3) Si $a \in H$ alors $\forall a \in H$.

En effet de $a \in H$ et $a \to \forall a = \exists - a \vee \forall a = \exists - a \vee - \exists - a = 1 \in H$ on déduit par H2) que $\forall a \in H$.

Considérons l'opération d'implication contraposable définie par l'égalité

$$\begin{aligned} a \supset\!\!\to b &= (a \to b) \wedge (-b \to -a) \\ &= (\exists - a \vee b) \wedge (\exists b \vee -a) \\ &= -a \vee b \vee (\exists - a \wedge \exists b) \end{aligned}$$

et montrons que:

5. 5. Théorème: *Pour qu'une partie H de A soit un filtre monadique il faut et il suffit que*: C1) $1 \in H$, C2) *Si* a, $a \supset\!\!\to b \in H$, *alors* $b \in H$ (*modus ponens contraposable*).

Démonstration: Il suffit de montrer que les conditions H1) et H2) sont équivalentes à C1) et C2).

Supposons que H1) et H2) soient vérifiées, alors d'après 5. 4) H est un filtre. Supposons que a, $a\supset\!\!\rightarrow b\in H$, comme $a\supset\!\!\rightarrow b=(a\rightarrow b)\wedge(-b\rightarrow -a)$ nous pouvons affirmer que a, $a\rightarrow b\in H$ donc d'après H2) $b\in H$ et C2) est démontrée.

Supposons maintenant que C1) et C2) soient vérifiées et montrons que H2) est valable. Pour cela supposons que a, $a\rightarrow b\in H$. Remarquons que

$$\begin{aligned} a\supset\!\!\rightarrow(a\supset\!\!\rightarrow b) &= -a\vee(a\supset\!\!\rightarrow b)\vee(\exists -a\wedge\exists(a\supset\!\!\rightarrow b)) \\ &= -a\vee -a\vee b\vee(\exists -a\wedge\exists b)\vee\exists -a\wedge(\exists -a\vee\exists b\vee(\exists -a\wedge\exists b)) \\ &= \exists -a\vee b = a\rightarrow b \end{aligned}$$

Alors des hypothèses: a, $a\supset\!\!\rightarrow(a\supset\!\!\rightarrow b)\in H$ on déduit par C2) que $a\supset\!\!\rightarrow b\in H$ et de a, $a\supset\!\!\rightarrow b\in H$ on déduit $b\in H$; ce qu'il fallait démontrer.

On peut appeler système déductif faible (contraposable) toute partie H de A qui vérifie H1) et H2) (CI) et C2)). Nous voyons ainsi que les notions suivantes sont équivalentes: 1°) noyau d'un homomorphisme, 2°) filtre monadique, 3°) système déductif faible, 4°) système déductif contraposable.

§6. La Construction $\mathcal{L}$. Nous nous proposons maintenant d'indiquer une construction $\mathcal{L}$ permetant d'obtenir à partir d'une algèbre de Boole monadique $(A, \exists)$ une algèbre de Lukasiewicz que nous représenterons par la notation $\mathcal{L}(A)$.

Pour cela nous allons définir sur l'ensemble A une structure de pré algèbre de Lukasiewicz,

$$\{A,\ D,\ -,\ \ulcorner,\ \rightarrow,\ \cup,\ \cap\}$$

Nous prendrons tout d'abord $D=\{1\}$. L'opérateur $-$ sera l'opération de négation définie sur A. Nous poserons en outre:

$$\begin{aligned} &a\rightarrow b=\exists -a\vee b \\ &\ulcorner a=a\rightarrow 0=\exists -a \end{aligned}$$

Pour définir les opérations $\cup$ et $\cap$ considérons l'implication contraposable

$$\begin{aligned} a\supset\!\!\rightarrow b &= (a\rightarrow b)\wedge(-b\rightarrow -a) \\ &= -a\vee b\vee(\exists -a\wedge\exists b) \end{aligned}$$

et posons par définition:

$$\begin{aligned} &a\cup b=(a\supset\!\!\rightarrow b)\supset\!\!\rightarrow b \\ &a\cap b=-(-a\cup -b) \end{aligned}$$

Calculons ces expressions que nous aurons à utiliser par la suite:

$$
\begin{aligned}
(a \supset\!\!\to b) \supset\!\!\to b &= (-a \vee b \vee (\exists -a \wedge \exists b)) \supset\!\!\to b \\
&= (a \wedge -b \wedge -(\exists -a \wedge \exists b)) \vee b \\
&\quad \vee (\exists (a \wedge -b \wedge -(\exists -a \wedge \exists b)) \wedge \exists b) \\
&= a \wedge -b \wedge (\forall a \vee -\exists b) \vee b \vee \exists (a \wedge -b \wedge \\
&\quad (\forall a \vee \forall -b)) \wedge \exists b \\
&= (a \wedge -b \wedge \forall a) \vee (a \wedge -b \wedge \forall -b) \vee b \vee \\
&\quad \exists ((a \wedge -b \wedge \forall a) \vee (a \wedge -b \wedge \forall -b)) \wedge \exists b \\
&= (\forall a \wedge -b) \vee (a \wedge \forall -b) \vee b \vee \exists ((\forall a \wedge -b) \vee \\
&\quad (a \wedge \forall -b)) \wedge \exists b = (\forall a \wedge -b) \vee b \vee (a \wedge \forall -b) \vee \\
&\quad (((\forall a \wedge \exists -b) \vee (\exists a \wedge \forall -b)) \wedge \exists b) \\
&= ((\forall a \vee b) \wedge (-b \vee b)) \vee (a \wedge \forall -b) \vee \\
&\quad (\forall a \wedge \exists -b \wedge \exists b) \vee (\exists a \wedge \forall -b \wedge \exists b) \\
&= \forall a \vee b \vee (a \wedge \forall -b) \vee (\exists a \wedge \forall -b \wedge \exists b) \\
&= \forall a \vee b \vee (a \wedge \forall -b) \vee (\exists a \wedge -\exists b \wedge \exists b) \\
&= \forall a \vee b \vee (a \wedge \forall -b)
\end{aligned}
$$

Maintenant nous pouvons écrire:

$$
\begin{aligned}
a \cap b &= -(-a \cup -b) = -(\forall -a \vee -b \vee (-a \wedge \forall b)) \\
&= = \exists a \wedge b \wedge (a \vee -\forall b) = \exists a \wedge b \wedge (a \vee \exists -b)
\end{aligned}
$$

Nous voyons ainsi que $a \cap b$ est le dual de $a \cup b$.

En utilisant la dernière égalité on voit de suite que:

6. 1. Lemme: *L'égalité* $a \cap b = 1$ *est équivalente à*: $a = 1$ *et* $b = 1$.

Démontrons maintenant le théorème suivant:

6. 2. Théorème: *Si* $(A, \exists)$ *est une algèbre de Boole monadique et si nous posons*:

$$
\begin{aligned}
&a \to b = \exists -a \vee b \\
&\ulcorner a = a \to 0 = \exists -a \\
&a \cup b = \forall a \vee b \vee (a \wedge \forall -b) \\
&a \cap b = \exists a \wedge b \wedge (a \vee \exists -b)
\end{aligned}
$$

alors le système $\{A, D = \{1\}, -, \ulcorner, \to, \cap, \cup\}$ *est une pré-algèbre de Lukasiewicz.*

Démonstration: Nous avons à démontrer que les formules A0)–A16) sont identiquement égales à 1 et que la règle de modus ponens est vérifiée.

A0) $a \cup \ulcorner a = \forall a \vee \ulcorner a \vee (a \wedge \forall - \ulcorner a) = -\exists -a \vee \exists -a \vee \cdots = 1$

A1) $a \to (b \to a) = \exists -a \vee \exists -b \vee a = 1$

A2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to a \to c))$

$=\exists-(\exists-a\vee(\exists-b\vee c))\vee\exists-(\exists-a\vee b)\vee\exists-a\vee c$
$=\exists(\forall a\wedge\forall b\wedge-c)\vee\exists(\forall a\wedge-b)\vee\exists-a\vee c$
$=(\forall a\wedge\forall b\wedge\exists-c)\vee(\forall a\wedge\exists-b)\vee\exists-a\vee c$
$=(((\forall a\wedge\forall b)\vee c)\wedge(\exists-c\vee c))$
$\vee((\forall a\vee\exists-a)\wedge(\exists-b\vee\exists-a))$
$=((\forall a\wedge\forall b)\vee c)\vee((-\exists-a\vee\exists-a)\wedge(\exists-b\vee\exists-a))$
$=((\forall a\wedge\forall b)\vee c)\vee\exists-b\vee\exists-a$
$=(\forall a\wedge\forall b)\vee-(\forall a\wedge\forall b)\vee c=1$

A3) $(a\cap b)\to a=(\exists a\wedge b\wedge(a\vee\exists-b))\to a$
$=\exists(-\exists a\vee-b\vee(-a\wedge\forall b))\vee a$
$=-\exists a\vee\exists-b\vee(\exists-a\wedge\forall b)\vee a$
$=-\exists a\vee-\forall b\vee(\exists-a\vee a)\wedge(\forall b\vee a)$
$=-\exists a\vee(-\forall b\vee\forall b)\vee a=1$

A4) $(a\cap b)\to b=(\exists b\wedge b\wedge(a\vee\exists-b))\to b$
$=\exists(-\exists b\vee-b\vee(-a\wedge\forall b))\vee b$
$=-\exists b\vee\exists-b\vee(\exists-a\wedge\forall b)\vee b$
$=-\exists b\vee(\exists-a\wedge\forall b)\vee(\exists-b\vee b)=1$

A5) $(c\to a)\to((c\to b)\to(c\to(a\cap b)))$
$=\exists-(\exists-c\vee a)\vee\exists-(\exists-c\vee b)$
$\vee\exists-c\vee(\exists a\wedge b\wedge(a\vee\exists-b))$
$=(\forall c\wedge\exists-a)\vee(\forall c\wedge\exists-b)$
$\vee\exists-c\vee(a\wedge b)\vee(\exists a\wedge b\wedge\exists-b)$
$=\forall c\wedge(\exists-a\vee\exists-b)\vee-\forall c\vee(a\wedge b)\vee(\exists a\wedge b\wedge\exists-b)$
$=(\forall c\vee-\forall c)\wedge(\exists-a\vee\exists-b\vee-\forall c)$
$\vee(a\wedge b)\vee(\exists a\wedge b\wedge\exists-b)$
$=\exists(-a\vee-b)\vee-\forall c\vee(a\wedge b)\vee(\exists a\wedge b\wedge\exists-b)$
$=(\exists-(a\wedge b)\vee(a\wedge b))\vee\cdots=1\vee\cdots=1$

A6) $a\to(a\cup b)=a\to(\forall a\vee b\vee(a\wedge\forall--b))$
$=\exists-a\vee\forall a\vee b\vee(a\wedge\forall-b)=-\forall a\vee\forall a\vee\cdots=1$

A7) $b\to(a\cup b)=\exists-b\vee\forall a\vee b\vee(a\wedge\forall-b)=\exists-b\vee b\vee\cdots=1$

A8) $(a\to c)\to((b\to c)\to((a\cup b)\to c))$
$=\exists-(\exists-a\vee c)\vee\exists-(\exists-b\vee c)\vee$
$((\forall a\vee b\vee(a\wedge\forall-b))\to c)$
$=(\forall a\wedge\exists-c)\vee(\forall b\wedge\exists-c)\vee$
$\exists(-\forall a\wedge-b\wedge(-a\vee\exists b))\vee c$
$=(\forall a\wedge\exists-c)\vee(\forall b\wedge E-c)\vee\exists((\exists-a\wedge-b\wedge-a)\wedge$

$$(-\forall a \wedge -b \wedge \exists b)) \vee c$$
$$= (\forall a \vee c) \wedge (\exists -c \vee c) \vee (\forall b \vee c) \wedge (\exists -c \vee c) \vee$$
$$\exists ((-a \wedge -b) \vee -\forall a \wedge -b \wedge \exists b)$$
$$= \forall a \vee c \vee \forall b \vee \exists (-a \wedge -b) \vee (-\forall a \wedge \exists -b \wedge \exists b)$$
$$= c \vee \forall b \vee \exists (-a \wedge -b) \vee ((\forall a \vee -\forall a) \wedge$$
$$(\forall a \vee (\exists -b \wedge \exists b)))$$
$$= c \vee \forall b \vee \exists (-a \wedge -b) \vee \forall a \vee (-\forall b \wedge \exists b)$$
$$= c \vee \exists (-a \wedge -b) \vee \forall a \vee ((\forall b \vee -\forall b) \wedge (\forall b \vee \exists b))$$
$$= c \vee \exists (-a \wedge -b) \vee \forall a \vee \exists b$$
$$= c \vee \forall a \vee \exists ((-a \wedge -b) \vee b)$$
$$= c \vee \forall a \vee \exists (-a \vee b) = c \vee \forall a \vee \exists -a \vee \exists b$$
$$= c \vee \forall a \vee -\forall a \vee \exists b = 1$$

A 9) $(a \to \ulcorner b) \to (b \to \ulcorner a) = \exists -(\exists -a \vee \exists -b) \vee \exists -b \vee \exists -a$
$$= (\forall a \wedge \forall b) \vee -\forall b \vee -\forall a$$
$$= (\forall a \vee -\forall b) \wedge (\forall b \vee -\forall b) \vee -\forall a = \forall a \vee -\forall b \vee -\forall a = 1$$

A10) $\ulcorner a \to (a \to b) = \exists - \exists -a \vee \exists -a \vee b = \forall a \vee -\forall a \vee b = 1$

A11) $-a \to (a \to b) = \exists a \vee \exists -a \vee b = 1$

A12) Démontrons successivement que

$$\alpha = -(a \to b) \to (a \cap -b)$$
$$= \exists (\exists -a \vee b) \vee \exists a \wedge -b \wedge (a \vee \exists b)$$
$$= \exists -a \vee \exists b \vee (a \wedge -b) \vee (\exists a \wedge -b \wedge \exists b)$$
$$= \exists -a \vee \exists b \vee (a \wedge -b) = \exists -a \vee (\exists b \vee a) \wedge (\exists b \vee -b)$$
$$= \exists -a \vee a \vee \exists b = 1$$

$$\alpha' = (a \cap -b) \to -(a \to b)$$
$$= (\exists a \wedge -b \wedge (a \vee \exists b)) \to -(\exists -a \vee b)$$
$$= \exists (-\exists a \vee b \vee (-a \wedge -\exists b)) \vee (\forall a \wedge -b)$$
$$= -\exists a \vee \exists b \vee (\exists -a \wedge -\exists b) \vee (\forall a \wedge -b)$$
$$= -\exists a \vee (\exists -a \wedge -\exists b) \vee (\exists b \vee \forall a) \wedge (\exists b \vee -b)$$
$$= -\exists a \vee (\exists -a \wedge -\exists b) \vee \exists b \vee \forall a$$
$$= -\exists a \vee (\exists -a \vee \exists b) \wedge (-\exists b \vee \exists b) \vee \forall a$$
$$= -\exists a \vee \exists -a \vee \exists b \vee \forall a = -\exists a \vee \exists b \vee -\forall a \vee \forall a = 1$$

De $\alpha = 1$ et $\alpha' = 1$ on déduit par 6. 1 que $\alpha \cap \alpha' = 1$ et alors la formule $-(a \to b) \leftrightarrow (a \cap -b) = 1$ est démontrée.

A13) Remarquons que:

1°) $x \to x = \exists -x \vee x = 1$

2°) $$-(a \sqcap b) = -a \sqcup -b;$$
donc
$$\alpha = -(a \sqcap b) \rightarrow (-a \sqcup -b) = 1$$
$$\alpha' = (-a \sqcup -b) \rightarrow -(a \sqcap b) = 1$$
et finalement, d'après 6. 1, $\alpha \sqcap \alpha' = 1$, c'est-à-dire
$$-(a \sqcap b) \leftrightarrow (-a \sqcup -b) = 1$$

A14) La démonstration est analogue à la précédente.

A15) Il suffit, d'après 6. 1, de remarquer que
$$\alpha = -\ulcorner a \rightarrow a = \exists\exists -a \vee a = \exists -a \vee a = 1$$
$$\alpha' = a \rightarrow -\ulcorner a = \exists -a \vee -\exists -a = 1$$

A16) Est une conséquence immédiate de l'égalité $a = --a$.

MP) Soit $1 \rightarrow b = 1$, alors $\exists -1 \vee b = 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la démonstration est terminée.

Remarque: Si nous remplaçons le symbole $\sqcap$ par $\wedge$ dans la formule A5), l'expression ainsi obtenue n'est pas identiquement égale à 1. Il en est de même pour la formule A8) si nous remplaçons $\sqcup$ par $\vee$. C'est cette circonstance qui nous a conduit à introduire les nouveaux connectifs $\sqcup$ et $\sqcap$.

En utilisant le théorème 4. 4 nous pouvons donc affirmer que le quotient $\mathcal{L}(A) = A/\equiv$ est une algèbre de Lukasiewicz.

D'après le théorème 4. 3 pour construire $\mathcal{L}(A)$ nous devons poser $x \equiv y$ pour indiquer que
$$(x \leftrightarrow y) \sqcap (-y \leftrightarrow -x) = 1$$
ou ce qui est équivalent, d'après 6. 1):
$$x \leftrightarrow y = 1 \quad \text{et} \quad -y \leftrightarrow -x = 1$$
c'est-à-dire:
$$x \rightarrow y = \exists -x \vee y = -\forall x \vee y = 1$$
$$y \rightarrow x = \exists -y \vee x = -\forall y \vee x = 1$$
$$-x \rightarrow -y = \exists x \vee -y = 1$$
$$-y \rightarrow -x = \exists y \vee -x = 1$$

Ces égalités sont respectivement équivalentes à:
$$\forall x \leq y; \quad \forall y \leq x; \quad y \leq \exists x; \quad x \leq \exists y.$$
Les deux premières relations sont équivalentes à:
$$\forall x \leq \forall y \text{ et } \forall y \leq \forall x \text{ c'est-à-dire à } \forall x = \forall y.$$
Les deux dernières relations sont équivalentes à $\exists x = \exists y$.

Dans ces conditions on doit poser $f \equiv g$ pour indiquer que $\exists f = \exists g$ et $\forall f = \forall g$.

Cette relation ainsi définie sur A est, d'après le théorème 4. 4, une relation d'équivalence compatible avec les opérations $-$, Γ, $\rightarrow$, $\cup$, $\cap$.

La classe d'équivalence qui contient l'élément 1, est $|1| = \{1\} = 1$.

Si $|x|$ est la classe d'équivalence qui contient l'élément $x \in A$ et si nous algébrisons l'ensemble $L = A/\equiv$ des classes d'équivalence de la façon naturelle indiquée dans le théorème 4. 4, alors le système $\mathcal{L}(A) = \{L, 1, -, \Gamma, \rightarrow, \cup, \cap\}$ est une algèbre de Lukasiewicz.

Remarquons que l'opération de possibilité ∇ doit être définie par la formule:

$$\nabla |f| = \Gamma - |f| = |\Gamma - f\} = |\exists - - f| = |\exists f|$$

En résumé nous pouvons énoncer le résultat, qui a été annoncé dans [16].

6. 3. Théorème: *Etant donné une algèbre de Boole monadique* $(A, \exists)$; *posons:*

1) $a \rightarrow b = \exists - a \vee b$
2) $a \supset\!\!\rightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (-b \rightarrow -a)$
3) $a \cup b = (a \supset\!\!\rightarrow b) \supset\!\!\rightarrow b$
4) $a \cap b = -(-a \cup -b)$

Ecrivons $f \equiv g$ *pour indiquer que* $\exists f = \exists g$ et $\forall f = \forall g$. *Alors* $\equiv$ *est une relation d'équivalence définie sur A, compatible avec les opérations* $\exists$, $-$, $\cap$, $\cup$. *Soit* $L = A/\equiv$; $|a|$ *la classe d'équivalence qui contient l'élément* $a \in A$: $1 = |1| = \{1\}$ *et posons:*

1) $-|f| = |-f|$; 2) $\nabla |f| = |\exists f|$;
3) $|f| \cup |g| = |f \cup g|$; 4) $|f| \cap |g| = |f \cap g|$

alors le système $\mathcal{L}(M = \{L, 1, \nabla, -, \cup, \cap\}$ *est une algèbre de Lukasiewicz.*

Il est convenable de remarquer que la relation $\equiv$ n'est pas compatible avec les opérations $\wedge$, $\vee$, comme on peut le voir sur des exemples.

La démonstration de 6. 3 se base sur le théorème 4. 2, dont la démonstration assez large n'a pas été indiquée ce qui nous a permis de réduire l'extension de cette note.

Remarquons encore que le théorème 6. 2 peut être généralisé en remplaçant l'ensemble $D = \{1\}$ par un systéme déductif faible D de A. Dans ce cas la relation de congruence $x \equiv y$ doit être définie par l'une quelconque des conditions suivantes:

E1) $(x\to y)\cap(-y\to -x)\cap(y\to x)\cap(-y\to -x)\in D$

E2) $(x\to y)\wedge(-y\to -x)\wedge(y\to x)\wedge(-y\to -x)\in D$

Pour voir qu'il en est ainsi il suffit de démontrer l'équivalence des trois conditions suivantes (où D est un système déductif faible de l'algèbre de Boole monadique A).

C1) $a\in D$ et $b\in D$

C2) $a\wedge b\in D$

C3) $a\cap b\in D$

Comme D est un filtre, C2) est une conséquence de C1). De C2) on déduit que a, $b\in D$ et comme $a\leq \exists a$, $a\leq a\vee \exists -b$ alors: $\exists a\in D$, $b\in D$, $a\vee \exists -b\in D$ donc $a\cap b=\exists a\wedge b\wedge(a\vee \exists -b)\in D$.

Supposons que $a\cap b\in D$, comme D est un filtre alors $b\in D$ et $(\exists -b\vee a)=b\to a\in D$. De ces deux conditions on déduit par modus ponens faible que $a\in D$, donc C1) est vérifiée et la démonstration est terminée.

Remarquons finalement que la relation de congruence définie dans le théorème 6. 3 est compatible avec l'implication contraposable $\supset\!\!\to$. En effet, supposons que

$$\exists f=\exists f' \quad \text{et} \quad \forall f=\forall f'$$
$$\exists g=\exists g' \quad \text{et} \quad \forall g=\forall g'$$

Alors

$$\begin{aligned}\exists(f\supset\!\!\to g)&=\exists(-f\vee g\vee(\exists -f\wedge\exists g))\\&=\exists -f\vee\exists g\vee(\exists -f\wedge\exists g)\\&=-\forall f\vee\exists g\vee(-\forall f\wedge\exists g)\\&=-\forall f'\vee\exists g'\vee(-\forall f'\wedge\exists g')\\&=\exists(f'\supset\!\!\to g')\\ \forall(f\supset\!\!\to g)&=\forall((\exists -f\vee g)\wedge(\exists g\vee -f))\\&=(\exists -f\vee\forall g)\wedge(\exists g\vee\forall -f)\\&=(-\forall f\vee\forall g)\wedge(-\exists f\vee\exists g)\\&=(-\forall f'\vee\forall g')\wedge(-\exists f'\vee\exists g')\\&==\forall(f'\supset\!\!\to g')\end{aligned}$$

donc

$$f\supset\!\!\to g\equiv f'\supset\!\!\to g'$$

§7. **Remarques.** Le calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz a été défini par cet auteur en utilisant les connectifs primitifs $\supset\!\!\to$, $-$ et la matrice M indiquée dans le §2).

M. Wajsberg [26] a démontré que ce calcul est axiomatisable au moyen des axiomes schéma:

W1) $p \supset\!\!\rightarrow (q \supset\!\!\rightarrow p)$

W2) $(p \supset\!\!\rightarrow q) \supset\!\!\rightarrow ((q \supset\!\!\rightarrow r) \supset\!\!\rightarrow (p \supset\!\!\rightarrow r))$

W3) $(-p \supset\!\!\rightarrow -q) \supset\!\!\rightarrow (q \supset\!\!\rightarrow p)$

W4) $((p \supset\!\!\rightarrow -p) \supset\!\!\rightarrow p) \supset\!\!\rightarrow p$

et de la régle de modus ponens contraposable

R) *Si p, $p \supset\!\!\rightarrow q$ sont des thèses alors q est une thèse.*

Ce résultat nous conduit à définir une matrice comme une algèbre abstraite $M = \{A, 1, -, \supset\!\!\rightarrow\}$ formée par un ensemble A, un élément désigné $1 \in A$, une opération monaire $-$ et une opération binaire $\supset\!\!\rightarrow$ définies sur A.

La matrice M sera dite régulière si les conditions suivantes sont vérifiées:

(i) Si $1 \supset\!\!\rightarrow x = 1$ alors $x = 1$

(ii) Si $x \supset\!\!\rightarrow y = 1$ et $y \supset\!\!\rightarrow x = 1$ alors $x = y$

Etant donné une formule α du calcul propositionnel considéré par Wajsberg dans laquelle figurent les n variables propositionnes les $g_1, \cdots, g_n$, nous pouvons interprêter α comme une application α_M de A^n dans A en interprétant les $g_1, \cdots, g_n$ comme des variables sur A et les connectifs qui figurent dans α comme les opérations algébriques correspondantes définies sur M.

Une formule α est vérifiée par M si α_M est identiquement égale à 1.

Une matrice réguliére M est une matrice du calcul propositionnel de Wajsberg si elle vérifie tous les axiomes W1)–W4).

On voit de suite que toutes les thèses du calcul de Wajsberg sont vérifiées par une telle matrice.

Une matrice régulière M sera dite *une matrice caractéristique* du calcul de Wajsberg si les deux propositions suivantes sont équivalentes.

1) La formule α est une thèse.

2) La formule α est vérifiée par M.

Si M est une matrice régulière du calcul de Wajsberg alors

1) $p \supset\!\!\rightarrow (q \supset\!\!\rightarrow p) = 1$

2) $(p \supset\!\!\rightarrow q) \supset\!\!\rightarrow ((q \supset\!\!\rightarrow r) \supset\!\!\rightarrow (p \supset\!\!\rightarrow r)) = 1$

3) $(-p \supset\!\!\rightarrow -q) \supset\!\!\rightarrow (q \supset\!\!\rightarrow p) = 1$

4) $((p) \supset\!\!\rightarrow -p)) \supset\!\!\rightarrow p)) \supset\!\!\rightarrow p = 1$

5) Si $1 \supset\!\!\rightarrow q = 1$ alors $q = 1$,

6) Si $p \supset\!\!\rightarrow q = 1$ et $q \supset\!\!\rightarrow p = 1$ alors $p = q$.

On pourrait donc définir une algèbre de Wajsberg comme une algèbre $M = \{A, 1, -, \supset\!\!\rightarrow\}$ qui vérifie les conditions 1)–6).

Les conditions 5) et 6) ne sont pas des égalités. Il serait important de trouver une définition de ces algèbres dans laquelle tous les axiomes soient des égalités. On doit pouvoir démontrer directement le résultat suivant:

(I) *Si dans une algèbre de Wajsberg nous posons*:

7) $x \cup y = (x) \!\rightarrow y)) \!\rightarrow y$

8) $x \cap y = -(-x \cup -y)$

9) $\nabla x = -x) \!\rightarrow (-x) \!\rightarrow -1)$

alors le système $\{A, 1, -, \nabla, \cup, \cap\}$ *est une algèbre de Lukasiewicz au sens de Moisil et*

10) $x) \!\rightarrow y = (\nabla -x \cup y) \cap (\nabla y \cup -x)$"

La réciproque de ce résultat à savoir:

7.1. Théorème: *Si* $\{A, 1, -, \nabla, \cup, \cap\}$ *est une algèbre de Lukasiewicz au sens de Moisil et si nous définissons l'opération d'implication contraposable* $) \!\rightarrow$ *par la formule* 10), *alors les formules* 1)–9) *sont valables*; peut être démontrée sans difficulté. Signalons seulement que pour démontrer 7) il est convenable d'utiliser le principe de détermination de Moisil.

Un autre résultat qu'on doit pouvoir démontrer est le suivant:

(II) *Si* $M = \{A, 1, -,) \!\rightarrow\}$ *est une algèbre que vérifie les axiomes* 1)–5) *et si nous posons* $p \equiv g$ *pour indiquer que* $p) \!\rightarrow g = 1$ *et* $g) \!\rightarrow p = 1$ *alors* $\equiv$ *est une relation d'équivalence compatible avec les opérations* $-$, $) \!\rightarrow$. *Si* $|x|$ *est la classe d'équivalence que contient l'élément* x, *alors* $|1| = \{1\}$. *Si* $A' = A/\equiv$ *est l'ensemble de toutes les classes d'équivalence et si nous posons*:

$$|x|) \!\rightarrow |y| = |x) \!\rightarrow y|$$
$$-|x| = |-x|$$

alors $\{A', \{1\}, -,) \!\rightarrow\}$ *est une algèbre de Wajsberg.*

Appelons *pré-algèbre de Wajsberg* toute algèbre $\{A, 1, -,) \!\rightarrow\}$ qui vérifie les axiomes 1)–5).

On peut démontrer le résultat suivant:

7.2. Théorème: *Si dans une algèbre de Boole monadique* $(A, \exists)$ *nous posons*

$$p) \!\rightarrow g = (\exists -p \vee g) \wedge (\exists g \vee -p)$$

alors le système $\{A, 1, -,) \!\rightarrow\}$ *est une pré-algèbre de Wajsberg.*

Nous ne reproduisons pas ici les calculs correspondants, parce qu'ils sont assez longs, mais le lecteur peut les retrouver facilement.

En utilisant 7.1, (II) et (I) on obtiendrait alors de suite le théorème 6.3.

Bibliographie

[1] BIALYNICKI-BIRULA (A.) and RASIOWA (H)-On constructive falsity in the constructive logic with strong negation. Colloquium Mathematicum, 6 (1958), 287-310.

[2] BRIGNOLE (Diana)-Equational characterization of Nelson algebras. (A paraître).

[3] BRIGNOLE (Diana) et MONTEIRO (António)-Caractérisation des algèbres de Nelson par des égalités. I. Proc. of Japan Academy. 43 (1967), 279-283: II, Idem, 284-285.

[4] DAVIS (Chandler)-Modal operators, equivalence relations and projective algebras. American Journal of Mathematics, 76 (1954), 217-249.

[5] HALMOS (Paul R.)-Algebraic logic I, (Monadic Boolean Algebras). Compositio Mathematica Vol. 12 (1954-56), 217-249.

[6] LUKASIEWICZ (Jan)-O logike trojwartosciowej. Ruch Filozoficzny 5 (1920), 170.

[7] LUKASIEWICZ (Jan)-Elementy logiki matematycznej. Warszawa, 1929.

[8] LUKASIEWICZ (Jan)-Die Logik und das Grundlagenproblem. Les Entretiens de Zürich (1938), 82-100, discussion 100-108.

[9] LUKASIEWICZ (J.), TARSKI (Alfred)-Unterschungen über Aussagenkalkul. Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, 23 (1930), 30-50.

[10] MARKOV (A. A.)-A constructive Logic. Uspehi Matematiceskih Nauk (N. S.), 5 (1950), 187-188.

[11] MOISIL (Gr. C.)-Recherches sur les logiques non-chrysippiennes. Annales Scientifiques de l'Univefsité de Jassy, 26 (1940), 431-466.

[12] MOISIL (Gr. C.)-Notes sur les logiques non-chrysippiennes. Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, 27 (1941), 86-98.

[13] MOISIL (Gr. C.)-Logique Modale. Disquisitiones Mathematicae et Physicae, Buc. 2 (1942), 3-98.

[14] MOISIL (Cr. C.)-Sur les idéaux des algèbres Lukaasiewicziennes trivalentes. Analele Universitatii C. I. Parhon, Seria Acta Logica, 3 (1960), 83-95.

[15] MOISIL (Gr. C.)-Les logiques non-chrysippiennes et leurs applications. Acta Philos. Fenn. Fasc. 16, (1963), 137-152.

[16] MONTEIRO (António)-Relations between Lukasiewicz three-valued algebras and monadic Boolean algebras. International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. Program and Abstract. The Hebrew University, Jerusalem, 1964, 16-17.

[17] MONTEIRO (António)-Sur la Définition des Algèbres de Lukasiewicz trivalentes. Bulletin de la Soc. Sciences Math. Phys. R. P. R. Nouvelle Serie, Tome 7 (55), (1963), 3-12.

[18] MONTEIRO (António)-Les algèbres de Nelson semisimples. (A paraître).

[19] MONTEIRO (Luiz)-Axiomes indépendants pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentes. Bulletin de la Soc. Sciences Math. Phys. R. P. R. Nouvelle Serie, Tome 7 (55), (1963), 199-202.

[20] MONTEIRO (Luiz) et GONZALEZ COPPOLA (Lorenzo)-Un théorème sur les algèbres de Lukasiewicz trivalentes. Portugaliae Mathematicca, 23 (1964), 157-167.

[21] NELSON (David)-Constructible falsity. Journal of Symbolic Logic, 14 (1949), 16-26.

[22] RASIOWA (Helena)-Algebraische Charakterisierung Intuitionistischen Logik mit Starker negation. Constructivity in Mathematics. (Proceedings of the Colloquium held at Amsterdam, 1957) edited by *A.* Heyting.Studies in Logic and the Foundation of Mathematics. Amsterdam, 1959.

[23] RASIOWA (Helena)-N-lattices and constructive logic with strong negation. Fundamenta Mathematicae, 46 (1958), 61-80.

[24] VOROBIEV (H. H)-A constructive propositional calculus with strong negation. Doklady Akademii Nauk SSSR. 85 (1952), 465-468.

[25] VOROBIEV (H. H.)-The problem of deducibility in the constructive propositional calculus with strong negation. Doklady Akademii Nauk SSSR. 85 (1952), 689-692.

[26] WAJSBERG (M.)-Axiomatization of the three-valued sentencial caluclus. Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, 24 (1931), cl. III, 126-148.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca-Argentina