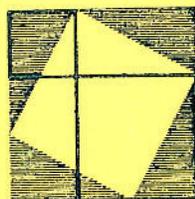




INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 8

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

COMENTARIO A UN TEOREMA DE JAKOB STEINER

por A.I. Benedek y R. Panzone

1. INTRODUCCION. Llamaremos curva de Jordan a cualquier imagen homeomórfica de la circunferencia sobre el plano mientras que arco de Jordan designará a toda imagen homeomórfica de un segmento cerrado finito. Una curva de Jordan es un continuo nunca denso que puede ser rectificable o no. Y solamente en el último caso puede ocurrir que posea área no nula, ([H], p.374).

Dada la curva de Jordan J designaremos con $D = D(J)$ a su recinto interior. Sean

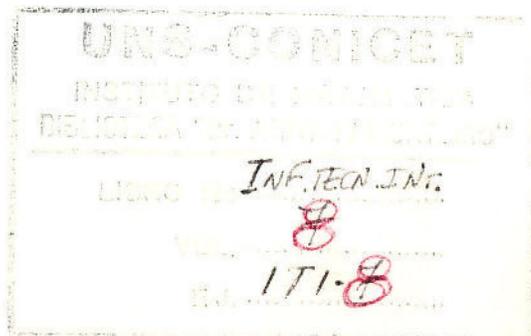
$$S_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus D: \text{dist}(x, J) \leq \epsilon\},$$

$$I_\epsilon = \{x \in \bar{D}: \text{dist}(x, J) \leq \epsilon\}.$$

Un teorema de J. Steiner (1796-1863) implica que si J es rectificable la medida de S_ϵ es del orden de ϵ : $|S_\epsilon| = O(\epsilon)$, ([G], p.81). Una inversión con centro un punto de D muestra que en este caso también $|I_\epsilon| = O(\epsilon)$. Si la curva J tuviera área positiva c entonces $|I_\epsilon| \geq c$, $c > 0$, y el teorema resulta óptimo en cierto sentido. A continuación mostramos que aun cuando el área de J sea nula el resultado no puede mejorarse.

Diremos que $|I_\epsilon|$ es como ϵ^β , $|I_\epsilon| \sim \epsilon^\beta$, si existen dos constantes positivas m y M tales que: $m \epsilon^\beta \leq |I_\epsilon| \leq M \epsilon^\beta$ para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.

TEOREMA 1. *i) Sea $\beta \in (0, 1)$. Existe una curva de Jordan de área nula tal que $|I_\epsilon| \sim \epsilon^\beta$.*



ii) Sea $\gamma \in (0,1)$. Existen una curva de Jordan de área nula y una constante $m > 0$ tales que

$$|I_\epsilon| \geq m/|\ln \epsilon|^\gamma \quad \text{si } \epsilon < \epsilon_0.$$

La sección siguiente está dedicada a la demostración de estas proposiciones. El resto de la presente nota se ocupa con una demostración del teorema de Steiner arriba citado, (cf. T.2, §3)

2. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1. En las páginas 326 y 374 del libro de Hausdorff citado en las referencias se puede hallar la construcción de un arco de Jordan H que utilizaremos como la parte fundamental de la curva de Jordan J a definir. Ese arco une los vértices α y β de un cuadrado de lado 1 y pasa por todos los puntos de un conjunto Q que es perfecto, acotado y totalmente desconexo.

En la fig. 1 aparecen los segmentos $B_2, B_4, B_6, \dots, B_{32}, B_{34}, B_{36}, \dots$ que forman parte de H obtenidos en los pasos $n = 0$ y $n = 1$ de la construcción. Un punto del cuadrado $\alpha\delta\beta\gamma$ pertenece a Q si y sólo si pertenece a infinitos cuadrados $B_{ij\dots k}$. Suponemos el arco H completado por un arco de circunferencia de centro γ y radio 1 de manera que juntos determinen una curva J de interior D , el cual contiene las regiones rayadas de la figura. $F: [0,1] \rightarrow H$ es una parametrización de H cuya definición utiliza el sistema heptádico de numeración.

En la construcción de H llamaremos l_i la longitud del lado de un cuadrado en el paso i , $i = 0,1,2, \dots$, a_i designará la longitud del lado de los cuatro nuevos cuadrados obtenidos en la subdivisión de uno de lado l_i . Entonces, $a_i = l_{i+1}$, $l_i = 2a_i + c_i$.

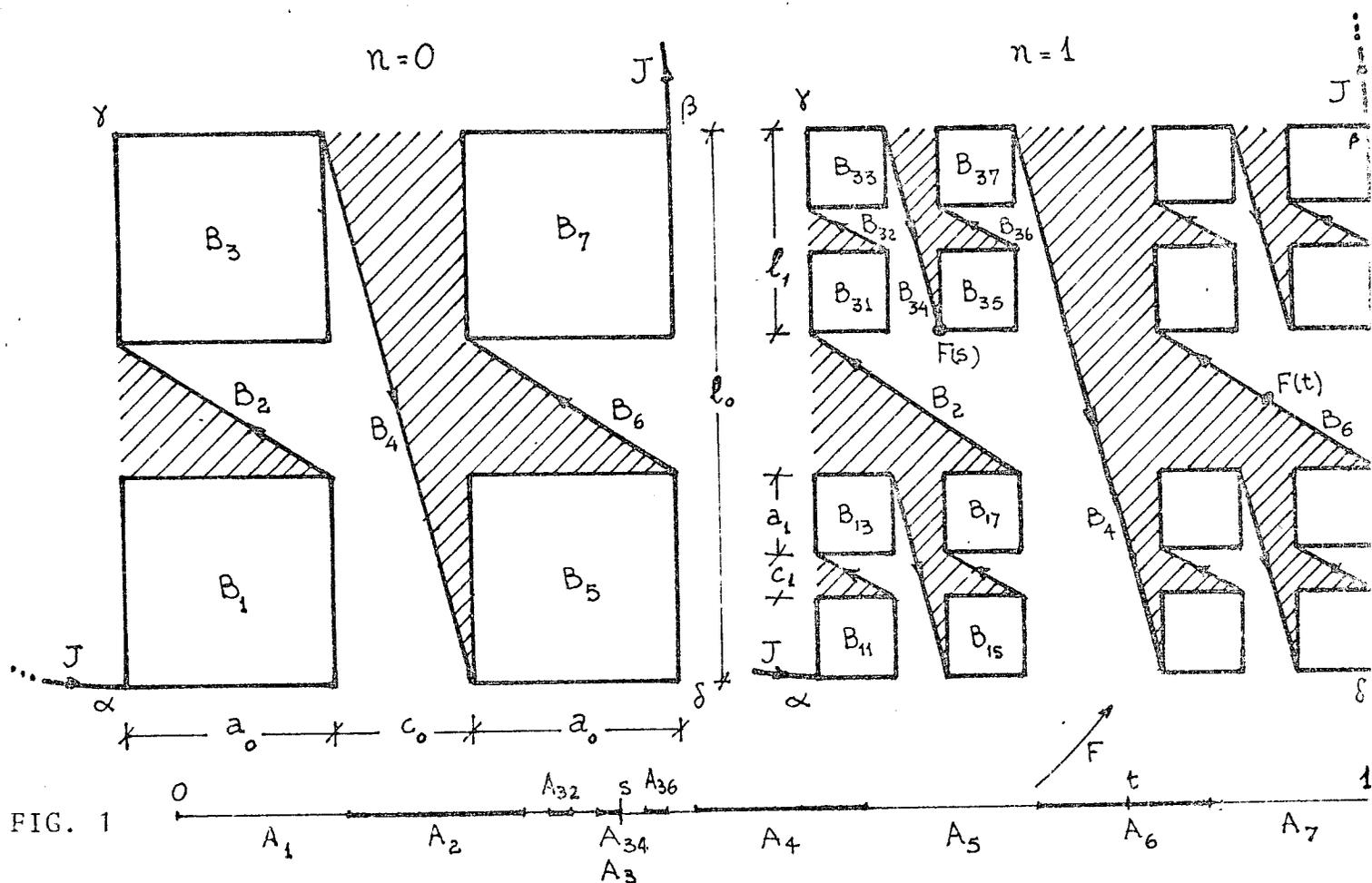


FIG. 1

Supondremos que $0 < l_0 \leq 1$ y que $2^k a_k = \delta_k$ con $l_0/2 > \delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \dots$. La unión de las cruces tiene área igual a

$$(1) \quad (l_0^2 - 4a_0^2) + 4(l_1^2 - 4a_1^2) + \dots = l_0^2 - 4 \lim \delta_i^2.$$

En consecuencia, $|Q| = 4 \cdot \lim \delta_i^2$. Supondremos en lo que sigue que $\delta_i \downarrow 0$. De esta forma: $|Q| = |H| = |J| = 0$.

Demostración de i). Designaremos con l , a y c a l_0 , a_0 y c_0 respectivamente y supondremos que $2a > c > 0$. Luego $4a/l > 1$. También supondremos en este caso que el cociente a_i/l_i es constante. O sea,

$$a_k = (a/l)^k a, \quad \delta_k = (2a/l)^k a + 0.$$

La longitud de la suma de las diagonales B_2, B_4, B_6, \dots , hasta el

paso n-ésimo incluido es mayor que

$$(2) \quad (1 + 2a) \sum_{j=0}^n (4a/1)^j = [1(1 + 2a)/(2a - c)] \cdot [(4a/1)^{n+1} - 1].$$

Observemos que la suma de las longitudes de las diagonales hasta el paso n-ésimo incluido es menor que

$$(3) \quad [1 + c + 2(a + c)] \frac{(4a/1)^{n+1} - 1}{4a/1 - 1} \leq 2 \left[\frac{1(1 + 2a)}{2a - c} \right] \cdot [(4a/1)^{n+1} - 1],$$

pues $1 + c + 2(a + c) < 2l + 4a$.

Dado $\epsilon > 0$, definamos $n = n(\epsilon)$ por $c_{n+1} = c(a/1)^{n+1} < \epsilon \leq c_n = \frac{cl}{a} (a/1)^{n+1}$. Luego $n \uparrow \infty$ para $\epsilon \downarrow 0$. Designemos con I'_ϵ al conjunto de puntos de I_ϵ contenidos en el cuadrado $\alpha\delta\beta\gamma$. Entonces, el área de I'_ϵ es mayor que: $(1/2)$. suma de las áreas de las cruces en los pasos $n+1, n+2, \dots + (\epsilon/2)$. longitud de las suma de las diagonales hasta el paso n .

Por lo tanto

$$(4) \quad |I'_\epsilon| > \frac{1}{2} 4^{n+1} \left(\frac{a}{1}\right)^{2(n+1)} 1^2 + \frac{\epsilon}{2} \frac{1(1 + 2a)}{2a - c} \left[\left(\frac{4a}{1}\right)^{n+1} - 1\right].$$

Por otra parte la medida de I'_ϵ es menor que: $(1/2)$. la suma de las áreas de las cruces en los pasos $n+1, n+2, \dots + \epsilon$. longitud de las diagonales hasta el paso n . Es decir,

$$(5) \quad |I'_\epsilon| < \frac{1}{2} \cdot 4^{n+1} \left(\frac{a}{1}\right)^{2(n+1)} 1^2 + \epsilon \cdot 2 \frac{1(1 + 2a)}{2a - c} \left[\left(\frac{4a}{1}\right)^{n+1} - 1\right].$$

Luego, de (4) y (5)

$$\begin{aligned} \left(\frac{2a}{1}\right)^{2(n+1)} \left[\frac{1}{2} + \frac{c}{2(2a - c)} \left\{1 - \left(\frac{1}{4a}\right)^{n+1}\right\}\right] &< |I'_\epsilon| < \\ &< \left(\frac{2a}{1}\right)^{2(n+1)} \left[\frac{1}{2} + 2 \frac{c}{a} \frac{1^2(1 + 2a)}{(2a - c)}\right]. \end{aligned}$$

Como $\left(\frac{1}{4a}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{4a} < 1$, resulta entonces,

$$(6) \quad (2a/1)^{2(n+1)} \cdot K_1 < |I'_\epsilon| < (2a/1)^{2(n+1)} \cdot K_2, \text{ donde}$$

$$K_1 = \frac{1^2}{2} + \frac{c1(1+2a)}{2 \cdot 4a}, \quad K_2 = \frac{1^2}{2} + 2 \frac{c1^2(1+2a)}{a(2a-c)}.$$

Entonces $|I'_\epsilon| \sim \epsilon^\beta$ si y sólo si

$$\left(\frac{2a}{1}\right)^{2(n+1)} \sim \left(\frac{a}{1}\right)^{(n+1) \cdot \beta}. \text{ Esto vale exactamente cuando}$$

$$(7) \quad (2a/1)^2 = (a/1)^\beta.$$

Sea $\beta = \beta(a/1)$ el número en $(0,1)$ para el cual se da la igualdad (7). Si $a/1 \neq 1/2$ entonces $\beta \neq 0$, y esto implica la tesis i).

Demostración de ii). Sea $0 < \epsilon < \delta_0 - \delta_1$. Definimos $n = n(\epsilon)$ por medio de las siguientes desigualdades:

$$2^{-n}(\delta_n - \delta_{n+1}) = c_{n+1} < \epsilon \leq c_n = 2^{1-n}(\delta_{n-1} - \delta_n).$$

La medida de I'_ϵ es seguramente mayor que: $(1/2)$. suma de las áreas de las cruces que aparecen en los pasos $n+1, n+2, \dots$. Es decir,

$$(8) \quad |I'_\epsilon| > (1/2) \cdot 4^{n+1} a_n^2 = 2 \delta_n^2.$$

Elijamos ahora los δ_h , $h = 0, 1, 2, \dots$:

$$(9) \quad \delta_h = 1/2(h+1)^{\gamma/2}.$$

Entonces tenemos: $\delta_{n-1} - \delta_n = \gamma/4(n+\theta)^{1+\gamma/2}$, $0 < \theta < 1$; y por lo tanto: $\epsilon < \gamma 2^{-n}/2n^{1+\gamma/2}$.

En consecuencia, $n \cdot \ln 2 < \ln 1/\epsilon$, y de (8) sigue que

$$|I'_\epsilon| > 2 \cdot \delta_n^2 = 1/2(n+1)^\gamma > [(\ln 2)^\gamma / 2^{\gamma+1}] / |\ln \epsilon|^\gamma. \quad \text{QED.}$$

3. POLIGONALES. Sea J una curva de Jordan, $D = D(J)$ su interior y p un número no negativo. Definimos:

$$D_p = \{x: \text{dist}(x,D) \leq p\}, \quad D_{p-} = \{x: \text{dist}(x,D) < p\}.$$

Es fácil demostrar las siguientes relaciones

$$(i) \quad D_{0-} = \emptyset, \quad D_0 = \bar{D} = D \cup J,$$

$$(ii) \quad D_{p-} \subset D_p \subset D_{(p+\varepsilon)-} \quad \text{si } \varepsilon > 0,$$

$$(iii) \quad D_p = \{x: \text{dist}(x,\bar{D}) \leq p\}, \quad D_{p-} = \{x: \text{dist}(x,\bar{D}) < p\},$$

$$(iv) \quad D_p = D_0 \cup \{x \notin D_0: \text{dist}(x,J) \leq p\}.$$

Sea $\{S^{(1)}, \dots, S^{(m)}\}$ una colección de segmentos cerrados finitos de extremos $a(i), b(i)$, $i = 1, \dots, m$. Si para todo $i = 1, 2, \dots, m-1$,

$$b(i) = a(i+1), \quad \text{entonces diremos del conjunto } T = \bigcup_{i=1}^m S^{(i)} \text{ que es una}$$

poligonal. Y si además $b(m) = a(1)$, diremos que T es una *poligonal cerrada*. Si la poligonal cerrada T tiene la propiedad que la intersección de dos lados cualesquiera es a lo sumo un vértice de ambos, diremos que T es una *poligonal cerrada en sentido estricto*. Una poligonal cerrada en sentido estricto se dirá *simple* si coincide con una curva de Jordan. Llamaremos *convexa* a aquella poligonal simple que defina junto con su recinto interior un polígono convexo.

Sea L una poligonal *convexa* y $D = D(L)$; $|D|$ la medida plana de D y $[L]$ la longitud de L . Para todo r positivo es fácil ver que vale

$$(10) \quad |D_r| = |D| + [L]r + \pi r^2.$$

En particular tenemos

$$(11) \quad |D_{r-}| \leq |D| + [L]r + \pi r^2, \quad r > 0.$$

Si en lugar del recinto D tuviéramos un segmento cerrado finito l también podríamos definir l_{r-} según (iii) y obtendríamos

$$(12) \quad |1_{r-}| = 2 [1] r + \pi r^2.$$

PROPOSICION 1. (11) vale aun para poligonales simples.

DEMOSTRACION. Sea L una poligonal simple cualquiera. Demostraremos por inducción sobre n , el número de lados (vértices) de L . La proposición vale, por lo dicho arriba, para $n = 3$. Sea $n > 3$. Existe un segmento l interior a D cuyos vértices coinciden con vértices de L (cf. [B], p. 22). Sean D_1 y D_2 los dos recintos poligonales en que l divide a D . Entonces, $|D| = |D_1| + |D_2|$ y $D_{1,r-} \cap D_{2,r-} \supset 1_{r-}$, (cf. Fig.2). Luego,

$$\begin{aligned} |D_{r-}| &= |D_{1,r-}| + |D_{2,r-}| - |D_{1,r-} \cap D_{2,r-}| \leq \\ &\leq |D_1| + [L_1]r + \pi r^2 + |D_2| + [L_2]r + \pi r^2 - (2[1]r + \pi r^2) = \\ &= |D| + [L] r + \pi r^2, \end{aligned} \quad \text{QED.}$$

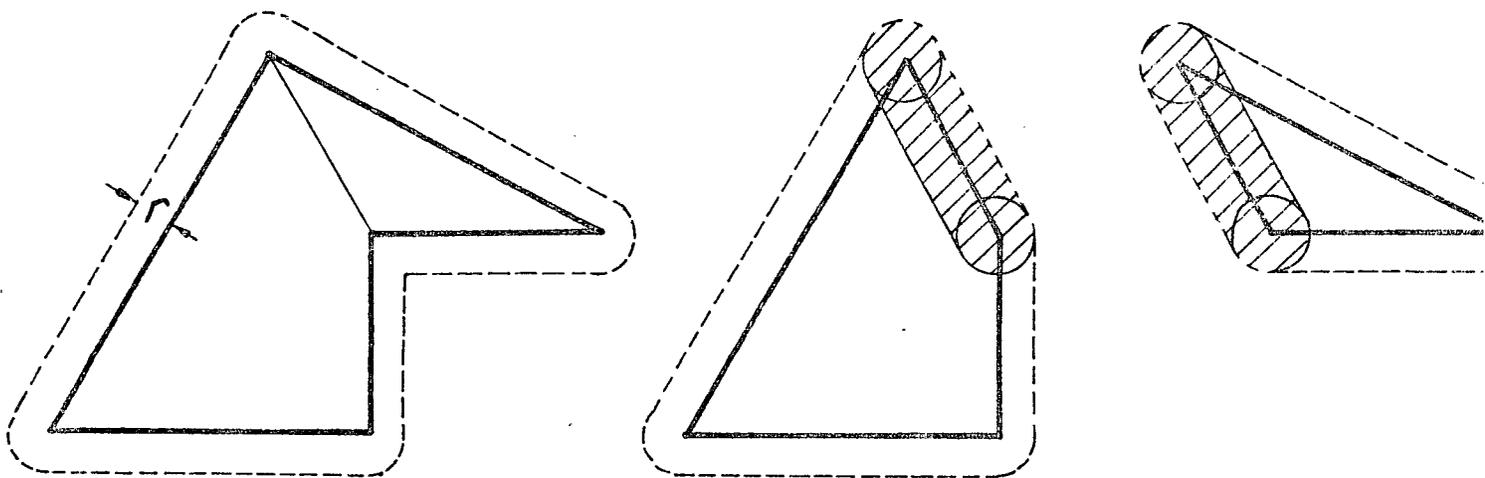


FIG. 2

El teorema de Steiner que queremos demostrar dice así:

TEOREMA 2. Sea J una curva de Jordan rectificable y $D = D(J)$. Entonces,

si $r > 0$,

$$(13) \quad |D_r| \leq |D| + [J]r + \pi r^2.$$

4. PLURIPOLIGONALES. A un continuo P se le llamará *pluripoligonal* si

$P = \bigcup_{i=1}^n L_i$, donde L_i es una poligonal simple de interior D_i tal que

i) $D_i \cap L_j = \emptyset$ para todo i, j ,

ii) $L_i \cap L_j$ es vacío o un vértice de ambas,

iii) $E := \bigcap_{j=1}^n C(\bar{D}_j) = C(\bigcup_{j=1}^n \bar{D}_j)$ es un dominio, (ver Fig.3)

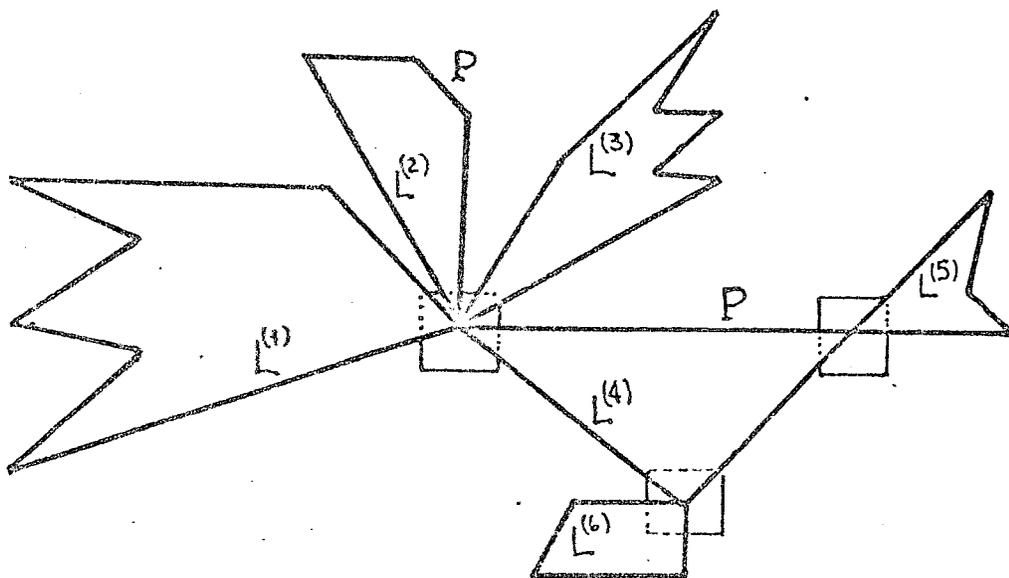


FIG. 3

Las siguientes proposiciones aclaran los alcances de esta definición.

PROPOSICION 2. j) Si P es una pluripoligonal, $P = \bigcup_{i=1}^n L_i$, entonces los

dominios residuales de $C(P)$ son: D_1, \dots, D_n, E .

jj) Todo continuo subconjunto de P de la forma $\tilde{P} = \bigcup_{i \in I} L_{j_i}$ es una pluripoligonal.

DEMOSTRACION. j) sigue inmediatamente, y jj) quedará demostrada si probamos que $\tilde{E} = C(\bigcup_{i \in I} \bar{D}_{j_i})$ es conexo. Si no fuera así existirían dos abiertos, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2 , no vacíos, disjuntos, tales que $\tilde{E} = \tilde{E}_1 \cup \tilde{E}_2$. El dominio residual E estará contenido en \tilde{E}_1 o en \tilde{E}_2 . Supongamos $E \subset \tilde{E}_1$ y $L_j \not\subset \tilde{P}$. Como $L_j \subset \bar{E}$ resulta $L_j \subset \tilde{E}_1$ y por lo tanto: $L_j \cap \tilde{E} \subset \tilde{E}_1$. Entonces no puede ocurrir que $D_j \subset \tilde{E}_2$. Luego $\bar{D}_j \cap \tilde{E} \subset \tilde{E}_1$ y sigue que $\tilde{E}_2 = \emptyset$. QED.

Al conjunto abierto $\bigcup_{i=1}^n D_i$ lo llamaremos el *interior* de P y a E el *exterior*. De la pluripoligonal \tilde{P} diremos que es una *subpluripoligonal* de P . Otra idea que queremos introducir es la de engrosamiento de una pluripoligonal. Dada la pluripoligonal P , sean A_1, \dots, A_k los vértices de P que pertenecen a más de una poligonal L_i . A vértices de esta naturaleza los llamaremos *multivértices*. Sean C_1, \dots, C_k cuadrados abiertos de diámetros menores que $d(P)$, donde $d(P)$ es la menor distancia entre un vértice de P y los lados que no concurren a él. Los centros de C_1, \dots, C_k serán A_1, \dots, A_k respectivamente. El *engrosamiento* de P es, por definición, el contorno de la región $\bigcup_{i=1}^n D_i \cup \bigcup_{j=1}^k C_j$. Lo denotaremos con \hat{P} .

PROPOSICION 3. \hat{P} es una poligonal simple.

Para demostrarla basta ver que \hat{P} es una curva de Jordan. Esto lo veremos junto con otros detalles enseguida. La proposición implica que P es una poligonal cerrada en sentido estricto.

PROPOSICION 4. Sea $P = \bigcup_{i=1}^n L_i$ una pluripoligonal con multivértices $A_1,$

$A_2, \dots, A_k, k \geq 1$. Existen dos subpluripoligonales P_I y P_{II} tales que:

$$P_I \cup P_{II} = P, P_I \cap P_{II} = \{A_1\}.$$

DEMOSTRACION DE LAS PROPOSICIONES 3 Y 4: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la poligonal simple L_1 contiene al vértice A_1 y que

$$L_{j+1} \cap (L_1 \cup \dots \cup L_j) \neq \emptyset, 1 \leq j < n. \text{ Entonces los continuos } P_i = \bigcup_{j=1}^i L_j,$$

$i = 1, 2, \dots, n$, son pluripoligonales y $P_n = P$, (Prop.2).

Sean $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n$, engrosamientos de los mismos con cuadrados de igual diámetro y menor que $d(P)$. Supongamos que $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_e, 1 \leq e < n$, sean poligonales simples. Para que esto mismo ocurra con \hat{P}_{e+1} bastará ver que:

*) el polígono L_{e+1} se adhiere a la poligonal P_e en un sólo vértice.

Si esto no fuera así el continuo $\hat{P}_e \cup (L_{e+1} \cap \text{exterior de } \hat{P}_e)$ tendría un dominio residual acotado cuya frontera (poligonal) tiene segmentos contenidos en P_e y segmentos en L_{e+1} . Este dominio acotado no está incluido en $\bigcup_{i=1}^n D_i$. Por lo tanto posee puntos de E . Luego, E no puede ser conexo e infinito. Contradicción.

De *) sigue que \hat{P}_{e+1} es una poligonal simple. En consecuencia, también $\hat{P}_n = \hat{P}$ es una poligonal simple, y queda probada así la proposición 3.

Si quitamos L_1 a P , la unión de los L_j restantes se descompone en componentes conexas que son pluripoligonales. Denominaremos P_I a aquella que contiene al vértice A_1 . Sea $P_{II} = L_1 \cup$ restantes componentes conexas.

Entonces $P_I \cap (P_{II} \setminus L_1) = \emptyset$, y $P_I \cap P_{II} = P_I \cap L_1 = \{A_1\}$ por *), QED.

PROPOSICION 5. Sea $P = \bigcup_{i=1}^n L_i$ una pluripoligonal. Si $[P] = \sum_{i=1}^n [L_i]$ y

$|D| = \sum_{i=1}^n |D_i|$ entonces para todo $r > 0$ vale

$$(14) \quad |D_{r-}| \leq |D| + [P]r + \pi r^2.$$

DEMOSTRACION. La proposición 1 implica que (14) vale si $n = 1$. Supon-

gamos que vale para todo $n < h$ y sea $P = \bigcup_{i=1}^h L_i$. Entonces, usando la

descomposición de la proposición 4, resulta (ver Fig.4):

$$\begin{aligned} |D_{r-}| &\leq |D_{I,r-}| + |D_{II,r-}| - \pi r^2 \leq \\ &\leq (|D_I| + [P_I]r + \pi r^2) + (|D_{II}| + [P_{II}]r + \pi r^2) - \pi r^2 = \\ &= |D| + [P]r + \pi r^2. \end{aligned}$$

QED.

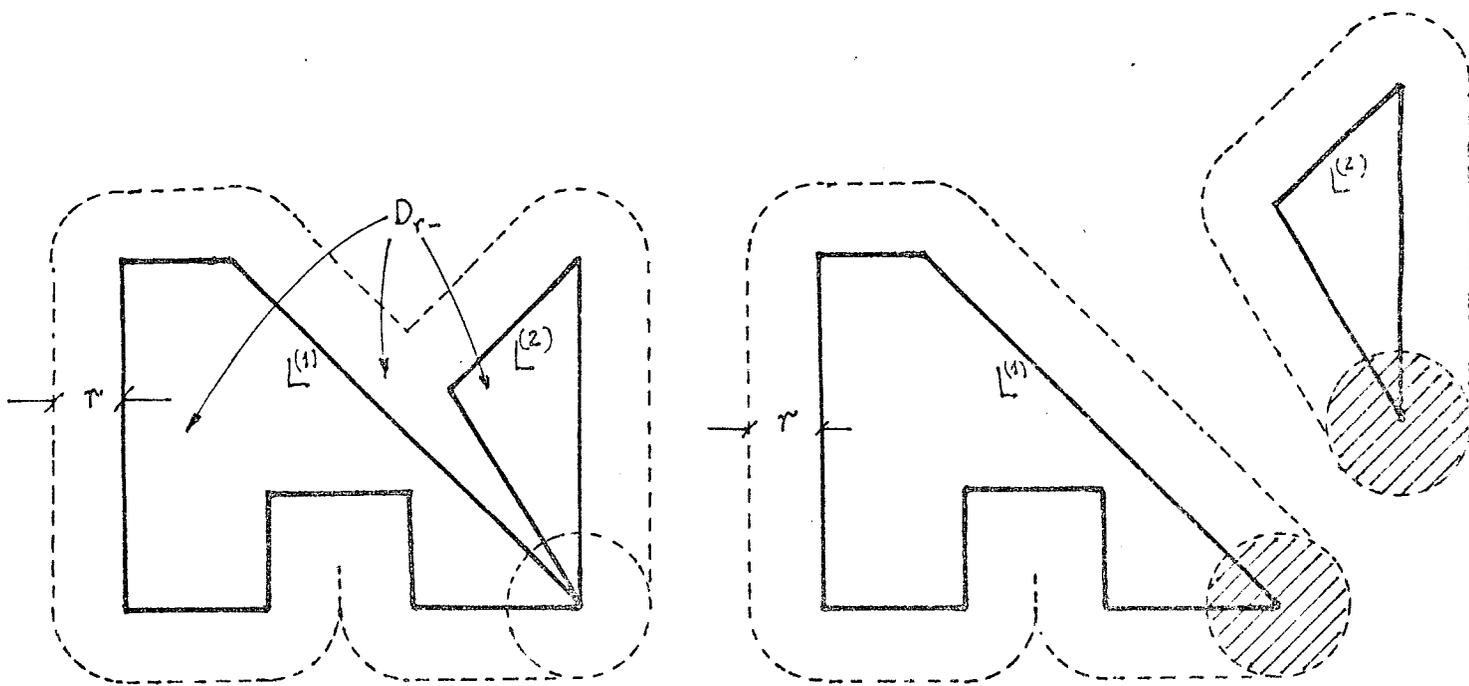


FIG. 4

5. VAINA POLIGONAL. Sea $T = \bigcup_{i=0}^{m-1} [a_i, a_{i+1}]$ una poligonal cerrada en sen-

tido estricto. Como T es un continuo, $C(T)$ tiene sus dominios residuales simplemente conexos, ([N], p.144). Sea E la componente de $C(T)$ no acotada. Llamaremos *vaina poligonal* de T , $V(T)$, a la frontera de E . Entonces V es un continuo, ([N], p.144). En realidad es el continuo que "mejor ciñe" a T , (cf.Fig.5).

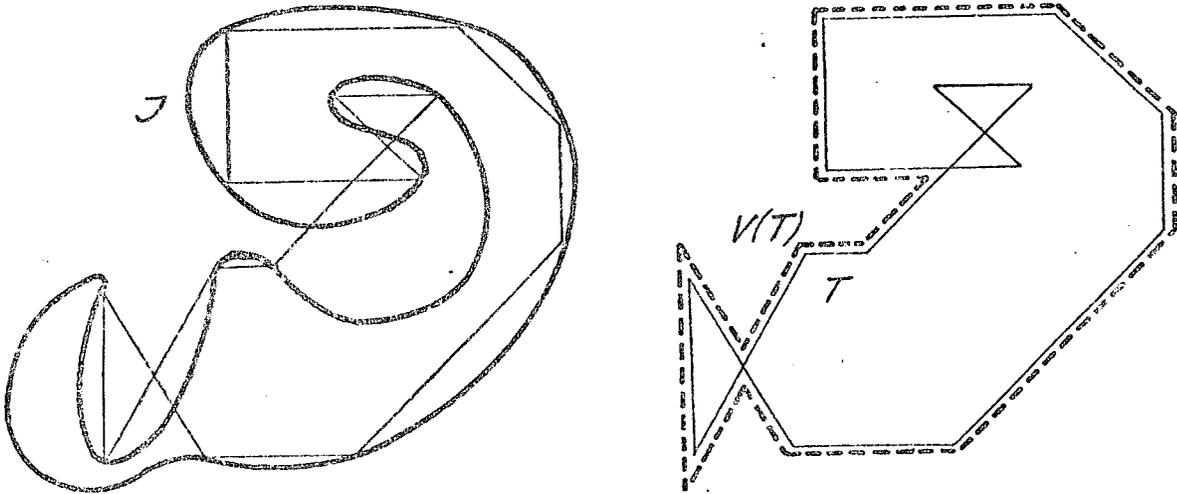


FIG. 5

TEOREMA 3. V es una pluripoligonal.

DEMOSTRACION. V está formada con lados de T : $V = \bigcup_{i=1}^n [a_{j_i}, a_{j_{i+1}}]$. Cada

uno de estos 1-símplices es límite, por uno de sus lados al menos, de puntos de E . $C(V)$ consta de un número finitos de dominios residuales acotados: D_1, \dots, D_n , y de uno no acotado que coincide con E .

D_i es un abierto simplemente conexo cuya frontera es una poligonal simple, L_i , formada por lados de T que pertenecen a la frontera de E . Por lo tanto dos dominios residuales de contornos L_i, L_j , no pueden te-

ner un lado común. Y en caso de poseer vértices en común sólo podrán tener uno pues en caso contrario $\bar{D}_i \cup \bar{D}_j$ desconectaría al conjunto E.

Por otra parte si $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$, $E \subset C(\bar{D})$. Para demostrar que V es una pluripoligonal sólo resta ver que $E \supset C(\bar{D})$. Y para ello es suficiente mostrar que ningún 1-símplice $[a_{j_i}, a_{j_i+1}]$ es límite por ambos lados de puntos de E. Sea l_0 un 1-símplice de V, que podemos suponer sin pérdida de generalidad que es $[a_0, a_1]$. La poligonal T es parametrizable con un parámetro t variando en $[0, 1]$ y de manera que t crezca estrictamente al pasar de un punto a otro de T en el sentido impuesto por los vértices: a_0, a_1, \dots, a_{m-1} . Esto puede lograrse pues T es cerrada en sentido estricto. Dado un punto $x \in T$, designaremos con $t(x)$ al menor valor del parámetro en ese punto y con $\tau(x)$ al mayor. Obviamente, $t(x) = \tau(x)$ excepto para los vértices a los cuales concurren más de dos lados y para a_0 ($\tau(a_0) = 1$, $t(a_0) = 0$).

Sea $l_1 = [a_r, a_{r+1}]$ el lado de T tal que $\tau(a_1) = \inf\{t(x) : x \in l_1\}$. Entonces: $l_0 \cap l_1 = \{a_1\}$, $\tau(a_{r+1}) > \tau(a_1)$. Si $a_{r+1} \neq a_0$ podemos repetir el proceso, y así llegamos finalmente a a_0 con un segmento $l_m = [a_s, a_{s+1}]$, $a_{s+1} = a_0$. Entonces $J = \{l_0, \dots, l_m\}$ describe una curva de Jordan.

Como $J \subset T$, el interior de J no tiene puntos en E. Por lo tanto está contenido en $C(E) = D \cup V$.

Como V es nunca denso, l_0 es límite de puntos de D. QED.

6. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 2. Dado $\epsilon > 0$, existe un abierto acotado O tal que: $O \supset \bar{D}$, $|O \setminus \bar{D}| < \epsilon$ y la distancia de cualquier punto de J a $C(O)$ es menor que ϵ . Reticulando el plano con cuadrados de lado sufi-

cientemente pequeño menor que ϵ , cubriendo \bar{D} con aquellos que lo intersecan y conectando las poligonales que en número finito forman la frontera de la unión de esos cuadrados puede demostrarse que existe un tal O que además es simplemente conexo con frontera poligonal, (cf. [N], Cap. V, VI).

Supongamos dada una parametrización de J de manera que cuando t crezca de 0 a 1, $x(t)$ recorra J , $x(0) = x(1)$.

Dada una partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ de $[0,1]$, a ella corresponde una poligonal cerrada: $T(P) = \bigcup_{j=0}^{N-1} [a_j, a_{j+1}]$ donde $a_j = x(t_j) \in J$.

Tomando esa partición bastante fina podemos suponer que $T_0 = T(P)$ verifica:

- i) $T_0 \subset O$
- ii) $[T_0] > [J] - \epsilon$
- iii) cualquiera sea i , el arco que une a_i con a_{i+1} tiene longitud menor que $\inf(d, \epsilon/2)$, siendo d la distancia de J a $C(O)$.

Es fácil ver que i) es consecuencia de iii).

Diremos que T_1 es un refinamiento de T_0 sobre J si $T_1 = T(P_1)$ con $P_1 \supset P$. Como todo refinamiento de T_0 verifica ii) e iii) vale:

- iv) para todo refinamiento de T_0 vale i).

Mostraremos a continuación que hay un refinamiento de T_0 , T_1 , tal que

$T_1 = \bigcup_{i=0}^{M-1} [c_i, c_{i+1}]$ y todo lado de T_1 satisface la siguiente propiedad:

- v) si $[c_i, c_{i+1}]$ no está contenido en J entonces no es paralelo a ningún otro lado de T_1 .

Entonces T_1 satisfará i)-v). Con lo que en particular quedará probado que J es aproximable por poligonales que satisfacen esas cinco propiedades.

Admitamos la existencia de una tal poligonal T_1 por un momento. Si dos lados de T_1 se intersecaran en más de un punto serían paralelas por lo que necesariamente estarían contenidos en J . Pero entonces podrán tener en común a lo sumo un punto. Es decir, si agregamos a T_1 como vértices todas las intersecciones entre lados, obtenemos una *poligonal* T *cerrada en sentido estricto* que puede pensarse como un refinamiento de T_1 sobre sí misma.

Para demostrar la existencia de T_1 , y por lo tanto la de T , basta demostrar la siguiente proposición:

***) dado el lado $l = [a_m, a_{m+1}]$ de T_0 , no contenido enteramente en J , es posible encontrar puntos $s_i \in (t_m, t_{m+1})$, $t_m < s_1 < s_2 \dots < s_k < t_{m+1}$, tales que todo lado de

$$[a_m, x(s_1)] \cup [x(s_1), x(s_2)] \cup \dots \cup [x(s_k), a_{m+1}],$$

o está contenido en J , o no es paralelo a ningún segmento contenido en J ni a ningún segmento $[a_0, a_1], \dots, [a_{m-1}, a_m]$.

Demostración de **): si $l \cap J$ es un segmento con extremo a_m o a_{m+1} , el resultado sigue inmediatamente, (cf. Fig. 6). Si el arco X de J definido por los puntos $\{x(t); t_m < t < t_{m+1}\}$ contiene un segmento interior, digamos $[b_1, b_2] = \{x(t); t_m < w_1 \leq t \leq w_2 < t_m\}$, el resultado se reduce a los ya tratados.

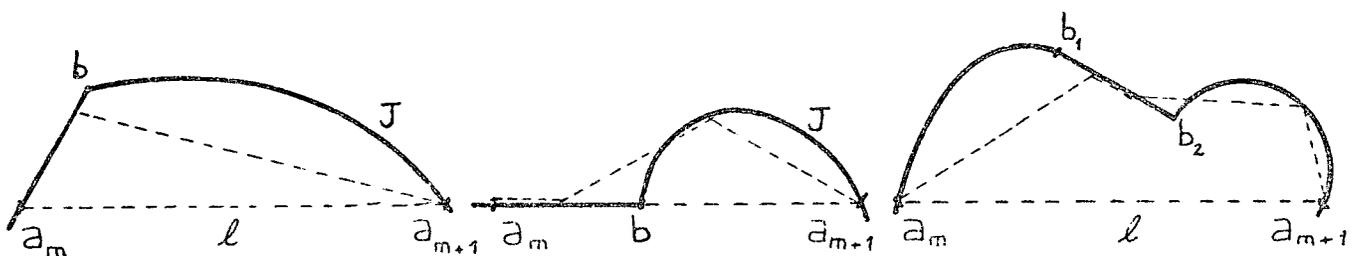


FIG. 6

Supongamos ahora que ese arco no contenga ningún segmento incluido en J . Sea $\alpha(t)$ la pendiente del segmento $[a_m, x(t)]$, y $\beta(t)$ la del segmento $[a_{m+1}, x(t)]$, $x(t) \in X$. $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son funciones continuas de $t \in (t_m, t_{m+1})$. Hay un número a lo sumo numerable de valores: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$, que corresponden a pendientes indeseables. Si el conjunto $\alpha^{-1}(\alpha_j)$ (o el conjunto $\beta^{-1}(\beta_i)$) contuviera un segmento esto implicaría que X contendría un segmento, contradicción. En consecuencia, $H = \cup \alpha^{-1}(\alpha_j) \cup \cup \beta^{-1}(\beta_i)$ es un conjunto de primera categoría. Luego, existe $t \in (t_m, t_{m+1}) \setminus H$ tal que $\beta(t)$ y $\alpha(t)$ corresponden a dos segmentos, $[a_m, x(t)]$ y $[x(t), a_{m+1}]$, que satisfacen los requerimientos de la proposición **), qed.

Sea V la vaina poligonal de T y $p > 0$. Entonces $V \subset O$. Si F es la unión de los dominios interiores de la pluripoligonal V , tenemos (cf. T.3 y (14)):

$$(15) \quad |F_{p-}| \leq |F| + [V]p + \pi p^2 \leq |O| + [T]p + \pi p^2,$$

y por lo tanto que:

$$(16) \quad |F_{p-}| \leq (|D| + \epsilon) + [J]p + \pi p^2,$$

pues $|J| = |\bar{D} \setminus D| = 0$.

Sea $q = p - 3\epsilon$, $0 < \epsilon < p/4$. Supongamos por un momento la siguiente relación que demostraremos enseguida:

$$(17) \quad D_{q-} \subset F_{p-}.$$

En ese caso,

$$(18) \quad |D_{q-}| \leq |D| + [J]p + \pi p^2 + \epsilon.$$

Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene de (18) la siguiente desigualdad:

$$(19) \quad |D_{p-}| \leq |D| + [J]p + \pi p^2.$$

Sea finalmente $r = \lim_{\downarrow} p_n$. Entonces $D_r = \lim_{\downarrow} D_{p_n-}$ y (13) sigue de (19).

Veamos ahora una demostración de (17). Sea

$$D' = \{x \in D: \text{dist}(x, J) > 3\epsilon\}.$$

Si $x \in D'$, el índice de x respecto de J es no nulo: $W_J(x) \neq 0$. De la construcción de T sigue entonces que si recorremos esta poligonal según la dirección impuesta por J a los vértices de T obtenemos:

$W_T(x) = W_J(x) \neq 0$. Pero si $x \in E$, la componente infinita de $C(T)$,

$W_T(x) = 0$. Esto prueba que $D' \cap E = \emptyset$. Por otra parte: $D' \cap T = \emptyset$, y

sigue que:

$$(20) \quad D' \subset F.$$

Si $D_{q^-} \not\subset F_{p^-}$ existiría $y \notin F_{p^-}$ pero tal que $y \in D_{q^-} \setminus D'$. En este caso:

$\text{dist}(y, \bar{F}) \geq p$. Sea $j \in J$. Entonces existe $m \in T$ tal que $\text{dist}(j, m) < \epsilon/2$.

Como $T \subset \bar{F}$ entonces $m \in \bar{F}$ y tenemos:

$$\text{dist}(y, j) \geq \text{dist}(y, m) - \text{dist}(j, m) \geq p - \epsilon/2.$$

Luego,

$$(21) \quad \text{dist}(y, J) > p - \epsilon.$$

Si $y \notin D$, $\text{dist}(y, J) = \text{dist}(y, D) < p - 3\epsilon$, contradicción. Si $y \in D$, $\text{dist}(y, J) < 3\epsilon$. De esto sigue: $p < 4\epsilon$, lo cual es imposible y por lo tanto (17) queda demostrada. QED.

REFERENCIAS

- [B] BING, R.H., *The Geometric Topology of 3-Manifolds*, A.M.S., Coll. Pub., vol. 40, (1983).
- [G] GUGGENHEIMER, H.W., *Differential Geometry*, Mc Graw-Hill Book Company Inc., (1963).
- [H] HAUSDORFF, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea Publishing Co., (1949).
- [N] NEWMAN, M.H.A., *Elements of the Topology of the Plane Sets of Points*, Cambridge Univ. Press, (1954).